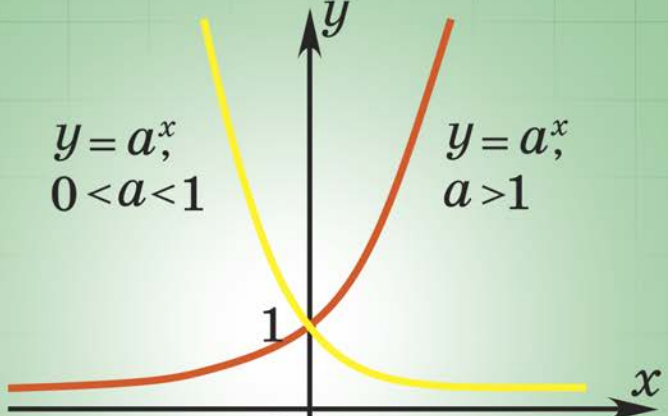
І. Г. Арэф'ева В. М. Пірутка

АЛГЕБРА

11

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$



$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Ступень з рацыянальным паказчыкам

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a > 0,\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1,\ m \in \boldsymbol{Z}$$

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$$

$$2^{0,6} = 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$5^{1,5} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$$

Уласцівасці ступені

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$5^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{2\frac{8}{9}} = 5^{\frac{1}{9}+2\frac{8}{9}} = 5^3 = 125$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$3^{-\frac{2}{7}} : 3^{-1\frac{2}{7}} = 3^{-\frac{2}{7}-\left(-1\frac{2}{7}\right)} = 3^{-\frac{2}{7}+1\frac{2}{7}} = 3^1 = 3$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(7^{1\frac{1}{3}}\right)^{1,5} = 7^{1\frac{1}{3}\cdot 1,5} = 7^2 = 49$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

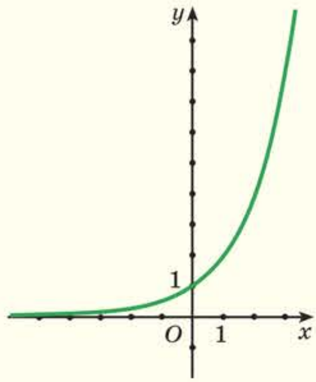
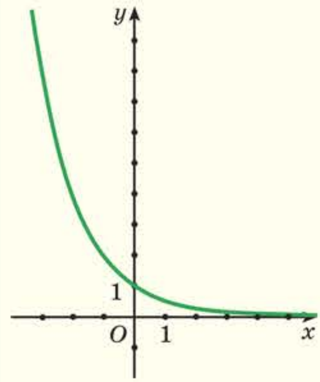
$$12,5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = (12,5 \cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{0,8^{\frac{1}{3}}}{100^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{0,8}{100}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,008^{\frac{1}{3}} = 0,2$$

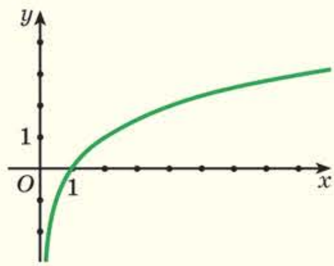
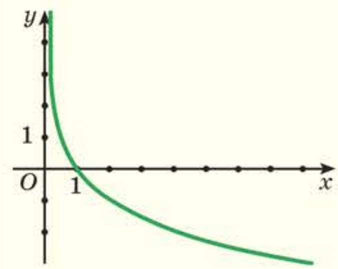
Паказальная функцыя і яе ўласцівасці

Функцыя выгляду $y = a^x$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, называецца паказальнай функцыяй.

	$a > 1$	$0 < a < 1$
Графік функцыі		
1. Абсяг вызначэння функцыі	$D = (-\infty;\ +\infty)$	
2. Мноства значэнняў функцыі	$E = (0;\ +\infty)$	
3. Нулі функцыі	Функцыя не мае нулёў. Графік функцыі не перасякае вось абсцыс	
4. Прамежкі знакапастаянства функцыі	$y > 0$ пры $x \in (-\infty;\ +\infty)$	
5. Прамежкі нарастання і спадання функцыі	Функцыя нарастае на $\boldsymbol{R}$	Функцыя спадае на $\boldsymbol{R}$
6. Каардынаты пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат	(0; 1)	

Лагарыфмічная функцыя і яе ўласцівасці

Функцыя выгляду $y = \log_a x$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, называецца лагарыфмічнай функцыяй.

	$a > 1$	$0 < a < 1$
Графік функцыі		
1. Абсяг вызначэння функцыі	$D = (0;\ +\infty)$	
2. Мноства значэнняў функцыі	$E = (-\infty;\ +\infty)$	
3. Нулі функцыі	$x = 1$ Графік функцыі перасякае вось абсцыс у пункце з каардынатамі (1; 0)	
4. Прамежкі знакапастаянства функцыі	$y > 0$ пры $x \in (1;\ +\infty)$; $y < 0$ пры $x \in (0;\ 1)$	$y > 0$ пры $x \in (0;\ 1)$; $y < 0$ пры $x \in (1;\ +\infty)$
5. Прамежкі нарастання і спадання функцыі	Функцыя нарастае на прамежку $(0;\ +\infty)$	Функцыя спадае на прамежку $(0;\ +\infty)$
6. Каардынаты пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат	Графік функцыі не перасякае вось ардынат	

Лагарыфмы і іх уласцівасці

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$

$\log_2 32 = 5$

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$

$\lg 10\,000 = 4$

$a^{\log_a b} = b$

$2^{\log_2 3} = 3$

$2{,}3^{\log_{2,3} 7} = 7$

$10^{\lg 5} = 5$

$\log_a a = 1$	$\log_{2,1} 2{,}1 = 1$
$\log_a 1 = 0$	$\log_7 1 = 0$
$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$	$\log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12}(4 \cdot 36) = \log_{12} 144 = 2$
$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$	$\lg 17 - \lg 170 = \lg \frac{17}{170} = \lg \frac{1}{10} = -1$
$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$	$\log_{13} \sqrt[3]{169} = \log_{13} 13^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_{13} 13 = \frac{2}{3}$
$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$	$\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 2 = \frac{1}{3}$
$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$	$\frac{\log_7 625}{\log_7 5} = \log_5 625 = 4$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 2 = 1$

І. Г. Арэф’ева В. М. Пірутка

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск «Народная асвета» 2020

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.144я721
А89

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:

кафедра вышэйшай алгебры і абароны інфармацыі механіка-матэматычнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта (доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры *В. В. Беняш-Крывец*);
настаўнік матэматыкі кваліфікацыйнай катэгорыі «настаўнік-метадыст» ліцэя Беларускага нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта *А. Я. Цыбулька*

ISBN 978-985-03-3166-3

Шаноўныя адзінаццацікласнікі!

Па гэтай кнізе вы працягнеце вывучэнне алгебры. Кніга складаецца з трох раздзелаў, кожны з якіх падзелены на параграфы, дзе вы сустрэнеце наступныя ўмоўныя абазначэнні:

— заданні на паўтарэнне для падрыхтоўкі да вывучэння новага матэрыялу;

— новы тэарэтычны матэрыял і метады яго прымянення;

— важныя правілы і сцверджанні;

— дадатковы матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў;

— асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязным апісаннем паслядоўнасці дзеянняў;

— вусныя пытанні і заданні;

— заданні для работы ў класе;

— заданні для дамашняй работы;

— заданні для паўтарэння;

* — заданні павышанай складанасці.

Кожны раздзел вучэбнага дапаможніка заканчваецца рубрыкай «Выніковая самаацэнка», у якой вы знойдзеце пералік патрабаванняў да засваення тэарэтычнага матэрыялу і практычныя заданні для самаправеркі.

Для абагульнення раней вывучанага матэрыялу прызначаны раздзел «Паўтарэнне курса алгебры», у якім размешчаны практыкаванні для выніковага паўтарэння і тэматычныя выніковыя тэсты.

У раздзеле «Матэматыка вакол нас» вы знойдзеце задачы на прымяненне матэматыкі ў розных галінах жыцця.

Для тых, хто вывучае матэматыку на павышаным узроўні, дадатковы тэарэтычны матэрыял і заданні па алгебры размешчаны ў вучэбным дапаможніку «Зборнік задач па алгебры, 11 кл.».

Жадаем поспехаў!

Раздзел 1

АБАГУЛЬНЕННЕ ПАНЯЦЦЯ СТУПЕНІ

§ 1. Ступень з рацыянальным паказчыкам і яе ўласцівасці. Ступень з рэчаісным паказчыкам

1.1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $(-1)^{-5} \cdot (-2)^{-2}$; б) $27^{-1} : \left(\frac{1}{3}\right)^{4}$; в) $\left(0{,}2^{-1}\right)^{3} - 0{,}11^{0}$.

1.2. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3}$; б) $4\sqrt[7]{128} - 2\sqrt[5]{32}$; в) $\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{243}\right) \cdot \sqrt[3]{3}$.

1.3. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці: $\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a}\right)$.

Пры вывучэнні фізікі, матэматыкі, хіміі вы сустракаліся з формуламі, якія змяшчаюць ступені некаторых велічынь. Напрыклад, $E_к = \frac{mv^2}{2}$, дзе $E_к$ — кінетычная энергія, m — маса цела, v — яго скорасць.

Колькасць атамаў радыеактыўнага рэчыва $N(t)$, што не распаліся да моманту часу t, можна вылічыць па формуле $N(t) = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$, дзе N_0 — першапачатковая колькасць радыеактыўных ядзер, T — перыяд паўраспаду рэчыва. Відавочна, што пры некаторых значэннях T і t паказчык ступені $2^{-\frac{t}{T}}$ можа аказацца дробавым.

У 7-м класе вы вывучылі паняцце ступені ліку з цэлым паказчыкам.

Пры пашырэнні лікавага мноства, на якім разглядаецца ступень, азначэнне ступені даецца такім чынам, каб уласцівасці, разгледжаныя раней, захоўваліся. Дадзім азначэнне ступені ліку з дробавым паказчыкам.

Разгледзім ступень дадатнага ліку a з паказчыкам $\frac{1}{n}$, дзе n — натуральны лік, большы за 1, г. зн. $a^{\frac{1}{n}}$. Для ступені з гэтым паказчыкам справядлівая ўласцівасць узвядзення ступені ў ступень: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$.

З другога боку, неадмоўны лік, n-я ступень якога роўна a, называецца арыфметычным коранем n-й ступені з ліку a, г. зн. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Такім чынам, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Разгледзім ступень дадатнага ліку a з паказчыкам $\frac{m}{n}$, дзе m — цэлы лік, а n — натуральны, большы за 1, г. зн. $a^{\frac{m}{n}}$.

Запішам $a^{\frac{m}{n}}$ у наступным выглядзе: $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. Такім чынам, атрымалі, што $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Азначэнне. Ступенню ліку $a > 0$ **з рацыянальным паказчыкам** $\frac{m}{n}$, дзе m — цэлы лік, а n — натуральны ($n > 1$), называецца лік $\sqrt[n]{a^m}$, г. зн. корань n-й ступені з a ў ступені m:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Напрыклад, $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$; $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$; $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; $0{,}2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{0{,}2^{-2}} = \sqrt[7]{25}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $27^{\frac{1}{3}}$; б) $64^{\frac{1}{2}}$; в) $8^{\frac{2}{3}}$; г) $16^{-\frac{1}{4}}$; д) $32^{-\frac{2}{5}}$.

Рашэнне. Выкарыстаем азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$;

б) $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$;

в) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^2} = \sqrt[3]{\left(2^2\right)^3} = \sqrt[3]{4^3} = 4$;

г) $16^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^{-1}} = \sqrt[4]{\left(2^{-1}\right)^4} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$;

д) $32^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^{-2}} = \sqrt[5]{\left(2^5\right)^{-2}} = \sqrt[5]{\left(2^{-2}\right)^5} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^5} = \frac{1}{4}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Уласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам

Для ступені з рацыянальным паказчыкам справядлівыя ўсе ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам.

Дакажам адну з уласцівасцей ступені з рацыянальным паказчыкам.

Няхай $a > 0$. Пакажам, што $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$, дзе m, p — цэлыя лікі, n, q — натуральныя, большыя за 1.

Па азначэнні ступені з рацыянальным паказчыкам:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Па ўласцівасці кораня:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}, \quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

Па ўласцівасці каранёў:

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Па азначэнні ступені з рацыянальным паказчыкам:

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Такім чынам, $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Для $a > 0$,
рацыянальных m і n:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}.$$

Для $a > 0$ і $b > 0$,
рацыянальнага n:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n.$$

Ступень з ірацыянальным паказчыкам

Ступень з ірацыянальным паказчыкам вызначаецца праз дзесятковыя набліжэнні паказчыка ступені.

Напрыклад, для вылічэння значэння ступені $2^{\sqrt{3}}$ разгледзім няроўнасці:

$$2 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2, \text{ паколькі } 1 < \sqrt{3} < 2;$$

$$2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}, \text{ паколькі } 1,7 < \sqrt{3} < 1,8;$$

$$2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}, \text{ паколькі } 1,73 < \sqrt{3} < 1,74;$$

$$2^{1,732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733}, \text{ паколькі } 1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \text{ і г. д.}$$

З дапамогай калькулятара можна прыбліжана вылічыць значэнні ступеней з рацыянальным паказчыкам: $2^{1,732} \approx 3,3218801$, $2^{1,733} \approx 3,3241834$.

Атрымліваем прыбліжанае значэнне ступені: $2^{\sqrt{3}} \approx 3,32$.

Больш дакладнае значэнне ступені з ірацыянальным паказчыкам можна атрымаць, калі прадоўжыць працэс ацэньвання праз дзесятковыя набліжэнні, павялічваючы дакладнасць набліжэння паказчыка.

Для любога рэчаіснага $a > 0$ і любога рэчаіснага ліку α вызначана паняцце ступені a^α.

Для ступені з рэчаісным паказчыкам справядлівыя ўсе ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам.

Для $a = 0$ вызначана ступень з дадатным рацыянальным паказчыкам: $0^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{0^m} = 0$, дзе m і n — натуральныя лікі, $n > 1$.

Напрыклад, $0^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^2} = 0$.

Прыклад 2. Спрасціце выраз:

а) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $a^{\sqrt{7}} \cdot a^{3-\sqrt{7}}$; в) $a^{\sqrt{3}-1} : a^{\sqrt{3}}$.

Рашэнне. Выкарыстаем уласцівасці ступені:

а) $\left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = a^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = a^5$;

б) $a^{\sqrt{7}} \cdot a^{3-\sqrt{7}} = a^{\sqrt{7}+3-\sqrt{7}} = a^3$;

в) $a^{\sqrt{3}-1} : a^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Запішыце ў выглядзе кораня ступень з рацыянальным паказчыкам:

$3^{\frac{1}{6}}$; $2^{\frac{3}{4}}$; $5^{\frac{1}{2}}$; $10^{\frac{7}{2}}$; $2^{-\frac{3}{5}}$; $4^{-0,3}$; $a^{\frac{2}{5}}$; $(x-y)^{\frac{3}{7}}$.

Рашэнне.

$3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$;

$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$;

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$;

$10^{\frac{7}{2}} = \sqrt{10^7} = \sqrt{10\,000\,000}$;

$2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$;

$4^{-0,3} = 4^{-\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{4^{-3}} = \sqrt[10]{\dfrac{1}{64}}$;

$a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$;

$(x-y)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{(x-y)^3}$.

2. Запішыце корань $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[7]{2^3}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{5^3}$; $\sqrt{3^{-3}}$; $\sqrt[5]{a^4}$; $\sqrt[3]{m+n}$ у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам.

Рашэнне.

$\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[7]{2^3} = 2^{\frac{3}{7}}$; $\sqrt{11} = 11^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$;

$\sqrt{3^{-3}} = 3^{-\frac{3}{2}}$; $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; $\sqrt[3]{m+n} = (m+n)^{\frac{1}{3}}$.

3. Вылічыце значэнне выразу, выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам: $8^{\frac{1}{3}}$; $8^{-\frac{1}{3}}$; $16^{\frac{3}{4}}$; $16^{-\frac{3}{4}}$.

Рашэнне.

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2;$ $\quad 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\left(2^{-1}\right)^3} = \frac{1}{2};$

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^3} = \sqrt[4]{\left(2^3\right)^4} = 8;$ $\quad 16^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^{-3}} = \sqrt[4]{\left(2^{-3}\right)^4} = \frac{1}{8}.$

4. Запішыце выраз у выглядзе ступені:

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}}$; б) $a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{4}{9}}$; в) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{0,3}$; г) $\left(a^{3,5}\right)^{\frac{4}{7}}$.

Рашэнне.

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{10}{15}+\frac{12}{15}} = a^{\frac{22}{15}};$ б) $a^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{4}{9}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}} = a^{\frac{3}{9}-\frac{4}{9}} = a^{-\frac{1}{9}};$

в) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{0,3} = a^{\frac{1}{3}\cdot 0,3} = a^{0,1};$ г) $\left(a^{3,5}\right)^{\frac{4}{7}} = a^{3,5\cdot\frac{4}{7}} = a^{\frac{7}{2}\cdot\frac{4}{7}} = a^2.$

5. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(12,3^{\frac{1}{3}}\right)^3$; б) $7^{-\frac{1}{3}} : 49^{-\frac{2}{3}}$;

в) $4^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{9}}$; г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-0,5}$.

Рашэнне.

а) $\left(12,3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 12,3^{\frac{1}{3}\cdot 3} = 12,3^1 = 12,3;$

б) $7^{-\frac{1}{3}} : 49^{-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} : \left(7^2\right)^{-\frac{2}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}} : 7^{-\frac{4}{3}} = 7^{-\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)} = 7^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 7^1 = 7;$

в) $4^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{7}{9}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot \left(2^{-1}\right)^{-\frac{7}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{4}{9}} \cdot 2^{\frac{7}{9}} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{7}{9}} = 2^1 = 2;$

г) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-0,5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-0,5} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-0,25} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{0,5} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-0,5} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{0,5} =$

$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-0,5+0,5} = \left(\frac{6}{5}\right)^0 = 1.$

6. Спрасціце выраз:

а) $\left(2a^{0,3}\right)^3 + 2a^{0,9}$; б) $4x^{3,2} \cdot 1,5x^{-1,2}$.

Рашэнне.

а) $\left(2a^{0,3}\right)^3 + 2a^{0,9} = 2^3 \cdot \left(a^{0,3}\right)^3 + 2a^{0,9} = 8a^{0,9} + 2a^{0,9} = 10a^{0,9}$;

б) $4x^{3,2} \cdot 1,5x^{-1,2} = 4 \cdot 1,5 \cdot x^{3,2} \cdot x^{-1,2} = 6 \cdot x^{3,2+(-1,2)} = 6x^2$.

7. Запішыце ў выглядзе ступені з асновай a выраз:

а) $a^{2,4} : \sqrt[5]{a^2}$; б) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot \sqrt[8]{a}$.

Рашэнне.

а) $a^{2,4} : \sqrt[5]{a^2} = a^{2,4} : a^{\frac{2}{5}} = a^{2,4} : a^{0,4} = a^{2,4-0,4} = a^2$;

б) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3 \cdot \sqrt[8]{a} = a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{6}{8}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{7}{8}}$.

8. Запішыце ў выглядзе ступені з паказчыкам $\frac{1}{2}$ і ў выглядзе ступені з паказчыкам 2 лік: а) 1; б) 3; в) 0,8; г) 2,5.

Рашэнне.

а) $1 = 1^{\frac{1}{2}}$; $1 = 1^2$;

б) $3 = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$; $3 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

в) $0,8 = (0,8^2)^{\frac{1}{2}} = 0,64^{\frac{1}{2}}$; $0,8 = \left(0,8^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

г) $2,5 = (2,5^2)^{\frac{1}{2}} = 6,25^{\frac{1}{2}}$; $2,5 = \left(2,5^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

9. Запішыце ў выглядзе ступені з паказчыкам 2 выраз:

а) a; б) $a^{\frac{1}{2}}$; в) $a^{\frac{1}{3}}$; г) $a^{\frac{2}{5}}$.

Рашэнне.

а) $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2$; в) $a^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2$; г) $a^{\frac{2}{5}} = \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^2$.

10. Раскладзіце на множнікі выраз:

а) $a - a^{\frac{1}{2}}$; б) $2b + 3b^{\frac{1}{4}}$; в) $b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}}$.

Рашэнне.

а) $a - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(a^{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)$;

б) $2b + 3b^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{1}{4}}\left(2b^{1-\frac{1}{4}} + 3\right) = b^{\frac{1}{4}}\left(2b^{\frac{3}{4}} + 3\right)$;

в) $b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{3}}\left(1 + b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right) = b^{\frac{1}{3}}\left(1 + b^{\frac{1}{6}}\right)$.

11. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; б) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{0,25}}$.

Рашэнне.

а) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{6}} + 1\right)}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{6}} + 1$;

б) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{0,25}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^2}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{4}}$.

12. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{a^2 - a^{\frac{3}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{0,25}}{a^{-0,75}}$; б) $\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot xy^{-1}$.

Рашэнне.

а) $\dfrac{a^2 - a^{\frac{3}{2}}}{a - a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{0,25}}{a^{-0,75}} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)} - a^{0,25-(-0,75)} = \dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - a = a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} - a = a - a = 0$;

б) $\left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot xy^{-1} = \left(\dfrac{x^2 + y^2}{x\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} - \dfrac{x + y}{y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot xy^{-1} =$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x(x+y)}{x\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot xy^{-1} = \frac{y^2 - xy}{x\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} \cdot \frac{x}{y} = \frac{y \cdot (y-x) \cdot x}{x \cdot \left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot y} =$$

$$= \frac{\left(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} = y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}.$$

13. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $8^{\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}}$; в)* $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$; г)* $\dfrac{\left(\sqrt{343}\right)^{\sqrt{20}}}{7^{\sqrt{45}-2}}$.

Рашэнне.

а) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2^{(\sqrt{2})^2} = 2^2 = 4$;

б) $8^{\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}} = \left(2^3\right)^{\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}} : 2^{1+3\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}-\left(1+3\sqrt{2}\right)} =$

$= 2^{3\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$;

в)* $\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = \dfrac{6^3 \cdot 6^{\sqrt{5}}}{2^2 \cdot 2^{\sqrt{5}} \cdot 3^1 \cdot 3^{\sqrt{5}}} = \dfrac{6^3 \cdot 6^{\sqrt{5}}}{2^2 \cdot 3^1 \cdot (2\cdot 3)^{\sqrt{5}}} = \dfrac{6^3 \cdot 6^{\sqrt{5}}}{2^2 \cdot 3^1 \cdot 6^{\sqrt{5}}} = \dfrac{6^3}{4\cdot 3} = 18$;

г)* $\dfrac{\left(\sqrt{343}\right)^{\sqrt{20}}}{7^{\sqrt{45}-2}} = \dfrac{\left(\sqrt{7^3}\right)^{2\sqrt{5}}}{7^{3\sqrt{5}-2}} = \dfrac{\left(7^{\frac{3}{2}}\right)^{2\sqrt{5}}}{7^{3\sqrt{5}-2}} = \dfrac{7^{3\sqrt{5}}}{7^{3\sqrt{5}-2}} = 7^{3\sqrt{5}-\left(3\sqrt{5}-2\right)} = 7^2 = 49.$

14. Спрасціце выраз $\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}} : a^{2\sqrt{3}-1}$.

Рашэнне.

$\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}} : a^{2\sqrt{3}-1} = a^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}-\left(2\sqrt{3}-1\right)} = a^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} - a^{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1} = a^3 - a.$

15. Скараціце дроб $\dfrac{a^{2\sqrt{5}} - b^{2\sqrt{5}}}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}}$.

Рашэнне.

$$\frac{a^{2\sqrt{5}} - b^{2\sqrt{5}}}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(b^{\sqrt{5}}\right)^2}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}\right)\left(a^{\sqrt{5}} + b^{\sqrt{5}}\right)}{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{5}}} = a^{\sqrt{5}} + b^{\sqrt{5}}.$$

1. Выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам, выберыце правільную роўнасць:

а) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt{5^3}$; б) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$; в) $5^{\frac{2}{3}} = 5 \cdot \frac{2}{3}$; г) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{5}$.

2. Запішыце выраз a ў выглядзе ступені з паказчыкам:

а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 3; г) $\frac{1}{3}$.

1.4. Выкарыстайце азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам і запішыце ў выглядзе кораня выраз:

а) $2^{\frac{5}{6}}$; б) $5^{\frac{1}{4}}$; в) $3^{\frac{1}{2}}$; г) $7^{-\frac{4}{9}}$;

д) $10^{-\frac{1}{5}}$; е) $3^{-0,6}$; ж) $a^{\frac{2}{5}}$; з) $b^{\frac{1}{7}}$;

і) $c^{-0,75}$; к) $d^{-0,2}$; л) $(2a+b)^{1,2}$; м) $(m-3n)^{-\frac{3}{5}}$.

1.5. Запішыце корань у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $\sqrt[10]{2}$; б) $\sqrt[5]{3^4}$; в) $\sqrt{13}$; г) $\sqrt{7^5}$;

д) $\sqrt[3]{5^{-2}}$; е) $\sqrt{11^{-3}}$; ж) $\sqrt[5]{d}$; з) $\sqrt[7]{a^3}$;

і) $\sqrt[8]{b^{-5}}$; к) $\sqrt{m}$; л) $\sqrt{a-b}$; м) $\sqrt[7]{(x+6y)^{-3}}$.

1.6. Вылічыце значэнне выразу, выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $64^{\frac{1}{3}}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $32^{\frac{2}{5}}$; г) $125^{-\frac{2}{3}}$;

д) $64^{\frac{2}{3}}$; е) $625^{-\frac{3}{4}}$; ж) $0,09^{\frac{1}{2}}$; з) $0,001^{-\frac{1}{3}}$;

і) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$; к) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$; л) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$; м) $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-0,4}$.

1.7. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $32^{\frac{3}{5}}$ і $27^{\frac{2}{3}}$; б) $0,125^{-\frac{1}{3}}$ і $0,000064^{-\frac{1}{6}}$.

1.8. Запішыце выраз у выглядзе ступені:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$; б) $x^{0,25} \cdot x^{\frac{1}{7}} \cdot x^{-\frac{1}{14}}$; в) $c^{\frac{1}{6}} \cdot c^{-\frac{5}{9}} : c^{-\frac{3}{4}}$;

г) $\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{0,7} \cdot y$; д) $\left(b^{-0,3}\right)^{1\frac{2}{3}} : b^2$; е) $b^{-2,5} : b^{3,5} \cdot \left(b^{\frac{1}{4}}\right)^{-8}$.

1.9. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу:

а) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{4}{3}}$; б) $5 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$; в) $\left(9^{0,7}\right)^5 \cdot 27^{-1\frac{1}{3}}$;

г) $3^{-\frac{1}{4}} : 3^{-\frac{5}{4}}$; д) $5^{-\frac{1}{7}} : 25^{-\frac{4}{7}}$; е) $\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{9}{4}} : 7^{-0,75}$;

ж) $\left(\frac{5}{7}\right)^{3,2} \cdot 1,4^{3,2}$; з) $\left(4^{-\frac{1}{5}}\right)^{-30} : 0,2^6$; і) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$;

к) $\left(\frac{0,0625}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$; л) $\left(\frac{64}{0,027}\right)^{-\frac{2}{3}}$; м) $\left(\frac{32}{0,00243}\right)^{-0,6}$.

1.10. Спрасціце выраз:

а) $m^{-4,3} \cdot 5m^{1,3}$; б) $-2a^{0,7} : \left(8a^{-2,3}\right)$; в) $3b^{\frac{3}{8}} + \left(2b^{\frac{1}{8}}\right)^3$.

1.11. Выканайце дзеянні:

а) $b^{3,6} : \sqrt[5]{b^3}$; б) $\left(3\sqrt[5]{b^2}\right)^2 + 3b^{0,8}$; в) $b^{2,5} \cdot \left(-2\sqrt{b}\right)^5$.

1.12. Вылічыце значэнне выразу:

а) $8^{\frac{4}{3}} \cdot 0,125^{-\frac{2}{3}}$; б) $81^{\frac{3}{4}} : 0,00001^{\frac{4}{5}}$;

в) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-0,5} - 4 \cdot 27^{\frac{2}{3}}$; г) $-5 \cdot 81^{-0,75} + 1000^{\frac{4}{3}}$;

д) $0,008^{-\frac{1}{3}} - 0,064^{-\frac{2}{3}} + 0,125^{-\frac{4}{3}}$; е) $12^{\frac{5}{6}} : 2^{1\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}$.

1.13. Спрасціце выраз:

а) $(16x)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{8}}\right)^{-\frac{1}{3}}$; б) $(1000x)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(0,01x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

1.14. Спрасціце выраз $\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{9}}}\right)^{-9}\right)^{\frac{1}{4}}$ і знайдзіце яго значэнне пры $a = 0,25$.

1.15. Вызначце парадак дзеянняў і вылічыце:

а) $100^{0,5}+0,00032^{-0,8}-0,5^{-4}$;

б) $8^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{9}\right)^{1,5}$;

в) $\dfrac{64^{-\frac{2}{3}}+16^{-\frac{3}{2}}}{3\cdot 8^{-\frac{1}{3}}-256^{-\frac{1}{2}}}$;

г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+810\,000^{0,25}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}+(0,63)^{0}$.

1.16. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\left(a^{-\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[7]{a^{5}}\cdot b^{-0,2}}{\left(a^{-0,5}\cdot b^{\frac{3}{5}}\right)^{-2}}$; б) $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{a}\cdot b^{2}}:\dfrac{a^{-\frac{7}{4}}b^{\frac{5}{2}}}{b^{-1,5}}\right)^{3}$.

1.17. Раскладзіце на множнікі выраз:

а) $a+a^{\frac{1}{2}}$; б) $b-5b^{\frac{1}{3}}$; в) $x^{\frac{2}{3}}-x$;

г) $a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}$; д) $7m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}$; е) $2n^{\frac{5}{6}}-5n^{\frac{1}{3}}$.

1.18. Раскладзіце на множнікі лічнік і назоўнік дробу, калі гэта неабходна, і скараціце дроб:

а) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$; б) $\dfrac{a^{0,25}}{a-a^{\frac{1}{4}}}$; в) $\dfrac{x+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{y+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$; г) $\dfrac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$.

1.19. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{5x^{\frac{4}{3}}}$ пры $x=4$; б) $\dfrac{7\sqrt[5]{a^{4}}}{a^{2,8}-3a^{-\frac{1}{5}}}$ пры $a=2$.

1.20. Скараціце дроб $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}b^{-1}-a}$ і вылічыце яго значэнне пры $a=0,25$ і $b=\frac{1}{3}$.

1.21. Выкарыстайце формулы скарочанага множання і спрасціце выраз:

а) $\left(2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(2a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)+b$; б) $\left(a^{\frac{1}{4}}+3a^{\frac{3}{2}}\right)^2-\sqrt{a}-9a^3$.

1.22. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{a-36}{a^{\frac{1}{2}}+6}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{14}}-b^{\frac{1}{14}}}{a^{\frac{1}{7}}-b^{\frac{1}{7}}}$; в) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$;

г) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-25}{a^{\frac{1}{3}}+10a^{\frac{1}{6}}+25}$; д) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}{a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$; е) $\dfrac{16b^{\frac{1}{8}}-a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}-8a^{\frac{1}{16}}b^{\frac{1}{16}}+16b^{\frac{1}{8}}}$.

1.23. Выберыце рацыянальны спосаб і знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{9x-y}{3x+x^{0,5}y^{0,5}}$ пры $x=100$, $y=576$.

1.24. Знайдзіце значэнне выразу $\left(a^{-\frac{1}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{1}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}\right)$ пры $a=10$.

1.25. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{3x^{\frac{1}{2}}}{3-x^{\frac{1}{2}}}+3\right)\left(9-6x^{\frac{1}{2}}+x\right)$.

1.26. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{a^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{1}{3}}}{a-1}\right)^{-1}-a^{\frac{1}{6}}$ і знайдзіце яго значэнне пры $a=64$.

1.27. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^{\frac{3}{2}}+ab^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$.

1.28. Выканайце дзеянні, выкарыстаўшы ўласцівасці ступені з рэчаісным паказчыкам:

а) $a^{\sqrt{2}}\cdot a^{1-\sqrt{2}}$; б) $x^{2\sqrt{3}}:x^{\sqrt{12}}$; в) $\left(c^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; г) $a^{2+\sqrt{2}}:a^{1+\sqrt{2}}$.

1.29. Вылічыце значэнне выразу:

а) $\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $\left(7^{-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; в) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$;

г) $3^{2+\sqrt{3}}\cdot 3^{2-\sqrt{3}}$; д) $27^{\sqrt{5}}:3^{3\sqrt{5}}$; е) $2^{3-2\sqrt{7}}\cdot 4^{1+\sqrt{7}}$;

ж) $9^{\sqrt{3}}:3^{1+2\sqrt{3}}$; з) $\left(5^{4-\sqrt{15}}\right)^{4+\sqrt{15}}$; і) $\left(3^{1+\sqrt{5}}\right)^{1-\sqrt{5}}$.

1.30. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-49}{a^{\sqrt{2}}-7}$; б) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}+b^{\sqrt{7}}}{a^{2\sqrt{5}}-b^{2\sqrt{7}}}$; в) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-2a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+a^{2\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{2}}-a^{2\sqrt{3}}}$.

1.31. Параўнайце лікі:

а) $2^{\sqrt{3}}$ і 4; б) $3^{\sqrt{10}}$ і 27; в) 125 і $5^{2\sqrt{2}}$.

1.32*. Вызначце, ці з'яўляецца значэнне выразу натуральным лікам:

а) $2^{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}:4^{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{\left(\sqrt{125}\right)^{\sqrt{28}}}{5^{\sqrt{63}-2}}$; в) $3^{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}:3^{\sqrt{3}}$.

1.33*. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{15^{4+\sqrt{7}}}{3^{3+\sqrt{7}}\cdot 5^{2+\sqrt{7}}}$.

1.34*. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{7}}{2}}-b^{\frac{\sqrt{7}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{7}}{4}}\cdot b+b^{\frac{\sqrt{7}}{4}+1}}+\frac{b^{\frac{\sqrt{7}}{2}-1}}{b^{0,25\sqrt{7}}+a^{0,25\sqrt{7}}}\right):\left(\frac{a^{\frac{\sqrt{7}}{4}}+b^{\frac{\sqrt{7}}{4}}}{a^{-0,5\sqrt{7}}}\right)^{-1}.$$

1.35. Запішыце ў выглядзе кораня выраз, выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $3^{\frac{2}{7}}$; б) $6^{\frac{1}{3}}$; в) $7^{\frac{1}{2}}$; г) $5^{-\frac{2}{3}}$;

д) $10^{-\frac{1}{6}}$; е) $2^{-0,4}$; ж) $a^{\frac{3}{5}}$; з) $b^{\frac{1}{8}}$;

і) $c^{-\frac{5}{9}}$; к) $d^{-0,1}$; л) $(x+5y)^{\frac{4}{7}}$; м) $(5a-b)^{-0,3}$.

1.36. Запішыце корань у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $\sqrt[6]{2^5}$; б) $\sqrt{5^3}$; в) $\sqrt[4]{3^{-3}}$; г) $\sqrt{7^{-5}}$;

д) $\sqrt[9]{a^4}$; е) $\sqrt[10]{b^{-7}}$; ж) $\sqrt[5]{(7a+b)^4}$; з) $\sqrt{(m+9n)^{-1}}$.

1.37. Вылічыце значэнне выразу, выкарыстаўшы азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам:

а) $125^{\frac{1}{3}}$; б) $25^{-\frac{1}{2}}$; в) $32^{\frac{3}{5}}$; г) $81^{-\frac{3}{4}}$; д) $27^{\frac{2}{3}}$;

е) $125^{-\frac{2}{3}}$; ж) $0{,}008^{\frac{1}{3}}$; з) $0{,}0001^{-\frac{3}{4}}$; і) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$; к) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1.38. Запішыце выраз у выглядзе ступені:

а) $x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{5}}$; б) $a^{0,5} \cdot a^{-\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$; в) $c^{0,7} \cdot c^{-0,2} : c^{-\frac{4}{15}}$;

г) $b^2 \cdot \left(b^{\frac{4}{9}}\right)^{1,8}$; д) $\left(y^{-0,6}\right)^{1\frac{1}{6}} : y$; е) $m \cdot \left(m^{4,5}\right)^{\frac{2}{9}}$.

1.39. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу:

а) $5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{-1\frac{1}{6}}$; б) $2 \cdot \left(4^2\right)^{-0,25}$; в) $10^{-\frac{4}{5}} : 10^{-2,8}$;

г) $\left(2^{1,5}\right)^{-2} : 16^{-1,25}$; д) $5^{-4,8} : \left(5^{-1,4}\right)^2$; е) $1{,}8^{6,7} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{6,7}$;

ж) $12^5 : \left(6^{-\frac{1}{3}}\right)^{-15}$; з) $(81 \cdot 0{,}0016)^{\frac{1}{4}}$; і) $(100\,000 : 243)^{\frac{2}{5}}$.

1.40. Спрасціце выраз:

а) $a^{-5,7} \cdot 6a^{3,7}$; б) $6b^{1,9} : \left(18b^{-2,1}\right)$; в) $(3b^{0,4})^2 + 3b^{0,8}$.

1.41. Выканайце дзеянні:

а) $d^{2,2} \cdot \sqrt[5]{d^4}$; б) $\left(2\sqrt[3]{d}\right)^2 - 2d^{\frac{2}{3}}$; в) $\left(-2\sqrt[4]{d}\right)^3 + 8d^{\frac{3}{4}}$.

1.42. Вылічыце значэнне выразу:

а) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 0{,}064^{-\frac{2}{3}}$; б) $8^{\frac{5}{3}} : 0{,}0001^{-\frac{1}{4}}$;

в) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-0,5} + 6 \cdot 32^{\frac{3}{5}}$; г) $3^{\frac{5}{6}} : 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 18^{-\frac{5}{12}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$.

1.43. Спрасціце выраз $\left(0{,}36a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{125}a\right)^{-\frac{1}{3}}$.

1.44. Вызначце парадак дзеянняў і вылічыце:

а) $100^{-\frac{1}{2}}+(0{,}001)^{-\frac{2}{3}}$; б) $\dfrac{25^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{2}{3}}}{0{,}0081^{-\frac{3}{4}}}$; в) $64^{\frac{2}{3}}-\dfrac{25^{0,5}}{0{,}0016^{0,25}}+13^0-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$.

1.45. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\left(a^{-\frac{3}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot a\cdot b^{-1,5}}{\left(a^{0,25}\cdot\sqrt[3]{b^{-1}}\right)^{-3}}$; б) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{5}{6}}}:\dfrac{\sqrt{a}\cdot b^{-\frac{4}{3}}}{b^{\frac{1}{4}}}\right)^3$.

1.46. Раскладзіце на множнікі выраз:

а) $x^{\frac{1}{2}}-x$; б) $m+m^{\frac{3}{4}}$; в) $b^{\frac{1}{4}}-3b^{\frac{1}{2}}$; г) $7a^{\frac{1}{6}}-4a^{\frac{2}{3}}$.

1.47. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{b^{\frac{1}{4}}+b}{b^{\frac{1}{4}}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{a-a^{\frac{7}{8}}b}{b-a^{\frac{1}{8}}}$.

1.48. Скараціце дроб $\dfrac{b^{-3}-a^{\frac{1}{2}}b^{-2}}{ab^{-1}-a^{\frac{1}{2}}b^{-2}}$ і знайдзіце яго значэнне пры $a=0{,}25$ і $b=0{,}2$.

1.49. Спрасціце выраз, выкарыстаўшы формулы скарочанага множання:

а) $\left(a^{\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+3b^{\frac{1}{2}}\right)-a$; б) $\left(3a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{3}{4}}\right)^2-6a$.

1.50. Раскладзіце на множнікі лічнік і назоўнік дробу і скараціце дроб:

а) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-7}{b-49}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}}{ab^{\frac{7}{8}}+a^{\frac{7}{8}}b}$; в) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}-9b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-6a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}+9b^{\frac{1}{6}}}$.

1.51. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{x}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}-\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$.

1.52. Спрасціце выраз $\dfrac{\sqrt{a}-16\sqrt{b}}{\left(a^{\frac{1}{8}}+2b^{\frac{1}{8}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{8}}-2b^{\frac{1}{8}}\right)^2}$ і знайдзіце яго значэнне пры $a=\dfrac{1}{16}$, $b=81$.

1.53. Выканайце дзеянні са ступенню з рэчаісным паказчыкам:

а) $a^{2+\sqrt{2}} : a^{\sqrt{2}}$; б) $x^{2\sqrt{2}} \cdot x^{-\sqrt{8}}$; в) $(b^{\sqrt{5}})^{2\sqrt{5}}$.

1.54. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы ўласцівасці ступені з рэчаісным паказчыкам:

а) $(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; б) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}}$; в) $5^{1+\sqrt{3}} \cdot 5^{2-\sqrt{3}}$;

г) $16^{\sqrt{11}} : 2^{4\sqrt{11}}$; д) $\left(3^{\sqrt{11}-3}\right)^{\sqrt{11}+3}$; е) $\left(\left(\sqrt{10}\right)^{3-\sqrt{13}}\right)^{3+\sqrt{13}}$.

1.55. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{b^{2\sqrt{5}} - c^{2\sqrt{7}}}{b^{\sqrt{5}} - c^{\sqrt{7}}}$; б) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}} + 2a^{\sqrt{3}}b^{\sqrt{2}} + b^{2\sqrt{2}}}{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}$.

1.56. Параўнайце лікі $5^{\sqrt{3}}$ і 25.

1.57. Знайдзіце значэнне выразу $3^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} : \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}}$.

1.58*. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{n^{\frac{\sqrt{2}}{4}} - m^{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{m^{-0,5\sqrt{2}}}\right)^{-1} : \left(\frac{m^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - n^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{n \cdot m^{\frac{\sqrt{2}}{4}} - n^{\frac{\sqrt{2}}{4}+1}} - \frac{n^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}}{n^{0,25\sqrt{2}} - m^{0,25\sqrt{2}}}\right).$$

1.59. Выберыце ўсе правільныя сцверджанні:

а) выраз $\sqrt[4]{a}$ мае сэнс пры $a \geqslant 0$;

б) выраз $\sqrt[7]{a}$ мае сэнс пры $a \in \boldsymbol{R}$;

в) выраз $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$ мае сэнс пры $a \neq 0$;

г) выраз $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a}}$ мае сэнс пры $a \neq 0$.

1.60. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $f(x) = \sqrt[6]{x-8} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{10-x}}$.

1.61. Выразіце ў радыяннай меры велічыні вуглоў 72°; 140°.

1.62. Ці можна вызначыць знак выразу $\operatorname{tg}\alpha$, калі вядома, што α — вугал чацвёртай чвэрці?

Вызначце знак выразу:

а) $\frac{\cos 200^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ}{\sin 400^\circ}$; б) $\cos 2 \cdot \operatorname{tg} 4$.

1.63. Выкарыстайце ўласцівасці кораня n-й ступені і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{125 \cdot 216}$; б) $\frac{\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{5}}$;

в) $\left(-2\sqrt[5]{5}\right)^5$; г) $\sqrt[6]{12-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{12+4\sqrt{5}}$.

1.64. Рыхтуючыся да новага навучальнага года, адзінаццацікласнік планаваў набыць некаторую колькасць сшыткаў на пэўную суму. Прыйшоўшы ў краму, ён даведаўся, што праводзіцца сезонная акцыя і цана на сшыткі зніжана на 20 %. На колькі працэнтаў больш можна купіць сшыткаў па зніжанай цане на вылучаную для пакупкі суму?

1.65. Запішыце перыядычны дроб у выглядзе звычайнага, выкарыстаўшы формулу сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі:

а) 0,(4); б) 0,(17); в) 0,1(5); г) 0,23(7).

1.66. Рашыце няроўнасць з дапамогай метаду інтэрвалаў:

а) $x(x^2-1)(2x+7) < 0$; б) $(x-6)^2(x-9)(x+8) \leqslant 0$;

в) $\frac{x^2-5x}{x^2-x-2} > 0$; г) $\frac{\left(x^2-4\right)^2}{x^2-3x-28} \geqslant 0$.

1.67. У арыфметычнай прагрэсіі -63; -58; ... знайдзіце суму ўсіх яе адмоўных членаў.

1.68. Знайдзіце $f'(2)$, калі:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x$; б) $f(x) = \frac{x^5}{5} + 3x^2$;

в) $f(x) = \frac{5x-1}{3x+2}$; г) $f(x) = (7x^2-4)(x+2)$.

1.69. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{4-x^2} = x-2$; б) $x^2 = 5 + \sqrt{x^2-3}$.

1.70. Спрасціце выраз $\sqrt[5]{243m^5} + \sqrt[4]{16m^4} - \sqrt{36m^2}$ і знайдзіце яго значэнне пры $m = -\frac{1}{7}$.

1.71. Для квадратычнай функцыі $y = f(x)$ вядома, што $f(-2) = f(4)$. Знайдзіце абсцысу вяршыні парабалы.

1.72. Спрасціце выраз з дапамогай формул пераўтварэння трыганаметрычных функцый аднаго аргумента:

а) $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x - \sin^2 x$; б) $(\sin x + \cos x)^2 - 1$.

1.73. Размясціце ў парадку спадання лікі $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[5]{5}$.

1.74. Знайдзіце, пры якім значэнні ліку k графік адваротнай прапарцыянальнасці $y = \frac{k}{x}$ праходзіць праз пункт $A\left(-\sqrt{18}; \sqrt{2}\right)$. Пабудуйце гэты графік. Як называецца графік адваротнай прапарцыянальнасці? Ці праўда, што пункт $B(48; -0{,}125)$ належыць графіку гэтай функцыі?

1.75. Рашыце трыганаметрычнае ўраўненне:

а) $\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; б) $\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = 0$; в) $\mathrm{tg}\, 0{,}3x - \sqrt{3} = 0$.

Знайдзіце найменшы дадатны корань кожнага ўраўнення.

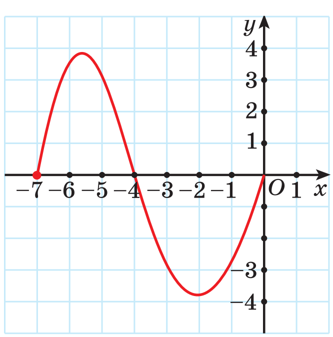
1.76. З дапамогай пераўтварэнняў графіка функцыі $y = \sin x$ пабудуйце графік функцыі $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Ці праўда, што функцыя $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$: а) не мае нулёў; б) пры значэнні аргумента, роўным $\frac{\pi}{6}$, прымае значэнне, роўнае 1,5; в) не перасякае вось ардынат?

1.77. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$.

1.78. На рысунку 1 паказана частка графіка функцыі $y = f(x)$, абсягам вызначэння якой з'яўляецца адрэзак $[-7; 7]$. Пакажыце ў сшытку відарыс графіка гэтай функцыі для $x \in [-7; 7]$, калі вядома, што яна з'яўляецца:

а) цотнай; б) няцотнай.



Рыс. 1

1.79*. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x}$ і пабудуйце яе графік.

§ 2. Ступенная функцыя і яе ўласцівасці

1.80. Функцыя зададзена формулай $f(x)=\sqrt[5]{2x-3}$. Знайдзіце нуль функцыі.

1.81. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $f(x)=\sqrt[6]{1-7x}$.

1.82. Даследуйце функцыю $f(x)=x^2-3x^4$ на цотнасць.

Разгледзім задачу. Знайдзіце плошчу грані куба, ведаючы, што яго аб'ём роўны x.

Абазначым праз $S(x)$ плошчу грані куба. Паколькі аб'ём куба роўны x, то даўжыня канта куба роўна $\sqrt[3]{x}$, тады $S(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}$.

Рашэнне практычных задач прыводзіць да залежнасцей выгляду $f(x)=x^\alpha$, дзе $x>0$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

Паколькі для любога $\alpha\in\boldsymbol{R}$ і $x>0$ вызначана паняцце ступені x^α, то для фіксаванага $\alpha\in\boldsymbol{R}$ можна даць азначэнне ступеннай функцыі.

Азначэнне. Функцыя, зададзеная формулай $f(x)=x^\alpha$, называецца ступеннай з паказчыкам α.

Напрыклад, функцыі $y=x^{\frac{2}{3}}$, $y=x^{-0,3}$, $y=x^{\sqrt{2}}$ з'яўляюцца ступеннымі.

Разгледзім уласцівасці і графік ступеннай функцыі.

1. Абсяг вызначэння функцыі. Паколькі для любога $\alpha\in\boldsymbol{R}$ і $x>0$ вызначана ступень x^α, то $D(f)=(0;+\infty)$.

Калі $\alpha>0$, то ў абсяг вызначэння функцыі ўключаюць лік нуль.

2. Мноства значэнняў функцыі. Паколькі для любога $\alpha\in\boldsymbol{R}$ і $x>0$ значэнне ступені x^α з'яўляецца дадатным лікам і ўраўненне $x^\alpha=a$, дзе $a>0$, мае дадатны корань для любога $\alpha\in\boldsymbol{R}$, то $E(f)=(0;+\infty)$.

Калі $\alpha>0$, то ў мноства значэнняў ступеннай функцыі ўключаюць лік нуль.

3. Нулі функцыі. Ураўненне $x^\alpha=0$ не мае каранёў пры $\alpha<0$ і мае корань $x=0$ пры $\alpha>0$. Значыць, пры $\alpha<0$ функцыя $f(x)=x^\alpha$ не мае нулёў, а пры $\alpha>0$ нулём функцыі з'яўляецца $x=0$.

4. Прамежкі знакапастаянства функцыі. Паколькі для любога $\alpha\in\boldsymbol{R}$ і $x>0$ значэнне ступені x^α з'яўляецца дадатным лікам, то $f(x)>0$ для $x\in(0;+\infty)$.

5. Прамежкі манатоннасці функцыі. Калі $\alpha > 0$, то функцыя $f(x) = x^{\alpha}$ нарастае на абсягу вызначэння.

Дакажам гэту ўласцівасць для рацыянальных $\alpha > 0$.

Няхай $\alpha = \frac{m}{n}$ і $x_1 > x_2$ $(x_1 \in D(f),\ x_2 \in D(f))$, тады $x_1^m > x_2^m$ па ўласцівасці ступені з натуральным паказчыкам.

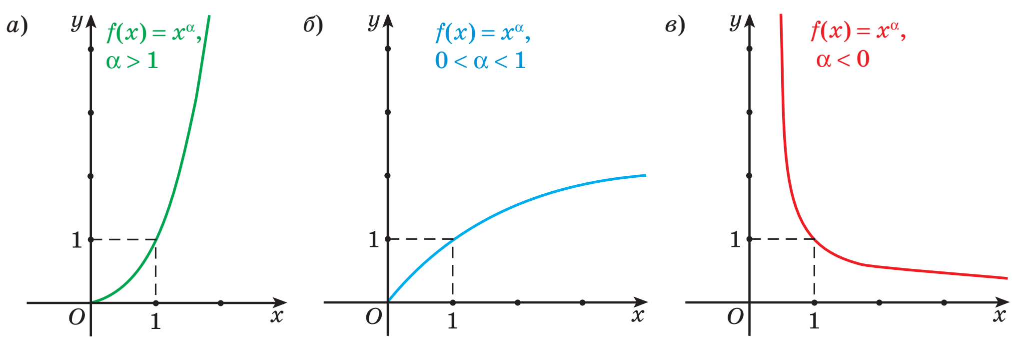
Па ўласцівасці кораня n-й ступені атрымаем: $\sqrt[n]{x_1^m} > \sqrt[n]{x_2^m}$, або $x_1^{\frac{m}{n}} > x_2^{\frac{m}{n}}$.

Калі $\alpha < 0$, то функцыя $f(x) = x^{\alpha}$ спадае на абсягу вызначэння.

Сапраўды, калі $x_1^{\frac{m}{n}} > x_2^{\frac{m}{n}}$, то $\frac{1}{x_1^{\frac{m}{n}}} < \frac{1}{x_2^{\frac{m}{n}}}$, г. зн. $x_1^{-\frac{m}{n}} < x_2^{-\frac{m}{n}}$.

6. Цотнасць (няцотнасць) функцыі. Функцыя $f(x) = x^{\alpha}$ не з'яўляецца цотнай і не з'яўляецца няцотнай, паколькі яе абсяг вызначэння не сіметрычны адносна нуля.

7. Графік функцыі. На рысунку 2 паказаны графікі ступеннай функцыі $f(x) = x^{\alpha}$ для $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$ і $\alpha < 0$.

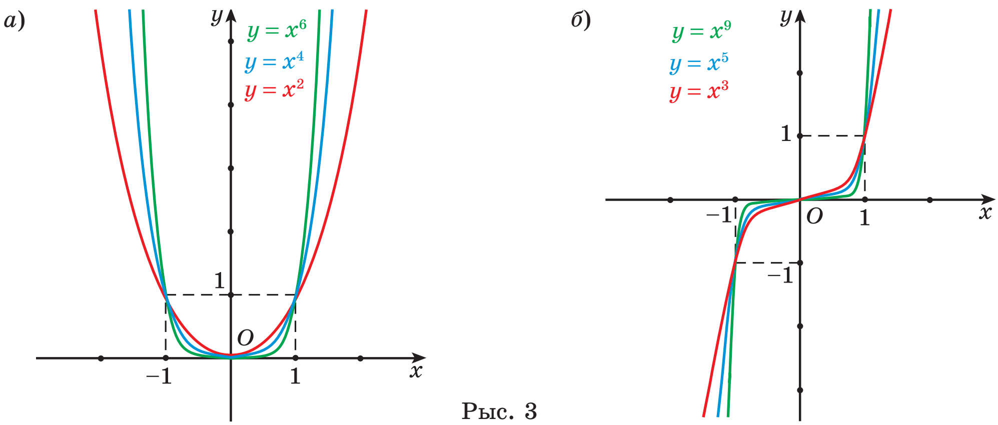


Рыс. 2

Графікі ступенных функцый праходзяць праз пункт (1; 1), паколькі $1^{\alpha} = 1$ пры любым α.

Для некаторых значэнняў α ступенная функцыя $f(x) = x^{\alpha}$ можа разглядацца і на больш шырокім абсягу вызначэння. Так, пры натуральных значэннях α ступенная функцыя вызначана на мностве ўсіх рэчаісных лікаў $\boldsymbol{R}$. У гэтым выпадку функцыя мае выгляд $y = x^n$, дзе $n \in \boldsymbol{N}$. Вядомыя вам функцыі $y = x^2$ і $y = x^3$ з'яўляюцца прыкладамі ступенных функцый такога віду.

Пры пабудове графікаў $y = x^n$ $(n \in \boldsymbol{N})$ на абсягу вызначэння $\boldsymbol{R}$ разглядаюцца два выпадкі.



Рыс. 3

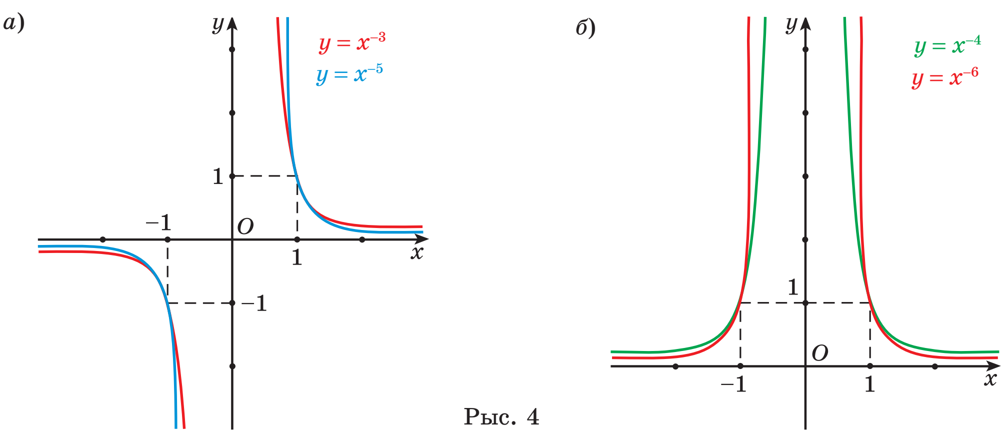
Калі n — цотны лік, то ўласцівасці і графік функцыі $y = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{N}$, аналагічныя ўласцівасцям і графіку функцыі $y = x^2$ (рыс. 3, *а*).

Калі n — няцотны лік, то ўласцівасці і графік функцыі $y = x^{2k+1}$, $k \in \boldsymbol{N}$, аналагічныя ўласцівасцям і графіку функцыі $y = x^3$ (рыс. 3, *б*).

Пры цэлых адмоўных значэннях α ступенная функцыя вызначана на мностве $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Напрыклад, ступенная функцыя $y = x^{-1}$ — вядомая вам адваротная прапарцыянальнасць $y = \frac{1}{x}$.

Калі n — няцотны адмоўны лік, то ўласцівасці і графік функцыі аналагічны ўласцівасцям і графіку функцыі $y = x^{-1}$ (рыс. 4, *а*).

Калі n — цотны адмоўны лік, то ўласцівасці і графік функцыі аналагічны ўласцівасцям і графіку функцыі $y = x^{-2}$ (рыс. 4, *б*).



Рыс. 4

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Ці з’яўляецца ступеннай функцыя:

а) $f(x) = x^5$; б) $g(x) = x^{-3}$; в) $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$; г) $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$?

Рашэнне.

а) Функцыя $f(x) = x^5$ ступенная, паколькі мае выгляд $y = x^\alpha$, $\alpha = 5$;
б) функцыя $g(x) = x^{-3}$ ступенная, паколькі мае выгляд $y = x^\alpha$, $\alpha = -3$;
в) функцыя $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ ступенная, паколькі мае выгляд $y = x^\alpha$, $\alpha = \frac{2}{5}$;
г) функцыя $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ не з’яўляецца ступеннай, паколькі аснова ступені $\frac{2}{3}$ — лік, а паказчык — зменная.

2. Ступенная функцыя зададзена формулай $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(4)$; в) $f(25)$; г) $f(7)$.

Рашэнне.

а) $f(1) = 1^{\frac{3}{2}} = 1$; б) $f(4) = 4^{\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$;

в) $f(25) = 25^{\frac{3}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$; г) $f(7) = 7^{\frac{3}{2}} = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{7}\right)^3 = 7\sqrt{7}$.

3. Вызначце, нарастальнай ці спадальнай з’яўляецца ступенная функцыя:

а) $f(x) = x^5$; б) $g(x) = x^{-3}$; в) $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$; г) $s(x) = x^{-0,3}$.

Рашэнне. а) Ступенная функцыя $f(x) = x^5$ з’яўляецца нарастальнай, паколькі $\alpha = 5 > 0$.

б) Ступенная функцыя $g(x) = x^{-3}$ з’яўляецца спадальнай, паколькі $\alpha = -3 < 0$.

в) Ступенная функцыя $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ з’яўляецца нарастальнай, паколькі $\alpha = \frac{2}{5} > 0$.

г) Ступенная функцыя $s(x)=x^{-0,3}$ з'яўляецца спадальнай, паколькі $\alpha=-0,3<0$.

4. Параўнайце:

а) $2,7^{-0,1}$ і $4,9^{-0,1}$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ і $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Рашэнне. а) Функцыя $f(x)=x^{-0,1}$ спадае на мностве рэчаісных лікаў, бо $\alpha=-0,1<0$. Паколькі $2,7<4,9$, то $2,7^{-0,1}>4,9^{-0,1}$.

б) Функцыя $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ нарастае на мностве рэчаісных лікаў, бо $\alpha=\frac{2}{3}>0$. Паколькі $\sqrt{3}<\sqrt{5}$, то $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

5. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x)=(x-1)^{-0,3}$; б) $h(x)=(x+2)^{\frac{2}{5}}$;

в) $g(x)=(2x-6)^{-\sqrt{3}}$; г) $f(x)=(x+7)^{\sqrt{2}}$.

Рашэнне. а) Абсягам вызначэння ступеннай функцыі для $\alpha<0$ з'яўляецца мноства дадатных рэчаісных лікаў, значыць, $x-1>0$; $x>1$; $D=(1;+\infty)$.

б) Абсягам вызначэння ступеннай функцыі для $\alpha>0$ з'яўляецца мноства неадмоўных рэчаісных лікаў, значыць, $x+2\geqslant 0$, $x\geqslant -2$, $D=[-2;+\infty)$.

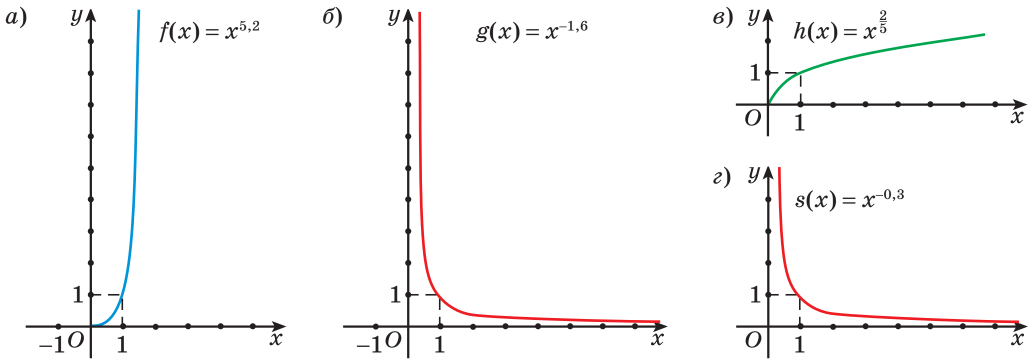
в) Абсягам вызначэння ступеннай функцыі для $\alpha<0$ з'яўляецца мноства дадатных рэчаісных лікаў, значыць, $2x-6>0$, $x>3$, $D=(3;+\infty)$.

г) Абсягам вызначэння ступеннай функцыі для $\alpha>0$ з'яўляецца мноства неадмоўных рэчаісных лікаў, значыць, $x+7\geqslant 0$, $x\geqslant -7$, $D=[-7;+\infty)$.

6. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $f(x)=x^{5,2}$; б) $g(x)=x^{-1,6}$;

в) $h(x)=x^{\frac{2}{5}}$; г) $s(x)=x^{-0,3}$.



Рыс. 5

Рашэнне. Відарысы графікаў дадзеных функцый паказаны на рысунках 5, *а*—*г*.

7. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ на прамежку $[1;\ 32]$;

б) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$ на прамежку $\left[\frac{1}{8};\ 27\right]$.

Рашэнне.

а) Паколькі функцыя $h(x) = x^{\frac{2}{5}}$ нарастае на абсягу вызначэння, то найменшае значэнне яна прымае на левым канцы прамежку $h(1) = 1^{\frac{2}{5}} = 1$, а найбольшае значэнне — на правым канцы прамежку $h(32) = 32^{\frac{2}{5}} = 4$.

б) Паколькі функцыя $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$ спадае на абсягу вызначэння, то найменшае значэнне яна прымае на правым канцы прамежку $h(27) = (27)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$, а найбольшае значэнне — на левым канцы прамежку $h\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = 16$.

? Ці праўда, што графік любой ступеннай функцыі праходзіць праз пункт $A(1;\ 1)$?

1.83. Якія з дадзеных функцый з'яўляюцца ступеннымі:

а) $f(x) = x^7$; б) $g(x) = x^{-0,4}$; в) $p(x) = 5^x$; г) $h(x) = x^{\frac{3}{7}}$?

1.84. Ступенная функцыя зададзена формулай $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(16)$; в) $f\left(\frac{1}{81}\right)$; г) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

1.85. Знайдзіце значэнне функцыі $g(x)$ у пункце x_0, калі:

а) $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $x_0 = 9$; б) $g(x) = x^{-\frac{2}{3}}$, $x_0 = 8$;

в) $g(x) = x^{\frac{5}{3}}$, $x_0 = 0,001$; г) $g(x) = x^{-\frac{4}{3}}$, $x_0 = \frac{1}{27}$.

1.86. Ці праўда, што пункт $F(81;\ 27)$ належыць графіку функцыі $y = x^{0,75}$?

1.87. Выберыце пункты, праз якія праходзіць графік функцыі $y = x^{\frac{1}{4}}$:

а) $A(1;\ 1)$; б) $B(16;\ 2)$; в) $C\left(25;\ \sqrt{5}\right)$; г) $D(4;\ 1)$.

1.88. Вызначце, якія з дадзеных ступенных функцый з'яўляюцца нарастальнымі:

а) $f(x) = x^7$; б) $g(x) = x^{-9}$; в) $h(x) = x^{0,8}$; г) $p(x) = x^{\sqrt{5}}$.

1.89. Параўнайце:

а) $f(7,1)$ і $f(8,9)$, калі $f(x) = x^{-7,2}$;

б) $g(3,2)$ і $g(6,7)$, калі $g(x) = x^{\sqrt{6}}$.

1.90. Размясціце ў парадку нарастання значэнні выразаў, выкарыстаўшы ўласцівасць манатоннасці ступеннай функцыі:

а) $5,9^{\sqrt{2}}$, $1,8^{\sqrt{2}}$ і $3,7^{\sqrt{2}}$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{-5,1}$, $\left(\sqrt{2}\right)^{-5,1}$ і $\left(\sqrt{5}\right)^{-5,1}$.

1.91. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

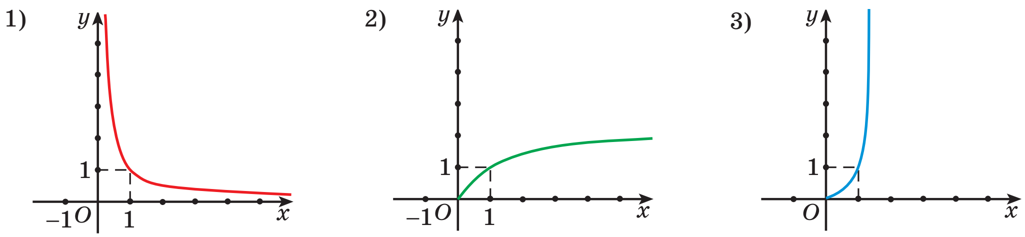
а) $y = (x-5)^{-7,2}$; б) $y = (3-2x)^{\frac{1}{3}}$; в) $y = \left(7 + \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

г) $y = \left(x^2 - 5x + 4\right)^{1,7}$; д) $y = \left(4x^2 - 9\right)^{-\sqrt{3}}$; е) $y = \left(5 - x^2\right)^{\sqrt{6}}$;

ж) $y = \left(\frac{5x-1}{x}\right)^{-\frac{3}{4}}$; з) $y = \left(\frac{3x^2 - 10x + 3}{x-2}\right)^{0,9}$; і) $y = \left(\frac{9-x^2}{x+1}\right)^{-\sqrt{5}}$.

1.92. Устанавіце адпаведнасць паміж графікам ступеннай функцыі (рыс. 6) і яе формулай:

а) $y = x^{\frac{2}{5}}$; б) $y = x^{\frac{5}{2}}$; в) $y = x^{-5}$.



Рыс. 6

1.93. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$; б) $g(x) = x^{1,5}$; в) $h(x) = x^{-\frac{3}{4}}$; г) $p(x) = x^{-\frac{5}{3}}$.

1.94. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ на прамежку $[1; 27]$;

б) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$ на прамежку $\left[\frac{1}{16}; 81\right]$.

1.95. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцый $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ і $g(x) = x^{-\frac{5}{3}}$ на прамежку $[0,125; 64]$.

1.96*. Дадзены функцыі $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ і $g(x) = \frac{5x+7}{x-4}$. Знайдзіце $f(g(5))$.

1.97. Ступенная функцыя зададзена формулай $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(9)$; в) $f(0,16)$; г) $f\left(\frac{4}{49}\right)$.

1.98. Выберыце пункты, праз якія праходзіць графік функцыі $y = x^{\frac{1}{3}}$:

а) $A(1; 1)$; б) $B(27; 3)$; в) $C(0,008; 0,2)$; г) $D(3; 1)$.

1.99. Нарастальнай ці спадальнай з'яўляецца ступенная функцыя:

а) $f(x) = x^{1,2}$; б) $g(x) = x^{-\frac{6}{7}}$; в) $p(x) = x^{\sqrt{2}}$; г) $h(x) = x^{-2,5}$?

1.100. Параўнайце:

а) $3{,}7^{-0{,}4}$ і $7{,}4^{-0{,}4}$; б) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{5}{7}}$ і $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{5}{7}}$.

1.101. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = (x + 4)^{0{,}2}$; б) $y = (5 - x)^{-\frac{2}{7}}$; в) $y = \left(16 - x^2\right)^{-0{,}7}$;

г) $y = \left(x^2 - x - 2\right)^{\sqrt{3}}$; д) $y = \left(\frac{x-9}{x}\right)^{-\sqrt{7}}$; е) $y = \left(\frac{4x^2 - x}{x+7}\right)^{3{,}8}$.

1.102. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; б) $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$; в) $h(x) = x^{\frac{2}{9}}$; г) $p(x) = x^{2{,}5}$.

1.103. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $h(x) = x^{\frac{1}{4}}$ на прамежку $[1; 16]$;

б) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ на прамежку $\left[\frac{1}{8}; 125\right]$.

1.104. Выразіце ў градуснай меры вуглы $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{8}$.

1.105. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу $16^{\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}} + 81^{\frac{3}{4}} + 8^{1\frac{2}{3}}$.

1.106. Задайце формулай:

а) лінейную функцыю, графік якой паралельны графіку функцыі $y = -x + 8$ і перасякаецца з графікам функцыі $y = 5x - 6$ у пункце, што ляжыць на восі ардынат;

б) няцотную лінейную функцыю, графік якой праходзіць праз пункт $A(-3; 9)$.

Прывядзіце прыклад цотнай лінейнай функцыі.

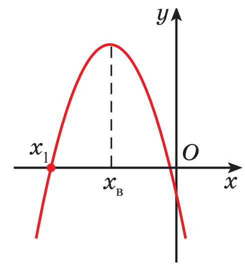
1.107. Для экскурсійных паездак навучэнцаў было вылучана некалькі аўтобусаў з аднолькавай колькасцю месцаў у кожным. У Дудуткі паехала 328 дзяцей, у Мірскі замак — 369 дзяцей. Усе месцы ў аўтобусах былі занятыя, ніводзін чалавек не застаўся без месца. Знайдзіце колькасць месцаў у кожным аўтобусе і колькасць аўтобусаў, якія адправіліся ў Мірскі замак.

1.108. Вылічыце, выкарыстаўшы формулы прывядзення:

а) $\cos 225°$; б) $\sin 150°$; в) $\operatorname{ctg} 240°$; г) $\operatorname{tg} 300°$.

1.109. На рысунку 7 паказаны відарыс графіка функцыі $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Выберыце няправільнае сцверджанне:

а) $f(x_1) = 0$; б) $f(3) < f(0)$;
в) $f(10) < 0$; г) $f(0) = 0$;
д) $f(x_в) \geqslant f(x_0)$, дзе $x_0 \in \boldsymbol{R}$.



Рыс. 7

1.110. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = -5\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$. Прывядзіце прыклад функцыі выгляду $y = A\sin(kx + m) + n$, мноствам значэнняў якой з'яўляецца адрэзак $[-6; 2]$.

1.111. Колькі агульных пунктаў маюць графікі функцый $y = \sqrt{5 - x^2}$ і $y = 1 - x$? Знайдзіце абсцысы гэтых пунктаў.

1.112. Рашыце трыганаметрычнае ўраўненне:

а) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$;

в) $\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x = -1$.

Знайдзіце найбольшы адмоўны корань кожнага ўраўнення.

1.113. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі $f(x) = x^3 - 12x$.

§ 3. Азначэнне лагарыфма ліку. Асноўная лагарыфмічная тоеснасць

1.114. Рашыце ўраўненне:

а) $x^3 = 27$; б) $x^4 = 16$; в) $x^3 = 25$; г) $x^6 = 2$.

1.115. Знайдзіце значэнне ступені:

а) 2^{-3}; б) $25^{-\frac{1}{2}}$; в) $81^{\frac{3}{4}}$; г) $121^{0,5}$.

1.116. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $(x-1)^3$; б) $(x-1)^{-3}$; в) $(x-1)^{\frac{1}{3}}$; г) $(x-1)^{-\frac{1}{3}}$.

Пры вывучэнні паняцця ступені a^n мы:

- разглядалі ўласцівасці ступені з рознымі паказчыкамі (напрыклад, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ і да т. п.);
- вылічвалі значэнне ступені, ведаючы яе *аснову a* і *паказчык n* (напрыклад, $2^6 = 64$, $7^{-1} = \frac{1}{7}$);
- вызначалі *аснову ступені a* па значэнні ступені і яе паказчыку (напрыклад, калі $a^3 = 125$, то $a = 5$).

Пры рашэнні многіх практычных задач патрабуецца **знаходзіць паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці яе аснову,** каб атрымаць зададзены лік.

Разгледзім задачу. За колькі гадоў уклад, размешчаны ў банку пад 10 % гадавых са штогадовай капіталізацыяй, павялічыцца ў 1,5 раза?

Паколькі кожны год уклад у p рублёў павялічваецца на 10 %, то праз n гадоў ён складзе $p \cdot 1{,}1^n$ і стане роўны $1{,}5p$, г. зн. $p \cdot 1{,}1^n = 1{,}5p$, адкуль $1{,}1^n = 1{,}5$.

Такім чынам, для адказу на пытанне задачы трэба знайсці паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці лік 1,1, каб атрымаць лік 1,5.

Мы ўжо ўмеем знаходзіць паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці, напрыклад, лік 2, каб атрымаць лік 32, г. зн. з умовы $2^n = 32$ знаходзіць паказчык ступені n: паколькі $2^5 = 32$, то $n = 5$.

Атрыманы паказчык ступені (лік 5) называюць **лагарыфмам** ліку 32 па аснове 2.

Абазначаюць $\log_2 32 = 5$ і чытаюць: «лагарыфм ліку 32 па аснове 2 роўны 5».

З умовы $3^x = 81$ знойдзем паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці лік 3, каб атрымаць лік 81. Гэта лік 4, які называюць лагарыфмам ліку 81 па аснове 3 і абазначаюць $\log_3 81 = 4$.

Для любога $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ можна знайсці паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці лік a, каб атрымаць лік b.

Азначэнне. Лагарыфмам ліку b ($b > 0$) па аснове a ($a > 0$, $a \neq 1$) называецца паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці аснову a, каб атрымаць лік b.

$$\log_a b = x$$
$$\Updownarrow$$
$$a^x = b,$$
$$b > 0, a > 0, a \neq 1$$

Слова «лагарыфм» пайшло ад грэчаскіх слоў λόγος — «адносіна» і ἀριθμός — «лік»).

Упершыню канцэпцыя лагарыфмаў была прапанавана ў 1614 г. шатландскім матэматыкам Джонам Неперам (1550—1617) у яго творы «Mirifici logarithmorum canonis descriptio» («Апісанне дзівоснай табліцы лагарыфмаў»).

У задачы аб укладзе трэба было знайсці паказчык ступені, у якую трэба ўзвесці лік 1,1, каб атрымаць 1,5 ($1{,}1^n = 1{,}5$). Значыць, трэба знайсці лагарыфм ліку 1,5 па аснове 1,1, г. зн. $n = \log_{1,1} 1{,}5$. Гэта значэнне можна знайсці з дапамогай табліц лагарыфмаў: $n \approx 4$.

Прыклад 1. Прачытайце выраз і знайдзіце яго значэнне:

а) $\log_3 9$; б) $\log_2 \frac{1}{2}$; в) $\log_{\sqrt{3}} 3$; г) $\log_6 1$.

Рашэнне.

а) Чытаецца: «лагарыфм ліку 9 па аснове 3», $\log_3 9 = 2$, паколькі $3^2 = 9$.

б) Чытаецца: «лагарыфм ліку $\frac{1}{2}$ па аснове 2», $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, паколькі $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

в) Чытаецца: «лагарыфм ліку 3 па аснове $\sqrt{3}$ », $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, паколькі $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

г) Чытаецца: «лагарыфм ліку 1 па аснове 6», $\log_6 1 = 0$, паколькі $6^0 = 1$.

$\log_5 125 = 3$, паколькі $5^3 = 125$

$\log_5 25 = 2$, паколькі $5^2 = 25$

$\log_5 \frac{1}{5} = -1$, паколькі $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

$\log_5 \frac{1}{25} = -2$, паколькі $5^{-2} = \frac{1}{25}$

$\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, паколькі $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Калі аснова лагарыфма роўна 10, то лагарыфм называецца **дзесятковым** і абазначаецца $\lg a$. Чытаецца: «дзесятковы лагарыфм ліку a».

$\log_{10} 2 = \lg 2$ — дзесятковы лагарыфм ліку 2

Прыклад 2. Прачытайце выраз і знайдзіце яго значэнне:

а) $\lg 100$; б) $\lg 0{,}1$; в) $\lg 0{,}01$; г) $\lg 1$.

Рашэнне. а) Чытаецца: «дзесятковы лагарыфм ліку 100», $\lg 100 = 2$, паколькі $10^2 = 100$.

б) Чытаецца: «дзесятковы лагарыфм ліку 0,1», $\lg 0{,}1 = -1$, паколькі $10^{-1} = 0{,}1$.

$\lg 1000 = 3$, паколькі $10^3 = 1000$
$\lg 10 = 1$, паколькі $10^1 = 10$
$\lg 0{,}0001 = -4$, паколькі $10^{-4} = 0{,}0001$

в) Чытаецца: «дзесятковы лагарыфм ліку 0,01», $\lg 0{,}01 = -2$, паколькі $10^{-2} = 0{,}01$.

г) Чытаецца: «дзесятковы лагарыфм ліку 1», $\lg 1 = 0$, паколькі $10^0 = 1$.

З азначэння лагарыфма ліку $b (b > 0)$ па аснове a $(a > 0,\ a \neq 1)$ вынікае, што калі $\log_a b = x$, то $a^x = b$, г. зн. $a^{\log_a b} = b$.

Тоеснасць $a^{\log_a b} = b$ называецца **асноўнай лагарыфмічнай тоеснасцю.**

Прыклад 3. Вылічыце:

а) $2^{\log_2 3}$; б) $7^{\log_7 2}$; в) $0{,}2^{\log_{0,2} 10}$.

$a^{\log_a b} = b$

Рашэнне.

а) $2^{\log_2 3} = 3$; б) $7^{\log_7 2} = 2$; в) $0{,}2^{\log_{0,2} 10} = 10$.

З дапамогай асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці можна любы дадатны лік запісаць у выглядзе ступені з любой дадатнай асновай.

Прыклад 4. Запішыце лік 7 у выглядзе ступені з асновай:

а) 3; б) 5; в) 10; г) 0,5.

Рашэнне.

а) $7 = 3^{\log_3 7}$; б) $7 = 5^{\log_5 7}$; в) $7 = 10^{\lg 7}$; г) $7 = 0{,}5^{\log_{0,5} 7}$.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Вылічыце:

а) $\log_2 16$; б) $\log_2 32$; в) $\log_2 \frac{1}{2}$; г) $\log_2 \frac{1}{8}$;

д) $\log_2 0{,}25$; е) $\log_2 \sqrt{2}$; ж) $\log_2 \sqrt[5]{2}$; з) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Рашэнне.

а) $\log_2 16 = 4$, паколькі $2^4 = 16$;

б) $\log_2 32 = 5$, паколькі $2^5 = 32$;

в) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, паколькі $2^{-1} = \frac{1}{2}$;

г) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, паколькі $2^{-3} = \frac{1}{8}$;

д) $\log_2 0{,}25 = -2$, паколькі $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$;

е) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, паколькі $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;

ж) $\log_2 \sqrt[5]{2} = \frac{1}{5}$, паколькі $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$;

з) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{3}$, паколькі $2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

2. Вылічыце:

а) $\log_2 2$; $\log_3 3$; $\lg 10$; $\log_a a$, $a > 0$, $a \neq 1$;

б) $\log_2 1$; $\log_3 1$; $\lg 1$; $\log_a 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Рашэнне.

а) $\log_2 2 = 1$, паколькі $2^1 = 2$;

$\log_3 3 = 1$; $\lg 10 = 1$; $\log_a a = 1$;

$$\boxed{\log_a a = 1,\ a > 0,\ a \neq 1}$$

б) $\log_2 1 = 0$, паколькі $2^0 = 1$;

$\log_3 1 = 0$; $\lg 1 = 0$; $\log_a 1 = 0$.

$$\boxed{\log_a 1 = 0,\ a > 0,\ a \neq 1}$$

3. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_8 64 + \log_5 125$; б) $\log_3 81 - 6\lg\sqrt{10}$; в) $\log_{25} 5 + \log_5 \frac{1}{25}$;

г) $\log_2 \log_3 81$; д) $\log_{\frac{1}{3}} \log_{27} 3$; е) $\log_{25} \lg 100\,000$;

ж) $\log_5^2 25$; з) $\log_2^3 \frac{1}{16}$; і) $\log_{49}^4 7$.

Рашэнне. а) $\log_8 64 = 2$, паколькі $8^2 = 64$ і $\log_5 125 = 3$, паколькі $5^3 = 125$, тады $\log_8 64 + \log_5 125 = 2 + 3 = 5$;

б) $\log_3 81 - 6\lg\sqrt{10} = 4 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 4 - 3 = 1$;

в) $\log_{25} 5 + \log_5 \frac{1}{25} = \frac{1}{2} + (-2) = \frac{1}{2} - 2 = -1{,}5$;

г) $\log_2 \log_3 81 = \log_2 4 = 2$;

д) $\log_{\frac{1}{3}} \log_{27} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$;

е) $\log_{25} \lg 100\,000 = \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$;

ж) $\log_5^2 25 = (\log_5 25)^2 = 2^2 = 4$;

з) $\log_2^3 \frac{1}{16} = \left(\log_2 \frac{1}{16}\right)^3 = (-4)^3 = -64$;

і) $\log_{49}^4 7 = (\log_{49} 7)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

4. Спрасціце выраз:

а) $5^{\log_5 7}$; б) $0{,}25^{\log_{0,25} 5}$; в) $10^{\lg 3}$; г) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 2}$.

Рашэнне.

а) $5^{\log_5 7} = 7$; б) $0{,}25^{\log_{0,25} 5} = 5$; в) $10^{\lg 3} = 3$; г) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 2$.

5. Запішыце лік:

а) 4 у выглядзе ступені з асновай 3;

б) 0,5 у выглядзе ступені з асновай 5;

в) 11 у выглядзе ступені з асновай 10.

Рашэнне.

а) $4 = 3^{\log_3 4}$; б) $0{,}5 = 5^{\log_5 0{,}5}$; в) $11 = 10^{\lg 11}$.

6. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5^{1 + \log_5 6}$; б) $3^{2 - \log_3 18}$; в) $4^{2\log_4 3}$; г) $5^{3\log_5 \frac{1}{2}}$;

д) $36^{\log_6 7}$; е) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7 4}$; ж) $8^{\log_{64} 10}$; з) $5^{\log_{125} 7}$.

Рашэнне. а) Выкарыстаем уласцівасць ступені $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ і атрымаем: $5^{1 + \log_5 6} = 5^1 \cdot 5^{\log_5 6} = 5 \cdot 6 = 30$.

б) Па ўласцівасці ступені $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, тады: $3^{2 - \log_3 18} = \frac{3^2}{3^{\log_3 18}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

в) Выкарыстаем уласцівасць ступені $a^{mn} = \left(a^m\right)^n$ і атрымаем:

$4^{2\log_4 3} = \left(4^{\log_4 3}\right)^2 = 3^2 = 9;$

г) $5^{3\log_5 \frac{1}{2}} = \left(5^{\log_5 \frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$

д) $36^{\log_6 7} = \left(6^2\right)^{\log_6 7} = \left(6^{\log_6 7}\right)^2 = 7^2 = 49;$

е) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7 4} = \left(7^{-1}\right)^{\log_7 4} = \left(7^{\log_7 4}\right)^{-1} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0,25;$

ж) $8^{\log_{64} 10} = \left(64^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{64} 10} = \left(64^{\log_{64} 10}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10};$

з) $5^{\log_{125} 7} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{125} 7} = \left(125^{\log_{125} 7}\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}.$

7. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\sqrt{13}\right)^{\log_{13} 25} + 7^{\log_{\sqrt{7}} 13}$.

Рашэнне.

$\left(\sqrt{13}\right)^{\log_{13} 25} + 7^{\log_{\sqrt{7}} 13} = \left(13^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{13} 25} + \left(\left(\sqrt{7}\right)^2\right)^{\log_{\sqrt{7}} 13} = \left(13^{\log_{13} 25}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\sqrt{7}\right)^{\log_{\sqrt{7}} 13}\right)^2 =$

$= 25^{\frac{1}{2}} + 13^2 = 5 + 169 = 174.$

1. Ці праўда, што:

а) $\log_2 8 = 3$; б) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; в) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$; г) $\log_2 1 = 0$?

2. Знайдзіце, калі магчыма, значэнне a такое, каб:

а) $\log_a 3 > 0$; б) $\log_a 3 < 0$; в) $\log_a 3 = 1$; г) $\log_a 3 = 0$.

1.117. Прачытайце запіс:

а) $\log_2 7$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$; в) $\lg 9$; г) $\log_7 a$; д) $\log_m n$.

1.118. Ці праўда, што:

а) $\log_3 9 = 2$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = -4$; в) $\log_7 \frac{1}{7} = -1$;

г) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$; д) $\log_2 0,25 = -2$; е) $\lg 100 = 2$;

ж) $\lg 0,001 = 3$; з) $\log_9 1 = 0$; і) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$?

1.119. Знайдзіце лагарыфмы лікаў:

а) 2; $\frac{1}{32}$; 0,125; $\sqrt{2}$ па аснове 2;

б) 1000; 0,1; $\sqrt[3]{10}$; 1 па аснове 10.

1.120. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

а) $\log_2 4$; б) $\log_3 81$; в) $\log_6 \frac{1}{6}$; г) $\log_{0,5} 0{,}125$;

д) $\log_3 \frac{1}{9}$; е) $\log_{0,5} 8$; ж) $\lg 100$; з) $\lg 0{,}0001$;

і) $\log_{12} 12$; к) $\log_8 1$; л) $\log_7 \sqrt{7}$; м) $\log_5 \sqrt[8]{5}$.

1.121. Знайдзіце лік x, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

а) $\log_6 x = 1$; б) $\log_{0,5} x = -2$; в) $\log_3 x = 4$;

г) $\log_5 x = \frac{1}{2}$; д) $\lg x = -2$; е) $\log_7 x = 0$.

1.122. Запішыце ў выглядзе лагарыфма па аснове 3 лікі:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) –1; е) –2;

ж) –3; з) $\frac{1}{2}$; і) $\frac{1}{3}$; к) –0,5; л) $\frac{2}{3}$; м) $-\frac{1}{5}$.

1.123. Знайдзіце лік x, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

а) $\log_x 27 = 3$; б) $\log_x \frac{1}{32} = 5$; в) $\log_x \frac{1}{49} = -2$;

г) $\log_x 13 = 1$; д) $\log_x 7 = \frac{1}{2}$; е) $\log_x 2 = \frac{1}{3}$.

1.124. Вылічыце значэнне выразу:

а) $\log_{0,2} 0{,}008$; б) $\log_3 \frac{1}{243}$; в) $\log_5 0{,}04$; г) $\log_{0,2} 125$;

д) $\log_4 2$; е) $\log_{\sqrt{2}} 8$; ж) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$; з) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2$.

1.125. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$; б) $4\log_5 \frac{1}{25} + \log_{\sqrt{3}} 27$;

в) $\log_2 32 - \log_3 \frac{1}{27} - \log_{19} \sqrt{19}$; г) $\log_{36} 6 + \log_{\frac{1}{4}} 64 - \log_3 \sqrt[5]{3}$.

1.126. Вылічыце:

а) $\log_3^2 9$; б) $\log_2^3 8$; в) $\log_5^3 \frac{1}{125}$; г) $\log_3^4 \sqrt{3}$.

1.127. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_2 \log_5 625$; б) $\log_3 \log_2 8$;

в) $\log_9 \log_4 \sqrt[3]{4}$; г) $\log_2 \log_3 \log_5 125$.

1.128. Вылічыце, выкарыстаўшы асноўную лагарыфмічную тоеснасць:

а) $2^{\log_2 7}$; б) $1{,}9^{\log_{1,9} 8}$; в) $10^{\lg 9}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{0,5} 3}$;

д) $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 5}$; е) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{0,8} 11}$; ж) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{0,125} 6}$; з) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{0,(3)} 2}$.

1.129. Запішыце лік 2 у выглядзе ступені з асновай:

а) 6; б) 7; в) 10; г) $\sqrt{7}$.

1.130. Выкарыстаўшы ўласцівасці ступені і асноўную лагарыфмічную тоеснасць, знайдзіце значэнне выразу:

а) $6^{2 + \log_6 3}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2 + \log_{\frac{1}{3}} 5}$; в) $10^{\lg 5 + 1}$; г) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_{0,6} 15 + 2}$;

д) $5^{2 - \log_5 3}$; е) $10^{3 - \lg 4}$; ж) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{0,25} 5 - 1}$; з) $3^{\log_3 18 - 2}$.

1.131. Выкарыстаўшы асноўную лагарыфмічную тоеснасць, вылічыце:

а) $3^{2\log_3 7}$; б) $2^{3\log_2 5}$; в) $10^{4\lg 3}$; г) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2\log_{0,8} 8}$;

д) $10^{0,25\lg 16}$; е) $36^{\log_6 3}$; ж) $1000^{\lg 2}$; з) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$;

і) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\log_{0,2} 4}$; к) $\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 25}$; л) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{\log_5 81}$; м) $\left(\sqrt[7]{10}\right)^{\lg 128}$.

1.132. Знайдзіце значэнне выразу, выбраўшы рацыянальны спосаб вылічэння:

а) $10^{\lg\frac{1}{5} + \lg 2}$; б) $3^{\log_3 2 - \log_3 \frac{1}{6}}$; в) $5^{\log_5 7 + \log_5 0,3}$.

1.133. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $36^{1 - \log_6 2}$; б) $25^{1 - \log_5 10}$; в) $121^{1 + 0,5\log_{11} 100}$;

г) $4^{\log_2 3 + 0,5\log_2 9}$; д) $100^{2\lg 2 + \lg 3}$; е) $9^{2\log_3 2 - \log_3 5}$.

1.134. Вылічыце, выкарыстаўшы ўласцівасці ступені і асноўную лагарыфмічную тоеснасць:

а) $7^{\log_7 2 - \log_3 9}$; б) $9^{\log_9 2 + \log_5 \frac{1}{25}}$;

в) $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 5 + \log_3 81}$; г) $6^{\log_5 0{,}2 + \log_6 15}$.

1.135*. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(2^{\log_2 15} + 1\right)^{\log_4 2}$; б) $0{,}25\left(1 + 4^{\log_2 5}\right)^{\log_{26} 4}$.

1.136*. Вылічыце:

а) $4^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)} + 25^{\log_5\left(2+\sqrt{3}\right)}$; б) $9^{\log_3\left(3-\sqrt{2}\right)} + 16^{\log_4\left(3+\sqrt{2}\right)}$.

1.137*. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{81^{\log_9 6} - a^{\log_a 9}}$, калі $a > 0$, $a \neq 1$.

1.138*. Вылічыце:

а) $\lg\left(25^{\log_5 0{,}8} + 9^{\log_3 0{,}6}\right)$;

б) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$;

в) $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

1.139. Выберыце правільную роўнасць:

а) $\log_2 16 = 8$; б) $\log_2 16 = 4$;

в) $\log_2 16 = 256$; г) $\log_2 16 = 32$.

1.140. Знайдзіце лагарыфмы лікаў 3; $\frac{1}{9}$; 1; $\sqrt{3}$ па аснове 3.

1.141. Выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма, знайдзіце:

а) $\log_3 9$; б) $\log_2 32$; в) $\log_{0{,}5} 0{,}25$; г) $\log_7 7$;

д) $\log_8 \frac{1}{8}$; е) $\lg 0{,}01$; ж) $\log_7 1$; з) $\log_5 \sqrt{5}$;

і) $\log_2 \sqrt[5]{2}$; к) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; л) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; м) $\log_{36} 6$.

1.142. Знайдзіце лік x:

а) $\log_5 x = 1$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$; в) $\log_2 x = 3$; г) $\lg x = \frac{1}{2}$.

1.143. Запішыце ў выглядзе лагарыфма па аснове 2 лікі:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) –1; е) –2;
ж) –3; з) $\frac{1}{2}$; і) $\frac{1}{3}$; к) –0,5; л) $\frac{2}{3}$; м) $-\frac{1}{3}$.

1.144. Знайдзіце лік x:

а) $\log_x 64 = 3$; б) $\log_x \frac{1}{16} = 4$;
в) $\log_x \frac{1}{25} = -2$; г) $\log_x 7 = 1$.

1.145. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{3}} 9$; б) $\log_{0,5} 4 + \log_{\sqrt{5}} 25$;
в) $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{2} - \log_{15} \sqrt{15}$; г) $\log_{81} 9 - \log_{\frac{1}{7}} 49 + \log_7 \sqrt[3]{7}$.

1.146. Вылічыце:

а) $\log_5^2 5$; б) $\log_2^3 32$; в) $\log_2^3 \frac{1}{8}$; г) $\log_7^4 \sqrt{7}$.

1.147. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_5 \log_2 32$; б) $\log_3 \log_7 7$; в) $\log_2 \log_5 \sqrt[4]{5}$.

1.148. Вылічыце: $\log_{125} 5 - \log_{\sqrt{2}} 0,5 + \log_{2,5} 0,4$.

1.149. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы асноўную лагарыфмічную тоеснасць:

а) $2^{\log_2 3}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$; в) $(0,5)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}$;
г) $6^{\log_6 12} - 17$; д) $0,2^{\log_{0,2} 2} + 21$; е) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{0,125} 3} - 6$.

1.150. Выкарыстаўшы ўласцівасці ступені і асноўную лагарыфмічную тоеснасць, знайдзіце значэнне выразу:

а) $5^{2 + \log_5 3}$; б) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\frac{1}{6}} 3 + 1}$; в) $10^{2 - \lg 4}$; г) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_{0,04} 3 - 1}$.

1.151. Запішыце лік 3 у выглядзе ступені з асновай:

а) 2; б) 7; в) 10; г) $\sqrt{5}$.

1.152. Вылічыце:

а) $5^{3\log_5 2}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\log_{\frac{1}{3}} 7}$; в) $10^{3\lg 4}$; г) $7^{-2\log_7 5}$;
д) $10^{0,5\lg 225}$; е) $25^{\log_5 3}$; ж) $8^{\log_2 5}$; з) $\left(\sqrt{7}\right)^{\log_7 36}$.

1.153*. Знайдзіце значэнне выразу $36^{\log_6 5 + \log_{81} 9}$.

1.154*. Вылічыце: $\log_5\left(49^{\log_7 2} + 36^{\log_6 11}\right)$.

1.155*. Знайдзіце значэнне выразу $36^{\log_{\frac{1}{6}} 2} + 10^{1 - \lg 4} - 4^{\log_2 3}$.

156. Дадзена функцыя $y = 3x^2 - 5x$. На якім з дадзеных прамежкаў гэта функцыя прымае толькі дадатныя значэнні:

а) $[1;\ 1{,}7]$; б) $[0{,}3;\ 2]$; в) $[-2;\ -0{,}1]$;

г) $[1{,}6;\ 1{,}7]$; д) $\left[\frac{5}{3};\ +\infty\right)$?

1.157. Вылічыце:

а) $\sqrt[4]{0{,}0625} - \sqrt[5]{-243}$; б) $\sqrt[4]{256} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$.

1.158. Знайдзіце $\sin x$, калі $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

1.159. Курсы па падрыхтоўцы да цэнтралізаванага тэсціравання арандуюць памяшканні для заняткаў. У першым паўгоддзі за арэнду чатырох памяшканняў па 6 дзён на тыдзень плацілі па 333,6 р. у месяц. Якой будзе арэндная плата за месяц у другім паўгоддзі за 5 памяшканняў па 5 дзён на тыдзень на тых жа ўмовах?

1.160. Пакажыце відарыс графіка цотнай функцыі $y = f(x)$, ведаючы, што:

а) абсяг вызначэння функцыі — $\boldsymbol{R}$;

б) $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 0$;

в) $f(-3) = -2$, $f(0) = -1$ і $f(-5) = 0$.

1.161. Спрасціце выраз:

а) $\left(a - b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a + b^{\frac{1}{4}}\right) + \sqrt{b}$;

б) $\sqrt[3]{a^2} - \left(a^{\frac{1}{3}} - b\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b\right)$.

1.162. Знайдзіце нулі функцыі $y = -7\sin 3x$.

1.163. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{2x+12}=2x+10$; б) $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}=\sqrt{3}$.

1.164. Спрасціце выраз $\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)\cdot\cos x$.

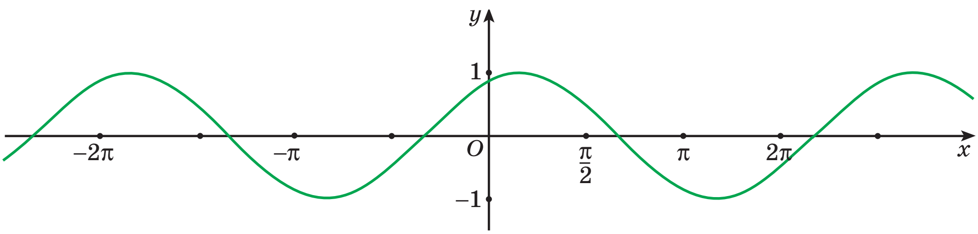
1.165. Знайдзіце вугал, які ўтварае з воссю абсцыс датычная да графіка функцыі $f(x)=2x^2$ у пункце з абсцысай $x_0=\frac{1}{4}$.

1.166. На рысунку 8 паказаны відарыс графіка адной з функцый:

а) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; в) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; д) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Выберыце гэту функцыю.



Рыс. 8

1.167. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases}x^2-7x-18\leqslant 0,\\ x^2\geqslant 4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x-1)(x+2)(x-5)\geqslant 0,\\ x^2\geqslant 5x.\end{cases}$

1.168. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; б) $\cos^2 x-3\sin x-3=0$;

в) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.169. Дадзены пункты $A(-5;\ 0)$ і $B(0;\ 3)$. Запішыце ўраўненне акружнасці, для якой адрэзак AB з'яўляецца радыусам, а цэнтрам з'яўляецца пункт:

а) A; б) B.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:
- ведаць азначэнне ступені з рацыянальным паказчыкам;
- ведаць уласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам;
- ведаць азначэнне лагарыфма ліку;
- ведаць асноўную лагарыфмічную тоеснасць;
- умець прымяняць азначэнне паняцця ступені з дробавым паказчыкам для запісу ступені ў выглядзе кораня і наадварот;
- умець прымяняць уласцівасці ступені для пераўтварэння выразаў, вылічэння значэнняў выразаў;
- ведаць уласцівасці ступеннай функцыі;
- умець выкарыстоўваць пабудову графікаў ступеннай функцыі для розных паказчыкаў;
- умець прымяняць азначэнне лагарыфма ліку для вылічэння значэнняў выразаў і запісу ліку ў выглядзе лагарыфма па зададзенай аснове;
- умець прымяняць асноўную лагарыфмічную тоеснасць для спрашчэння выразу і запісу ліку ў выглядзе ступені ліку з зададзенай дадатнай асновай.

Я правяраю свае веды

1. Выберыце правільную роўнасць:

а) $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}}$; б) $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$;

в) $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}$; г) $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{5}}$.

2. Выберыце правільную роўнасць:

а) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{5^4}$; б) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[5]{4^3}$;

в) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$; г) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{4^5}$.

3. Вылічыце:

а) $\log_2 8$; б) $\log_5 \frac{1}{5}$; в) $\log_3 1$; г) $\lg 0{,}01$.

4. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}}$; б) $10^{1{,}2} : 10^{-0{,}8}$; в) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; г) $5^{-\frac{1}{3}} : 25^{-\frac{2}{3}}$.

5. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = (x - 3)^{-4,8}$; б) $y = (5 - 3x)^{\frac{2}{7}}$; в) $y = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{-\frac{3}{7}}$;

г) $y = (x^2 - 6x + 5)^{-0,9}$; д) $y = (7 - x^2)^{\sqrt{2}}$; е) $y = \left(\frac{x^2-4}{x-1}\right)^{-\sqrt{3}}$.

6. Вылічыце:

а) $3^{4\log_3 2}$; б) $0,01^{\lg 7}$; в) $25^{1 + \log_5 2}$; г) $8^{1 - \log_2 3}$;

д) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_5 27}$; е) $6^{\log_{36} 5}$; ж) $11^{\log_{11} 3 - \log_{\sqrt{11}} 5}$; з) $169^{1 + 0,5\log_{13} 2}$.

7. Скараціце дроб $\dfrac{3x^{\frac{4}{5}} - x}{5\sqrt{x} - 15x^{0,3}}$.

8. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_3 27 - \log_6 \frac{1}{36} + \log_{0,4} 2,5$;

б) $\log_{\sqrt{6}} 36 + \log_{49} 7 - \log_{0,2} 25$;

в) $\log_5^3 25 + \log_2 \log_5 625$;

г) $\log_2^5 0,25 + \log_9 \lg 1000$.

9. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{x - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - 1} - 2\sqrt[3]{x} + 1\right) \cdot \dfrac{x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$.

10. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right)^{2,3} - \left(\frac{16 - x^2}{x + 3}\right)^{-\frac{3}{7}}.$$

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 11» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 11 клас».

ПАКАЗАЛЬНАЯ ФУНКЦЫЯ

§ 4. Паказальная функцыя

2.1. Рашыце ўраўненне:

а) $x^3 = 27$; б) $x^4 = 16$; в) $x^3 = 25$; г) $x^6 = 2$.

2.2. Знайдзіце значэнне ступені:

а) 2^{-3}; б) $25^{-\frac{1}{2}}$; в) $81^{\frac{3}{4}}$; г) $121^{0,5}$; д) $32^{1,2}$.

2.3. Знайдзіце $f(8)$, калі:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = \sqrt{x+17}$; в) $f(x) = -\frac{4}{x}$;

г) $f(x) = x^{-3}$; д) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5$; е) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Разгледзім некаторыя працэсы, якія немагчыма апісаць вывучанымі раней функцыямі.

1. Працэс размнажэння бактэрый. За роўныя прамежкі часу маса калоніі бактэрый павялічваецца ў адну і тую ж колькасць разоў, калі ёсць пастаяннае пажыўнае асяроддзе і бактэрыі не знішчаюцца.

У дадзеным выпадку гаворка ідзе аб працэсе, у ходзе якога значэнне велічыні за роўныя прамежкі часу павялічваецца ў адну і тую ж колькасць разоў. Такія працэсы называюць працэсамі арганічнага росту.

2. Працэс распаду радыеактыўнага рэчыва. За роўныя прамежкі часу маса радыеактыўнага рэчыва памяншаецца ў адну і тую ж колькасць разоў.

У дадзеным выпадку гаворка ідзе аб працэсе, у ходзе якога значэнне велічыні за роўныя прамежкі часу памяншаецца ў адну і тую ж колькасць разоў. Такія працэсы называюць працэсамі арганічнага спадання.

Працэсы арганічных змяненняў апісвае функцыя выгляду $y = a^x$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, якая называецца паказальнай.

Азначэнне. Функцыя выгляду $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ называецца **паказальнай** функцыяй.

Напрыклад, функцыі $y = 2^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$ з'яўляюцца паказальнымі.

Разгледзім уласцівасці і графік паказальнай функцыі.

1. Абсяг вызначэння функцыі. Паколькі для любога $x \in \boldsymbol{R}$ вызначана ступень a^x, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, то $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

2. Мноства значэнняў функцыі. Паколькі для любога $x \in \boldsymbol{R}$ і $a > 0$, $a \neq 1$, значэнне ступені a^x з'яўляецца дадатным лікам і ўраўненне $a^x = y$ мае рашэнне для любога $y > 0$, то $E(y) = (0;\ +\infty)$.

3. Нулі функцыі. Паколькі $a^x > 0$ для любога $x \in \boldsymbol{R}$ і $a > 0$, $a \neq 1$, то ўраўненне $a^x = 0$ не мае каранёў. Значыць, функцыя $y = a^x$ не мае нулёў, г. зн. яе графік не перасякае вось абсцыс.

4. Перасячэнне з воссю ардынат. Пры $x = 0$ атрымаем: $y = a^0 = 1$. Значыць, для любога $a > 0$, $a \neq 1$, графік функцыі $y = a^x$ перасякае вось ардынат у пункце $(0;\ 1)$.

5. Прамежкі знакапастаянства функцыі. Паколькі $a^x > 0$ для любога $x \in \boldsymbol{R}$ і $a > 0$, $a \neq 1$, то $y > 0$ для ўсіх $x \in D(y)$. Такім чынам, графік паказальнай функцыі размяшчаецца вышэй за вось абсцыс на ўсім абсягу вызначэння.

6. Прамежкі манатоннасці функцыі. Разгледзім паказальную функцыю $y = 2^x$. Заўважым, што з павелічэннем значэнняў аргумента значэнні функцыі павялічваюцца: $2^4 > 2^3$; $2^5 > 2^4$; $2^6 > 2^5$ і г. д.

Калі аснова паказальнай функцыі меншая за адзінку, але большая за нуль (напрыклад, $a = \frac{1}{2}$), то з павелічэннем значэнняў аргумента значэнні паказальнай функцыі памяншаюцца: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$ і г. д.

Гэтыя сцверджанні справядлівыя для любых значэнняў аргумента з абсягу вызначэння паказальнай функцыі. Прымем без доказу наступную тэарэму.

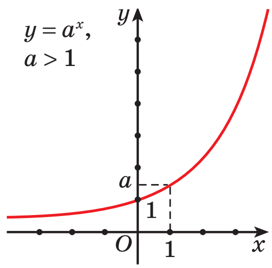
Тэарэма. Калі $a > 1$ і $x_2 > x_1$, $\{x_2;\ x_1\} \in \boldsymbol{R}$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$.

Калі $0 < a < 1$ і $x_2 > x_1$, $\{x_2;\ x_1\} \in \boldsymbol{R}$, то $a^{x_2} < a^{x_1}$.

Паказальная функцыя $y = a^x$ з асновай $a > 1$ нарастае на абсягу вызначэння, а паказальная функцыя $y = a^x$ з асновай $0 < a < 1$ спадае на абсягу вызначэння.

7. Графік функцыі. На рысунку 9 паказаны відарысы графікаў паказальнай функцыі для $a > 1$ і $0 < a < 1$, а таксама адлюстраваны некаторыя яе ўласцівасці.

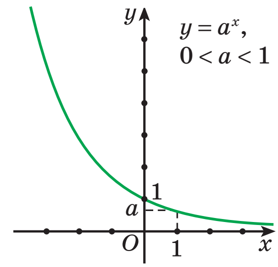
а)



Калі $a > 1$, то функцыя $y = a^x$ нарастае на $\boldsymbol{R}$.

Калі $x > 0$, то $a^x > 1$.
Калі $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.

б)



Калі $0 < a < 1$, то функцыя $y = a^x$ спадае на $\boldsymbol{R}$.

Калі $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.
Калі $x < 0$, то $a^x > 1$.

Рыс. 9

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Ці з'яўляецца паказальнай функцыя:

а) $y = 7^x$; б) $y = x^5$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y = 2$?

Рашэнне. а) Паколькі функцыя $y = 7^x$ мае выгляд $y = a^x$, дзе $a = 7$, то яна з'яўляецца паказальнай функцыяй.

б) Функцыя $y = x^5$ не з'яўляецца паказальнай, паколькі мае выгляд $y = x^n$, г. зн. з'яўляецца ступеннай функцыяй.

в) Функцыя $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ мае выгляд $y = a^x$, дзе $a = \frac{1}{3}$, значыць, яна з'яўляецца паказальнай функцыяй.

г) Функцыя $y = 2$ не з'яўляецца паказальнай, паколькі гэта лінейная функцыя $y = kx + b$, дзе $k = 0$, $b = 2$.

2. Паказальная функцыя зададзена формулай $f(x) = 7^x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(2)$; в) $f(0)$; г) $f(-2)$;

д) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $f(-0{,}5)$; ж) $f\left(\log_7 5\right)$; з) $f(2\log_7 3)$.

Рашэнне.

а) $f(1) = 7^1 = 7$; б) $f(2) = 7^2 = 49$;

в) $f(0) = 7^0 = 1$; г) $f(-2) = 7^{-2} = \frac{1}{49}$;

д) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; е) $f(-0{,}5) = 7^{-0{,}5} = 7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$;

ж) $f\left(\log_7 5\right) = 7^{\log_7 5} = 5$; з) $f(2\log_7 3) = 7^{2\log_7 3} = \left(7^{\log_7 3}\right)^2 = 3^2 = 9$.

3. З дадзеных пунктаў выберыце тыя, што належаць графіку функцыі $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B(-2;\ 25)$; в) $C(-1;\ -5)$;

г) $D\left(\log_{0,2} 3;\ 3\right)$; д) $P\left(\log_5 7;\ 7\right)$; е) $E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Рашэнне. а) Падставім у формулу $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ значэнне аргумента $x = 0$ і знойдзем адпаведнае значэнне функцыі $y = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$. Атрыманы лік супадае з ардынатай пункта A, значыць, пункт $A(0;\ 1)$ належыць графіку функцыі.

б) Пры $x = -2$ значэнне функцыі $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$. Пункт $B(-2;\ 25)$ належыць графіку функцыі.

в) Пры $x = -1$ атрымаем $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \neq -5$. Пункт $C(-1;\ -5)$ не належыць графіку функцыі.

г) Пры $x = \log_{0,2} 3$ па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці маем $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{0,2} 3} = 0,2^{\log_{0,2} 3} = 3$. Пункт $D\left(\log_{0,2} 3;\ 3\right)$ належыць графіку функцыі.

д) Пры $x = \log_5 7$ па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці і ўласцівасці ступені маем $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 7} = \left(5^{-1}\right)^{\log_5 7} = \left(5^{\log_5 7}\right)^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7} \neq 7$. Пункт $P(\log_5 7;\ 7)$ не належыць графіку функцыі.

е) Пры $x = \frac{1}{2}$ значэнне функцыі $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Пункт $E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ належыць графіку функцыі.

4. Вызначце, нарастальнай ці спадальнай з'яўляецца паказальная функцыя:

а) $y = 5^x$; б) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$; в) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$; г) $y = 0,53^x$.

Рашэнне. а) Паказальная функцыя $y = 5^x$ з'яўляецца нарастальнай, паколькі яе аснова большая за адзінку ($a = 5 > 1$).

б) Паказальная функцыя $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ з'яўляецца спадальнай, паколькі яе аснова $a = \frac{2}{7}$ меншая за адзінку і большая за нуль $\left(0 < \frac{2}{7} < 1\right)$.

в) Паказальная функцыя $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ з'яўляецца нарастальнай, паколькі яе аснова большая за адзінку $\left(a = \sqrt{3} > 1\right)$.

г) Паказальная функцыя $y = 0,53^x$ з'яўляецца спадальнай, паколькі яе аснова $a = 0,53$ меншая за адзінку і большая за нуль $(0 < 0,53 < 1)$.

5. Параўнайце:

а) $f(3,5)$ і $f(4,2)$, калі $f(x) = 0,3^x$;

б) $g(10,8)$ і $g(12,9)$, калі $g(x) = \left(\sqrt{13}\right)^x$.

Рашэнне. а) Функцыя $f(x) = 0{,}3^x$ спадае на мностве рэчаісных лікаў $(a = 0{,}3 \in (0;\ 1))$. Паколькі $3{,}5 < 4{,}2$, то $f(3{,}5) > f(4{,}2)$.

б) Функцыя $g(x) = \left(\sqrt{13}\right)^x$ нарастае на мностве рэчаісных лікаў $\left(a = \sqrt{13} > 1\right)$ і $10{,}8 < 12{,}9$, таму $g(10{,}8) < g(12{,}9)$.

6. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $f(x) = 5^{x+2} - 3$.

Рашэнне. Пры $x \in \boldsymbol{R}$ правільнай з'яўляецца няроўнасць $5^{x+2} > 0$, тады $5^{x+2} - 3 > -3$, г. зн. $E(f) = (-3;\ +\infty)$.

7. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = 2^x$ на прамежку $[-1;\ 5]$;

б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ на прамежку $[-2;\ 3]$.

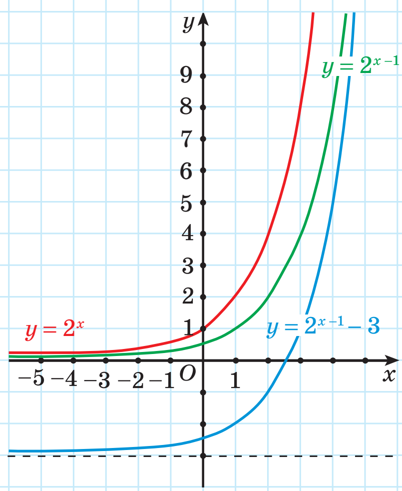
Рашэнне. а) Паколькі $y = 2^x$ — нарастальная функцыя, а $-1 \leqslant x \leqslant 5$, то $2^{-1} \leqslant 2^x \leqslant 2^5$; $\frac{1}{2} \leqslant 2^x \leqslant 32$, г. зн. $E = [0{,}5;\ 32]$.

б) Паколькі $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ — спадальная функцыя, а $-2 \leqslant x \leqslant 3$, то $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^3$; $\frac{1}{27} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 9$, г. зн. $E = \left[\frac{1}{27};\ 9\right]$.

8. Пабудуйце графік функцыі

$$y = 2^{x-1} - 3.$$

Рашэнне. Графік функцыі $y = 2^{x-1} - 3$ атрымліваем з графіка функцыі $y = 2^x$ зрухам яго на 1 адзінку ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат (рыс. 10).



Рыс. 10

9*. З дадзеных прамых выберыце тую, якую не перасякае графік функцыі $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$:

а) $x = -2$; б) $x = \frac{1}{2}$;

в) $y = 0{,}25$; г) $y = -3$;

д) $y = 0{,}1$.

Рашэнне. Паколькі абсягам вызначэння функцыі $y = a^x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, то яе графік перасякае любую прамую выгляду $x = b$ $(b \in \boldsymbol{R})$.

Мноствам значэнняў функцыі $y = a^x$ з'яўляецца прамежак $(0;\ +\infty)$, значыць, яе графік перасякае любыя прамыя выгляду $y = m$ $(m > 0)$ і не перасякае прамыя выгляду $y = m$ $(m \leqslant 0)$.

Такім чынам, графік дадзенай функцыі не перасякае прамую $y = -3$.

10*. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = \left(\sqrt{3}\right)^{2 - x^2 + 4x}$.

Рашэнне. Пераўтворым і ацэнім выраз $2 - x^2 + 4x =$

$= -x^2 + 4x - 4 + 6 = -(x-2)^2 + 6 \leqslant 6$ для $x \in \boldsymbol{R}$.

Паколькі функцыя $y = \left(\sqrt{3}\right)^t$ нарастае на абсягу вызначэння, то

$\left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x} \leqslant \left(\sqrt{3}\right)^6;$ $\quad y \leqslant \left(\sqrt{3}\right)^6;$ $\quad y \leqslant 27.$

Найбольшым значэннем дадзенай функцыі з'яўляецца лік 27.

?

1. Ці праўда, што пры любым значэнні a $(a > 0,\ a \neq 1)$ графік паказальнай функцыі $y = a^x$ праходзіць праз пункт $A(0;\ 1)$?

2. На падставе якой уласцівасці паказальнай функцыі можна сцвярджаць, што:

а) $\left(\frac{5}{7}\right)^{7,8} > \left(\frac{5}{7}\right)^{9,2}$; б) $1,2^{4,6} > 1,2^{3,4}$?

2.4. З дадзеных функцый выберыце ўсе паказальныя функцыі:

а) $y = x^4$; б) $y = \sqrt{x-5}$; в) $y = \frac{8}{x}$;

г) $y = 5^x$; д) $y = 2x$; е) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2.5. Паказальная функцыя зададзена формулай $f(x) = 5^x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(3)$; в) $f(0)$;

г) $f(-1)$; д) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $f\left(\log_5 7\right)$.

2.6. Вядома, што $g(x) = 0,25^x$. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $g(-2)$ і $3g(0)$; б) $g(1) + g(-3)$ і $g(\log_4 3)$.

2.7. Выберыце функцыю, графіка якой няма на рысунку 11:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = 3^x$;

в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; г) $y = 0{,}2^x$.

Рыс. 11

2.8. Пабудуйце відарыс графіка функцыі:

а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2.9. Ці належыць графіку функцыі $y = 2^x$ пункт:

а) $A(2;\ 32)$; б) $B(-3;\ 0{,}125)$;

в) $C\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{2}\right)$; г) $D(\log_2 15;\, 15)$?

2.10. З дадзеных пунктаў выберыце пункты, якія належаць графіку функцыі $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B(-1;\ 7)$; в) $C(-2;\ -49)$;

г) $D\left(\log_{\frac{1}{7}} 5;\ 5\right)$; д) $E\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$; е) $F\left(-\frac{1}{3};\ -21\right)$.

2.11. Ці праходзіць графік функцыі $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$ праз пункт A, калі:

а) $A(0;\ 1)$; б) $A(2;\ 5)$; в) $A\left(-4;\ -\frac{1}{25}\right)$;

г) $A\left(\frac{1}{2};\ \sqrt[4]{5}\right)$; д) $A\left(3;\ 5\sqrt{5}\right)$; е) $A\left(\log_5 9;\ 3\right)$?

2.12. Пабудуйце відарыс графіка функцыі:

а) $y = 2^{-x}$; б) $y = 2^{2x}$; в) $y = \left(\sqrt{3}\right)^{-2x}$; г) $y = 81 \cdot 3^{x-4}$.

2.13. Вызначце, нарастальнай ці спадальнай з'яўляецца паказальная функцыя:

а) $y = 1{,}3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$; в) $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$;

г) $y = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^x$; д) $y = \left(\sqrt{10} - 3\right)^x$; е) $y = \left(\sqrt[4]{5}\right)^x$.

2.14. Выкарыстаўшы ўласцівасці паказальнай функцыі, параўнайце значэнні выразаў:

а) 2^{-9} і $2^{-6,7}$; б) $4^{-1,2}$ і $4^{0,01}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ і $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,2}$;

г) $5^{\sqrt{3}}$ і $5^{1,7}$; д) $0{,}2^{-\sqrt{5}}$ і $0{,}2^{-2,5}$.

2.15. Параўнайце значэнні $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1,5}$; $y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$; $y_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,7}$ паказальнай функцыі $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ і размясціце іх у парадку нарастання.

2.16. Параўнайце m і n, калі:

а) $0,8^m > 0,8^n$; б) $7,1^m < 7,1^n$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^m < \left(\frac{1}{3}\right)^n$;

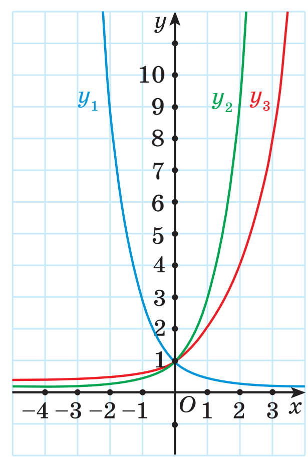
г) $\left(\sqrt{2}\right)^m > \left(\sqrt{2}\right)^n$; д) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^m < \left(\sqrt[3]{5}\right)^n$; е) $0,1^m > 0,1^n$.

2.17. Выкарыстайце ўласцівасці паказальнай функцыі і параўнайце значэнне лікавага выразу з адзінкай:

а) $4^{-1,7}$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{1,2}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4,5}$; г) $1,7^{-\frac{1}{5}}$; д) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\sqrt{3}}$.

2.18. Знайдзіце, пры якім значэнні a графік функцыі $y = a^x$ праходзіць праз пункт:

а) $P(1;\ 2)$; б) $B(-2;\ 4)$; в) $K\left(-3;\ \frac{1}{27}\right)$.



Рыс. 12

2.19. На рысунку 12 паказаны відарысы графікаў функцый выгляду $y = a^x$. Вызначце a для кожнай з іх.

2.20. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

а) $y = 3^x$; б) $y = 3^{x-2}$; в) $y = 3^x + 4$.

2.21. Вызначце, ці перасякае графік функцыі $y = 3^x$ прамую:

а) $x = 3$; б) $y = 2$; в) $x = -15$;
г) $y = 34$; д) $x = -57,2$; е) $y = -6$.

2.22. Пабудуйце графік функцыі $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 2$ і апішыце яе ўласцівасці.

2.23. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$ зрухам яго на 4 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ і прамой $x = -6$.

2.24. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = 5^x - 8$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$; в) $y = 7^{x-9} - 2$;

г) $y = -4^x$; д) $y = -\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} + 7$; е) $y = -0,3^{x-6} - 3$.

2.25. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат:

а) $y = 4^x - 3$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 1$; в) $y = 5^{x+1} - 6$.

2.26. Выберыце паслядоўнасць дзеянняў і знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = 2^x$ на адрэзку $[-2; 3]$; б) $y = 3^{-x}$ на адрэзку $[-1; 2]$.

2.27*. Выкарыстайце ўласцівасці трыганаметрычных і паказальнай функцый і знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі на $\boldsymbol{R}$:

а) $y = 5^{\sin x}$; б) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{\cos x}$; в) $y = 4^{\sin x + 2}$;

г) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x - 1}$; д) $y = 3^{\sin x} - 4$; е) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{\cos x} + 5$.

2.28*. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 3^{|x|}$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$; в) $y = \left|3^x - 2\right|$; г) $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 4\right|$.

2.29*. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = 6^{|x|}$; б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|} - 2$; в) $y = 4^{x^2+3}$; г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{(x-2)^2-3}$.

2.30*. Вызначце, якія з дадзеных функцый з'яўляюцца цотнымі, якія — няцотнымі, а якія не з'яўляюцца ні цотнымі, ні няцотнымі:

а) $y = 5^x + 5^{-x}$; б) $y = 3^x - 3^{-x}$; в) $y = 7^{|x|} + 6$; г) $y = 2^{|x-8|}$.

2.31*. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = 5^{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = 2^{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

2.32*. Схематычна пакажыце відарыс графіка функцыі:

а) $y = 2^{x-|x|}$; б) $y = 0{,}5^{\frac{x^2}{|x|}}$.

2.33. Паказальная функцыя зададзена формулай $f(x) = 2^x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(5)$; в) $f(0)$; г) $f(-1)$;

д) $f(-3)$; е) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; ж) $f(\log_2 5)$; з) $f(\log_{0,5} 3)$.

2.34. Вядома, што $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $g(4)$ і $7g(0)$; б) $g(-1) + g(-2)$ і $g(\log_3 2)$.

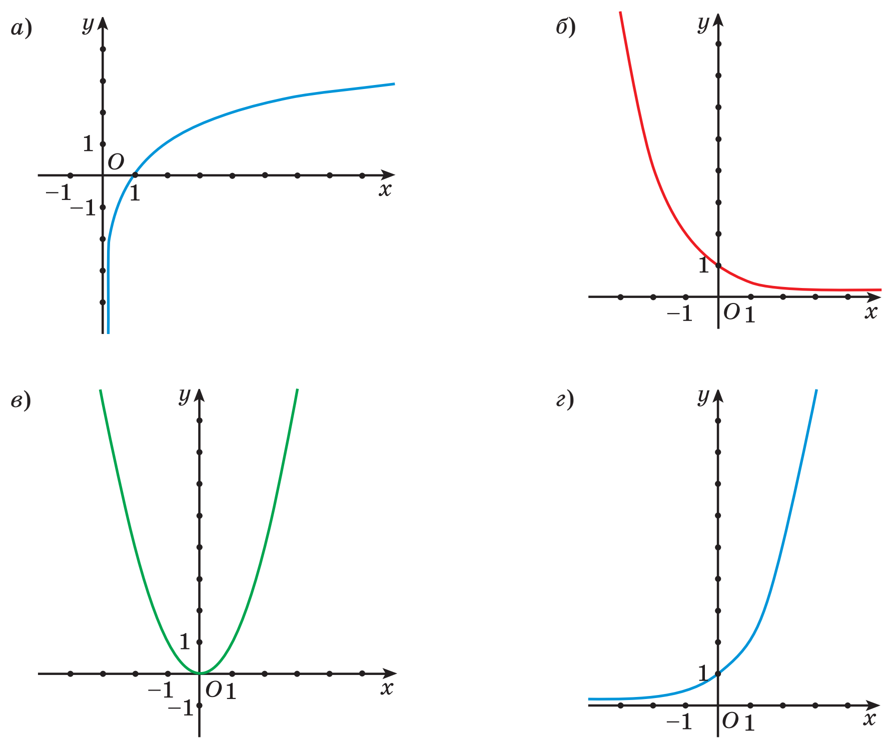
2.35. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

2.36. Ці праходзіць графік функцыі $y = 3^x$ праз пункт:

а) $A\left(-2;\ \frac{1}{9}\right)$; б) $B(4;\ 81)$; в) $C\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$; г) $D(\log_3 8;\ 8)$?

2.37. Сярод рысункаў 13, *а—г* выберыце той, на якім паказаны графік функцыі $y = a^x$, дзе $0 < a < 1$.



Рыс. 13

2.38. З дадзеных пунктаў выберыце тыя, што належаць графіку функцыі $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B(-1;\ -9)$; в) $C(-2;\ 81)$;

г) $D\left(\log_{\frac{1}{9}} 7;\ 7\right)$; д) $E\left(\frac{1}{2};\ 3\right)$; е) $P(\log_9 7;\ 7)$.

2.39. Выканайце пераўтварэнне формулы і пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 3^{-x}$; б) $y = 8 \cdot 2^{x-3}$.

2.40. Вызначце, нарастальнай ці спадальнай з'яўляецца паказальная функцыя:

а) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$; б) $y = 5^x$; в) $y = 3{,}2^x$;

г) $y = 0{,}07^x$; д) $y = \left(\sqrt{5}\right)^x$; е) $y = \left(3 - \sqrt{2}\right)^x$.

2.41. Выкарыстаўшы ўласцівасці паказальнай функцыі, параўнайце значэнні выразаў:

а) $3^{8,1}$ і $3^{8,01}$; б) $0{,}2^{-1,3}$ і $0{,}2^{0,5}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ і $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,2}$; г) $7^{\sqrt{2}}$ і $7^{1,4}$.

2.42. Параўнайце значэнні $y_1 = 2^{\sqrt{3}}$; $y_2 = 2^{1,8}$; $y_3 = 2^{1,5}$; $y_4 = 2^{0,99}$ паказальнай функцыі $y = 2^x$ і размясціце іх у парадку спадання.

2.43. Параўнайце m і n, калі:

а) $0{,}15^m < 0{,}15^n$; б) $5{,}6^m < 5{,}6^n$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^m > \left(\frac{1}{7}\right)^n$; г) $\left(\sqrt{5}\right)^m < \left(\sqrt{5}\right)^n$.

2.44. Выкарыстайце ўласцівасці паказальнай функцыі і параўнайце значэнне лікавага выразу з адзінкай:

а) $5^{-2,8}$; б) $0{,}3^{2,7}$; в) $5{,}4^{-0,6}$; г) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{0,2}$.

2.45. Графік функцыі $y = a^x$ праходзіць праз пункт $A(4;\ 25)$. Ці праходзіць гэты графік праз пункт:

а) $C(6;\ 125)$; б) $B(-6;\ 0{,}008)$?

2.46. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.

2.47. Пабудуйце графік функцыі $y = 2^{x-3} - 4$ і апішыце яе ўласцівасці.

2.48. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x - 3$; б) $y = 7^{x-2}$; в) $y = 3^{x+5} + 4$;

г) $y = -\left(\frac{2}{3}\right)^x$; д) $y = -8^{x-7} - 3$; е) $y = -10^{x+3} + 6$.

2.49. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат:

а) $y = 6^x + 2$; б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} - 5$; в) $y = 10^{x+1} + 7$.

2.50. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = 3^x$ на адрэзку $[-2; 1]$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ на адрэзку $[-3; 2]$.

2.51*. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі на $\boldsymbol{R}$:

а) $y = 3^{\sin x}$; б) $y = \left(\frac{3}{8}\right)^{\cos x}$; в) $y = 6^{\sin x + 1}$;

г) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos x - 2}$; д) $y = 2^{\sin x} - 3$; е) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x} + 4$.

2.52*. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 2^{|x|}$; б) $y = \left|2^x - 8\right|$.

2.53*. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = 3^{|x+1|}$; б) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{|x|} + 2$; в) $y = 7^{x^2 - 2}$; г) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{(x+3)^2 - 1}$.

2.54*. Схематычна пакажыце відарыс графіка функцыі $y = 3^{x+|x|}$.

2.55. Запішыце ў выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам выраз $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a}}$.

2.56. Запішыце лікі 1; 25; 625; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{125}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{25}$ у выглядзе ступені з асновай 5.

2.57. Знайдзіце значэнне выразу $81(1 - \cos^2 x)$, калі $\sin x = \frac{5}{9}$.

2.58. Вылічыце:

а) $10^{\lg 5}$; б) $\left(3^{\log_3 2}\right)^2$; в) $8^{\log_2 3}$; г) $3^{2 - \log_3 10}$;

д) $\log_{\sqrt{3}} 9$; е) $\lg 1 + \lg 100$; ж) $\lg 0{,}1 - \lg\sqrt{10}$; з) $\log_5 \lg 10$.

2.59. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі $y = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{8} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{8}$ і прамой $y = \frac{1}{2}$.

2.60. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рэчаісным паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $2^{\sqrt{5}} \cdot 2^{-\sqrt{5}}$; в) $\left(4^{2+\sqrt{3}}\right)^{2-\sqrt{3}}$; г) $3^{2-\sqrt{2}} : 3^{5-\sqrt{2}}$.

2.61. Запішыце ў выглядзе здабытку:

а) $5^{x+1} - 5^{x}$; б) $3^{x-2} + 3^{x}$;
в) $2^{x-1} + 2^{x-1}$; г) $10^{x+2} - 5 \cdot 10^{x}$.

2.62. На выбарах старшыні студэнцкага самакіравання за дзеючага старшыню прагаласавала 69 % прыняўшых удзел у галасаванні. Прычым «за» прагаласавала 94 % студэнтак і 41 % студэнтаў, якія прынялі ўдзел у галасаванні. Каго сярод галасаваўшых было больш — студэнтаў ці студэнтак? На колькі працэнтаў?

2.63. Рашыце дробава-рацыянальнае ўраўненне

$$\frac{4}{x^2 - 10x + 25} + \frac{1}{25 - x^2} = \frac{1}{x + 5}.$$

Прывядзіце прыклад квадратнага ўраўнення, раўназначнага дадзенаму. Ці можна прывесці прыклад лінейнага ўраўнення, раўназначнага дадзенаму?

2.64. Знайдзіце значэнне выразу

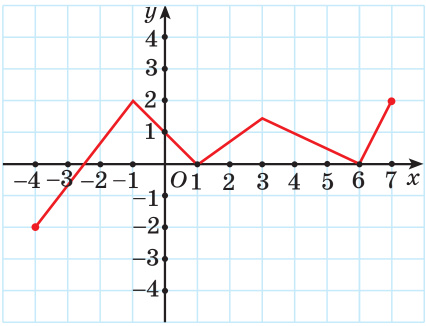
$$3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 6\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) - 4{,}5\pi.$$

2.65. Рашыце няроўнасць:

а) $x^3 - 7x^2 + 6x \leqslant 0$; б) $\dfrac{x^2 - 13x + 30}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0.$

2.66. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графікам на адрэзку $[-4; 7]$ (рыс. 14). Выкарыстаўшы графік, знайдзіце:

а) мноства значэнняў функцыі;
б) нулі функцыі;
в) прамежкі знакапастаянства функцыі;
г) прамежкі манатоннасці функцыі;
д) лік цэлых рашэнняў няроўнасці $f(x) > 1$;
е) лік каранёў ураўнення $f(x) = \dfrac{x}{6}$.



Рыс. 14

2.67. Рашыце аднароднае ўраўненне

$$\sin^2 x + 14\sin x \cos x = 15\cos^2 x.$$

2.68. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + 11y = 92; \end{cases}$ б)* $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21, \\ y^2 - 2xy + 15 = 0. \end{cases}$

2.69. Цела рухаецца па законе $x(t) = t^2 + 9t + 12$ (x вымяраецца ў метрах, t — у секундах). Знайдзіце скорасць цела праз 2 с пасля пачатку руху.

2.70. Рашыце ўраўненне $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x+6} = x + 3$.

§ 5. Паказальныя ўраўненні

2.71. Запішыце ў выглядзе ступені з асновай 2 лік:

а) 16; б) $\frac{1}{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) 1.

2.72. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^{-3}$; б) $\frac{4 \cdot 0{,}25^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{32}}$; в) $\frac{8 \cdot 2^{-3} \cdot \sqrt{8}}{128^{0{,}25}}$.

2.73. Запішыце лік 5 у выглядзе ступені з асновай:

а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 0,7; г) π.

Пры вывучэнні працэсу радыеактыўнага распаду рэчыва разглядаюць функцыю $m(t) = m_0 e^{-kt}$, дзе m — маса радыеактыўнага рэчыва ў момант часу t, m_0 — яго маса ў пачатковы момант часу, k — пастаянная велічыня, e — бясконцы неперыядычны дзесятковы дроб, яго прыбліжанае значэнне роўна 2,71828.

Прамежак часу, праз які маса радыеактыўнага рэчыва памяншаецца ў 2 разы, называецца перыядам паўраспаду T радыеактыўнага рэчыва. Ведаючы k, можна знайсці T. Паколькі $m(T) = \frac{1}{2}m_0$, то $m_0 e^{-kT} = \frac{1}{2}m_0$, адкуль $e^{-kT} = \frac{1}{2}$.

Атрымалі ўраўненне, у якім зменная T знаходзіцца ў паказчыку ступені, такое ўраўненне называецца *паказальным*. Многія практычныя задачы прыводзяць да неабходнасці рашэння паказальных ураўненняў.

Разгледзім некаторыя віды паказальных ураўненняў і спосабы іх рашэння.

1. Ураўненне выгляду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, дзе $a \neq 1, a > 0$

Паколькі паказальная функцыя $y = a^t$ з'яўляецца нарастальнай пры $a > 1$ ці з'яўляецца спадальнай пры $0 < a < 1$, то з роўнасці значэнняў функцый $a^{t_1} = a^{t_2}$ вынікае роўнасць значэнняў аргументаў $t_1 = t_2$. Справядліва і адваротнае: калі $t_1 = t_2$, то $a^{t_1} = a^{t_2}$.

Значыць, ураўненне $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, дзе $a \neq 1$, $a > 0$, раўназначна ўраўненню $f(x) = g(x)$.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a \neq 1,\ a > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) = g(x)$$

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне:

а) $5^{x-2} = 5^{3x+4}$; б) $3^{2x} = 81$; в) $2^x = 5$.

Рашэнне. а) $5^{x-2} = 5^{3x+4} \Leftrightarrow x - 2 = 3x + 4 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$.

Адказ: -3.

б) Запішам лік 81 у выглядзе ступені з асновай 3 і атрымаем: $81 = 3^4$. Тады дадзенае ўраўненне атрымае выгляд $3^{2x} = 3^4$, адсюль $2x = 4$; $x = 2$.

Адказ: 2.

в) Запішам лік 5 у выглядзе ступені з асновай 2. Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці атрымаем: $5 = 2^{\log_2 5}$. Тады дадзенае ўраўненне атрымае выгляд: $2^x = 2^{\log_2 5}$, значыць, $x = \log_2 5$.

Адказ: $\log_2 5$.

2. Ураўненні, у якіх можна выканаць замену зменнай

Паказальныя ўраўненні, якія можна прывесці, напрыклад, да выгляду $af^2(x) + bf(x) + c = 0$, дзе a, b, c — некаторыя рэчаісныя лікі, $a \neq 0$, $f(x)$ — паказальная функцыя, можна рашаць метадам замены зменнай.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне $8^{2x} - 6 \cdot 8^x + 5 = 0$.

Рашэнне. Увядзём новую зменную $t = 8^x$, тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $t^2 - 6t + 5 = 0$. Карані гэтага квадратнага ўраўнення $\left[\begin{array}{l} t = 5, \\ t = 1. \end{array}\right.$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $t = 8^x$ і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} 8^x = 5, \\ 8^x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8^x = 8^{\log_8 5}, \\ 8^x = 8^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_8 5, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Адказ: 0; $\log_8 5$.

3. Аднародныя ўраўненні

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне:

а) $7^{x-3} = 2^{x-3}$; б) $3^{2x} - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 2^{2x} = 0$.

Рашэнне. а) Ураўненне $7^{x-3} = 2^{x-3}$ з'яўляецца аднародным ураўненнем першай ступені. Падзелім абедзве часткі ўраўнення на выраз 2^{x-3}:

$$7^{x-3} = 2^{x-3} \Leftrightarrow \frac{7^{x-3}}{2^{x-3}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^{x-3} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^{x-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Адказ: 3.

б) Ураўненне $3^{2x} - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 2^{2x} = 0$ з'яўляецца аднародным ураўненнем другой ступені. Запішам выраз 6^x у выглядзе $6^x = 3^x \cdot 2^x$. Падзелім абедзве часткі ўраўнення на выраз 2^{2x}:

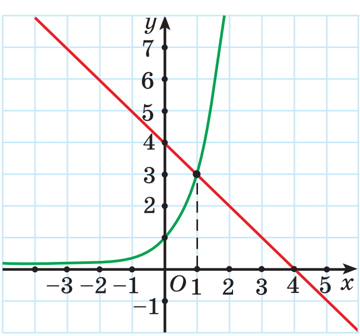
$$3^{2x} - 2 \cdot 3^x \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - \frac{2 \cdot 3^x \cdot 2^x}{2^{2x}} - 3 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 3 = 0.$$

Увядзём новую зменную $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $t^2 - 2t - 3 = 0$. Карані гэтага квадратнага ўраўнення $\left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = -1. \end{array}\right.$ Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_{\frac{3}{2}} 3, \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

Адказ: $\log_{\frac{3}{2}} 3$.

4*. Ураўненні, пры рашэнні якіх прымяняюцца ўласцівасці функцый



Рыс. 15

Прыклад 4. Рашыце ўраўненне $3^x = 4 - x$.

Рашэнне. Паказальная функцыя $y = 3^x$ нарастае на мностве рэчаісных лікаў, паколькі аснова $a = 3 > 1$ (рыс. 15). Лінейная функцыя $y = 4 - x$ спадае на мностве рэчаісных лікаў, паколькі $k = -1 < 0$. Таму, калі ўраўненне $3^x = 4 - x$ мае корань, то ён адзіны. Відавочна, што лік 1 задавальняе дадзенае ўраўненне. Лік 1 з'яўляецца адзіным коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ: 1.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Рашыце ўраўненне:

а) $2^x = \frac{1}{2}$; б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = 1{,}25$; в) $3^x = -2$; г) $\left(\sqrt{3}\right)^x = 1$;

д) $7^{2x} = 11$; е) $8^x = 2$; ж) $9^{x+7} = \frac{1}{27}$; з) $0{,}2^{4x-1} = 25$.

Рашэнне. а) $2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$

Адказ: –1.

б) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = 1{,}25 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$

Адказ: –1.

в) $3^x = -2$, паколькі мноствам значэнняў функцыі $y = 3^x$ з'яўляецца мноства дадатных лікаў, то ўраўненне каранёў не мае.
Адказ: $\varnothing$.

г) $\left(\sqrt{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Адказ: 0.

д) $7^{2x} = 11 \Leftrightarrow 7^{2x} = 7^{\log_7 11} \Leftrightarrow 2x = \log_7 11 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log_7 11.$

Адказ: $\frac{1}{2}\log_7 11$.

е) $8^x = 2 \Leftrightarrow \left(2^3\right)^x = 2 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

Адказ: $\frac{1}{3}$.

ж) $9^{x+7} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(3^2\right)^{x+7} = 3^{-3} \Leftrightarrow 3^{2x+14} = 3^{-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 14 = -3 \Leftrightarrow 2x = -17 \Leftrightarrow x = -8{,}5.$

Адказ: –8,5.

з) $0{,}2^{4x-1} = 25 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-1} = 25 \Leftrightarrow \left(5^{-1}\right)^{4x-1} = 5^2 \Leftrightarrow 5^{-4x+1} = 5^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4x + 1 = 2 \Leftrightarrow -4x = 1 \Leftrightarrow x = -0{,}25.$

Адказ: –0,25.

2. Рашыце ўраўненне:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+x^2}=\frac{1}{4}$; б) $(0{,}4)^{\frac{3x-1}{5}}=(2{,}5)^{x+1}$; в) $0{,}01^{x+6}=\sqrt{10^{2x-7}}$;

г) $(0{,}25)^{-x}=\frac{1}{\sqrt[3]{4^{3x-1}}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\cdot 3^{2x+5}=27^{-1}$; е) $12^{x-2}=3^{3x}\cdot 2^{6x}$.

Рашэнне. а) Запішам лік $\frac{1}{4}$ у выглядзе ступені з асновай $\frac{1}{2}$ і атрымаем: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, тады $x+x^2=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1. \end{array}\right.$

Адказ: -2; 1.

б) $(0{,}4)^{\frac{3x-1}{5}}=(2{,}5)^{x+1}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3x-1}{5}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x+1}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3x-1}{5}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-x-1}$;

$\frac{3x-1}{5}=-x-1$; $3x-1=-5x-5$; $8x=-4$; $x=-\frac{1}{2}$.

Адказ: $-0{,}5$.

в) $0{,}01^{x+6}=\sqrt{10^{2x-7}}$; $(10^{-2})^{x+6}=(10^{2x-7})^{\frac{1}{2}}$;

$10^{-2x-12}=10^{\frac{2x-7}{2}}$; $-2x-12=\frac{2x-7}{2}$;

$-4x-24=2x-7$; $-6x=17$; $x=-2\frac{5}{6}$.

Адказ: $-2\frac{5}{6}$.

г) $(0{,}25)^{-x}=\frac{1}{\sqrt[3]{4^{3x-1}}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=\frac{1}{4^{\frac{3x-1}{3}}}$; $4^x=4^{-\frac{3x-1}{3}}$;

$x=-\frac{3x-1}{3}$; $3x=-3x+1$; $x=\frac{1}{6}$.

Адказ: $\frac{1}{6}$.

д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\cdot 3^{2x+5}=27^{-1}$; $3^{-x^2}\cdot 3^{2x+5}=3^{-3}$; $3^{-x^2+2x+5}=3^{-3}$;

$-x^2+2x+5=-3$; $x^2-2x-8=0$; $\left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-2. \end{array}\right.$

Адказ: -2; 4.

е) $12^{x-2} = 3^{3x} \cdot 2^{6x}$; $12^{x-2} = 3^{3x} \cdot 4^{3x}$; $12^{x-2} = 12^{3x}$; $x - 2 = 3x$; $x = -1$.

Адказ: –1.

3. Рашыце ўраўненне:

а) $3^{x+2} - 3^x = 72$; б) $7 \cdot 5^x + 90 = 5^{x+2}$.

Рашэнне. а) $3^{x+2} - 3^x = 72$; $3^x \cdot 3^2 - 3^x = 72$; $3^x \cdot (3^2 - 1) = 72$; $3^x \cdot 8 = 72$; $3^x = 9$; $x = 2$.

Адказ: 2.

б) $7 \cdot 5^x + 90 = 5^{x+2}$; $5^{x+2} - 7 \cdot 5^x = 90$; $5^x \cdot 5^2 - 7 \cdot 5^x = 90$; $5^x \cdot (5^2 - 7) = 90$; $5^x \cdot (25 - 7) = 90$; $5^x \cdot 18 = 90$; $5^x = 5$; $x = 1$.

Адказ: 1.

4. Рашыце ўраўненне, выканаўшы замену зменнай:

а) $16^x + 4^x = 20$; б) $2 \cdot 3^{x+2} - 6 \cdot 9^x = 12$;

в) $9 - 2^x = 2^{3-x}$; г)* $2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33$.

Рашэнне. а) $16^x + 4^x = 20$; $4^{2x} + 4^x - 20 = 0$, няхай $4^x = t$, тады $t^2 + t - 20 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -5, \\ t = 4. \end{array}\right.$

Паколькі $t > 0$, то $4^x = 4$; $x = 1$.

Адказ: 1.

б) $2 \cdot 3^{x+2} - 6 \cdot 9^x = 12 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^x \cdot 9 - 6 \cdot 9^x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 \cdot 3^x - 6 \cdot 9^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 9^x - 3 \cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$.

Увядзём новую зменную $3^x = t$, атрымаем ураўненне $t^2 - 3t + 2 = 0$, яго карані $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $3^x = t$, атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 1, \\ 3^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3^0, \\ 3^x = 3^{\log_3 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \log_3 2. \end{array}\right.$$

Адказ: 0; $\log_3 2$.

в) $9 - 2^x = 2^{3-x}$; $9 - 2^x = \frac{8}{2^x}$; няхай $2^x = t$, тады $9 - t = \frac{8}{t}$; $t^2 - 9t + 8 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t = 8, \\ t = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^x = 8, \\ 2^x = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 0. \end{array}\right.$

Адказ: 0; 3.

г)* $2 \cdot 4^{1+\sin x} + 4^{1-\sin x} = 33 \Leftrightarrow 8 \cdot 4^{\sin x} + \frac{4}{4^{\sin x}} - 33 = 0.$

Увядзём новую зменную $t = 4^{\sin x}$, атрымаем ураўненне

$8 \cdot t + \frac{4}{t} - 33 = 0$; $8t^2 - 33t + 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = \frac{1}{8}. \end{array}\right.$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $t = 4^{\sin x}$, атрымаем

$$\left[\begin{array}{l} 4^{\sin x} = 4, \\ 4^{\sin x} = \frac{1}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = -1{,}5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Рашыце ўраўненне:

а) $3^{1-x} = 5^{x-1}$; б) $3 \cdot 5^{2x+1} - 2 \cdot 10^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} = 0$.

Рашэнне. а) *Першы спосаб.* $3^{1-x} = 5^{x-1} \Leftrightarrow 3^{1-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$.

Атрыманае ўраўненне з'яўляецца аднародным ураўненнем першай ступені. Падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}$:

$$3^{1-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} \Leftrightarrow 15^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 15^{1-x} = 15^0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Адказ: 1.

Другі спосаб. Функцыю $y = 3^{1-x}$ можна запісаць у выглядзе $y = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Дадзеная функцыя спадае на $\boldsymbol{R}$. Функцыю $y = 5^{x-1}$ можна запісаць у выглядзе $y = \frac{1}{5} \cdot 5^x$. Дадзеная функцыя нарастае на $\boldsymbol{R}$, таму, калі ўраўненне $3^{1-x} = 5^{x-1}$ мае корань, то ён адзіны. Відавочна, што лік 1 задавальняе дадзенае ўраўненне, значыць, $x = 1$ — адзіны корань дадзенага ўраўнення.

Адказ: 1.

б) $3 \cdot 5^{2x+1} - 2 \cdot 10^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 10 \cdot 10^x + 5 \cdot 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 5^{2x} - 4 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2^{2x} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{5^{2x}}{2^{2x}} - 4 \cdot \frac{2^x \cdot 5^x}{2^{2x}} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 1 = 0.$

Увядзём новую зменную $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, атрымаем ураўненне $3t^2 - 4t + 1 = 0.$

Яго карані $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \log_{2,5} \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Адказ: 0; $\log_{2,5} \frac{1}{3}$.

6. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-y} = 9, \\ 6^{9x-y} = \sqrt[4]{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{-x} \cdot 25^{x+y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ в)* $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{4}} + 2^{\frac{x+y}{2}} = 6; \\ 2^x + 2^y = 17. \end{cases}$

Рашэнне.

а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-y} = 9, \\ 6^{9x-y} = \sqrt[4]{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{-4x+y} = 3^2, \\ 6^{9x-y} = 6^{\frac{1}{4}}; \end{cases}$ $\begin{cases} -4x + y = 2, \\ 9x - y = \frac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x = 2\frac{1}{4}, \\ -4x + y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{9}{20}, \\ y = 3,8. \end{cases}$

Адказ: $\left(\frac{9}{20}; 3,8\right)$.

б) $\begin{cases} 5^{-x} \cdot 25^{x+y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{-x} \cdot 5^{2x+2y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{x+2y} = 5, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ y^2 - x = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ y^2 + 2y + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ (y+1)^2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$

Адказ: (3; –1).

в)* Няхай $2^{\frac{x+y}{4}} = t$. Тады першае ўраўненне сістэмы атрымае выгляд $t + t^2 = 6$. Рэшым яго: $t + t^2 = 6$; $t^2 + t - 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -3. \end{array}\right.$

Паколькі $t > 0$, то $t = 2$, значыць, $2^{\frac{x+y}{4}} = 2$; $\frac{x+y}{4} = 1$; $x + y = 4$.

Тады $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2^x + 2^y = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^x + 2^y = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^x + 2^{4-x} = 17; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^x + \dfrac{16}{2^x} = 17; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 16 = 0. \end{cases}$

Рэшым другое ўраўненне сістэмы: $2^{2x} - 17\ \ 2^x + 16 = 0$. Няхай $2^x = t$, тады атрымаем ураўненне $t^2 - 17t + 16 = 0$, каранямі якога з'яўляюцца лікі $t = 1$ і $t = 16$. Адкуль:

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ \left[\begin{array}{l} 2^x = 1, \\ 2^x = 16; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Адказ: (0; 4); (4; 0).

7*. Рашыце ўраўненне:

а) $2^x + 3^x + 4^x = 9$; б) $2^x + 5^x = 7^x$.

Рашэнне. а) Функцыя $y = 2^x + 3^x + 4^x$ нарастае на мностве рэчаісных лікаў як сума трох нарастальных функцый, значыць, значэнне $y = 9$ дадзеная функцыя можа прымаць не больш чым у адным пункце.
Такім чынам, зыходнае ўраўненне мае не больш за адзін корань.
Пры $x = 1$ дадзенае ўраўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць, г. зн. 1 — адзіны корань дадзенага ўраўнення.

Адказ: 1.

б) Падзелім абедзве часткі ўраўнення на 7^x і атрымаем ураўненне $\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$

Функцыя $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$ спадае на мностве рэчаісных лікаў як сума дзвюх спадальных функцый, значыць, значэнне $y = 1$ дадзеная функцыя можа прымаць не больш чым у адным пункце.
Такім чынам, зыходнае ўраўненне мае не больш за адзін корань.
Пры $x = 1$ дадзенае ўраўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць, г. зн. 1 — адзіны корань дадзенага ўраўнення.

Адказ: 1.

8*. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} = 4.$$

Рашэнне. Паколькі $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right) = 1$, то $\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$, тады зыходнае ўраўненне прымае выгляд

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{-(x^2-4x+4)} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} = 4.$$

Выканаем замену зменнай і рэшым атрыманае ўраўненне.

Няхай $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4} = t,\ t > 0$, тады $\frac{1}{t} + t = 4;\ t^2 - 4t + 1 = 0;$

$D = 16 - 4\cdot 1\cdot 1 = 12,\ \left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{3}, \\ t = 2-\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Адкуль: $\left[\begin{aligned}&\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=2+\sqrt{3},\\&\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=2-\sqrt{3};\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}&\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=2+\sqrt{3},\\&\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-4x+4}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1};\end{aligned}\right.$

$\left[\begin{aligned}&x^2-4x+4=1,\\&x^2-4x+4=-1;\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}&x^2-4x+3=0,\\&x^2-4x+5=0.\end{aligned}\right.$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў ($D < 0$), а здабытак каранёў першага ўраўнення роўны 3.

Адказ: 3.

1. Ці існуе значэнне x, пры якім:

а) $5^x = 5$; б) $5^x = 1$; в) $5^x = 2$; г) $5^x = -2$?

2. Знайдзіце, калі магчыма, значэнні x, пры якіх:

а) $3^x = 0$; б) $3^x = 1$; в) $3^x = -3$; г) $3^x = \frac{1}{3}$.

2.74. Рашыце паказальнае ўраўненне:

а) $6^x = 36$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; в) $7^x = \sqrt{7}$; г) $125^x = 5$;

д) $0{,}5^x = 2$; е) $7^x = -5$; ж) $3^x = 1$; з) $5^x = 3$;

і) $10^x = 7$; к) $\left(\sqrt{5}\right)^x = 5$; л) $\left(\sqrt[7]{11}\right)^x = 11$; м) $0{,}01^x = 10$.

2.75. Вызначце від ураўнення і рашыце яго:

а) $2^{5x-4} = 32$; б) $7^{4x+9} = \frac{1}{49}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-7} = \frac{1}{8}$;

г) $7^{-0{,}1x+2} = 1$; д) $8^{2x+1} = 2$; е) $81^{5x-4} = \frac{1}{27}$.

2.76. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = \left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}$ і $y = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$; б) $y = 2^{3x-5}$ і $y = 0{,}5^{11-x}$;

в) $y = (0{,}2)^{\frac{2x+1}{3}}$ і $y = 5^{x-2}$; г) $y = 8^{\frac{2x-1}{3}}$ і $y = 0{,}125^{3+x}$.

2.77. Рашыце ўраўненне:

а) $7^{x^2-x}-49=0$; б) $3^{x^2-15}-3=0$; в) $5^{x^2+1}-125=0$;

г) $2^{x^2+7x}-1=0$; д) $5^{9-x^2}-0{,}04=0$; е) $10^{x^2+x}-\sqrt{10}=0$.

2.78. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y=\left(\frac{1}{125}\right)^{2x+1}-25^{4x-3}$; б) $y=\left(\sqrt{3}\right)^{4x+1}-27^{x}$;

в) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3x-5}-2\sqrt{2}$; г) $y=\sqrt[4]{27^{2-x}}-\frac{9}{\sqrt[5]{3}}$.

2.79. Рашыце ўраўненне:

а) $5^{2x}=3$; б) $2^{x-4}=5$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x}=2$; г) $10^{3-x}=7$.

2.80. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-7}$ і прамой $y=\frac{1}{8}$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-6x+6}$ і прамой $y=9$;

в) $y=5^{x^2-5x+6}$ і прамой $y=1$; г) $y=\left(5^{1-x}\right)^{x+1}$ і прамой $y=0{,}008$.

2.81. Прывядзіце левую і правую часткі ўраўнення да ступеней з аднолькавымі асновамі і рашыце яго:

а) $3^{3x^2+2x}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; б) $6^{2x^2+3x}=\left(\frac{1}{36}\right)^{x+1}$; в) $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2x^2}{3}}=25^{-x-6}$;

г)* $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2-6x+4}=\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^{x}$.

2.82. Рашыце ўраўненне:

а) $0{,}2^{\sqrt{2x-3}}=0{,}04$; б) $(3{,}24)^{2\sqrt{x}-5}=\left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}-3}$; в) $3^{\sqrt{4x-7}}=\frac{1}{3^{2x-11}}$.

2.83. Знайдзіце абсцысу пункта перасячэння графіка функцыі:

а) $y=8^{-3}\cdot 4^{x+1}$ і прамой $y=4$;

б) $y=\sqrt{5}\cdot 5^{3x}$ і прамой $y=\frac{1}{5}$;

в) $y=3^{x}:9^{x+1}$ і прамой $y=27$.

2.84. Выкарыстайце ўласцівасці ступеней і рашыце ўраўненне:

а) $\frac{1}{8}\cdot\sqrt{2^{x-1}}=4^{-1{,}25}$; б) $2^{2x^2+5x-1}=0{,}5\sqrt[3]{0{,}25^{2x}}$;

в) $3^{\sqrt{2x-1}}\cdot 27=9^{\sqrt{2x-1}}$; г) $2^{\sqrt{1+8x+2x^2}}=8\cdot 2^{x}$.

2.85. Рашыце ўраўненне:

а) $9^{\sin x} = 3$; б) $0{,}5^{\cos x} = 2$; в) $16^{\sin x \cos x} = 4$; г) $15^{\sin x + \cos x} = 1$.

2.86. Знайдзіце карані ўраўнення, выкарыстаўшы пераўтварэнні ступеней:

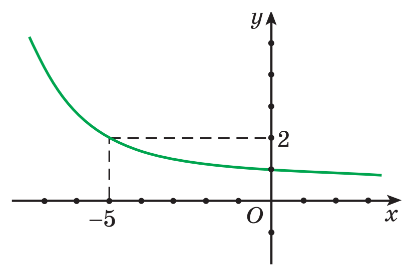
а) $5^x \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = 4$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 2^x = \frac{8}{27}$;

в) $5^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 0{,}01$; г) $0{,}2^{x-3} \cdot 2^{x-3} = \sqrt[3]{0{,}16}$;

д) $\left(\sqrt{7}\right)^{x+2} : 3^{x+2} = \frac{7}{9}$; е) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$;

ж) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$; з) $\frac{100 \cdot 4^{x^2}}{5^{5x}} = \frac{32^x}{25^{x^2}}$.

2.87. На рысунку 16 паказаны відарыс графіка функцыі $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{kx}$. Знайдзіце лік k.



Рыс. 16

2.88. Рашыце ўраўненне:

а) $5^{x+1} - 5^x = 100$;

б) $2^{x+5} - 3 = 2^{x+3}$;

в) $3^x + 2 \cdot 3^{x-3} = 29$.

2.89. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = 2^{2x-3} + 2^{2x+2}$ і прамой $y = 132$;

б) $y = 5^{x+3} + 5^{x+2} + 5^{x+1}$ і прамой $y = \frac{31}{25}$;

в) $y = 4^{5x+1} + 5 \cdot 4^{5x} - 3 \cdot 4^{5x+2}$ і прамой $y = -624$.

2.90. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 2^{2x-y} = 8, \\ 7^{x-y} = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{3x} \cdot 3^y = 3, \\ 2^{3x} \cdot 2^{-y} = 32; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{x+2y} = 4, \\ 3^{-x} \cdot 27^y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^{x+2y} \cdot 81^y = 81, \\ y^2 - x = -13. \end{cases}$

2.91. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$; б) $36^x - 5 \cdot 6^x - 6 = 0$;

в) $49^x + 6 \cdot 7^x - 7 = 0$; г) $9^x - 3^x - 2 = 0$;

д) $25^x - 6 \cdot 5^x - 7 = 0$; е) $4^x - 12 \cdot 2^x + 20 = 0$.

2.92. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = 27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 8$; б) $y = 36^x - 6^{x+1} - 40$;

в) $y = 2^x - 6 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 16$; г) $y = 16^{-x} - 2{,}25 \cdot 4^{-x} + 0{,}5$.

2.93. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \frac{1}{3^{4x} - 7 \cdot 3^{2x} - 18}$; б) $y = \frac{1}{3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} - 0{,}2}$.

2.94. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы прыём рашэння аднародных ураўненняў:

а) $2^{x-2} = 3^{x-2}$; б) $5^{x-3} = 7^{3-x}$;

в) $2^{3x-2} = 5^{x-\frac{2}{3}}$; г) $7^{x^2-2x} = 2^{2x^2-4x}$.

2.95. Вызначце від ураўнення і рашыце яго:

а) $5 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 15^x - 6 \cdot 5^{2x} = 0$; б) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$;

в) $4 \cdot 49^x - 56^x = 3 \cdot 64^x$; г) $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0$.

2.96. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x$ і $y = 5 \cdot 36^x$.

2.97. Знайдзіце нулі функцыі $y = 4^{x+1} - 10 \cdot 6^x + \frac{1}{4} \cdot 9^{x+1}$.

2.98. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $5^x = 6 - x$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 3$.

2.99. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = 4^{x+3} - 2^{2x+2}$ і $y = 15$; б) $y = 2^{x+1} + 2^{x+2}$ і $y = 5^{x+1} + 5^x$;

в) $y = 4^{x+1} - 3^x$ і $y = 3^{x+2} - 4^x$.

2.100. Рашыце ўраўненне:

а) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

б) $25^{x-1} - 9^{2x-2} + 8 \cdot 5^{2x-3} = 4 \cdot 9^{2x-3}$;

в) $\sqrt{3^{46-x}} - 7\sqrt{3^{42-x}} = 162$.

2.101. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = 8^{\frac{2}{x}} - 6 \cdot 8^{\frac{1}{x}} + 8$; б) $y = 7^{4\sqrt{x}} - 8 \cdot 7^{\sqrt{4x}} + 7$.

2.102. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $2^x - 8 \cdot 2^{-x} = 7$; б) $2^{1-x} - 2^{x+3} - 15 = 0$.

2.103. Выканайце замену зменнай і рашыце ўраўненне:

а) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; б) $4^{\sqrt{x-5}} - 4 \cdot 2^{\sqrt{x-5}} = 32$.

2.104*. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $0{,}25^x + 1 = -\frac{5}{x}$; б) $0{,}5^{-x} = \frac{2-3x}{2}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt{x+10}$.

2.105*. Рашыце ўраўненне:

а) $2^{|3x+5|} = 0{,}25^x$; б) $2^{|x|} = 2^{x^2+2x}$.

2.106*. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} + 3^{x-y} = 12; \\ 3^x + 3^{-y} = 10. \end{cases}$

2.107*. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $9 \cdot 5^{x^2-5x+2} - 5 \cdot 9^{x^2-5x+2} = 0$.

2.108*. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $3^{2x^2-4x-3} - 8 \cdot 3^{x^2} - 3^{4x+5} = 0$.

2.109*. Рашыце ўраўненне $a^{2x^2} - 2 \cdot a^{x^2+x+6} + a^{2x+12} = 0$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$.

2.110*. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $2^{|x|} = -x^2 + \frac{1}{2}$; б) $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right| = -x^2 + 1$.

2.111*. Знайдзіце лік каранёў ураўнення:

а) $2^{|x|} = 5 - |x|$; б) $|2^x - 4| = -\frac{2}{3}x + 2$.

2.112*. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x - 1{,}5} \cdot (2^x + 8 \cdot 2^{-x} - 6) = 0$;

б) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 4^{2-x} = 4^{\sqrt{2-x}+2} + x^2 \cdot 2^{-2x}$.

2.113*. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $\sqrt{5^x - 1} = 7 - 5^x$; б) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$;

в) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 34$.

2.114. Рашыце ўраўненне:

а) $4^{x-3} = 64$; б) $7^{x+9} = 1$; в) $7^{x} = 6$;

г) $25^{3,5x+3} = \frac{1}{125}$; д) $8^{0,5x+2} = \frac{1}{16}$; е) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-x} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

2.115. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$ і прамой $y = 16\sqrt{2}$;

б) $y = \left(\sqrt{3}\right)^{x^2-5}$ і прамой $y = \frac{1}{9}$;

в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}$ і прамой $y = \sqrt[4]{2}$.

2.116. Рашыце ўраўненне:

а) $3^{x^2+x} - 9 = 0$; б) $5^{x^2-8} - 5 = 0$; в) $10^{x^2+2x} - 1 = 0$;

г) $2^{7-x^2} - 0,25 = 0$; д) $7^{x^2-1} - 49 = 0$; е) $0,25^{3-x^2} = 16$.

2.117. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = (0,7)^{\frac{2x-3}{4}} - \left(1\frac{3}{7}\right)^{2-x}$; б) $y = 6^{5x^2-5x+2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{1-3x}$;

в) $y = \left(\sqrt[4]{3}\right)^{4x^2+9x-1} - 3^{3x}$; г) $y = \left(\sqrt{5}\right)^{x^2-5x} - 0,04$.

2.118. Рашыце ўраўненне:

а) $0,3^{\sqrt{3x-5}} = 0,09$; б) $2^{\sqrt{3x-5}} = \frac{1}{2^{x-11}}$.

2.119. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = 27^{-3} \cdot 9^{x+2}$ і прамой $y = 81$;

б) $y = 4^{x+2} : 2^{x}$ і прамой $y = 8$;

в) $y = \sqrt{7} \cdot 7^{3x}$ і прамой $y = \frac{1}{7}$.

2.120. Прывядзіце да аднолькавай асновы левую і правую часткі ўраўнення і рашыце яго:

а) $10^{2x} = 0,1 \cdot \sqrt{1000}$; б) $2^{2x^2-5x-1} = 0,5\sqrt[3]{4^{2x}}$;

в) $2^{\sqrt{x+1}} = 16 \cdot \sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}}$.

2.121. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $7^x \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x = 3$; б) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 3^x = \frac{9}{25}$;

в) $5^{x-1} \cdot 2^{x-1} = 1000$; г) $0{,}3^{x+2} \cdot 3^{x+2} = \sqrt[5]{0{,}81}$.

2.122. Рашыце ўраўненне, прывёўшы ступені ў абедзвюх частках ураўнення да ступеней з аднолькавымі асновамі:

а) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^5$; б) $\left(\sqrt{5}\right)^{x+1} : 4^{x+1} = \frac{5}{16}$;

в) $\frac{36 \cdot 27^{x^2}}{4^{5x}} = \frac{3^{10x}}{6 \cdot 8^{x^2}}$.

2.123. Рашыце ўраўненне:

а) $3^{x+2} + 3^{x+3} = 108$; б) $5^{x+2} - 5^x = 120$; в) $2^x + 3 \cdot 2^{x-3} = 22$.

2.124. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = 5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1}$ і прамой $y = 550$;

б) $y = 10^{x+2} - 7 \cdot 10^{x+1} + 10^x$ і прамой $y = 3{,}1$;

в) $y = 5^{3x-2} - 6 \cdot 5^{3x} + 4 \cdot 5^{3x-1}$ і прамой $y = -645$.

2.125. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 3^{x+y} = 81, \\ 2^y = 8^x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5^{2x} \cdot 5^y = 5, \\ 7^x \cdot 7^y = 49; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5^{3x-y} = \sqrt[3]{5}, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-y} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

2.126. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $36^x - 7 \cdot 6^x + 6 = 0$; б) $100^x + 12 \cdot 10^x - 13 = 0$;

в) $16^x - 10 \cdot 4^x + 16 = 0$; г) $25^x - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$;

д) $9^x - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$; е) $25^x - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$.

2.127. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27$; б) $y = 4^x - 2^{x+1} - 15$.

2.128. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \frac{1}{8 - 5 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x}$.

2.129. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы прыём рашэння аднародных ураўненняў:

а) $5^{x+6} = 7^{x+6}$; б) $2^{2x-9} = 3^{9-2x}$; в) $5^{3x^2-15x} = 2^{x^2-5x}$.

2.130. Рашыце ўраўненне:

а) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$; б) $5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 3^{2x} = 0$;

в) $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$; г) $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$.

2.131. Знайдзіце нулі функцыі $y = 2^{2x+1} + 25^{x+0,5} - 7 \cdot 10^x$.

2.132. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 2^{2x+1} + 3^{2x+1}$ і $y = 5 \cdot 6^x$.

2.133. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $2^x = 3 - x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$.

2.134. Рашыце ўраўненне:

а) $81^x - 5^{2x} - 4 \cdot 9^{2x-1} = 4 \cdot 5^{2x-1}$; б) $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162$.

2.135. Знайдзіце нулі функцыі $y = 9^{x^2} - 4 \cdot 3^{x^2} + 3$.

2.136. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} = 8$; б) $2^{x+3} - 2^{1-x} = 15$.

2.137. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 4^x - 3^{x-0,5}$ і $y = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

2.138*. Рашыце ўраўненне $4^{\sqrt{x^2-2}-x} - 5 \cdot 2^{\sqrt{x^2-2}-x-1} = 6$.

2.139*. Рашыце ўраўненне $9^{|x|} = 3^{x^2+3x}$.

2.140*. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $2^{2x^2-2x-4} - 15 \cdot 2^{x^2} - 2^{2x+8} = 0$.

2.141*. Рашыце ўраўненне $\sqrt{x+1} \cdot \left(4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{-x} - 9\right) = 0$.

2.142. Сярод лікаў $\sqrt[3]{7}$; $2,(3)$; π; $-3\frac{1}{7}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; $\sqrt[5]{-3}$ выберыце ўсе ірацыянальныя. Якому лікаваму мноству належаць усе астатнія лікі? Якому лікаваму мноству належаць усе дадзеныя лікі?

2.143. Выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма, знайдзіце:

а) $\log_3 27$; б) $\log_2 0{,}25$; в) $\log_6 \frac{1}{6}$; г) $\lg 10$;

д) $\log_6 1$; е) $\log_5 \sqrt{5}$; ж) $\log_7 \sqrt[9]{7}$; з) $\log_8 2$;

і) $\log_{32} \frac{1}{2}$; к) $\lg 0{,}01$; л) $\log_{0,5} 8$; м) $\log_{\sqrt{7}} 49$.

2.144. Сярод няроўнасцей:

а) $x^2 - x + 5 \leqslant 0$; б) $6x + 3 \geqslant 2(3x + 1)$;

в) $5x^2 \leqslant 0$; г) $(x-3)^2(x+7)^2 < 0$ — выберыце ўсе няроўнасці, раўназначныя няроўнасці $5x - 8 > 7x - 2(x - 9)$.

2.145. Вылічыце:

а) $\lg^2 100$; б) $\log_5^3 25$; в) $\log_4^3 \frac{1}{16}$; г) $\log_2^4 \sqrt{2}$.

2.146. Выкарыстайце формулу рознасці квадратаў і скараціце дроб:

а) $\dfrac{\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$; б) $\dfrac{x + \sqrt[4]{5}}{x^2 - \sqrt{5}}$; в) $\dfrac{\sqrt[6]{m} + \sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}}$; г) $\dfrac{\sqrt{c} - \sqrt{d}}{\sqrt[4]{d} - \sqrt[4]{c}}$.

2.147. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = 4x - \dfrac{x^5}{5}$; б) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2x)$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^3 - 5}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 3}$.

2.148. За студзень, люты і сакавік зарплата работніка сумарна склала 2160 р., а за красавік, май, чэрвень — 2430 р. Пры гэтым па ўмовах кантракта зарплата на працягу года штомесяц павялічваецца на адну і тую ж велічыню. Якой будзе зарплата за верасень?

2.149. Рашыце ўраўненне $\sqrt{1 - x} + 1 = \sqrt{4 - x}$.

2.150. Размясціце лікі $4^{\frac{1}{3}}$; $3^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{6}}$ у парадку нарастання.

2.151. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $10\sin 105^\circ \cdot \cos 465^\circ$; б) $\sin 410^\circ \cdot \sin 230^\circ - \sin 400^\circ \cdot \sin 140^\circ$.

2.152. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} (2x-1)(x+2) \leqslant (x-3)(2x+1), \\ \dfrac{x-5}{3x-2} \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2.153. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{6}}}{2}$ пры $a = 64$.

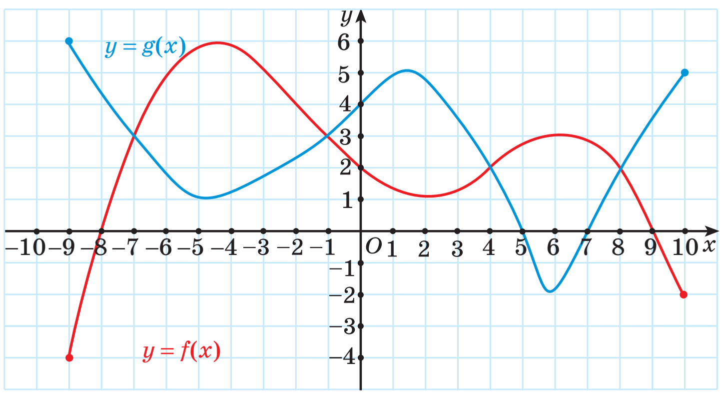
2.154. Рашыце ўраўненне:

а) $4\sin 5x \cos 5x = 1;$ б) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x.$

2.155. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[4]{2x^2 - 5x + 2} - \sqrt[6]{4 - x^2};$ б) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt[5]{x^2 - 9}} + \sqrt[6]{x^2 - 2x - 3}.$

2.156. Функцыі $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зададзены на адрэзку $[-9; 10]$ графікамі (рыс. 17). Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх правільная няроўнасць $g(x) \leqslant f(x)$.



Рыс. 17

2.157. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[5]{64};$ б) $\sqrt[6]{128};$ в) $\sqrt[4]{32a^4b^8c^5}$ пры $a \leqslant 0;$

г) $\sqrt{-a^3};$ д) $\sqrt[4]{-a^{11}};$ е) $\sqrt[5]{-m^{16}}.$

2.158. Рашыце няроўнасць:

а) $x < \dfrac{64}{x};$ б) $\dfrac{2x - 7}{x^2 + 2x - 8} > 1.$

2.159. Для функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$ выберыце ўсе правільныя сцверджанні:
а) абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства рэчаісных лікаў;
б) нулямі функцыі з'яўляюцца лікі выгляду $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

в) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$

г) на прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функцыя нарастае;

д) функцыя з'яўляецца цотнай;

е) графік функцыі не перасякае вось ардынат.

2.160. Знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі:

а) $7;\ 1;\ \frac{1}{7};\ \ldots;$ б) $5\sqrt{5};\ 5;\ \sqrt{5};\ \ldots.$

2.161. Для функцыі $f(x) = \cos^2 x$ знайдзіце:

а) $f\left(\frac{\pi}{4}\right);$ б) $f\left(\frac{\pi}{2}\right);$ в) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right);$ г) $f\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$

2.162*. Знайдзіце значэнне выразу $\cos(\arcsin 0{,}6 + \arccos 0{,}4).$

§ 6. Паказальныя няроўнасці

2.163. Вядома, што функцыя $f(x)$ нарастае на $\boldsymbol{R}$. Параўнайце:

а) $f(4)$ і $f(4{,}001);$ б) $f(-1)$ і $f(-4);$

в) $f(\sqrt{3})$ і $f(2);$ г) $f(-\pi)$ і $f(-3).$

2.164. Вядома, што функцыя $f(x)$ спадае на $\boldsymbol{R}$. Параўнайце:

а) $f(1)$ і $f(1{,}001);$ б) $f(-1{,}1)$ і $f(-2);$

в) $f(-\sqrt{3})$ і $f(-1);$ г) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ і $f(1{,}5).$

2.165. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{x}{3} < -1;$ б) $\frac{x^2}{3} < 3;$ в) $\frac{x^2}{2-x} > 1.$

Пры рашэнні паказальных няроўнасцей выкарыстоўваецца ўласцівасць манатоннасці паказальнай функцыі.

1. Няроўнасць выгляду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right)$, дзе $a \neq 1,\ a > 0$

Паколькі паказальная функцыя $y = a^t$ пры $a > 1$ нарастае на мностве рэчаісных лікаў, то няроўнасць $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ раўназначна няроўнасці $f(x) > g(x)$, г. зн. пры $a > 1$ знак няроўнасці захоўваецца.

Паколькі паказальная функцыя $y = a^t$ пры $0 < a < 1$ спадае на мностве рэчаісных лікаў, то няроўнасць $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ раўназначна няроўнасці $f(x) < g(x)$, г. зн. пры $0 < a < 1$ знак няроўнасці мяняецца.

Прыклад 1. Рашыце няроўнасць $3^{x+2} \geqslant 3^{3x-4}$.

Рашэнне. Паколькі $3 > 1$, то функцыя $y = 3^t$ з'яўляецца нарастальнай, значыць, $3^{x+2} \geqslant 3^{3x-4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 2 \geqslant 3x - 4 \Leftrightarrow 2x \leqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 3]$.

Адказ: $(-\infty;\ 3]$.

Калі $a > 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) > g(x)$$

Прыклад 2. Рашыце няроўнасць $0{,}2^{2x} < 1$.

Рашэнне. Запішам лік 1 у выглядзе ступені з асновай 0,2, тады няроўнасць атрымае выгляд $0{,}2^{2x} < 0{,}2^0$. Паколькі $0{,}2 < 1$, то функцыя $y = 0{,}2^t$ з'яўляецца спадальнай, значыць, $0{,}2^{2x} < 0{,}2^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0;\ +\infty)$.

Адказ: $(0;\ +\infty)$.

Калі $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) < g(x)$$

Прыклад 3. Рашыце няроўнасць $2^{2x} < 7$.

Рашэнне. Выкарыстаем асноўную лагарыфмічную тоеснасць і запішам лік 7 у выглядзе ступені з асновай 2, г. зн. $7 = 2^{\log_2 7}$. Тады дадзеная няроўнасць атрымае выгляд $2^{2x} < 2^{\log_2 7}$. Паколькі $2 > 1$, то функцыя $y = 2^t$ з'яўляецца нарастальнай, такім чынам, $2^{2x} < 2^{\log_2 7} \Leftrightarrow 2x < \log_2 7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}\log_2 7 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{2}\log_2 7\right)$.

Адказ: $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\log_2 7\right)$.

2. Няроўнасці, у якіх можна выканаць замену зменнай

Некаторыя паказальныя няроўнасці можна прывесці да выгляду $af^2(x) + bf(x) + c > 0$, дзе a, b, c — некаторыя рэчаісныя лікі, $a \neq 0$, $f(x)$ — паказальная функцыя, і рашыць метадам замены зменнай.

Прыклад 4. Рашыце няроўнасць:

а) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0$; б) $0{,}5^{2x} - 3 \cdot 0{,}5^x + 2 < 0$.

Рашэнне. а) Увядзём новую зменную $t = 2^x$, тады дадзеную няроўнасць можна запісаць у выглядзе $t^2 - 6t + 8 \leqslant 0$.

Рэшым атрыманую квадратную няроўнасць. Нулямі квадратычнай функцыі $y = t^2 - 6t + 8$ з'яўляюцца лікі 2 і 4.

Рашэнне няроўнасці $t^2 - 6t + 8 \leqslant 0$ — мноства значэнняў аргумента $2 \leqslant t \leqslant 4$.

Падставім $t = 2^x$ у двайную няроўнасць $2 \leqslant t \leqslant 4$ і атрымаем $2 \leqslant 2^x \leqslant 4$.

Гэта няроўнасць раўназначна сістэме $\begin{cases} 2^x \geqslant 2, \\ 2^x \leqslant 4. \end{cases}$

Рэшым кожную паказальную няроўнасць гэтай сістэмы:

$$\begin{cases} 2^x \geqslant 2, \\ 2^x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geqslant 2^1, \\ 2^x \leqslant 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;\ 2].$$

Адказ: $[1;\ 2]$.

б) Увядзём новую зменную $t = 0{,}5^x$, тады дадзеную няроўнасць можна запісаць у выглядзе $t^2 - 3t + 2 < 0$.

Рэшым атрыманую квадратную няроўнасць. Нулямі квадратычнай функцыі $y = t^2 - 3t + 2$ з'яўляюцца лікі 1 і 2.

Рашэнне няроўнасці $t^2 - 3t + 2 < 0$ — мноства значэнняў аргумента $1 < t < 2$.

Падставім $t = 0{,}5^x$ у двайную няроўнасць $1 < t < 2$ і атрымаем $1 < 0{,}5^x < 2$.

Гэта няроўнасць раўназначна сістэме $\begin{cases} 0{,}5^x > 1, \\ 0{,}5^x < 2. \end{cases}$

Рэшым кожную паказальную няроўнасць гэтай сістэмы:

$$\begin{cases} 0{,}5^x > 1, \\ 0{,}5^x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5^x > 0{,}5^0, \\ 0{,}5^x < 0{,}5^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;\ 0).$$

Адказ: $(-1;\ 0)$.

3. Аднародныя няроўнасці

Прыклад 5. Рашыце няроўнасць $3^{2x} + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 2^{2x} \geqslant 0$.

Рашэнне. Запішам выраз 6^x у выглядзе $6^x = 3^x \cdot 2^x$ і падзелім абедзве часткі няроўнасці на выраз 2^{2x} ($2^{2x} > 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$):

$$3^{2x} + 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 2^{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3^{2x}}{2^{2x}} + \frac{2 \cdot 3^x \cdot 2^x}{2^{2x}} - 3 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 2\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 \geqslant 0.$$

Увядзём новую зменную $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, тады атрыманую няроўнасць $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 2\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 \geqslant 0$ можна запісаць у выглядзе $t^2 + 2t - 3 \geqslant 0$. Рэшым гэту квадратную няроўнасць.

Нулямі квадратычнай функцыі $y = t^2 + 2t - 3$ з'яўляюцца лікі -3 і 1.

Рашэнне няроўнасці $t^2 + 2t - 3 \geqslant 0$ — гэта мноства значэнняў аргумента, якія задавальняюць умову $\left[\begin{array}{l} t \leqslant -3, \\ t \geqslant 1. \end{array}\right.$

Падставім $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ у няроўнасці сукупнасці і атрымаем: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x \leqslant -3, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x \geqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [0;\ +\infty).$

Адказ: $[0;\ +\infty)$.

4*. Няроўнасці, пры рашэнні якіх прымяняюцца ўласцівасці функцый

Прыклад 6. Рашыце няроўнасць $2^x > \frac{3 - 5x}{3}$.

Рашэнне. Функцыя $y = 2^x$ — паказальная з асновай $a = 2 > 1$, значыць, яна нарастае на $\boldsymbol{R}$.

Функцыя $y = \frac{3 - 5x}{3}$ — лінейная, выгляду $y = kx + b$, $k = -\frac{5}{3}$, гэта функцыя спадае на $\boldsymbol{R}$.

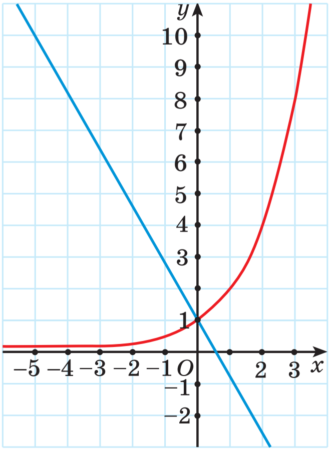
Ураўненне $2^x = \frac{3 - 5x}{3}$ мае адзіны корань, роўны нулю (рыс. 18).

Пры $x = 0$ значэнне функцыі $y = 2^x$ роўна 1, пры $x > 0$ значэнні гэтай функцыі большыя за 1, а пры $x < 0$ значэнні гэтай функцыі меншыя за 1, паколькі функцыя $y = 2^x$ нарастае на $\boldsymbol{R}$.

Пры $x = 0$ значэнне функцыі $y = \frac{3 - 5x}{3}$ роўна 1, пры $x > 0$ значэнні гэтай функцыі меншыя за 1, а пры $x < 0$ значэнні гэтай функцыі большыя за 1, паколькі функцыя $y = \frac{3 - 5x}{3}$ спадае на $\boldsymbol{R}$.

Значыць, пры $x > 0$ значэнні функцыі $y = 2^x$ большыя за значэнні функцыі $y = \frac{3 - 5x}{3}$. Такім чынам, рашэннем няроўнасці з'яўляецца прамежак $(0;\ +\infty)$.

Адказ: $(0;\ +\infty)$.



Рыс. 18

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Рашыце няроўнасць:

а) $2^x < \frac{1}{2}$; б) $\left(\frac{4}{7}\right)^x \leqslant \frac{16}{49}$; в) $3^x > 2$;

г) $5^x > -3$; д) $7^{2x} < -1$.

Рашэнне. а) Паколькі $2 > 1$, то функцыя $y = 2^t$ з'яўляецца нарастальнай, значыць, $2^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-1} \Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1)$.

Адказ: $(-\infty; -1)$.

б) Паколькі $\frac{4}{7} < 1$, то функцыя $y = \left(\frac{4}{7}\right)^t$ з'яўляецца спадальнай, значыць, $\left(\frac{4}{7}\right)^x \leqslant \frac{16}{49} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^x \leqslant \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \in [2; +\infty)$.

Адказ: $[2; +\infty)$.

в) Паколькі $3 > 1$, то функцыя $y = 3^t$ з'яўляецца нарастальнай, значыць, $3^x > 2 \Leftrightarrow 3^x > 3^{\log_3 2} \Leftrightarrow x > \log_3 2 \Leftrightarrow x \in (\log_3 2; +\infty)$.

Адказ: $(\log_3 2; +\infty)$.

г) Разгледзім функцыю $y = 5^x$. Паколькі $E(y) = (0; +\infty)$, то няроўнасць справядлівая для ўсіх x з $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Адказ: $(-\infty; +\infty)$.

д) Разгледзім функцыю $y = 7^{2x}$. Паколькі $E(y) = (0; +\infty)$, то $x \in \varnothing$.

Адказ: $\varnothing$.

2. Рашыце няроўнасць:

а) $(0{,}36)^{\frac{x}{2}-1{,}5} \geqslant \left(1\frac{2}{3}\right)^3$; б) $2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5x-3} < 2$;

в) $4^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \leqslant 2{,}25$; г) $0{,}5^{\frac{x^2-4}{x-1}} < 1$.

Рашэнне. а) $(0{,}36)^{\frac{x}{2}-1{,}5} \geqslant \left(1\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow (0{,}36)^{\frac{x}{2}-1{,}5} \geqslant \left(\frac{5}{3}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(0{,}6^2\right)^{\frac{x}{2}-1{,}5} \geqslant \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right)^3 \Leftrightarrow (0{,}6)^{x-3} \geqslant (0{,}6)^{-3}$.

Паколькі $0,6 \in (0;\ 1)$, то атрыманая няроўнасць раўназначна няроўнасці $x - 3 \leqslant -3$; $x \leqslant 0$.

Адказ: $(-\infty;\ 0]$.

б) $2^x \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5x-3} < 2$; $2^x \cdot \left(2^{-2}\right)^{5x-3} < 2$; $2^x \cdot 2^{-10x+6} < 2$; $2^{-9x+6} < 2$.

Паколькі $2 > 1$, то атрыманая няроўнасць раўназначна няроўнасці $-9x + 6 < 1$; $-9x < -5$; $x > \frac{5}{9}$; $x \in \left(\frac{5}{9};\ +\infty\right)$.

Адказ: $\left(\frac{5}{9};\ +\infty\right)$.

в) $4^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \leqslant 2,25$; $\left(4 \cdot \frac{3}{8}\right)^x \leqslant 2,25$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leqslant 1,5^2$; $1,5^x \leqslant 1,5^2$.

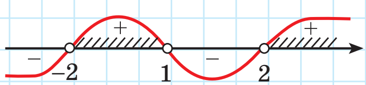
Паколькі $1,5 > 1$, то $x \leqslant 2$.

Адказ: $(-\infty;\ 2]$.

г) $0,5^{\frac{x^2-4}{x-1}} < 1$; $0,5^{\frac{x^2-4}{x-1}} < 0,5^0$. Паколькі $0,5 \in (0;\ 1)$, то $\frac{x^2 - 4}{x - 1} > 0$;

$\frac{(x-2)(x+2)}{x-1} > 0$.

Рэшым атрыманую няроўнасць метадам інтэрвалаў:



$x \in (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Адказ: $(-2;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$.

3. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt[4]{0,2^{x+2} - 1}$.

Рашэнне. Абсяг вызначэння дадзенай функцыі супадае з мноствам рашэнняў няроўнасці $0,2^{x+2} - 1 \geqslant 0$; $0,2^{x+2} \geqslant 1$; $0,2^{x+2} \geqslant 0,2^0$.

Паколькі $0,2 \in (0;\ 1)$, то атрыманая няроўнасць раўназначна няроўнасці $x + 2 \leqslant 0$; $x \leqslant -2$.

Адказ: $D(y) = (-\infty;\ -2]$.

4. Рашыце няроўнасць:

а) $3^{x+1} + 3^x \leqslant 36$; б) $9 \cdot 3^{2x+2} + 3 \cdot 3^{2x+1} - 9^x < 89$.

Рашэнне. а) $3^{x+1} + 3^x \leqslant 36$; $3^x(3+1) \leqslant 36$; $3^x \leqslant 9$. Паколькі $3 > 1$, то няроўнасць $3^x \leqslant 9$ раўназначна няроўнасці $x \leqslant 2$.

Адказ: $(-\infty; 2]$.

б) $9 \cdot 3^{2x+2} + 3 \cdot 3^{2x+1} - 9^x < 89$; $9 \cdot 3^{2x} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3 - 9^x < 89$;

$81 \cdot 9^x + 9 \cdot 9^x - 9^x < 89$; $9^x(81 + 9 - 1) < 89$;

$9^x \cdot 89 < 89$; $9^x < 1$; $9^x < 9^0$. Паколькі $9 > 0$, то атрыманая няроўнасць раўназначна няроўнасці $x < 0$.

Адказ: $(-\infty; 0)$.

5. Рашыце няроўнасць, выканаўшы замену зменнай:

а) $16^x + 4^x \geqslant 20$; б) $4^{x+1} - 2 \cdot 2^{x+1} < 8$; в)* $\dfrac{1}{2^x+1} \leqslant \dfrac{3}{1-2^x}$.

Рашэнне. а) $16^x + 4^x \geqslant 20$; $4^{2x} + 4^x - 20 \geqslant 0$, няхай $4^x = t$, тады $t^2 + t - 20 \geqslant 0$; $(t+5)(t-4) \geqslant 0$.

Паколькі $t > 0$, то $t + 5 > 0$, а значыць, $t - 4 \geqslant 0$, г. зн. $4^x \geqslant 4$; $x \geqslant 1$.

Адказ: $x \in [1; +\infty)$.

б) $4^{x+1} - 2 \cdot 2^{x+1} < 8 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^x - 2 \cdot 2^x \cdot 2 - 8 < 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x - 8 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 < 0$.

Увядзём новую зменную $2^x = t$, атрымаем няроўнасць $t^2 - t - 2 < 0$. Нулямі квадратычнай функцыі $y = t^2 - t - 2$ з'яўляюцца лікі -1 і 2. Рашэннем квадратнай няроўнасці $t^2 - t - 2 < 0$ з'яўляецца прамежак $(-1; 2)$, г. зн. $t \in (-1; 2)$, значыць, $\begin{cases} t > -1, \\ t < 2. \end{cases}$

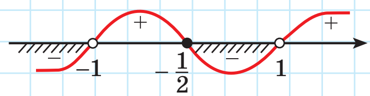
Падставім у сістэму $2^x = t$, атрымаем $\begin{cases} 2^x > -1, \\ 2^x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \boldsymbol{R}, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 1)$.

Адказ: $(-\infty; 1)$.

в)* Увядзём новую зменную $2^x = t$, атрымаем няроўнасць $\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{3}{1-t}$. Рэшым яе метадам інтэрвалаў:

$$\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{3}{1-t} \Leftrightarrow \frac{4t+2}{(t+1)(t-1)} \leqslant 0.$$



Тады $t \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$, або $\left[\begin{array}{l} t < -1, \\ \begin{cases} t \geqslant -\frac{1}{2}, \\ t < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Падставіўшы ў сукупнасць $2^x = t$, атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x < -1, \\ \begin{cases} 2^x \geqslant -\frac{1}{2}, \\ 2^x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ \begin{cases} x \in \boldsymbol{R}, \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0).$$

Адказ: $(-\infty; 0)$.

6. Рашыце няроўнасць:

а) $4^{1-2x} > 7^{2x-1}$; б) $4 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 4^{2x} \leqslant 0$.

Рашэнне. а) *Першы спосаб*. Запішам выраз 4^{1-2x} у выглядзе $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1}$ і атрымаем аднародную няроўнасць першай ступені. Падзелім абедзве часткі няроўнасці на 7^{2x-1} ($7^{2x-1} > 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$):

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} > 7^{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{2x-1} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{28}\right)^{2x-1} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{28}\right)^{2x-1} > \left(\frac{1}{28}\right)^{0} \Leftrightarrow 2x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 0{,}5 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0{,}5).$$

Адказ: $(-\infty; 0{,}5)$.

Другі спосаб. Функцыю $y = 4^{1-2x}$ можна запісаць у выглядзе $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^x$. Дадзеная функцыя спадае на $\boldsymbol{R}$. Функцыю $y = 7^{2x-1}$ можна запісаць у выглядзе $y = \frac{1}{7} \cdot 49^x$. Дадзеная функцыя нарастае на $\boldsymbol{R}$, таму ўраўненне $4^{1-2x} = 7^{2x-1}$ мае адзіны корань 0,5. Пры $x = 0{,}5$ значэнне функцыі $y = 4^{1-2x}$ роўна 1, пры $x > 0{,}5$ значэнні гэтай функцыі меншыя за 1, а пры $x < 0{,}5$ значэнні гэтай функцыі большыя за 1, паколькі функцыя $y = 4^{1-2x}$ спадае на $\boldsymbol{R}$.

Пры $x = 0{,}5$ значэнне функцыі $y = 7^{2x-1}$ роўна 1, пры $x > 0{,}5$ значэнні гэтай функцыі большыя за 1, а пры $x < 0{,}5$ значэнні гэтай функцыі меншыя за 1, паколькі функцыя $y = 7^{2x-1}$ нарастае на $\boldsymbol{R}$. Значыць, пры $x < 0{,}5$ значэнні функцыі $y = 4^{1-2x}$ большыя за значэнні функцыі $y = 7^{2x-1}$. Такім чынам, рашэннем дадзенай няроўнасці з'яўляецца прамежак $(-\infty;\ 0{,}5)$.

б) Запішам выраз 12^x у выглядзе $12^x = 3^x \cdot 4^x$ і падзелім абедзве часткі няроўнасці на выраз 4^{2x} ($4^{2x} > 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$):

$$4 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3^{2x}}{4^{2x}} - \frac{7 \cdot 3^x \cdot 4^x}{4^{2x}} + 3 \cdot \frac{4^{2x}}{4^{2x}} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 3 \leqslant 0.$$

Увядзём новую зменную $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, тады няроўнасць

$4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 3 \leqslant 0$ можна запісаць у выглядзе $4t^2 - 7t + 3 \leqslant 0$.

Рэшым гэту квадратную няроўнасць. Нулямі квадратычнай функцыі $y = 4t^2 - 7t + 3$ з'яўляюцца лікі $\frac{3}{4}$ і 1.

Рашэннем няроўнасці $4t^2 - 7t + 3 \leqslant 0$ з'яўляецца мноства значэнняў аргумента, якія задавальняюць умову $\begin{cases} t \leqslant 1, \\ t \geqslant \frac{3}{4}. \end{cases}$ Падставім $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ у няроўнасці сістэмы і атрымаем: $\begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x \leqslant 1, \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x \geqslant \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [0;\ 1]$.

Адказ: $[0;\ 1]$.

7*. Рашыце двайную няроўнасць $-4 \leqslant 3^{x^2-2x-1} - 5 \leqslant 4$.

Рашэнне. $-4 \leqslant 3^{x^2-2x-1} - 5 \leqslant 4$; $1 \leqslant 3^{x^2-2x-1} \leqslant 9$; $0 \leqslant x^2 - 2x - 1 \leqslant 2$;

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leqslant 2, \\ x^2 - 2x - 1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leqslant 0, \\ x^2 - 2x - 1 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-1;\ 3], \\ x \in \left(-\infty;\ 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};\ +\infty\right); \end{cases}$$

$x \in \left[-1;\ 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};\ 3\right]$.

Адказ: $\left[-1;\ 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2};\ 3\right]$.

8*. Рашыце няроўнасць $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$.

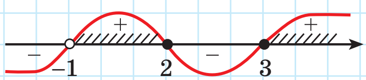
Рашэнне. Паколькі $\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot \left(\sqrt{2}-1\right) = 1$, то

$\left(\sqrt{2}-1\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}$ і няроўнасць $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$

прымае выгляд $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leqslant \left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$.

Паколькі $\left(\sqrt{2}+1\right) > 1$, то $\dfrac{6x-6}{x+1} \leqslant x$; $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1} \geqslant 0$; $\dfrac{(x-3)(x-2)}{x+1} \geqslant 0$.

Рэшым атрыманую няроўнасць метадам інтэрвалаў:



$x \in (-1;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$.

Адказ: $(-1;\ 2] \cup [3;\ +\infty)$.

9*. Рашыце няроўнасць $7^x + 24^x > 25^x$.

Рашэнне. Падзелім абедзве часткі няроўнасці на 25^x ($25^x > 0$) і атрымаем $\left(\dfrac{7}{25}\right)^x + \left(\dfrac{24}{25}\right)^x > 1$.

Функцыя $f(x) = \left(\dfrac{7}{25}\right)^x + \left(\dfrac{24}{25}\right)^x$ спадае на мностве рэчаісных лікаў як сума дзвюх спадальных функцый і $f(2) = \left(\dfrac{7}{25}\right)^2 + \left(\dfrac{24}{25}\right)^2 = 1$. Тады няроўнасць $\left(\dfrac{7}{25}\right)^x + \left(\dfrac{24}{25}\right)^x > 1$ прымае выгляд $f(x) > f(2)$ і выконваецца для ўсіх $x \in (-\infty;\ 2)$.

Адказ: $(-\infty;\ 2)$.

1. Выберыце няроўнасці, якія не маюць рашэнняў:

а) $5^x + 2 < 0$; б) $(\sqrt{3})^x > 0$; в) $\left(\frac{1}{7}\right)^x + 9 \geqslant 0$; г) $10^x \leqslant 0$.

2. Ці раўназначныя няроўнасці:

а) $5^{3x+2} > 5^{x-7}$ і $3x + 2 > x - 7$; б) $0{,}7^{x^2-6x} < 0{,}7^{x+3}$ і $x^2 - 6x < x + 3$?

2.166. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасць манатоннасці паказальнай функцыі:

а) $3^{8x+2} > \frac{1}{9}$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} > 1\frac{1}{3}$; в) $5^x \leqslant 7$;

г) $(\sqrt{5})^{x-6} < \frac{1}{5}$; д) $(\sqrt[7]{3})^{x+1} \geqslant \frac{1}{81}$; е) $(\sqrt[5]{10})^{x-8} < 0{,}01$.

2.167. Пры якіх значэннях аргумента графік функцыі $y = 8^{4-x}$ размяшчаецца вышэй за прамую $y = 2\sqrt{2}$?

2.168. Вызначце від няроўнасці і рашыце яе:

а) $3^x - \frac{1}{3} < 0$; б) $4^{x+2} - \frac{1}{16} \geqslant 0$;

в) $7^{3x-1} - 1 > 0$; г) $0{,}2^{x-3} - 25 \leqslant 0$.

2.169. Для функцыі $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-7} - 0{,}04$ знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх $f(x) < 0$.

2.170. Знайдзіце рашэнне няроўнасці, выкарыстаўшы ўласцівасці ступеней і ўласцівасці паказальнай функцыі:

а) $3^{x^2-4} \leqslant 243$; б) $(0{,}3)^{x^2-2} < 0{,}09$; в) $\left(\frac{2}{13}\right)^{x^2-1} \geqslant 1$;

г) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3-0{,}5x^2} > 27$; д) $2^{x^2+5x} \leqslant (\sqrt{2})^{12}$; е) $(0{,}2)^{x^2-4x+5} \leqslant 0{,}04$.

2.171. Рашыце няроўнасць:

а) $(0{,}7)^{x+4} \geqslant (0{,}49)^{x^2+2}$; б) $4^x \geqslant 2^{4-x-x^2}$;

в) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2} \geqslant \left(\frac{9}{49}\right)^{x+1{,}5}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2} < \left(\frac{4}{3}\right)^{5x-6}$.

2.172. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+1} - 3}$; б) $y = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{4}\right)^{5-4x} - \frac{1}{64}}$; в) $y = \frac{4}{\sqrt{5^{5x+4} - 25}}$;

г) $y = \frac{4}{\sqrt[12]{1 - 7^{3-8x}}}$; д) $y = \sqrt[8]{5^{x^2-12} - 625}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}7^{x^2-2x-3} - 1}}$.

2.173. Рашыце няроўнасць, выканаўшы пераўтварэнні ступеней:

а) $\frac{1}{8} \cdot 4^{2x-1} > \left(\sqrt{2}\right)^{10}$; б) $81^x - \frac{1}{3} \cdot 27^{2x+1} \leqslant 0$;

в) $\sqrt{5} : 5^{3x} \geqslant \frac{1}{5}$; г) $(1{,}4)^{3x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{2x+3} - \frac{49}{25} > 0$;

д) $2^{x^2+3x} > 8 \cdot 2^x$; е) $\sqrt{27} : 3^{6x^2} \geqslant 9^{4x}$.

2.174. Рашыце няроўнасць:

а) $28^{\frac{3x-6}{x+4}} \leqslant 1$; б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > 6\frac{1}{4}$; в) $5^{\frac{5}{x}} \geqslant 25$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-6}{3x+5}} \geqslant 2{,}25$; д) $3^{\frac{1}{5x-2}} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5-3x}}$; е) $5^{\frac{x-3}{2-x}} \leqslant 0{,}2^{x-3}$.

2.175. Рашыце няроўнасць, прывёўшы ступені да адной асновы:

а) $3^{x+2} - 3^x < 72$; б) $2^{3x-1} + 8^{x+1} \geqslant 17$; в) $3^{x-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 8 > 0$.

2.176. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leqslant 0$; б) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 > 0$;

в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x + 7 < 0$; г) $0{,}04^x - 4 \cdot 0{,}2^x - 5 \geqslant 0$.

2.177. Вызначце від няроўнасці і рашыце яе:

а) $2^{x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} + 2^x > 12$; б) $9 \cdot 3^{2x+2} + 3 \cdot 3^{2x+1} - 9^x \leqslant 89$.

2.178. Рашыце няроўнасць:

а) $4^x - 2^{x+1} - 8 < 0$; б) $9^{\frac{x}{2}} - 12 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 27 \geqslant 0$;

в) $5 \cdot 25^{x-1} - 1 < 20 \cdot 5^{x-2}$; г) $4^x < 2^{x+1} + 3$.

2.179. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы прыём рашэння аднародных няроўнасцей:

а) $3^x < 2^x$; б) $5^{x-1} \geqslant 7^{1-x}$; в) $2^{x^2-x} \geqslant 7^{x^2-x}$.

2.180. Знайдзіце, пры якіх значэннях аргумента графік функцыі $y = 3^{x-1}$ размяшчаецца не ніжэй за графік функцыі $y = 2^{x-1}$.

2.181. Рашыце няроўнасць $16^x + 15 \cdot 4^{2x} > 9^x + 11 \cdot 3^{2x}$.

2.182. Прывядзіце няроўнасць да аднароднай і рашыце яе:

а) $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x \geqslant 0$; б) $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0$;

в) $3^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} \leqslant 0$.

2.183. Рашыце няроўнасць $2^x \leqslant 3 - x$, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый.

2.184. Рашыце няроўнасць:

а) $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x^2-24}{x-6}} \leqslant 6$; б) $(1{,}3)^{\frac{x^2-x-6}{x}} < 1$.

2.185. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} - \frac{1}{\sqrt{27}}}$.

2.186. Рашыце няроўнасць:

а) $5^x + \frac{25}{5^x} < 26$; б) $6^x + 6^{1-x} \leqslant 7$.

2.187. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $\frac{1}{2^x+1} \geqslant \frac{1}{2-2^x}$; б) $\frac{4^x - 2^{x-1} - 4{,}5}{2^x - 2} \leqslant 1$.

2.188. Рашыце няроўнасць:

а) $(3^x - 81)(7^x - 7)(2^x - 1) < 0$; б) $\frac{(36 - 6^x)(3^x - 243)}{(12^x - 12)(20^x + 29)} \leqslant 0$.

2.189. Раскладзіце левую частку няроўнасці $3 \cdot 2^x - 6^x + 3^x \geqslant 3$ на множнікі і рашыце яе.

2.190*. Рашыце няроўнасць:

а) $3^{|x|+2} > 27$; б) $0{,}6^{|x-3|} \geqslant \sqrt{0{,}6}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x^2-5|} \leqslant \frac{1}{16}$.

2.191*. Рашыце няроўнасць:

а) $(\sqrt{5} - 2)^x > 9 - 4\sqrt{5}$; б) $(3 + 2\sqrt{2})^x \leqslant 17 - 12\sqrt{2}$;

в) $(2 + \sqrt{3})^x + 2 < 3(2 - \sqrt{3})^x$; г) $(\sqrt{5} - 2)^x \geqslant (\sqrt{5} + 2)^{\frac{3}{x-4}}$.

2.192. Рашыце няроўнасць і абгрунтуйце рашэнне:

а) $3^{2+3x} < 27$; б) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-8} < 1{,}2$; в) $2^x \geqslant 3$;

г) $\left(\sqrt{3}\right)^{x+6} > \frac{1}{9}$; д) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} \leqslant \frac{1}{625}$; е) $\left(\sqrt[7]{4}\right)^{x+2} \geqslant 0{,}125$.

2.193. Знайдзіце, пры якіх значэннях аргумента графік функцыі $y = 2^{x-2}$ размяшчаецца ніжэй за прамую $y = 8$.

2.194. Рашыце няроўнасць:

а) $7^x - \frac{1}{49} \geqslant 0$; б) $5^{x+3} - \frac{1}{5} < 0$;

в) $3^{2x+5} - 1 \leqslant 0$; г) $0{,}1^{x-7} - 1000 > 0$.

2.195. Для функцыі $f(x) = 2^{x-1} - \left(\frac{1}{16}\right)^x$ знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх правільная няроўнасць $f(x) > 0$.

2.196. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасць манатоннасці паказальнай функцыі:

а) $4^{x^2-6} \leqslant 64$; б) $(0{,}5)^{x^2-2} \leqslant 0{,}25$; в) $3^{x^2-7x} \leqslant \left(\sqrt{3}\right)^{-12}$;

г) $\left(1\frac{1}{7}\right)^{x^2-25} \leqslant 1$; д) $(0{,}3)^{x^2-2x+2} \leqslant 0{,}09$; е) $(0{,}1)^{x^2-3x} > 100$.

2.197. Рашыце няроўнасць:

а) $2^{x+1} > 2^{x^2-5}$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x+2} > \left(\frac{4}{49}\right)^{1-x^2}$; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-4}$.

2.198. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} - \left(\frac{1}{9}\right)}$; б) $y = \sqrt[8]{\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-5} - 7}$;

в) $y = \frac{3}{\sqrt{36 - 6^{2x+9}}}$; г) $y = \sqrt[4]{3^{x^2-2x} - 27}$.

2.199. Рашыце няроўнасць, выканаўшы пераўтварэнне ступеней:

а) $\frac{1}{81} \cdot 9^{4x-1} > \left(\sqrt{3}\right)^4$; б) $16^x \geqslant \frac{1}{2} \cdot 8^{2x-3}$;

в) $(1{,}5)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} - \frac{4}{9} > 0$; г) $\sqrt{32} : 2^{4x^2} \geqslant 8^{3x}$.

2.200. Рашыце няроўнасць:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \geqslant 4$; б) $2^{\frac{1}{x}} \leqslant 8$;

в) $\left(\frac{7}{12}\right)^{\frac{4x-12}{x-2}} \geqslant 1\frac{5}{7}$; г) $2^{\frac{3}{1-x}} \leqslant (0{,}5)^{\frac{3}{3x+1}}$.

2.201. Рашыце няроўнасць:

а) $2^x + 2^{x+1} > 6$; б) $3^{2x-1} + 9^{x+1} \leqslant 28$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 2^{3+x} \geqslant 9$; г) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} + 3^x < 12$.

2.202. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 \leqslant 0$; б) $9^x + 2 \cdot 3^x > 3$; в) $4^x + 2 \cdot 2^x < 80$.

2.203. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $4^{\frac{x}{3}} - 6 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 8 \leqslant 0$; б) $2^{2x-1} + 2 < 5 \cdot 2^{x-1}$;

в) $36^x + 6^{x+1} > 16$; г) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} \geqslant 24$.

2.204. Знайдзіце, пры якіх значэннях аргумента графік функцыі $y = 5^x$ размяшчаецца не вышэй за графік функцыі $y = 7^{-x}$.

2.205. Складзіце план рашэння і рашыце няроўнасць

$$9^x + 8 \cdot 3^{2x} > 4^x + 5 \cdot 2^{2x}.$$

2.206. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы прыём рашэння аднародных няроўнасцей:

а) $5 \cdot 25^x + 3 \cdot 10^x - 2 \cdot 4^x < 0$; б) $9 \cdot 4^x + 8 \cdot 12^x \geqslant 36^x$.

2.207. Рашыце няроўнасць $2^x \geqslant -x + 1$, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый.

2.208. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасць манатоннасці паказальнай функцыі:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x^2+11x+49}{2x-9}} \geqslant 5$; б) $\left(0{,}4^{x^2+2x-3}\right)^{\frac{1}{x}} \geqslant 1$.

2.209. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt[4]{1 - 7^{x^2} \cdot 49^x}$.

2.210. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $2^x + \frac{16}{2^x} > 17$; б) $5^x + 5^{1-x} \leqslant 6$; в) $2^{x+1} + 2^{2-x} \geqslant 9$.

2.211. Вызначце паслядоўнасць дзеянняў і рашыце няроўнасць $\frac{1}{2^x+1} \leqslant \frac{15}{16-2^x}$.

2.212. Рашыце няроўнасць $\left(2^x - 64\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x - 27\right) \geqslant 0$.

2.213. Рашыце няроўнасць $8 \cdot 3^x - 6^x + 2^x < 8$.

2.214*. Рашыце няроўнасць:

а) $2^{|x|-1} \leqslant 8$; б) $0{,}7^{|x-3|} < \sqrt{0{,}7}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-12|} \leqslant \frac{1}{81}$.

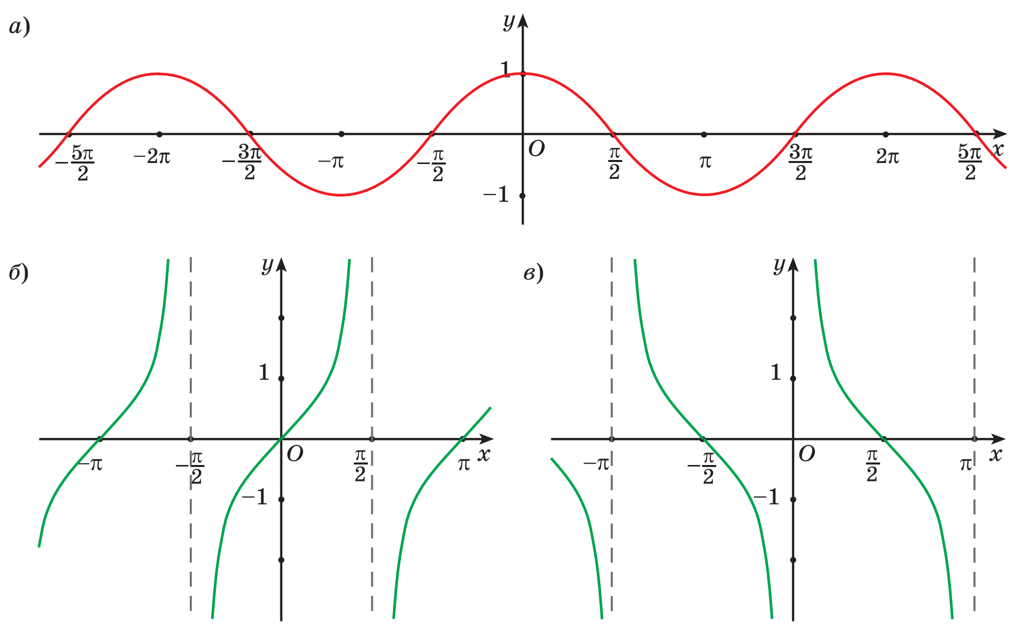
2.215*. Рашыце няроўнасць:

а) $\left(\sqrt{5}+2\right)^x < 9 + 4\sqrt{5}$;

б) $\left(\sqrt{2}+1\right)^x + 1 < 2\left(\sqrt{2}-1\right)^x$;

в) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x \leqslant \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{4}{x-5}}$.

2.216. Сярод рысункаў 19, *а*—*в* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$.



Рыс. 19

З дапамогай графіка функцыі $f(x) = \mathrm{ctg}\,x$ вызначце, ці праўда, што:

а) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; б) $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) > 0$; в) $f(0) = 0$; г) $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) > f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

2.217. Запішыце лік:

а) 2 у выглядзе ступені з асновай 3;

б) 7 у выглядзе ступені з асновай 10;

в) $\sqrt{3}$ у выглядзе ступені з асновай 7;

г) 2,5 у выглядзе ступені з асновай 15.

2.218. Запішыце лік:

а) 5 у выглядзе лагарыфма з асновай 2;

б) –1 у выглядзе лагарыфма з асновай 10;

в) $\frac{1}{2}$ у выглядзе лагарыфма з асновай 16;

г) 4 у выглядзе лагарыфма з асновай $\sqrt{2}$.

2.219. Якая з дадзеных пар лікаў складаецца толькі з ірацыянальных лікаў:

а) π і 0,(12); б) –0,5 і $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$ і π;

г) 0,(12) і $\sqrt{3}$; д) –4 і 0,(12)?

2.220. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_2 \log_5 625$; б) $\log_9 \log_7 \sqrt[3]{7}$.

2.221. Запішыце ўсе цэлыя лікі, якія належаць прамежку:

а) $\left[-5; \sqrt[5]{35}\right]$; б) $\left[-\sqrt[4]{79}; 6\right)$.

2.222. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу $49^{-\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{12}} : 7^{\frac{3}{4}}$.

2.223. Выкарыстайце формулу раскладання квадратнага трохчлена на множнікі і скараціце рацыянальны дроб $\frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 3x - 1}$.

2.224. Выкарыстаўшы асноўную лагарыфмічную тоеснасць, знайдзіце значэнне выразу:

а) $10^{\lg 11}$; б) $7^{1 + \log_7 3}$; в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,4} 24 - 2}$;

г) $3^{2\log_3 7}$; д) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\log_5 64}$; е) $\left(\sqrt{7}\right)^{\log_7 25}$.

2.225. Размясціце ў парадку спадання лікі sin4, sin3, sin2.

2.226. Спартсмен падчас велатрэніроўкі першую палову дыстанцыі прайшоў са скорасцю $30\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а другую палову дыстанцыі — са скорасцю $24\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Па планах трэніровак сярэдняя скорасць руху спартсмена падчас гэтай трэніроўкі павінна была складаць не менш за $27\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Ці дасягнуў спартсмен пастаўленай мэты?

2.227. Рашыце паказальнае ўраўненне:

а) $2^{2x-4} = 64$; б) $5^{x^2-3x} = 0{,}2^{8-3x}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} = \sqrt{3^x}$; г) $7^{2x} = 8$.

2.228. Чацвёрты член геаметрычнай прагрэсіі роўны 2. Знайдзіце здабытак першых сямі яе членаў.

2.229. Запішыце выраз $\frac{a^6 \cdot a^{-2{,}25}}{a^{3{,}5}}$ у выглядзе ступені і знайдзіце яго значэнне пры $a = 81$.

2.230. Вызначце, цотнай ці няцотнай з'яўляецца функцыя:

а) $f(x) = x^3 - 4x$; б) $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 9}$.

Прывядзіце прыклад функцыі, якая не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

2.231. Выкарыстайце формулы складання і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{7\pi}{5} - \cos\frac{7\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}$; б) $\frac{\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{42}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{85\pi}{42}}$.

2.232. Параўнайце лікі:

а) $\sqrt[8]{10}$ і $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$ і $\sqrt[3]{5}$; в) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ і $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$.

2.233. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos 5x + \cos 3x = 0$; б) $\sin 3x + \sin 7x = \sqrt{3}\cos 2x$.

2.234. Знайдзіце суму квадратаў каранёў ураўнення $3x^2 - x - 7 = 0$.

2.235. Выкарыстайце метад замены зменнай і рашыце ўраўненне

$$\frac{x-1}{x+2} - \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} - 2 = 0.$$

2.236. Знайдзіце мінімум функцыі $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$.

2.237*. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \frac{6x - 18}{3x - x^2}$ і пабудуйце яе графік.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

• ведаць азначэнне і ўласцівасці паказальнай функцыі;

• ведаць спосабы рашэння паказальных ураўненняў;

• ведаць спосабы рашэння паказальных няроўнасцей;

• умець выконваць пабудову графікаў паказальнай функцыі для розных асноў;

• умець прымяняць уласцівасці паказальнай функцыі для параўнання значэнняў выразаў;

• умець прымяняць уласцівасці паказальнай функцыі для рашэння паказальных ураўненняў;

• умець прымяняць функцыянальны падыход для рашэння паказальных ураўненняў;

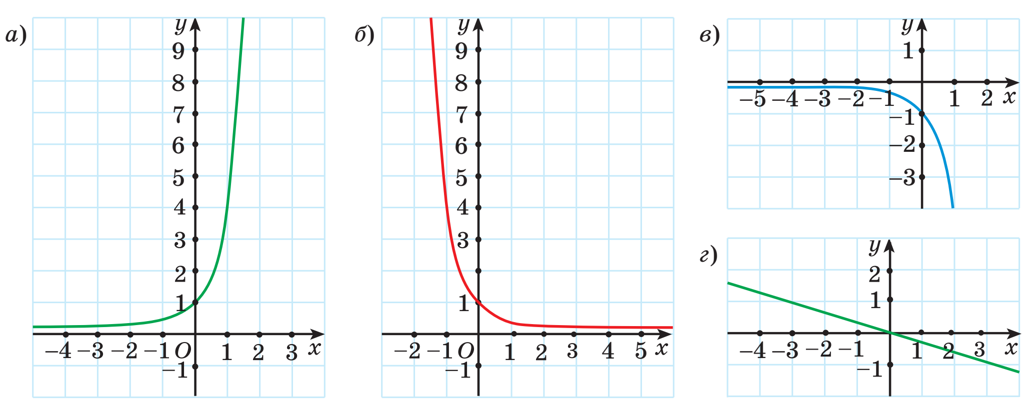
• умець рашаць паказальныя ўраўненні на падставе ўласцівасцей паказальнай функцыі і асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці;

• умець прымяняць уласцівасці паказальнай функцыі для рашэння паказальных няроўнасцей;

• умець прымяняць функцыянальны падыход для рашэння паказальных няроўнасцей.

Я правяраю свае веды

1. Сярод рысункаў 20, *а*—*г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $y = 0{,}25^x$.



Рыс. 20

2. Паказальная функцыя зададзена формулай $f(x) = 5^x$. Выберыце правільную роўнасць:

а) $f(2) = 10$; б) $f(2) = 25$;

в) $f(2) = \log_2 5$; г) $f(2) = \sqrt{5}$.

3. Вызначце, нарастальнай ці спадальнай з'яўляецца паказальная функцыя:

а) $y = 1{,}5^x$; б) $y = 0{,}3^x$; в) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; г) $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$.

4. Пабудуйце відарыс графіка функцыі:

а) $y = 2^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

5. Рашыце ўраўненне:

а) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x-2} = 3{,}5^{x+5}$; б) $\sqrt[5]{9^{x-7}} = \sqrt{3}$;

в) $5^{x+1} + 5^{x+2} = 150$; г) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$.

6. Рашыце няроўнасць:

а) $2^{x-0{,}5} \geqslant \frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2-x} < 1$;

в) $3^{x^2+5x+5} > \frac{1}{3}$; г) $2^x + 2^{x+1} \geqslant 24$.

7. Пабудуйце графік функцыі $y = 3^{x+2} - 9$ і апішыце яе ўласцівасці.

8. Рашыце ўраўненне $4^{2x+1} - 7 \cdot 12^x + 3^{2x+1} = 0$.

9. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \dfrac{6}{\sqrt[8]{(2^x - 16)(0{,}01^x - 10)}}$.

10. Вядома, што графік функцыі $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ праходзіць вышэй за прамую $y = 1$ пры $x < 0$. Знайдзіце суму цэлых значэнняў аргумента з абсягу вызначэння функцыі $y = \sqrt{a^{x^2-6x+8} - 1}$.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 11» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 11 клас».

ЛАГАРЫФМІЧНАЯ ФУНКЦЫЯ

§ 7. Уласцівасці лагарыфмаў

3.1. Прымяніце ўласцівасці ступені і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{-2}$; б) $(0{,}81)^{-2}$; в) $\sqrt[3]{8^2} : 2^1$; г) $2^{x-2} \cdot 2^{2-x} : 2^{-1} : 2^{\frac{1}{2}}$.

3.2. Вылічыце:

а) $\log_2 16$; б) $\log_5 \frac{1}{25}$; в) $\log_3 \sqrt{3}$; г) $\lg 1$.

3.3. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $4^{\log_4 7}$; б) $17^{\log_{17}\sqrt{2}}$; в) $10^{\lg 5}$; г) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,4} 3}$.

Некаторыя ўласцівасці лагарыфмаў можна атрымаць, выкарыстаўшы вядомыя нам уласцівасці ступені. Напрыклад, з уласцівасці ступені $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a > 0, a \neq 1$, вынікае наступная ўласцівасць лагарыфмаў: **лагарыфм здабытку** дадатных множнікаў роўны **суме лагарыфмаў** гэтых множнікаў, і наадварот, **сума лагарыфмаў** па адной і той жа аснове роўна **лагарыфму здабытку** па гэтай жа аснове.

Уласцівасць 1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, а таксама $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Доказ. Няхай $\log_a b = m$, $\log_a c = n$ і $\log_a(bc) = k$. Па азначэнні лагарыфма атрымаем, што $a^m = b$, $a^n = c$ і $a^k = bc$. Тады $a^k = bc = a^m a^n$. Па ўласцівасці ступені $a^m a^n = a^{m+n}$, г. зн. $a^k = a^{m+n}$. Тады $k = m + n$, значыць, $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Прыклад 1. Вылічыце:

а) $\log_5\left(125\sqrt{5}\right)$; б) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$.

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$

Рашэнне. а) $\log_5\left(125\sqrt{5}\right) = \log_5\left(125 \cdot \sqrt{5}\right) =$

$= \log_5 125 + \log_5 \sqrt{5} = 3 + \frac{1}{2} = 3{,}5$;

б) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12}(4 \cdot 36) =$

$= \log_{12} 144 = 2$.

З уласцівасці ступені $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a > 0$, $a \neq 1$, вынікае ўласцівасць лагарыфмаў: **лагарыфм дзелі** роўны **рознасці лагарыфмаў** дзялімага і дзельніка, і наадварот, **рознасць лагарыфмаў** па адной і той жа аснове роўна **лагарыфму дзелі** па гэтай жа аснове.

Уласцівасць 2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, а таксама $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Прыклад 2. Вылічыце:

а) $\log_2 \frac{16}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\lg 17 - \lg 170$.

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

Рашэнне.

а) $\log_2 \frac{16}{\sqrt[3]{2}} = \log_2 16 - \log_2 \sqrt[3]{2} = 4 - \frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$;

б) $\lg 17 - \lg 170 = \lg \frac{17}{170} = \lg \frac{1}{10} = -1$.

З уласцівасці ступені $(a^m)^n = a^{mn}$, $a > 0$, $a \neq 1$, вынікае ўласцівасць лагарыфмаў: **лагарыфм ступені** роўны **здабытку паказчыка ступені і лагарыфма асновы ступені.**

Уласцівасць 3. $\log_a b^n = n\log_a b$, а таксама $n\log_a b = \log_a b^n$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Прыклад 3. Вылічыце:

а) $\log_{13} \sqrt[5]{169}$; б) $14 \cdot \log_9 \sqrt[7]{3}$.

$\log_a b^n = n\log_a b$

$n\log_a b = \log_a b^n$

Рашэнне.

а) $\log_{13} \sqrt[5]{169} = \log_{13} \sqrt[5]{13^2} = \log_{13} 13^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \log_{13} 13 = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$;

б) $14 \cdot \log_9 \sqrt[7]{3} = \log_9 \left(\sqrt[7]{3}\right)^{14} = \log_9 3^2 = \log_9 9 = 1$.

Уласцівасць 4. $\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$, а таксама $\frac{1}{m}\log_a b = \log_{a^m} b$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $m \neq 0$.

Прыклад 4. Вылічыце:

а) $\log_8 2$; б) $\frac{1}{6}\cdot\log_{\sqrt[3]{5}} 625$.

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$$
$$\frac{1}{m}\log_a b = \log_{a^m} b$$

Рашэнне.

а) $\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3}\cdot\log_2 2 = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$;

б) $\frac{1}{6}\cdot\log_{\sqrt[3]{5}} 625 = \log_{\left(\sqrt[3]{5}\right)^6} 625 = \log_{5^2} 625 = \log_{25} 625 = 2.$

Прыклад 5. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_{0,25} 128$; б) $3^{\log_{81} 16}$.

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$$

Рашэнне.

а) $\log_{0,25} 128 = \log_{\frac{1}{4}} 128 = \log_{2^{-2}} 2^7 = -\frac{7}{2}\cdot\log_2 2 = -3,5\cdot 1 = -3,5.$

б) Паколькі $\log_{81} 16 = \log_{3^4} 2^4 = \log_3 2$, то $3^{\log_{81} 16} = 3^{\log_3 2} = 2.$

Упершыню лагарыфмічныя ўласцівасці былі вынайдзены ў 1650 г. англійскім матэматыкам Вільямам Отрэдам (1574—1660), стваральнікам лагарыфмічнай лінейкі.

У нашы дні для знаходжання лагарыфмаў лікаў карыстаюцца калькулятарамі, а таксама спецыяльнымі табліцамі. Найбольш распаўсюджаныя з іх — «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадзіса. Гэтыя табліцы змяшчаюць значэнні дзесятковых лагарыфмаў з дакладнасцю да 0,0001. Напрыклад, $\lg 2 \approx 0,3010$, $\lg 3 \approx 0,4771$.

Для вылічэння значэнняў выразаў, якія змяшчаюць лагарыфмы розных лікаў па іншых асновах, пераходзяць ад лагарыфма з адвольнай асновай да лагарыфма па аснове 10. Для гэтага, а таксама для рашэння многіх ураўненняў, няроўнасцей і пераўтварэння выразаў карыстаюцца **формулай пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай:**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ дзе } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1.$$

Выведзем гэту формулу. Разгледзім выраз $\log_c a^{\log_a b}$. Па ўласцівасці лагарыфма ступені $\log_c a^{\log_a b} = \log_a b\cdot\log_c a$. Па асноўнай лагарыфмічнай тоеснасці $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$. Значыць, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. З гэтай роўнасці выразім $\log_a b$ і атрымаем: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Прыклад 6. Вылічыце:

а) $\log_{0,25} \sqrt[5]{2}$; б) $\dfrac{\log_7 625}{\log_7 5}$.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\frac{\log_c b}{\log_c a} = \log_a b$$

Рашэнне.

а) $\log_{0,25} \sqrt[5]{2} = \dfrac{\log_2 \sqrt[5]{2}}{\log_2 0{,}25} = \dfrac{\frac{1}{5}}{-2} = -0{,}1;$

б) $\dfrac{\log_7 625}{\log_7 5} = \log_5 625 = 4.$

Вынікам з формулы пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай з'яўляецца формула $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Прыклад 7. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_3 2 \cdot \log_2 9$; б) $\dfrac{1}{\log_{32} 8} + \log_8 2$.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$$

Рашэнне. а) Паколькі $\log_3 2 = \dfrac{1}{\log_2 3}$, то $\log_3 2 \cdot \log_2 9 =$

$= \dfrac{1}{\log_2 3} \cdot \log_2 3^2 = \dfrac{1}{\log_2 3} \cdot 2 \cdot \log_2 3 = 2.$

б) Паколькі $\dfrac{1}{\log_{32} 8} = \log_8 32$, атрымаем, што $\dfrac{1}{\log_{32} 8} + \log_8 2 =$

$= \log_8 32 + \log_8 2 = \log_8 (32 \cdot 2) = \log_8 64 = 2.$

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Вылічыце:

а) $\log_3 18 + \log_3 0{,}5$; б) $\log_5 120 - \log_5 24$;

в) $\log_3 \sqrt[4]{\sqrt[8]{3}}$; г) $\log^2_{125} \sqrt[4]{5}$.

Рашэнне. Выкарыстаем уласцівасці лагарыфмаў і атрымаем:

а) $\log_3 18 + \log_3 0{,}5 = \log_3 (18 \cdot 0{,}5) = \log_3 9 = 2;$

б) $\log_5 120 - \log_5 24 = \log_5 (120 : 24) = \log_5 5 = 1;$

в) $\log_3 \sqrt[4]{\sqrt[8]{3}} = \log_3 \sqrt[32]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{32}} = \frac{1}{32}\log_3 3 = \frac{1}{32};$

г) $\log^2_{125} \sqrt[4]{5} = \left(\log_{125} \sqrt[4]{5}\right)^2 = \left(\log_{5^3} 5^{\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\log_5 5\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}.$

2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_6 48 - \log_6 4 + \log_6 3;$ б) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36;$

в) $\log_{15} 3 + \frac{\log_7 5}{\log_7 15};$ г)* $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}.$

Рашэнне. Выкарыстаем уласцівасці лагарыфмаў і атрымаем:

а) $\log_6 48 - \log_6 4 + \log_6 3 = \log_6 (48 : 4 \cdot 3) = \log_6 36 = 2;$

б) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 = \log_{6^{\frac{1}{2}}} 3 \cdot \log_3 6^2 = 2 \cdot \log_6 3 \cdot 2 \cdot \log_3 6 = 4 \cdot \log_6 3 \cdot \frac{1}{\log_6 3} = 4.$

Выкарыстаем формулу пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай і атрымаем:

в) $\log_{15} 3 + \frac{\log_7 5}{\log_7 15} = \log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15} 15 = 1.$

г)* Па формуле $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ атрымаем, што $\log_{30} 5 = \frac{1}{\log_5 30}$ і

$\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6}$. Тады $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5} = \frac{\log_5 30}{\frac{1}{\log_5 30}} - \frac{\log_5 150}{\frac{1}{\log_5 6}} =$

$= \log_5 30 \cdot \log_5 30 - \log_5 150 \cdot \log_5 6 = \log^2_5 30 - \log_5 (30 \cdot 5) \cdot \log_5 (30 : 5) =$

$= \log^2_5 30 - \left(\log_5 30 + \log_5 5\right)\left(\log_5 30 - \log_5 5\right) =$

$= \log^2_5 30 - \left(\log_5 30 + 1\right)\left(\log_5 30 - 1\right) = \log^2_5 30 - \left(\log^2_5 30 - 1\right) =$

$= \log^2_5 30 - \log^2_5 30 + 1 = 1.$

3. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{2\log_5 2 - \log_5 12}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5}.$

Рашэнне. $\frac{2\log_5 2 - \log_5 12}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5} = \frac{\log_5 4 - \log_5 12}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5} = \frac{\log_5 \frac{1}{3}}{\log_5 9} = \frac{-1 \cdot \log_5 3}{2\log_5 3} = -\frac{1}{2}.$

4. Спрасціце выраз:

а) $0{,}25^{\log_{0,5} 7}$; б) $9^{\log_3 6}$; в) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$; г) $11^{\frac{1}{5\log_{16} 11}}$.

Рашэнне. Выкарыстаем асноўную лагарыфмічную тоеснасць, а таксама ўласцівасці лагарыфмаў і атрымаем:

а) $0{,}25^{\log_{0,5} 7} = 0{,}25^{\log_{(0,5)^2} 7^2} = 0{,}25^{\log_{0,25} 49} = 49$;

б) $9^{\log_3 6} = 9^{\log_{3^2} 6^2} = 9^{\log_9 36} = 36$;

в) $2^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 2^{\log_{2^{0,5}} 3} = 2^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3^2} = 9$;

г) $11^{\frac{1}{5\log_{16} 11}} = \left(11^{\frac{1}{\log_{16} 11}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(11^{\log_{11} 16}\right)^{\frac{1}{5}} = 16^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{16}$.

5. Вядома, што $\lg 3 = a$; $\lg 2 = b$. Выразіце $\log_5 6$ праз a і b.

Рашэнне. Выкарыстаем формулу пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай і атрымаем:

$$\log_5 6 = \frac{\lg 6}{\lg 5} = \frac{\lg(2 \cdot 3)}{\lg(10 : 2)} = \frac{\lg 2 + \lg 3}{\lg 10 - \lg 2} = \frac{b + a}{1 - b}.$$

6. Выразіце праз a значэнне выразу $\log_5 75$, калі вядома, што $\log_3 5 = a$.

Рашэнне. Пераўтворым выраз $\log_5 75$:

$$\log_5 75 = \frac{\log_3 75}{\log_3 5} = \frac{\log_3 (25 \cdot 3)}{\log_3 5} = \frac{\log_3 25 + \log_3 3}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^2 + 1}{\log_3 5} = \frac{2\log_3 5 + 1}{\log_3 5}.$$

Паколькі $\log_3 5 = a$, то $\log_5 75 = \dfrac{2a + 1}{a}$.

7*. Параўнайце значэнні выразаў: $\log_2 3 \cdot \log_3 2$; $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 2$;

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2$ і $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 2$.

Рашэнне. Знойдзем значэнне кожнага выразу:

$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \dfrac{1}{\log_2 3} = 1$;

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 2 = \log_2 3 \cdot 2\log_3 2 \cdot \dfrac{1}{2}\log_2 2 = 1$;

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2 = \log_2 3 \cdot 2\log_3 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 5 \cdot \log_5 2 = 1;$

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 2 = \log_2 3 \cdot 2\log_3 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 5 \cdot \log_5 6 \cdot \frac{1}{\log_2 6} =$

$= \log_5 6 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \log_5 6 \cdot \log_6 5 = 1.$

Значэнні ўсіх выразаў роўныя.

8*. Вылічыце: $\left(15 + 3^{1+\log_3 9}\right) \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_3 4.$

Рашэнне. $\left(15 + 3^{1+\log_3 9}\right) \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_3 4 =$

$= \left(15 + 3 \cdot 3^{\log_3 9}\right) \cdot \log_2 3^{\frac{1}{2}} \cdot \log_3 2^2 = (15 + 3 \cdot 9) \cdot \frac{1}{2}\log_2 3 \cdot 2\log_3 2 =$

$= 42 \cdot \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 42.$

9*. Знайдзіце значэнне выразу

$\lg(\sin 1°) \cdot \lg(\sin 2°) \cdot \lg(\sin 3°) \cdot \ldots \cdot \lg(\sin 120°).$

Рашэнне. Паколькі ў здабытку ёсць множнік $\lg(\sin 90°) = = \lg 1 = 0,$ а астатнія множнікі з'яўляюцца лагарыфмамі ад дадатных лікаў, то здабытак роўны нулю.

10*. Знайдзіце значэнне выразу $6\log_2\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + 12\log_2\left(\sqrt{3} + 1\right).$

Рашэнне. $6\log_2\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + 12\log_2\left(\sqrt{3} + 1\right) =$

$= 6\log_2\left(1 - \sqrt{3}\right)^2 + 12\log_2\left(\sqrt{3} + 1\right) =$

$= 12\log_2\left|1 - \sqrt{3}\right| + 12\log_2\left(\sqrt{3} + 1\right) = 12\left(\log_2\left(\sqrt{3} - 1\right) + \log_2\left(\sqrt{3} + 1\right)\right) =$

$= 12\left(\log_2\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)\right) = 12\log_2 2 = 12.$

?

1. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $7^{\log_7 4}$; б) $\log_3 \sqrt{3}$; в) $\log_6 \sqrt{2} + \log_6 \sqrt{18}$; г) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7 4}$.

2. Якія з дадзеных лікаў з'яўляюцца цэлымі:

а) $\log_5 0{,}2$; б) $\log_5 0{,}0016$; в) $\log_5 1$; г) $\log_5 0{,}04$?

3.4. Выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў, вылічыце:

а) $\log_6 3 + \log_6 12$;
б) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$;
в) $\lg 4 + \lg 25$;
г) $\log_2 14 + \log_2 \frac{32}{7}$;
д) $\log_{\frac{1}{6}} 2 + \log_{\frac{1}{6}} 3$;
е) $\lg 19 - \lg 190$;
ж) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$;
з) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;
і) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{\sqrt{3}} 4$;
к) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$.

3.5. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_3 135 - \log_3 20 + \log_3 36$;
б) $\lg 250 + \lg 20 - \lg 5$;
в) $\log_3 45 - \log_3 5 + 9^{\log_3 5}$;
г) $\sqrt{\log_{16} 4 + \log_{16} 24 - \log_{16} 6}$;
д) $\log_7 \log_3 81 - \log_7 28$;
е) $\log_2\left(\sqrt{5} - 1\right) + \log_2\left(\sqrt{5} + 1\right)$.

3.6. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_a(ab)$, калі вядома, што $\log_a b = -9$;

б) $\log_b \frac{a}{b}$, калі вядома, што $\log_b a = 5$.

3.7. Ведаючы, што $\log_6 2 = a$, выразіце праз a значэнне выразу:

а) $\log_6 12$; б) $\log_6 72$; в) $\log_6 3$; г) $\log_6 18$.

3.8. Вядома, што $\log_2 a = b$. Выразіце праз b значэнне выразу:

а) $\log_2(32a)$; б) $\log_2\left(\sqrt{2}a\right)$; в) $\log_2 \frac{8}{a}$; г) $\log_2 \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$.

3.9. Вылічыце:

а) $36^{\log_6 2 + \log_6 7}$; б) $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 18 - \log_5 3}$; в) $0{,}01^{\lg 6 - \lg 2}$.

3.10. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{\log_3 16}{\log_3 48 - 1}$; б) $\frac{\log_3^2 6 - \log_3^2 2}{\log_3 12}$; в) $\frac{\log_2 100}{\log_2^2 5 - \log_2^2 20}$.

3.11. Знайдзіце значэнне выразу $\log_4(2a) + \log_4(32b)$, калі $\log_4(ab) = 0{,}2$.

3.12. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\cos\frac{\pi}{6}-\log_3\sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\lg\operatorname{tg}31^\circ+\lg\operatorname{tg}59^\circ$;

в) $\log_2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\log_2\left(2\cos^2\frac{\pi}{12}\right)$; г) $\log_2\sin\frac{\pi}{8}+\log_2\cos\frac{\pi}{8}$;

д) $\log_7\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)-\log_7\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}\right)$; е) $\log_2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}-\log_2\sin^2\frac{3\pi}{8}$.

3.13. Вылічыце, выкарыстаўшы ўласцівасць лагарыфма, ступені:

а) $\log_4\frac{1}{64}$; б) $\log_5\left(5\sqrt{5}\right)$; в) $\log_3\left(27\sqrt{3}\right)$; г) $\lg\sqrt[3]{0,1}$;

д) $\log_2\left(64\sqrt[4]{2}\right)$; е) $\log_{17}\sqrt[7]{289}$; ж) $\log_7\sqrt[9]{\sqrt[5]{49}}$; з) $\log_5\sqrt[7]{\sqrt{0,2}}$.

3.14. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і вылічыце:

а) $\log_{128}2$; б) $\log_{0,04}5$; в) $\log_{\sqrt[7]{5}}5$; г) $\log_{\sqrt{11}}121$;

д) $\log_{9\sqrt{3}}3$; е) $\log_{\sqrt[9]{36}}6$; ж) $\log^2_{7\sqrt{7}}7$; з) $\log^3_{25\sqrt{5}}5$.

3.15. Выберыце ўласцівасці лагарыфмаў, якія можна выкарыстаць для рацыянальных вылічэнняў, і вылічыце:

а) $\log_{81}27$; б) $\log_{\frac{1}{9}}\sqrt[4]{3}$; в) $\log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8}$;

г) $\log_{49\sqrt{7}}49$; д) $\log_{\frac{1}{9}}\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$; е) $\log_{\left(6^7\cdot\sqrt{6}\right)}\sqrt[4]{216}$.

3.16. Выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў, вылічыце:

а) $\log^2_{0,25}\sqrt[7]{2}$; б) $\log^2_{\sqrt{3}}81$; в) $\log^3_{49}\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$; г) $\log^3_{0,125}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.17. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\lg4+2\lg5$; б) $\log_2 48-\frac{1}{2}\log_2 9$; в) $\lg25+0,5\lg16$;

г) $3\lg5+0,5\lg64$; д) $\log_3 18-2\log_3\sqrt{6}$; е) $2\log_{25}30+\log_{0,2}6$;

ж) $\log_{\sqrt{2}}12-\log_2 9$; з) $\log_9 54-\log_3\sqrt{2}$; і) $\log_{25}75-\log_5\sqrt{15}$.

3.18. Ведаючы, што $\log_a b=7$, знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_a\sqrt[5]{ab}$; б) $\log_a\sqrt{\frac{a}{b}}$; в) $\log_{a^2}(ab)$; г) $\log_{\sqrt[7]{a}}\sqrt[4]{ab}$.

3.19. Вылічыце:

а) $5^{\log_{125}27}$; б) $2^{\log_{16}81}$; в) $32^{\log_{0,5}\sqrt[5]{45}}$; г) $1000^{\lg\sqrt[3]{7}}$.

3.20. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_{2\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$; б) $\log_{216} \log_4 \sqrt[18]{2}$; в) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \log_{25} \left(5\sqrt{5}\right)$.

3.21. Вылічыце:

а) $\log_{4\sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{4}$; б) $\log_{27} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$; в) $\log_4 \cos \frac{13\pi}{3}$; г) $\lg \operatorname{ctg} \frac{25\pi}{4}$.

3.22. Вылічыце:

а) $\log_2 \left(\log_2 36 + \log_{0,5} 9\right)$; б) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

3.23. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{3\log_5 2 - 2\log_5 8}{\log_5 2 + \log_5 4}$.

3.24. Выкарыстайце формулу пераходу ад адной асновы лагарыфма да другой і вылічыце:

а) $\frac{\log_4 125}{\log_4 5}$; б) $\frac{\log_2 9}{\log_2 81}$; в) $\frac{\lg\sqrt{7}}{\lg 7}$; г) $\frac{\log_8 0{,}01}{\log_8 10}$.

3.25. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $4 \cdot \frac{\log_7 2}{\log_7 80} + \log_{80} 5$; б) $\log_{25} 500 - \frac{\log_3 4}{\log_3 25}$.

3.26. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_2 5 \cdot \log_5 2$; б) $\log_8 169 \cdot \log_{\sqrt{13}} 16$;

в) $\log_2 \left(\log_{\sqrt{2}} 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2\right)$; г) $\log_6 5 \cdot \log_5 8 + \log_6 27$.

3.27. Вылічыце, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $\log_8 2 + \frac{1}{\log_{32} 8}$; б) $\log_3 21 - \frac{1}{\log_{49} 9}$;

в) $\left(\log_3 5 + \frac{1}{\log_2 3}\right) \cdot \lg 3$; г) $\left(\log_9 35 - \frac{1}{\log_5 9}\right) \cdot \log_7 9$.

3.28. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і вылічыце:

а) $5^{\frac{1}{\log_2 5}}$; б) $6^{\frac{\lg 5}{\lg 6}}$; в) $7^{\frac{2}{\log_5 7}}$; г) $2^{\frac{1}{3\log_{11} 2}}$; д) $3^{\frac{\log_2 7}{\log_4 3}}$.

3.29. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $3^{\frac{4}{\log_2 6}} \cdot 2^{\frac{4}{\log_2 6}}$; б) $20^{\frac{1}{2\log_{81} 5}} \cdot (0{,}25)^{\frac{1}{2\log_{81} 5}}$.

3.30. Знайдзіце:

а) $\log_2 80$, калі $\log_2 5 = a$; б)* $\log_{75} 135$, калі $\log_{15} 45 = b$.

3.31. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{\log_{2-\sqrt{3}}3}$; б) $\log_3\left(\sqrt{13}-2\right)+\frac{1}{\log_{\sqrt{13}+2}3}$.

3.32. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $6\cdot\log_2 125\cdot\log_5 2+2^{\lg 7}\cdot 5^{\lg 7}$; б) $10^{0,25\lg 16}+14\log_3\sqrt{2}\cdot\log_4 81$.

3.33. Вылічыце: $\frac{1}{2}\log_5 3+\frac{1}{\log_{\sqrt{15}}5}-\frac{1}{3}\log_5\frac{27}{25}$.

3.34*. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\left(1-\log_2^2 5\right)\cdot\lg 2+\log_2 5\right)\cdot 7^{\log_7 21}$.

3.35*. Вылічыце:

а) $\log_9\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2\cdot\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}27$; б) $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(\sqrt{3}+2)^2}$.

3.36*. Знайдзіце значэнне выразу $\log_a b$, калі вядома, што $\log^2_{a^2 b}\left(ab^2\right)=4$.

3.37*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{3\log_3^2 45-2\cdot\log_3 45\cdot\log_3 5-\log_3^2 5}{3\log_3 45+\log_3 5}$.

3.38*. Вылічыце: $2\log_2\frac{32}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\log_2\left(11+2\sqrt{30}\right)$.

3.39. Выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў, вылічыце:

а) $\log_5 12{,}5+\log_5 2$; б) $\log_8 14+\log_8\frac{32}{7}$; в) $\lg 8+\lg 125$;

г) $\log_6 2+\log_6 3$; д) $\log_3 4-\log_3 12$; е) $\log_{36} 66-\log_{36} 11$;

ж) $\frac{\log_7 98-\log_7 14}{7}$; з) $\log_{\sqrt{6}}72-\log_{\sqrt{6}}2$; і) $\log_2\sqrt{34}-\log_2\sqrt{17}$.

3.40. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_2 56+\log_2 144-\log_2 63$; б) $\log_2 56-\log_2 7+16^{\log_2 3}$;

в) $\log_5\log_2 16-\log_5 20$; г) $\log_3\left(\sqrt{10}+1\right)+\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)$.

3.41. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_c(bc)$, калі вядома, што $\log_c b=7$;

б) $\log_c\frac{b}{c}$, калі вядома, што $\log_c b=3$.

3.42. Ведаючы, што $\log_3 5 = b$, выразіце праз b значэнне выразу:

а) $\log_3 45$; б) $\log_3 0{,}6$.

3.43. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{\log_2 14}{\log_2 7 + 1}$; б) $\dfrac{\log_5^2 10 - \log_5^2 2}{\log_5 20}$.

3.44. Знайдзіце значэнне выразу $\log_4(2a) + \log_4(8b)$, калі вядома, што $\log_4(ab) = 0{,}2$.

3.45. Вылічыце:

а) $\lg \operatorname{tg} 46° + \lg \operatorname{tg} 44°$; б) $\log_{0,5}\left(2\sin\dfrac{\pi}{12}\right) + \log_{0,5}\cos\dfrac{\pi}{12}$.

3.46. Вылічыце, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $\log_3 \dfrac{1}{81}$; б) $\log_6\left(6\sqrt{6}\right)$; в) $\log_2\left(32\sqrt{2}\right)$;

г) $\log_2\left(32\sqrt[3]{16}\right)$; д) $\log_{11}\sqrt[7]{121}$; е) $\log_5\sqrt[4]{\sqrt[7]{125}}$.

3.47. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_{625} 5$; б) $\log_{0,25} 2$; в) $\log_{7\sqrt{7}} 7$; г) $\log_{2\sqrt{2}} 4$.

3.48. Вылічыце, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $\log_{32} 8$; б) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3}$; в) $\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[5]{2}$; г) $\log_{81}\sqrt[7]{27}$;

д) $\log_{0,04}^2\sqrt[3]{5}$; е) $\log_{6\sqrt{6}} 36$; ж) $\log_{125\sqrt{5}}\sqrt[3]{625}$.

3.49. Ведаючы, што $\log_a b = 5$, знайдзіце значэнне выразу $\log_{a^5}\sqrt{ab}$.

3.50. Вылічыце:

а) $4^{\log_{64} 125}$; б) $64^{\log_{0,25}\sqrt[3]{47}}$; в) $81^{\log_9 \sqrt[4]{5}}$; г) $0{,}125^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[6]{7}}$.

3.51. Вылічыце:

а) $\log_{8\sqrt{2}}\cos\dfrac{7\pi}{4}$; б) $\log_{81}\operatorname{ctg}\dfrac{10\pi}{3}$; в) $\log_{0,75}\sin\dfrac{8\pi}{3}$.

3.52. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_6 9 + 2\log_6 2$; б) $\log_{225} 3 + 3\log_{225}\sqrt[3]{5}$;

в) $0{,}25\lg 256 + 2\lg 5$; г) $2\log_{64} 56 - \dfrac{1}{3}\log_2 7$.

3.53. Вылічыце:

а) $\log_3(\log_2 48 + \log_{0,5} 6)$; б) $\dfrac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2\lg 3}$.

3.54. Выкарыстаўшы формулу пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай, вылічыце:

а) $\dfrac{\log_5 64}{\log_5 2}$; б) $\dfrac{\log_3 5}{\log_3 25}$; в) $\dfrac{\lg \sqrt[5]{3}}{\lg 3}$; г) $\dfrac{\log_9 0{,}0001}{\log_9 10}$.

3.55. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\log_5 3}{\log_5 24} - \log_{24} 72$.

3.56. Вылічыце:

а) $\log_4 5 \cdot \log_5 4$; б) $\log_{27} 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 81$; в) $\log_8 81 \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{2}$.

3.57. Вылічыце:

а) $\left(\log_{11} 2 + \dfrac{1}{\log_5 11}\right) \cdot \lg 11$; б) $\left(\log_7 30 - \dfrac{1}{\log_2 7}\right) \cdot \log_{15} 7$.

3.58. Вылічыце:

а) $7^{\frac{1}{\log_3 7}}$; б) $2^{\frac{\lg 11}{\lg 2}}$; в) $3^{\frac{2}{\log_8 3}}$; г) $6^{\frac{1}{2\log_5 6}}$; д) $5^{\frac{\log_3 11}{\log_9 5}}$.

3.59. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5^{\frac{2}{\log_4 3}} \cdot (0{,}6)^{\frac{2}{\log_4 3}}$; б) $(3{,}5)^{\frac{1}{2\log_4 7}} \cdot 2^{\frac{1}{2\log_4 7}}$; в) $20^{\frac{2}{3\log_2 10}} \cdot 50^{\frac{2}{3\log_2 10}}$.

3.60. Выразіце праз a і b значэнне выразу $\log_9 20$, калі вядома, што $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

3.61. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5 \cdot \log_3 25 \cdot \log_5 81 + 15^{\log_{15} 7}$; б) $5^{0{,}25\log_5 16} + \log_5 \sqrt{8} \cdot \log_2 125$.

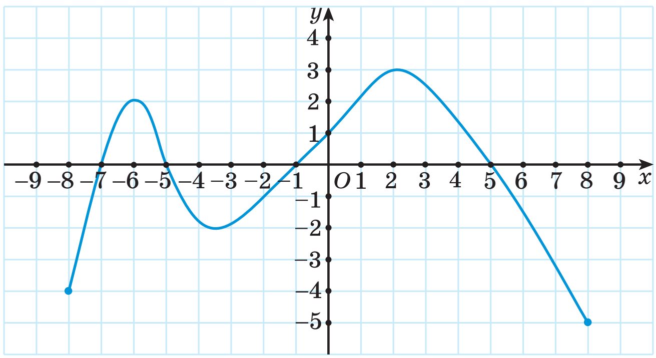
3.62*. Вылічыце: $\left(\left(9 - \log_2^2 3\right) \cdot \log_{24} 2 + \log_2 3\right) \cdot 7^{\log_7 6}$.

3.63. Знайдзіце суму НАК (15; 20) і найбольшага простага дзельніка ліку 465.

3.64. Значэнне якога з дадзеных выразаў найбольшае, а якога — найменшае:

а) $\sin\dfrac{\pi}{6}$; б) $\sqrt[4]{25}$; в) $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $3^{\log_3 7}$; д) $(-7)^0$?

3.65. З дапамогай рысунка 21, на якім паказаны графік функцыі $y = f(x)$, зададзенай на мностве $[-8; 8]$, знайдзіце:



Рыс. 21

а) мноства значэнняў функцыі;

б) нулі функцыі;

в) прамежкі знакапастаянства функцыі;

г) прамежкі манатоннасці функцыі;

д) лік каранёў ураўнення $f(x) = 2$;

е) лік каранёў ураўнення $f(x) = 2^x$.

3.66. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos(-225°) \cdot \operatorname{ctg}(-330°)$; б) $\sqrt{3}\sin\frac{7\pi}{3} + \operatorname{tg}^2\frac{9\pi}{4}$.

3.67. У адной сістэме каардынат пакажыце відарысы графікаў функцый $y = \frac{4}{x}$ і $y = 2x - 2$. Знайдзіце каардынаты іх агульных пунктаў.

3.68. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы ўласцівасці кораня n-й ступені:

а) $5\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $-\sqrt[5]{9} \cdot 5\sqrt[5]{27}$;

в) $5\sqrt[3]{10} \cdot \left(\sqrt[3]{-100}\right)$; г) $0{,}4\sqrt[4]{5} \cdot 3\sqrt[4]{125}$.

3.69. Ці праўда, што пункты $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $B(-\pi; 0)$ і $C\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ належаць графіку функцыі $y = \sin x$?

3.70. Дзве студэнцкія брыгады, працуючы разам, выканалі заданне за 7,5 г. Вызначце, за які час можа выканаць такое самае заданне адна студэнцкая брыгада, працуючы асобна, калі яна можа выканаць яго на 8 г хутчэй, чым другая брыгада.

3.71. Рашыце паказальнае ўраўненне:

а) $2^{x+8} = \frac{1}{32}$; б) $6^{x-4} = -6$; в) $4^{x^2+x} = 1$;

г) $3^{x+2} + 3^x = 90$; д) $2^x \cdot 5^{x+2} = 2500$; е) $25^x + 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$.

3.72. Выкарыстайце правілы пераўтварэння графікаў і запішыце формулу функцыі, графік якой можна атрымаць зрухам графіка функцыі $y = \sqrt[3]{x}$ уздоўж восі:

а) абсцыс на 7 адзінак улева;
б) ардынат на 4 адзінкі ўніз;
в) ардынат на 9 адзінак уверх;
г) абсцыс на 1 адзінку ўправа;
д) абсцыс на 2 адзінкі ўлева і ўздоўж восі ардынат на 3 адзінкі ўверх;
е) абсцыс на 5 адзінак управа і ўздоўж восі ардынат на 6 адзінак уніз.

3.73. Спрасціце выраз $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} - a^2}{a^{\frac{1}{2}} - a} - \dfrac{a^{0,8}}{a^{-0,2}}$.

3.74. Пакажыце відарыс графіка якой-небудзь функцыі $y = f(x)$, ведаючы, што:

а) абсяг вызначэння функцыі — прамежак $[-4; 3]$;

б) мноства значэнняў функцыі — прамежак $[-3; 5]$;

в) функцыя спадае на прамежках $[-4; -1]$ і $[1; 3]$, нарастае на прамежку $[-1; 1]$;

г) нулі функцыі: -2 і 1.

3.75. Знайдзіце $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3.76. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$; б) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x - 1}$;

в) $\sqrt{2x + 4} - \sqrt{7 - x} = 3$; г) $2\sqrt{x - 2} - \sqrt[4]{x - 2} = 15$.

3.77. Вызначце парадак дзеянняў і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\cos\left(8\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.78. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = -x^2 + 12x - 5$.

3.79. Выкарыстайце формулы двайных вуглоў і рашыце ўраўненне:

а) $2\sin x\cos x = -1$; б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.80. Якую ўласцівасць мае графік цотнай функцыі; няцотнай функцыі? Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай, а функцыя $y = h(x)$ — няцотнай, $f(3) = 7$, $h(-2) = 6$. Знайдзіце значэнне выразу $2f(-3) + h(2)$.

3.81. Рашыце паказальную няроўнасць:

а) $3^{2-8x} < 243$; б) $0{,}4^{2x+6} < 0{,}4^{x-1}$; в) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$.

3.82. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[4]{x\left(x^2 - 25\right)}$; б) $g(x) = \sqrt[6]{x - 16x^5}$;

в) $h(x) = \sqrt[10]{x^2 - 7x + 10} - \dfrac{3x - 1}{\sqrt[4]{\left(x^3 - 4x\right)\left(x^2 + 2x - 8\right)}}$.

3.83. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення:

а) $\cos\left(2x - 42^\circ\right) = 0$; б) $\sin\left(\dfrac{x}{3} + 57^\circ\right) = -\dfrac{1}{2}$.

3.84. Даследуйце функцыю $y = x^3 - 3x - 3$ і пабудуйце яе графік.

§ 8. Лагарыфмічная функцыя. Уласцівасці лагарыфмічнай функцыі

3.85. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; б) $g(x) = \sqrt{6x - x^2 + 7}$.

3.86. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = x^2 + 6x + 8$.

3.87. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = -x^2 + 16x - 10$.

У функцый, што хутка растуць, ёсць некалькі асаблівасцей, якія ўскладняюць вывучэнне працэсаў, што імі апісваюцца.

Напрыклад, пры павелічэнні значэнняў аргумента графік функцыі так хутка «падымаецца» ўверх, што на відарысе можна ўбачыць толькі яго нязначную частку.

Законы, якія разглядаюцца ў прыродазнаўстве, псіхафізіялогіі і г. д., становяцца больш зручнымі для даследавання пры пераходзе да лагарыфмічных функцый. Так, лагарыфмічнай функцыяй задаецца закон Вебера-Фехнера — эмпірычны псіхафізіялагічны закон, які заключаецца ў тым, што інтэнсіўнасць адчування чагосьці прама прапарцыянальна лагарыфму інтэнсіўнасці раздражняльніка: $S = k\lg\dfrac{P}{P_0}$, дзе S — інтэнсіўнасць адчування чалавека, P — сіла знешняга раздражнення, P_0 — ніжняе гранічнае значэнне сілы раздражняльніка, k — канстанта, якая залежыць ад суб'екта.

Азначэнне. Функцыя выгляду $y = \log_a x$, дзе $a > 0$, $a \neq 1$, называецца лагарыфмічнай.

Разгледзім уласцівасці лагарыфмічнай функцыі.

1. Абсяг вызначэння функцыі. Паколькі для любога $a > 0$, $a \neq 1$ ступень $x = a^t > 0$, то $D(y) = (0; +\infty)$.

2. Мноства значэнняў функцыі. Паколькі для $x > 0$ і $a > 0$, $a \neq 1$ значэнне паказчыка ступені t вызначаецца з ураўнення $a^t = x$ і змяняецца ад $-\infty$ да $+\infty$, то $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3. Нулі функцыі. Ураўненне $\log_a x = 0$ мае адзіны корань $x = 1$, паколькі $a^0 = 1$ для $a > 0$, $a \neq 1$. Значыць, для любога a графік лагарыфмічнай функцыі праходзіць праз пункт $(1; 0)$.

4. Перасячэнне з воссю ардынат. Графік лагарыфмічнай функцыі не перасякае вось ардынат, паколькі значэнне $x = 0$ не ўваходзіць у абсяг вызначэння функцыі.

5. Прамежкі знакапастаянства функцыі.

а) Калі $a > 1$, то для $x > 1$ атрымаем, што $\log_a x > \log_a 1$, г. зн. $\log_a x > 0$.

Тады для $0 < x < 1$ маем $\log_a x < 0$.

б) Калі $0 < a < 1$, то для $x > 1$ атрымаем, што $\log_a x < \log_a 1$, г. зн. $\log_a x < 0$, а для $0 < x < 1$ маем $\log_a x > 0$.

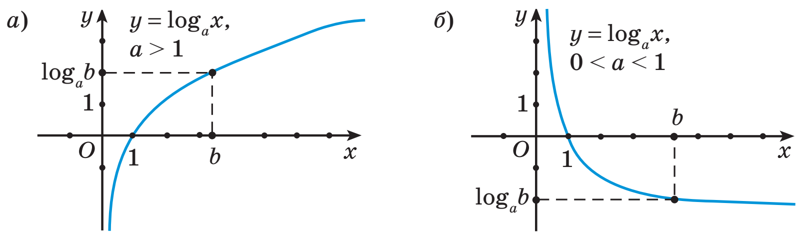
$y = \log_a x$		
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$y > 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
$y < 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$

6. Прамежкі манатоннасці. Пры $a > 1$ лагарыфмічная функцыя нарастае на абсягу вызначэння, а пры $0 < a < 1$ — спадае.

а) Дакажам, што калі $a > 1$ і $x_1 > x_2$, $\{x_1; x_2\} \in (0; +\infty)$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$.
Няхай $\log_a x_1 = t_1$ і $\log_a x_2 = t_2$, тады $x_1 = a^{t_1}$ і $x_2 = a^{t_2}$.
Па ўласцівасці паказальнай функцыі з асновай $a > 1$, калі $a^{t_1} > a^{t_2}$, то $t_1 > t_2$, г. зн. $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

б) Дакажам, што калі $0 < a < 1$ і $x_1 > x_2$, $\{x_1; x_2\} \in (0; +\infty)$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$.
Няхай $\log_a x_1 = t_1$ і $\log_a x_2 = t_2$, тады $x_1 = a^{t_1}$ і $x_2 = a^{t_2}$.
Па ўласцівасці паказальнай функцыі з асновай $0 < a < 1$, калі $a^{t_1} > a^{t_2}$, то $t_1 < t_2$, г. зн. $\log_a x_1 < \log_a x_2$.
Такім чынам, лагарыфмічная функцыя з асновай $a > 1$ нарастае на абсягу вызначэння (з'яўляецца нарастальнай), а з асновай $0 < a < 1$ спадае на абсягу вызначэння (з'яўляецца спадальнай).

7. Графік функцыі. На рысунку 22 паказаны відарысы графікаў лагарыфмічнай функцыі для $a > 1$ і $0 < a < 1$.



Рыс. 22

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Лагарыфмічная функцыя зададзена формулай $f(x) = \lg x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(100)$; в) $f\left(\sqrt{10}\right)$;

г) $f(0{,}001)$; д) $f\left(\sqrt[5]{1000}\right)$.

Рашэнне. а) $f(1) = \lg 1 = 0$; б) $f(100) = \lg 100 = 2$;

в) $f\left(\sqrt{10}\right) = \lg\sqrt{10} = \frac{1}{2}$; г) $f(0{,}001) = \lg 0{,}001 = -3$;

д) $f\left(\sqrt[5]{1000}\right) = \lg\sqrt[5]{1000} = \lg 10^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$.

2. З дадзеных пунктаў выберыце той, што належыць графіку функцыі $y = \log_7 x$:

а) $A(1;\ 7)$; б) $B(14;\ 2)$; в) $C\left(\sqrt{7};\ \frac{1}{7}\right)$;

г) $D(0;\ 0)$; д) $E\left(\frac{1}{49};\ -2\right)$.

Рашэнне. *а)* Падставім у формулу $y = \log_7 x$ значэнне аргумента $x = 1$ і знойдзем адпаведнае значэнне функцыі $y = \log_7 1 = 0$.

Атрыманае значэнне функцыі не роўна ардынаце пункта $A(1;\ 7)$, значыць, пункт $A(1;\ 7)$ не належыць графіку функцыі $y = \log_7 x$.

б) Пры $x = 14$ атрымаем $y = \log_7 14 \neq 2$. Пункт $B(14;\ 2)$ не належыць графіку функцыі $y = \log_7 x$.

в) Пры $x = \sqrt{7}$ атрымаем $y = \log_7\sqrt{7} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{7}$. Пункт $C\left(\sqrt{7};\ \frac{1}{7}\right)$ не належыць графіку функцыі $y = \log_7 x$.

г) Значэнне аргумента $x = 0$ не належыць абсягу вызначэння функцыі $y = \log_7 x$, значыць, пункт $D(0;\ 0)$ не належыць графіку функцыі $y = \log_7 x$.

д) Пры $x = \frac{1}{49}$ атрымаем $y = \log_7 \frac{1}{49} = -2$. Атрыманае значэнне функцыі роўна ардынаце пункта $E\left(\frac{1}{49};\ -2\right)$, значыць, гэты пункт належыць графіку функцыі $y = \log_7 x$.

Графіку функцыі $y = \log_7 x$ належыць пункт $E\left(\frac{1}{49};\ -2\right)$, паколькі $\log_7 \frac{1}{49} = -2$.

3. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \log_3(5 + 4x - x^2)$;

б) $y = \log_{x+1}(2 - x)$;

в) $y = \log_2(x^2 - 4) - \log_2(6x - 9)$;

г) $y = \log_2((x^2 - 4)(6x - 9))$.

Рашэнне. а) Функцыя $y = \log_3 t$ — лагарыфмічная, яна вызначана пры $t > 0$, г. зн. $5 + 4x - x^2 > 0$.

Рэшым гэту квадратную няроўнасць:

$5 + 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$.

Знойдзем карані ўраўнення $x^2 - 4x - 5 = 0$: $\left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Рашэннем няроўнасці $x^2 - 4x - 5 < 0$ з'яўляецца прамежак $(-1;\ 5)$.

Значыць, $D(y) = (-1;\ 5)$.

б) Абсягам вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца мноства значэнняў зменнай, пры якіх выконваецца ўмова $\begin{cases} 2 - x > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1. \end{cases}$

Рэшым гэту сістэму: $\begin{cases} 2 - x > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-1;\ 0) \cup (0;\ 2)$.

Значыць, $D(y) = (-1;\ 0) \cup (0;\ 2)$.

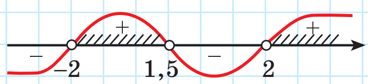
в) Абсягам вызначэння функцыі $y = \log_2(x^2 - 4) - \log_2(6x - 9)$ з'яўляецца мноства значэнняў зменнай, якія задавальняюць сістэму няроўнасцей $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 6x - 9 > 0. \end{cases}$

Рэшым гэту сістэму: $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 6x - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty), \\ x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; +\infty).$

Значыць, абсягам вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца прамежак $(3; +\infty)$.

г) Абсягам вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца мноства значэнняў зменнай, якія задавальняюць няроўнасць $(x^2 - 4)(6x - 9) > 0$. Рэшым гэту няроўнасць метадам інтэрвалаў:

$(x^2 - 4)(6x - 9) > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(6x - 9) > 0.$



Атрымаем: $(x^2 - 4)(6x - 9) > 0$ пры $x \in (-2; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$. Значыць, $D(y) = (-2; 1{,}5) \cup (2; +\infty)$.

4. Вызначце, нарастальнай ці спадальнай з'яўляецца лагарыфмічная функцыя:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{0,3} x$; в) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; г) $y = \log_{\frac{2}{7}} x$.

Рашэнне. а) Лагарыфмічная функцыя $y = \log_2 x$ з'яўляецца нарастальнай, паколькі аснова лагарыфма большая за адзінку: $a = 2 > 1$.

б) Лагарыфмічная функцыя $y = \log_{0,3} x$ з'яўляецца спадальнай, паколькі аснова лагарыфма меншая за адзінку: $a = 0{,}3 < 1$.

в) Лагарыфмічная функцыя $y = \log_{\sqrt{5}} x$ з'яўляецца нарастальнай, паколькі аснова лагарыфма большая за адзінку: $a = \sqrt{5} > 1$.

г) Лагарыфмічная функцыя $y = \log_{\frac{2}{7}} x$ з'яўляецца спадальнай, паколькі аснова лагарыфма меншая за адзінку: $a = \frac{2}{7} < 1$.

5. З дадзеных значэнняў зменнай x выберыце тое, пры якім значэнне функцыі $y = \log_4 x$ меншае за нуль:

а) 39; б) $\sqrt{5}$; в) 1,7; г) 1; д) $\frac{1}{13}$.

Рашэнне. а) Паколькі функцыя $y = \log_4 x$ нарастальная і $39 > 1$, то $\log_4 39 > \log_4 1$, г. зн. $\log_4 39 > 0$.

б) Паколькі функцыя $y = \log_4 x$ нарастальная і $\sqrt{5} > 1$, то $\log_4 \sqrt{5} > \log_4 1$, г. зн. $\log_4 \sqrt{5} > 0$.

в) Паколькі функцыя $y = \log_4 x$ нарастальная і $1{,}7 > 1$, то $\log_4 1{,}7 > \log_4 1$, г. зн. $\log_4 1{,}7 > 0$.

г) Пры $x = 1$ атрымаем $y = \log_4 1 = 0$.

д) Паколькі функцыя $y = \log_4 x$ нарастальная і $\frac{1}{13} < 1$, то $\log_4 \frac{1}{13} < \log_4 1$, г. зн. $\log_4 \frac{1}{13} < 0$.

Значэнне функцыі $y = \log_4 x$ меншае за нуль пры $x = \frac{1}{13}$.

6. З дадзеных значэнняў зменнай x выберыце тое, пры якім значэнне функцыі $y = \log_{0,5} x$ большае за нуль:

а) 17; б) 7; в) $\sqrt{3}$; г) 1; д) $\frac{2}{9}$.

Рашэнне. а) Паколькі функцыя $y = \log_{0,5} x$ спадальная і $17 > 1$, то $\log_{0,5} 17 < \log_{0,5} 1$, г. зн. $\log_{0,5} 17 < 0$.

б) Паколькі функцыя $y = \log_{0,5} x$ спадальная і $7 > 1$, то $\log_{0,5} 7 < \log_{0,5} 1$, г. зн. $\log_{0,5} 7 < 0$.

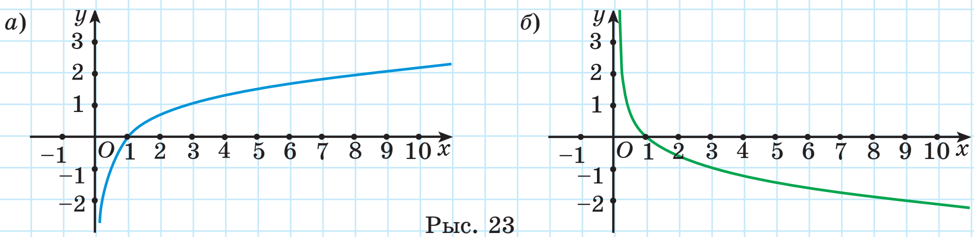
в) Паколькі функцыя $y = \log_{0,5} x$ спадальная і $\sqrt{3} > 1$, то $\log_{0,5} \sqrt{3} < \log_{0,5} 1$, г. зн. $\log_{0,5} \sqrt{3} < 0$.

г) Пры $x = 1$ атрымаем $y = \log_{0,5} 1 = 0$.

д) Паколькі функцыя $y = \log_{0,5} x$ спадальная і $\frac{2}{9} < 1$, то $\log_{0,5} \frac{2}{9} > \log_{0,5} 1$, г. зн. $\log_{0,5} \frac{2}{9} > 0$.

Значэнне функцыі $y = \log_{0,5} x$ большае за нуль пры $x = \frac{2}{9}$.

7. Па графіку лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$ (рыс. 23) вызначце аснову a функцыі.

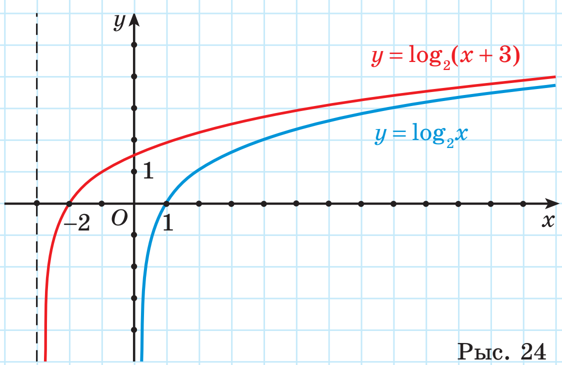


Рыс. 23

Рашэнне. а) Паколькі $\log_a a = 1$, то па графіку знойдзем значэнне абсцысы пункта, ардыната якога роўна 1. Пры $y = 1$ $x = 3$ (гл. рыс. 23, *а*), значыць, $a = 3$.

б) Паколькі $\log_a a = 1$, то па графіку знойдзем значэнне абсцысы пункта, ардыната якога роўна 1. Пры $y = 1$ $x = \frac{1}{3}$ (гл. рыс. 23, *б*), значыць, $a = \frac{1}{3}$.

8. Пабудуйце графік функцыі $y = \log_2(x + 3)$.



Рыс. 24

Рашэнне. Графік функцыі $y = \log_2(x + 3)$ атрымаем з графіка функцыі $y = \log_2 x$ зрухам яго на 3 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс (рыс. 24).

9*. а) Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $y = \log_3(x^2 - 4x + 13)$.

Рашэнне. Няхай $t = x^2 - 4x + 13$. Вылучым поўны квадрат двухчлена: $t = x^2 - 4x + 13 = x^2 - 4x + 4 + 9 = (x - 2)^2 + 9$.

Выраз $(x - 2)^2 + 9 \geqslant 9$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, г. зн. $t \geqslant 9$.

Паколькі функцыя $y = \log_3 t$ нарастае на абсягу вызначэння, то $y \in [\log_3 9; +\infty)$, або $y \in [2; +\infty)$. Значыць, $E(y) = [2; +\infty)$.

10*. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = \log_3(2 + 2x - x^2)$.

Рашэнне. Разгледзім квадратычную функцыю $t(x) = -x^2 + 2x + 2$ і знойдзем каардынаты вяршыні парабалы $x_в = -\frac{2}{-2} = 1; t_в = 3.$

Найбольшае значэнне квадратычнай функцыі $t(x) = -x^2 + 2x + 2$ роўна 3.

Паколькі функцыя $y = \log_3 t$ нарастае на абсягу вызначэння, то найбольшае значэнне функцыі $y = \log_3(-x^2 + 2x + 2)$ роўна $\log_3 3 = 1$.

11*. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = \log_{0,5}(3 + 2x - x^2)$.

Рашэнне. Знойдзем каардынаты вяршыні парабалы

$t(x) = -x^2 + 2x + 3$: $x_в = -\frac{-2}{2} = 1$; $t_в = 4$.

Найбольшае значэнне квадратычнай функцыі $t(x) = -x^2 + 2x + 3$ роўна 4.

Паколькі функцыя $y = \log_{0,5} t$ спадае на абсягу вызначэння, то найменшае значэнне функцыі $y = \log_{0,5}(-x^2 + 2x + 3)$ роўна $\log_{0,5} 4 = -2$.

12*. Вызначце, ці правільная няроўнасць:

а) $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} < 3\log_8 26$; б) $2\log_3 4 < 3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17}$;

в) $2\log_2 5 < 3\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{23}$.

Рашэнне. а) $2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} < 3\log_8 26 \Leftrightarrow 2\log_2 5 < 3\log_{2^3} 26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 25 < \log_2 26$.

Паколькі функцыя $y = \log_2 x$ нарастальная, то няроўнасць правільная.

б) $2\log_3 4 < 3\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{17} \Leftrightarrow 2\log_3 4 < 3\log_{3^{-3}} \frac{1}{17} \Leftrightarrow \log_3 4^2 < 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\log_3 17^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3 16 < \log_3 17$.

Паколькі функцыя $y = \log_3 x$ нарастальная, то няроўнасць правільная.

в) $2\log_2 5 < 3\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{23} \Leftrightarrow 2\log_2 5 < 3\log_{2^{-3}} \frac{1}{23} \Leftrightarrow \log_2 5^2 < 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\log_2 23^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2 25 < \log_2 23$.

Паколькі функцыя $y = \log_2 x$ нарастальная, то няроўнасць няправільная.

13*. Вызначце, якія з дадзеных няроўнасцей правільныя:

а) $5 + \lg 7 < 7 + \lg 5$; б) $5 - \lg 7 < 7 - \lg 5$;

в) $5 \cdot \lg 7 < 7 \cdot \lg 5$.

Рашэнне. а) $5 + \lg 7 < 7 + \lg 5 \Leftrightarrow \lg 7 - \lg 5 < 7 - 5 \Leftrightarrow \lg\frac{7}{5} < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg\frac{7}{5} < \lg 100$. Няроўнасць правільная.

б) $5 - \lg 7 < 7 - \lg 5 \Leftrightarrow \lg 7 - \lg 5 > -2 \Leftrightarrow \lg\frac{7}{5} > -2 \Leftrightarrow \lg 1{,}4 > \lg 0{,}01$. Няроўнасць правільная.

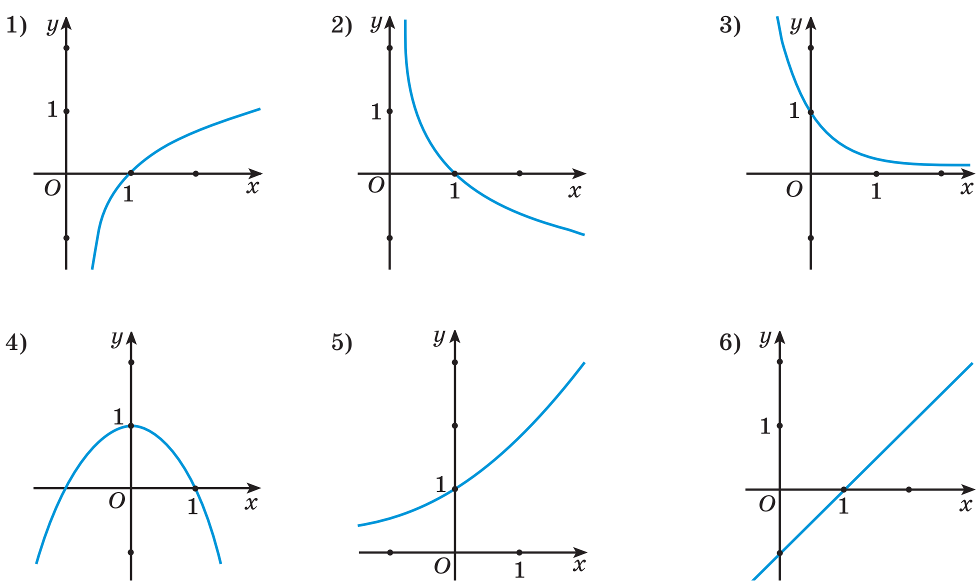
в) $5 \cdot \lg 7 < 7 \cdot \lg 5 \Leftrightarrow \lg 7^5 < \lg 5^7$, правільна, паколькі $7^5 = 7^2 \cdot 7^3 = 49 \cdot 343$, а $5^7 = 5^3 \cdot 5^4 = 125 \cdot 625$.

Усе няроўнасці правільныя.

?

1. На падставе якой уласцівасці лагарыфмічнай функцыі можна сцвярджаць, што: а) $\log_2 7 > \log_2 5$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 10 > \log_{\frac{1}{3}} 15$?

2. Сярод графікаў функцый, паказаных на рысунку 25, выберыце графік лагарыфмічнай функцыі $y = \log_a x$ з асновай: а) большай за 1; б) меншай за 1.



Рыс. 25

3.88. З дадзеных функцый выберыце лагарыфмічныя:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = 5^x$; в) $y = x \cdot \log_5 4$; г) $y = \log_{0,3} x$.

3.89. Вызначце, якая з дадзеных функцый з'яўляецца нарастальнай, а якая — спадальнай пры $x > 0$:

а) $y = \log_{2,4} x$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; в) $y = \log_{0,9} x$; г) $y = \log_{1,01} x$.

3.90. Выберыце пункт, які належыць графіку функцыі $y = \log_5 x$:

а) $A(1;\ 5)$; б) $B(10;\ 2)$; в) $C\left(\sqrt{5};\ \frac{1}{2}\right)$; г) $D(0;\ 0)$; д) $E\left(\frac{1}{25};\ 2\right)$.

3.91. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \log_3 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

3.92. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі і параўнайце значэнні выразаў:

а) $\log_2 7$ і $\log_2 6$; б) $\log_5 \sqrt{3}$ і $\log_5 \sqrt{2}$;

в) $\log_{0,3} 11$ і $\log_{0,3} 13$; г) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{5}$ і $\log_{\frac{1}{2}} 2,4$.

3.93. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі і параўнайце з нулём значэнне выразу:

а) $\log_2 1,3$; б) $\log_{\sqrt{2}} 0,8$; в) $\log_{0,9} 17$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 0,7$.

3.94. Параўнайце a з адзінкай, калі:

а) $\log_a 0,8 > \log_a 0,9$; б) $\log_a 5,6 > \log_a 5,3$.

3.95. Знайдзіце, пры якім значэнні a графік функцыі $y = \log_a x$ праходзіць праз пункт:

а) $P(2;\ 1)$; б) $B(4;\ -2)$; в) $K\left(\frac{1}{27};\ -3\right)$.

3.96. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

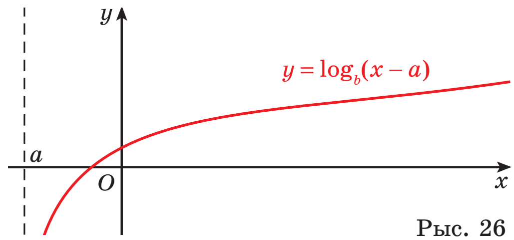
а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_2(x - 3)$;

в) $y = \log_2 x + 2$; г) $y = -\log_2 x$.

3.97. Графік функцыі $y = \log_b(x - a)$ мае выгляд, як на рысунку 26, калі:

а) $a > 0,\ 0 < b < 1$;
б) $a > 0,\ b > 1$;
в) $a < 0,\ 0 < b < 1$;
г) $a < 0,\ b > 1$;
д) $a = 0,\ 0 < b < 1$.

Выберыце правільны адказ.



Рыс. 26

3.98. Пабудуйце графік функцыі $y = \log_3(x + 2) - 1$ і апішыце яе ўласцівасці.

3.99. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \log_2(2x + 1)$; б) $y = \log_{0,5}(12 - 3x)$;

в) $y = \lg(x^2 - 4x + 3)$; г) $y = \log_{\frac{2}{3}}(5x - 2x^2 - 2)$;

д) $y = \log_5 \frac{9x - 1}{x + 3}$; е) $y = \log_5\left(\frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 2}\right)$;

ж) $y = \log_x(x + 3)$; з) $y = \log_{7-x}(x^2 - 5x)$.

3.100. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат:

а) $y = \log_4(x + 1) - 3$; б) $y = \lg(x + 5) + \lg 2$.

3.101. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $f(x) = \log_4 x$ на адрэзку $[1;\ 16]$;
б) $f(x) = \log_{0,2} x$ на адрэзку $[5;\ 125]$.

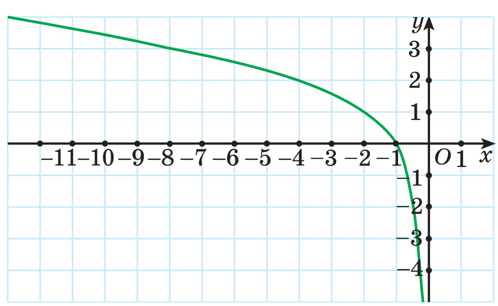
3.102. Знайдзіце лік каранёў ураўнення $\log_2(2 - x) = x^2 + 2x$.

3.103*. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \log_2(x^2 + 2x + 9)$;
б) $y = \log_{\frac{1}{4}}(|x - 5| + 16)$.

3.104*. Выберыце функцыю, графік якой паказаны на рысунку 27:

а) $y = \log_2 x$;
б) $y = -\log_2 x$;
в) $y = \log_2(-x)$;
г) $y = -\log_2(-x)$;
д) $y = -2^x$.



Рыс. 27

3.105*. Дакажыце, што функцыя $y = \log_{0,4}|x|$ з'яўляецца цотнай.

3.106*. Вызначце, цотнай ці няцотнай з'яўляецца функцыя
$y = \log_2 \frac{x-1}{x+1} - \log_2 \frac{x+1}{x-1}$.

3.107*. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 2^{\log_2 x}$; б) $y = 4^{\log_2 x}$; в) $y = 3^{\log_3 \cos x}$; г) $y = 10^{\lg \sin x}$.

3.108*. Пабудуйце графік функцыі:

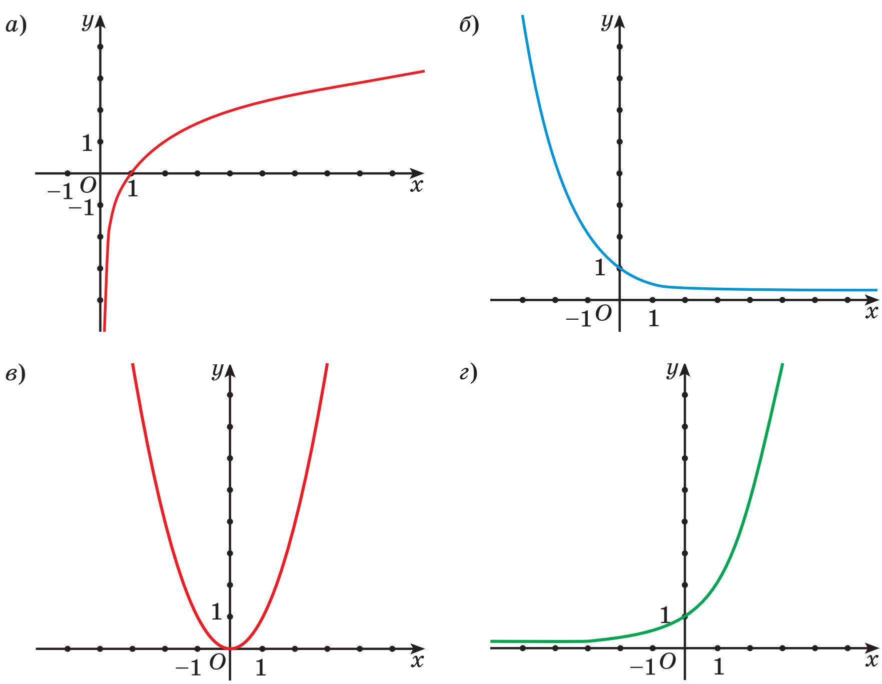
а) $y = \log_2 |x|$; б) $y = |\log_2 x|$;

в) $y = \log_2 |x-1|$; г) $y = |\log_2 x - 1|$.

3.109. Якія з дадзеных функцый з'яўляюцца нарастальнымі, а якія — спадальнымі:

а) $y = \log_{\frac{2}{7}} x$; б) $y = \log_5 x$; в) $y = \log_{5,2} x$; г) $y = \log_{0,07} x$?

3.110. Сярод рысункаў 28, *а—г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $y = \log_a x$, дзе $a > 1$.



Рыс. 28

3.111. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

3.112. Ці належыць графіку функцыі $y = \log_2 x$ пункт:

а) $A(32; 2)$; б) $B(0{,}125; -3)$;

в) $C\left(16\sqrt{2}; 4{,}5\right)$; г) $D\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; -1{,}5\right)$?

3.113. Графік функцыі $y = \log_a x$ праходзіць праз пункт $A(25; 4)$. Ці праходзіць гэты графік праз пункт:

а) $B(0{,}008; -6)$; б) $C(125; 6)$?

3.114. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі і параўнайце значэнні выразаў:

а) $\log_3 7{,}1$ і $\log_3 7{,}01$; б) $\log_{0,2} 2{,}3$ і $\log_{0,2} 2{,}2$;

в) $\log_{\frac{1}{6}} 0{,}23$ і $\log_{\frac{1}{6}} 0{,}46$.

3.115. Параўнайце значэнні $y_1 = \log_2 \sqrt{3}$; $y_2 = \log_2 1{,}8$; $y_3 = \log_2 1{,}5$; $y_4 = \log_2 0{,}09$ лагарыфмічнай функцыі $y = \log_2 x$ і размясціце іх у парадку спадання.

3.116. Выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі, параўнайце з нулём значэнне выразу:

а) $\log_4 8{,}3$; б) $\log_{\sqrt{7}} 0{,}45$; в) $\lg 0{,}5$;

г) $\log_{0,8} 29$; д) $\log_{\frac{3}{7}} 0{,}9$; е) $\log_{0,5} 3$.

3.117. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;

в) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$; г) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$.

3.118. Пабудуйце графік функцыі $y = \log_2(x - 3) - 1$ і апішыце яе ўласцівасці.

3.119. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \log_8(5 - 6x)$; б) $y = \log_{0,3}(3x^2 + 10x + 3)$;

в) $y = \log_2 \frac{7x - 1}{5 - x}$; г) $y = \log_{x+2}(x^2 - 1)$.

3.120. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі $y = \log_6(x + 6) + 2$ з воссю ардынат.

3.121. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y = \log_3 x$ на адрэзку $[1; 81]$.

3.122*. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $y = \log_2(x^2 - 10x + 41)$.

3.123*. Пабудуйце графік функцыі $y = 3^{\log_3 x}$.

3.124*. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \log_4|x|$; б) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

3.125. Якому з дадзеных лікавых прамежкаў належыць лік $-\sqrt[4]{79}$:

а) $(-80; -78)$; б) $(-5; -4)$; в) $(-4; -3)$; г) $(-3; -2)$?

3.126. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і вылічыце: $27^{\frac{1}{3}} - 25^{-\frac{1}{2}} + 16^{\frac{3}{4}} - 27^{1\frac{1}{3}}$.

3.127. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_6 48 - \log_6 4 + \log_6 3$;

б) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;

в) $\log_{27}^2 \sqrt[5]{3}$;

г) $(30 - 5^{1+\log_5 4}) \cdot \log_2 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$.

3.128. Запішыце ў выглядзе кораня выраз $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[9]{a^4}}$.

3.129. Запішыце ўраўненне акружнасці, відарыс якой паказаны на рысунку 29. Якое ўраўненне мае акружнасць, сіметрычная дадзенай акружнасці адносна:

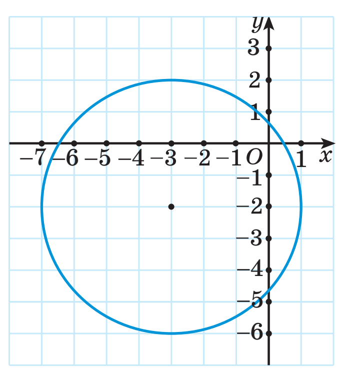
а) восі ардынат;

б) восі абсцыс;

в) пачатку каардынат;

г) прамой $y = 4$;

д) прамой $x = 5$?



Рыс. 29

3.130. Рашыце ўраўненне $\frac{6}{x^2-4x+3}-\frac{13-7x}{1-x}=\frac{3}{x-3}$.

3.131. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\cos\pi+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\frac{3\pi}{2}+2\cos\pi$;

г) $2\sin(-2\pi)+\cos(-\pi)$;

д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\pi\cdot\cos2\pi$;

е) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+8\sin(-\pi)-\cos2\pi$.

3.132. Рашыце паказальнае ўраўненне:

а) $4^x=8^{2x-3}$;

б) $0{,}8^{2x-3}=1$;

в) $\left(\frac{1}{15}\right)^{3x^2+x-1{,}5}=\frac{\sqrt{15}}{15}$;

г) $7^{x+2}+4\cdot7^{x+1}=539$;

д) $4^x-5\cdot2^x+4=0$.

3.133. Рашыце няроўнасць $f'(x)\leqslant0$, калі $f(x)=3x-x^2-4$.

3.134. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y=\sqrt{2x^2-3x-10}$ і $y=x$;

б) $y=\sqrt{8-3x-x^2}$ і $y=-x-2$.

3.135. На рысунку 30 паказаны відарыс графіка функцыі $y=f(x)$, абсягам вызначэння якой з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў. Знайдзіце лік каранёў ураўнення:

а) $f(x)=\sqrt{x}$;

б) $f(x)=-x+1$;

в) $f(x)=-\frac{3}{x}$;

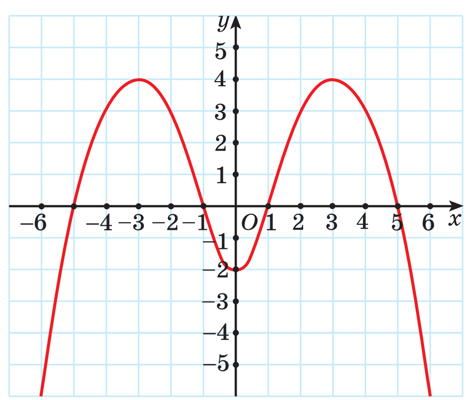
г) $f(x)=-x^2-2$;

д) $f(x)=\log_2x$;

е) $f(x)=0{,}5^x$;

ж) $f(x)=|x+1|-2$;

з) $f(x)=4$.



Рыс. 30

3.136. Рашыце няроўнасць $\frac{2}{x-4} \geqslant x-3$ метадам інтэрвалаў.

3.137. Рашыце ўраўненне $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{7}\right)=-\sqrt{3}$. Знайдзіце суму найменшага дадатнага і найбольшага адмоўнага каранёў дадзенага ўраўнення.

3.138. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x^2-7y+17=0; \end{cases}$ б)* $\begin{cases} 2x^2-3xy+2y^2=4, \\ 2x^2+3y^2=14. \end{cases}$

3.139. Рашыце аднароднае ўраўненне $5\sin^2 x-6\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

3.140*. Знайдзіце значэнне выразу

$$\sqrt{(\log_2 3+\log_3 2)^2-(\log_2 3-\log_3 2)^2}.$$

§ 9. Лагарыфмічныя ўраўненні

3.141. Рашыце ўраўненне:

а) $9^{2x-1}=\sqrt{3}$; б) $5^{x+2}=7$; в) $15^{x^2-x}=1$; г) $13^{x^2-3}=13$.

3.142. Знайдзіце карані ўраўнення $\cos x=-\frac{1}{2}$.

3.143. Якія з дадзеных ураўненняў не маюць каранёў:

а) $\sqrt{2+x}=-4$; б) $x^2+7=0$; в) $7^x=-3$; г) $\cos x=\sqrt{3}$?

Многія задачы з розных галін навукі і практыкі мадэлююцца з дапамогай лагарыфмічных ураўненняў.

Напрыклад, пры праектаванні будынкаў улічваецца індэкс гукаізаляцыі сцен $D=k\cdot\lg\frac{p_0}{p}$, дзе p_0 — ціск гуку да праходжання сцяны, p — ціск гуку, што прайшоў сцяну, k — каэфіцыент гукапаглынання. Для таго каб знайсці, у колькі разоў сцяна паніжае ціск гуку, неабходна рашыць ураўненне $\lg\frac{p_0}{p}=\frac{D}{k}$. Гэта ўраўненне з'яўляецца лагарыфмічным.

Разгледзім некаторыя віды лагарыфмічных ураўненняў і спосабы іх рашэння.

1. Ураўненне выгляду $\log_a f(x) = b$, дзе $a \neq 1$, $a > 0$

Для рашэння ўраўнення выгляду $\log_a f(x) = b$ выкарыстаем азначэнне лагарыфма ліку і атрымаем, што $f(x) = a^b$. Такім чынам, ураўненне $\log_a f(x) = b$ раўназначна ўраўненню $f(x) = a^b$.

$$\log_a f(x) = b,\ a \neq 1,\ a > 0 \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_3(x - 1) = 2$; б) $\log_2(x^2 - 5) = 2$.

Рашэнне.

а) $\log_3(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$.

Адказ: 10.

б) $\log_2(x^2 - 5) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$

Адказ: -3; 3.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне $\log_3(x - 2) + \log_3 x = 1$.

Рашэнне. Па ўласцівасці лагарыфмаў атрымаем: $\log_3((x - 2)x) = 1$.

Па азначэнні лагарыфма ліку атрымаем ураўненне $(x - 2)x = 3^1$, або $x^2 - 2x - 3 = 0$, карані гэтага ўраўнення $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Паколькі пры пераходзе ад ураўнення $\log_3(x - 2) + \log_3 x = 1$ да ўраўнення $\log_3((x - 2)x) = 1$ абсяг вызначэння пашыраецца, то неабходна праверка. Для гэтага можна выканаць падстаноўку каранёў у зыходнае ўраўненне або праверыць выкананне ўмовы існавання лагарыфмаў: $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x > 0. \end{cases}$

Праверка. Пры $x = 3$ атрымаем $\log_3(3 - 2) + \log_3 3 = 1$, $\log_3 1 + \log_3 3 = 1$, $0 + 1 = 1$ — правільную роўнасць, значыць, лік 3 — корань дадзенага ўраўнення.

Пры $x = -1$ атрымаем выраз $\log_3(-1 - 2)$, які не мае сэнсу, значыць, лік -1 не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ: 3.

2. Ураўненне выгляду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, дзе $a \neq 1$, $a > 0$

Паколькі лагарыфмічная функцыя $y = \log_a t$ нарастае пры $a > 1$ або спадае пры $0 < a < 1$, то з роўнасці значэнняў функцый $\log_a t_1 = \log_a t_2$ вынікае роўнасць значэнняў аргументаў $t_1 = t_2$ пры ўмове, што $t_1 > 0$ і $t_2 > 0$. Справядліва і адваротнае: калі $t_1 = t_2 > 0$, то $\log_a t_1 = \log_a t_2$. Такім чынам, ураўненне $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, дзе $a \neq 1$, $a > 0$, раўназначна сістэме $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Заўвага. У сістэме можна запісаць толькі адну з няроўнасцей, паколькі кожная няроўнасць вынікае з ураўнення сістэмы і другой няроўнасці.

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg x$.

Рашэнне. Першы спосаб. Дадзенае ўраўненне раўназначна сістэме:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = x, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1, \end{array}\right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Другі спосаб. Паколькі пры пераходзе ад ураўнення $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ да ўраўнення $f(x) = g(x)$ абсяг вызначэння адпаведных функцый пашыраецца, то могуць з'явіцца «пабочныя карані». Таму для рашэння ўраўнення $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ можна рашыць ураўненне $f(x) = g(x)$ і праверыць, ці задавальняюць атрыманыя карані ўраўненне $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Першы спосаб

$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Другі спосаб

$f(x) = g(x)$

Праверка

Рэшым другім спосабам ураўненне $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg x$. Каранямі ўраўнення $x^2 - 2x - 4 = x$ з'яўляюцца лікі $x_1 = -1$ і $x_2 = 4$.

Праверка. Падставім $x = -1$ ва ўраўненне $\lg(x^2 - 2x - 4) = \lg x$ і атрымаем выраз $\lg((-1)^2 - 2(-1) - 4) = \lg(-1)$. Паколькі лагарыфм адмоўнага ліку не існуе, то $x = -1$ не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.

Падставім ва ўраўненне $x = 4$ і атрымаем $\lg(4^2 - 2 \cdot 4 - 4) = \lg 4$ — правільную роўнасць. Значыць, лік 4 з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ: 4.

3. Ураўненні, у якіх можна выканаць замену зменнай

Прыклад 4. Рашыце ўраўненне $2\lg x - \lg^2 x = -3$.

Рашэнне. Ва ўраўненні $2\lg x - \lg^2 x = -3$ можна выканаць замену зменнай.

Увядзём новую зменную $\lg x = t$, тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $-t^2 + 2t = -3$, або $t^2 - 2t - 3 = 0$.

Карані атрыманага квадратнага ўраўнення $\left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = -1. \end{array}\right.$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $\lg x = t$ і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 3, \\ \lg x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^3, \\ x = 10^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1000, \\ x = 0{,}1. \end{array}\right.$$

Адказ: 1000; 0,1.

Прыклад 5. Рашыце ўраўненне $\frac{1}{5 - 4\log_2 x} + \frac{4}{1 + \log_2 x} = 3.$

Рашэнне. Увядзём новую зменную $\log_2 x = t$, тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $\frac{1}{5 - 4t} + \frac{4}{1 + t} = 3.$

Рэшым гэта ўраўненне:

$$\frac{1}{5 - 4t} + \frac{4}{1 + t} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + t + 4(5 - 4t) - 3(5 - 4t)(1 + t)}{(5 - 4t)(1 + t)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12t^2 - 18t + 6}{(5 - 4t)(1 + t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 3t + 1}{(5 - 4t)(1 + t)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 3t + 1 = 0, \\ (5 - 4t)(1 + t) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $\log_2 x = t$ і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1, \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

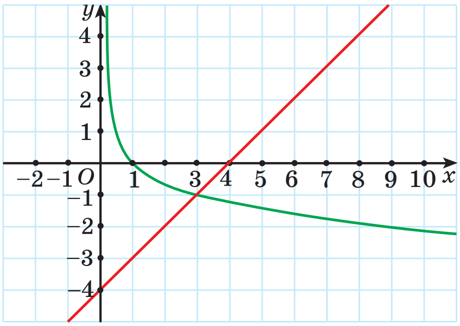
Адказ: 2; $\sqrt{2}$.

4*. Ураўненні, пры рашэнні якіх прымяняюцца ўласцівасці функцый

Прыклад 6. Рашыце ўраўненне $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

Рашэнне. Функцыя $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ — лагарыфмічная з асновай $a = \frac{1}{3}$, значыць, яна спадае на ўсім абсягу вызначэння $D = (0; +\infty)$.

Функцыя $y = x - 4$ — лінейная, $k = 1 > 0$, значыць, гэта функцыя нарастае на $\boldsymbol{R}$. Таму, калі ўраўненне $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$ мае корань, то ён адзіны (рыс. 31).



Рыс. 31

Відавочна, што лік 3 задавальняе дадзенае ўраўненне.

Такім чынам, $x = 3$ — адзіны корань дадзенага ўраўнення.

Адказ: 3.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_5(2x - 3) = 4$; б) $\log_2(x^2 - 1) = 3$;

в) $\log_{0,5}(x^2 + 5x - 16) = -3$; г) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$.

Рашэнне. а) $\log_5(2x - 3) = 4$; $2x - 3 = 5^4$; $2x - 3 = 625$; $2x = 628$; $x = 314$.

Адказ: 314.

б) $\log_2(x^2 - 1) = 3$; $x^2 - 1 = 2^3$; $x^2 - 1 = 8$, $x^2 = 9$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Адказ: −3; 3.

в) $\log_{0,5}(x^2 + 5x - 16) = -3$; $x^2 + 5x - 16 = (0,5)^{-3}$; $x^2 + 5x - 16 = 8$;

$x^2 + 5x - 24 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Адказ: −8; 3.

г) $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$; $\lg((x - 9)(2x - 1)) = 2$;

$\begin{cases} (x-9)(2x-1) = 100, \\ x > 9, \\ x > \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 19x + 9 - 100 = 0, \\ x > 9; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2 - 19x - 91 = 0, \\ x > 9; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 13, \\ x = 3,5, \end{array}\right. \\ x > 9; \end{cases}$ $x = 13$.

Адказ: 13.

2. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_5 x = \log_5(6 - x^2)$;

б) $\log_2(x^2 - 3,5x + 5) = \log_2(1,5x + 1)$;

в) $\log_4 \frac{2}{1-x} = \log_4(x - 4)$.

Рашэнне. а) $\log_5 x = \log_5(6 - x^2)$; $\begin{cases} x = 6 - x^2, \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x > 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x > 0; \end{cases}$ $x = 2.$

Адказ: 2.

б) $\log_2(x^2 - 3,5x + 5) = \log_2(1,5x + 1)$; $x^2 - 3,5x + 5 = 1,5x + 1$;

$x^2 - 5x + 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Праверка. Пры $x = 1$ атрымаем $\log_2(1^2 - 3,5 \cdot 1 + 5) = \log_2(1,5 \cdot 1 + 1)$; $\log_2(2,5) = \log_2(2,5)$ — правільную роўнасць, значыць, $x = 1$ з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.

Пры $x = 4$ атрымаем $\log_2(4^2 - 3,5 \cdot 4 + 5) = \log_2(1,5 \cdot 4 + 1)$; $\log_2(7) = \log_2(7)$ — правільную роўнасць, значыць, $x = 4$ з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ: 1; 4.

в) $\log_4 \frac{2}{1-x} = \log_4(x - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{1-x} = x - 4, \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 - (x-4)(1-x)}{1-x} = 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{1-x} = 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3, \end{array}\right. \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Адказ: няма каранёў.

3. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$;

б) $\log_5 x - \log_x 5 = 1{,}5$;

в) $\log_3^2(27x) + 2\log_3 x = -7$.

Рашэнне. а) Увядзём новую зменную $\log_5 x = t$, атрымаем квадратнае ўраўненне $t^2 - t - 2 = 0$. Яго карані $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1. \end{array}\right.$

Падставім $t = \log_5 x$ у сукупнасць ураўненняў:

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^2, \\ x = 5^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = \frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Адказ: 0,2; 25.

б) Па формуле пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай атрымаем, што $\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$. Тады зыходнае ўраўненне атрымае выгляд

$$\log_5 x - \frac{1}{\log_5 x} = 1{,}5.$$

Няхай $\log_5 x = t$, тады $t - \frac{1}{t} = 1{,}5$; $t^2 - 1{,}5t - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 25, \\ x = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{array}\right.$$

Адказ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 25.

в) $\log_3^2(27x) + 2\log_3 x = -7$; $(\log_3 27 + \log_3 x)^2 + 2\log_3 x = -7$;

$(3 + \log_3 x)^2 + 2\log_3 x = -7$.

Няхай $\log_3 x = t$, тады ўраўненне атрымае выгляд $(3 + t)^2 + 2t = -7$; $t^2 + 8t + 16 = 0$; $t = -4$, значыць, $\log_3 x = -4$; $x = \frac{1}{81}$.

Адказ: $\frac{1}{81}$.

4. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \log_3 x + 2\log_3 y = 3, \\ 2\log_3 x - \log_3 y = 6. \end{cases}$

Рашэнне. Памножым абедзве часткі другога ўраўнення сістэмы на 2 і атрымаем: $\begin{cases} \log_3 x + 2\log_3 y = 3, \\ 4\log_3 x - 2\log_3 y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} 5\log_3 x = 15, \\ 2\log_3 x - \log_3 y = 6; \end{cases}$

$\begin{cases} \log_3 x = 3, \\ 2 \cdot 3 - \log_3 y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_3 x = 3, \\ \log_3 y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 27, \\ y = 1. \end{cases}$

Адказ: (27; 1).

5. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_x (3x - 2) = 2$; б)* $\log_2 \sin x = -1$;

в)* $\lg x^2 = 2\lg x$; г)* $\lg x^2 = 2\lg(-x)$.

Рашэнне. а) $\log_x (3x - 2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = x^2, \\ 3x - 2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ x > \frac{2}{3}, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \end{array} \right. \\ x > \frac{2}{3}, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Адказ: 2.

б)* $\log_2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = 2^{-1} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

в)* $\lg x^2 = 2\lg x \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x^2 = \lg x^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; +\infty).$

Адказ: (0; $+\infty$).

г)* $\lg x^2 = 2\lg(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x^2 = \lg x^2, \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x^2, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 0).$

Адказ: $(-\infty;\ 0)$.

6*. Рашыце ўраўненне $\log_3 x = \sqrt{13 - x}$.

Рашэнне. Функцыя $y = \log_3 x$ нарастае пры $x > 0$, а функцыя $y = \sqrt{13 - x}$ спадае пры $x \leqslant 13$. Значыць, зыходнае ўраўненне на прамежку $(0;\ 13]$ мае не больш за адзін корань.
Пры $x = 9$ ураўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць, г. зн. 9 — адзіны корань дадзенага ўраўнення.
Адказ: 9.

7*. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} (\lg x + \lg y)\lg x = 2, \\ \lg x = \lg y + 3. \end{cases}$

Рашэнне. Няхай $\lg x = a$, $\lg y = b$, тады сістэма атрымае выгляд

$$\begin{cases} (a + b)a = 2, \\ a = b + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (a + b)a = 2, \\ b = a - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} (2a - 3)a = 2, \\ b = a - 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 - 3a - 2 = 0, \\ b = a - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} a &= 2, \\ a &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}\right. \\ b = a - 3; \end{cases} \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} a = 2, \\ b = -1; \end{cases} \\ &\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = -3\frac{1}{2}, \end{cases} \end{aligned}\right. \text{ значыць,}$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} \lg x = 2, \\ \lg y = -1; \end{cases} \\ &\begin{cases} \lg x = -\frac{1}{2}, \\ \lg y = -\frac{7}{2}; \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = 100, \\ y = 0{,}1; \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}, \\ y = \frac{1}{1000\sqrt{10}}. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Адказ: $(100;\ 0{,}1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\ \frac{1}{1000\sqrt{10}}\right)$.

1. Ці існуе значэнне x, пры якім:

а) $\log_2 x = 5$; б) $\log_2 x = -5$;

в) $\log_2(-x) = 5$; г) $\log_2(-x) = -\log_2(x)$?

2. Калі ўраўненне $f(x) = h(x)$ мае два карані, то ўраўненне $\lg f(x) = \lg h(x)$:

а) мае два карані; б) можа мець толькі адзін корань;
в) не мае каранёў; г) можа мець больш за два карані.

3.144. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

а) $\log_3 x = 2$; б) $\log_5 x = -3$; в) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$;

г) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{2}$; д) $\log_2(2-3x) = 3$; е) $\log_2(x-3) = 0$;

ж) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)+1=0$; з) $\log_{64}(x+4)-\frac{1}{3}=0$; і) $\log_{27}(7-x)-\frac{2}{3}=0$.

3.145. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x) = -2$; б) $\log_{0,5}(x^2+4x-20) = 0$;

в) $\log_2(x^2-2x+8)-4 = 0$; г) $\log_4(x^2+2x+49)-3 = 0$.

3.146. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = \log_{\frac{2}{3}} \frac{x+1}{2x-1}$ і прамой $y = 1$;

б) $y = \log_4 |6x-1|$ і прамой $y = 3$.

3.147. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасць манатоннасці лагарыфмічнай функцыі:

а) $\log_4(3x-4) = \log_4(x+1)$; б) $\log_{\frac{1}{5}}(4x+3) = \log_{\frac{1}{5}}(2x-1)$;

в) $\log_4(1-x) = \log_4(x^2+8x-9)$; г) $\log_6(x^2+6) = \log_6(5x)$.

3.148. Перайдзіце да раўназначнай сістэмы і рашыце ўраўненне:

а) $\lg(x^2-10x+17)-\lg(x+3) = 0$; б) $\log_2(x^2-3x)-\log_2(x-1) = 0$.

3.149. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх роўны значэнні выразаў $\log_4(x^3+x^2-3x-3)$ і $\log_4(x^3+1)$.

3.150. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і рашыце ўраўненне:

а) $\log_2(x+4)+\log_2(x-3)=3$; б) $\log_2(x-5)+\log_2(x-2)=2$;

в) $\log_3(x+1)+\log_3(x+7)=3$; г) $2-\log_2 x=\log_2(3x-4)$;

д) $\log_4(x+4)=2-\log_4(x-2)$; е) $3-\log_3(2x-1)=\log_3(18x-27)$.

3.151. Рашыце ўраўненне:

а) $1+\log_7(x+4)=\log_7(x^2+9x+20)$;

б) $1+\log_5(x^2+4x-5)=\log_5(x+5)$.

3.152. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $\lg^2 x+\lg x-2=0$; б) $\log_3^2 x-2\log_3 x=3$;

в) $\log_5^2 x+\log_{0,2} x=2$; г) $\log_5^2 x-\log_{\sqrt{5}} x-3=0$.

3.153. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_2 x^3+8\log_2\sqrt{x}=-21$;

б) $\log_8 x+\log_{\sqrt{2}} x=14$;

в) $\log_2(x-1)^3-\log_{0,5}(x-1)=8$.

3.154. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне:

а) $\log_2(x+5)=2\log_2(x+3)$; б) $2\log_{0,5}(x-2)=\log_{0,5}(x+54)$;

в) $\log_{\sqrt{3}}(x-3)=\log_3(x-1)$; г) $\log_{\sqrt{5}}(x-2)=\log_5(2x-1)$;

д) $\log_3(x-3)=\log_9(x-1)$; е) $\log_{25}(16-5x)=\log_5(2x-5)$.

3.155. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і метад замены зменнай і рашыце ўраўненне:

а) $\lg^2 x+4\lg(10x)-1=0$; б) $\log_4^2 x+\frac{1}{2}\log_4(16x)-4=0$;

в) $\log_{0,5}^2(x-5)+\log_2\frac{4}{x-5}=2$; г) $\log_5^2(5-x)+2\log_{\frac{1}{5}}\frac{\sqrt{5}}{5-x}=2$;

д) $2\log_2^2(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{8}{x-2}=\log_2(2x-4)+2$.

3.156. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне:

а) $\log_2^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8$; б) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)-14=\lg\frac{1}{x}$.

3.157. Прымяніце формулу пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай і рашыце ўраўненне:

а) $\log_2 x - 12\log_x 2 = 1$;

б) $\log_4 x + 6\log_x 4 = 5$;

в) $4\log_{16} x + \lg 10 = 3\log_x 16$.

3.158. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне:

а) $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$;

б) $\log_{2x+3}(5x^2 + 11x + 3) = 2$;

в) $\log_{1-x}(x^2 + x) = \log_{1-x}(4 - 2x)$.

3.159. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_7(2x + 3) - 2\log_7(3x + 1) = \log_{\frac{1}{7}} 7$;

б) $\log_{\frac{1}{5}}(2x - 6) + 0{,}5\log_{\sqrt{5}}(x - 4) = \log_5 \dfrac{1}{x - 1}$.

3.160. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $\log_2 x = 11 - x$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = \sqrt{x - 1}$; в) $\log_4 x = \dfrac{4}{x}$.

3.161. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$; б) $x + \log_2(2^x - 6) = \log_2(2^{x+2} - 16)$.

3.162. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \log_6(3x - y) = 2, \\ \log_{18}(6x + y) = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_{0,2}(4x - 2y) = -1, \\ \log_2(x + 2y) = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_3(x + y) = 4, \\ x - y = 85; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_2 x - 3y = 13, \\ 3\log_2 x + y = -1. \end{cases}$

3.163. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1, \\ y - 2x = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3, \\ x - y = -6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$

3.164. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 5, \\ \lg x - \lg y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 3, \\ \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5\log_{\frac{1}{2}} x + 3\log_2 y = -11, \\ 4\log_{\frac{1}{2}} x + \log_2 y = -13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_5 x + \log_2 y^4 = 13, \\ \log_5 x^4 + \log_{\frac{1}{2}} y = 1. \end{cases}$

3.165. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \log_3 (x^2 + y^2) = 2, \\ y - 2\sqrt{2}x = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4\log_2 x + \log_2 (y+1) = 6, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (y+1) = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - \log_2 y = 2, \\ 2^x \cdot \log_2 y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 25^x \cdot 5^y = \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ \log_2 (2y - x) = 2. \end{cases}$

3.166*. Рашыце ўраўненне $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x = -1$.

3.167*. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

а) $x^{2 - \frac{\log_3 x}{2}} = 9$; б) $x^{2\lg^3 x - \frac{3\lg x}{2}} = \sqrt{10}$; в) $25 \cdot x^{2\log_5 x} = x^4$.

3.168*. Рашыце ўраўненне:

а) $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 = 0$; б) $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1$.

3.169*. Рашыце ўраўненне $\log_{2-\sqrt{3}}(x - 1) = \log_{2+\sqrt{3}}(2x - 3)$.

3.170*. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $1 - \log_9 (x+1)^2 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} \frac{x+5}{x+3}$.

3.171*. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$.

3.172*. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

3.173*. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\log_{0,5}\left(\log_2^2 x - 3\log_2 x + 4\right) = -1$.

3.174*. Знайдзіце суму $x_0 + y_0$, дзе $(x_0; y_0)$ — рашэнне сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 5 - \log_2 (x + y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1. \end{cases}$

3.175*. Знайдзіце лік каранёў ураўнення

$\log_{2x+1}(5+8x-4x^2)+\log_{5-2x}(1+4x+4x^2)=4.$

3.176*. Рашыце ўраўненне $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0.$

3.177. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x=-5;$ б) $\log_4(7x+8)=3;$

в) $\log_2(x^2+3x)=2;$ г) $\log_5 \frac{1-2x}{x+3}=1.$

3.178. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\lg(5x-9)=\lg(3x+1);$ б) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x-3);$

в) $\lg(x^2+2x-7)=\lg(x-1);$ г) $\log_7(x^2-4x-7)=\log_7(5-3x);$

д) $\lg(x^2+12x+28)-\lg(x+4)=0;$ е) $\log_3(x^3+x^2-4x+2)=\log_3(x^3-1).$

3.179. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і рашыце ўраўненне:

а) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2;$

б) $\log_2(x-3)+\log_2(x-2)=1;$

в) $2-\log_2 x=\log_2(x-3).$

3.180. Рашыце ўраўненне з дапамогай метаду замены зменнай:

а) $\log_2^2 x-\log_2 x-2=0;$ б) $\log_2^2 x-3\log_2 x=4;$

в) $4-\lg^2 x=3\lg x;$ г) $\log_5^2 x-\log_{\sqrt{5}} x=3.$

3.181. Знайдзіце абсцысу пункта перасячэння графіка функцыі $y=\log_9 x+\log_{\sqrt{3}} x$ і прамой $y=10.$

3.182. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_6(2x+5)=2\log_6(x+1);$

б) $\log_{\sqrt{3}}(x-3)=\log_3(x-1);$

в) $\log_9(2x-3)=\log_3(x-1).$

3.183. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і рашыце ўраўненне:

а) $\log_3^2 x - 2\log_3(3x) - 1 = 0$; б) $\log_3^2(x-1) - 2\log_{\frac{1}{3}}\frac{9}{x-1} = 7$.

3.184. Рашыце ўраўненне $\log_3 x - 2\log_x 3 + 1 = 0$, выкарыстаўшы формулу пераходу ад адной асновы лагарыфма да іншай.

3.185. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

а) $\log_{4x-8}(x^2 - 2x - 3) = 1$; б) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) = 1$.

3.186. Рашыце ўраўненне $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) + 0{,}5\log_{\sqrt{3}}(x-3) = \log_3\frac{1}{x-1}$.

3.187. Рашыце графічна ўраўненне $\log_{\frac{1}{4}} x = x - 5$.

3.188. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$; б) $x + \log_3(3^x - 7) = \log_3(3^{x+1} - 9)$.

3.189. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases}\log_7(2x - y) = 2,\\ \log_{14}(7x + y) = 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2(x + y) = 6,\\ x - y = 60;\end{cases}$ в) $\begin{cases}\log_6 x - 2y = 3,\\ 2\log_6 x + y = 1.\end{cases}$

3.190. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 1,\\ y - 3x = 8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5,\\ x - 3y = -20.\end{cases}$

3.191. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases}3\log_{\frac{1}{2}} x - \log_5 y = -13,\\ 2\log_{\frac{1}{2}} x + 3\log_5 y = -5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_2 x + \log_6 y^3 = 7,\\ \log_2 x^3 + \log_{\frac{1}{6}} y = 11.\end{cases}$

3.192. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases}\log_4(x^2 + y^2) = 2,\\ x - \sqrt{3}y = 0.\end{cases}$

3.193*. Рашыце ўраўненне:

а) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$; б) $x^{3 + \lg x} = 10\,000$.

3.194*. Рашыце ўраўненне $\log_2^2(-x)+3\log_2 x^2=-9$.

3.195*. Рашыце ўраўненне $\log_{\sqrt{5}-2}(x+2)=\log_{2+\sqrt{5}}(2x+3)$.

3.196*. Рашыце ўраўненне $4^{\log_2 \lg x}=\lg x-\lg^2 x+1$.

3.197*. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases}2^{1+\log_2(x-y)}=4,\\ \log_2(x-y)+\log_2(x+y)=2+\log_2 3.\end{cases}$

3.198*. Рашыце ўраўненне $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$.

3.199. Знайдзіце, калі гэта магчыма, $f(-1)$ для функцыі:

а) $f(x)=-x^2-3x$; б) $f(x)=\sqrt[4]{15-x}$; в) $f(x)=5^{x-2}$;

г) $f(x)=\log_2 x$; д) $f(x)=\sqrt[3]{x-7}$; е) $f(x)=\cos\pi x$.

3.200. Выберыце правільную роўнасць:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$;

в) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.

3.201. Вылічыце:

а) $32^{0,4}$; б) $125^3:25^4$; в) $49^{0,25}\cdot\sqrt{7}$;

г) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}$; д) $\left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; е) $81^{\pi}\cdot 3^{-4\pi}$.

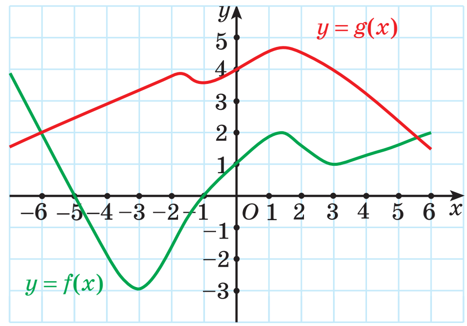
3.202. Запішыце выраз $\left(\frac{4}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}\right):\frac{3}{x^2+4x+4}$ у выглядзе нескарачальнага дробу.

3.203. Выкарыстайце формулы складання і знайдзіце значэнне выразу $\frac{\sin 17^\circ\cos 13^\circ+\sin 13^\circ\cos 17^\circ}{\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ}$.

3.204. Размясціце лікі $\log_4 9$; $\log_3 0,1$; $\log_2 5$ у парадку нарастання.

3.205. Прымяніце формулы скарочанага множання і спрасціце выраз $\left(a^{\sqrt{3}}+3\right)^2-\left(a^{\sqrt{3}}+3\right)\left(a^{\sqrt{3}}-3\right)$.

3.206. З дапамогай рысунка 32, на якім паказаны відарысы графікаў функцый $y = f(x)$ і $y = g(x)$, знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $f(x) \leqslant g(x)$ на прамежку $[-7; 6]$.



Рыс. 32

3.207. Рашыце ўраўненне:

а) $4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$;

б) $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} = 117$;

в) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0$.

3.208. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$; б) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; в) $\frac{6}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\frac{60}{\sqrt[3]{15}}$.

3.209. Знайдзіце значэнне выразу $\log_2 \sin\frac{7\pi}{8} + \log_2 \cos\frac{\pi}{8} + 1$.

3.210. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 > 0, \\ \frac{x}{x+1} \leqslant 0. \end{array}\right.$

3.211. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \log_2(x - 1)$; б) $y = \lg(4 - x^2)$; в) $y = \log_7(9x - x^2)$.

3.212. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = 8x^3 - 1$ у пункце перасячэння гэтага графіка з воссю абсцыс.

3.213. Знайдзіце значэнне выразу $12\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, калі x_1 і x_2 — карані ўраўнення $12x^2 + 7x - 5 = 0$.

3.214. Рашыце паказальную няроўнасць:

а) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3x-1}{2x+5}} < \frac{3}{7}$; б) $0{,}6^{x^2 - x} > \frac{9}{25}$.

3.215. Выкарыстайце метад замены зменнай і рашыце ўраўненне $\sqrt{5x - 3} + 2\sqrt[4]{5x - 3} - 8 = 0$.

3.216. Дакажыце тоеснасць $\frac{\sin(\alpha + 3\pi)}{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 1} = \frac{1}{\cos\alpha}$.

3.217. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} 5x > x^2, \\ 25x^2 > 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2+x)^2 \geqslant 9, \\ (2x+1)^2 < 25. \end{cases}$

3.218. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце $b_5 + b_1$, калі $q = 0{,}25$, $b_3 = 2$.

3.219. Прымяніце формулу рознасці сінусаў і рашыце ўраўненне $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$.

3.220. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

а) $\frac{(x+3)^2 - 6x - 10}{(x-5)^2} \leqslant 0;$ б) $\frac{x^2(x-1)(x+2)}{(x-3)} \leqslant 0;$ в) $\frac{(x+4)^3(x-7)}{(2x+8)(x+2)^5} \geqslant 0.$

3.221. У паралелі 11-х класаў навучаецца не больш за 100 чалавек. Роўна дзве трэці з іх плануюць праходзіць цэнтралізаванае тэсціраванне па матэматыцы. 8 % навучэнцаў паралелі — удзельнікі прадметных алімпіяд. Знайдзіце, колькі чалавек не плануюць праходзіць цэнтралізаванае тэсціраванне па матэматыцы.

3.222*. Знайдзіце значэнне выразу $6 \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arcctg} 4)$.

§ 10. Лагарыфмічныя няроўнасці

3.223. Рашыце няроўнасць:

а) $2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0;$ б) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2} \leqslant 0;$ в) $2^{x-1} + 4^x - 3 \geqslant 0.$

3.224. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{x^3 - 1};$ б) $y = \sqrt{1 - 2^x};$ в) $y = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{5 - x}.$

3.225. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $\log_3 7$ і $\log_3 \sqrt{47};$ б) $\log_{\frac{3}{4}} 2$ і $\log_{\frac{3}{4}} \sqrt{3};$ в) $\log_{16} 2^4$ і $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{3}.$

Пры рашэнні лагарыфмічных няроўнасцей выкарыстоўваецца ўласцівасць манатоннасці лагарыфмічнай функцыі і ўлічваецца абсяг вызначэння лагарыфмічнай функцыі.

Разгледзім некаторыя віды лагарыфмічных няроўнасцей.

1. Няроўнасці выгляду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ і $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, дзе $a \neq 1$, $a > 0$

а) Паколькі лагарыфмічная функцыя $y = \log_a t$ пры $a > 1$ нарастае на абсягу вызначэння, то няроўнасць $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ раўназначна сістэме $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ а няроўнасць $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ раўназначна сістэме $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

б) Паколькі лагарыфмічная функцыя $y = \log_a t$ пры $0 < a < 1$ спадае на абсягу вызначэння, то няроўнасць $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ раўназначна сістэме $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ а няроўнасць $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ раўназначна сістэме $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ пры } a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Прыклад 1. Рашыце няроўнасць $\log_7(4x - 5) > \log_7(x - 6)$.

Рашэнне. Паколькі $a = 7 > 1$, то функцыя $y = \log_7 t$ нарастае пры $t > 0$, значыць, няроўнасць $\log_7(4x - 5) > \log_7(x - 6)$ раўназначна сістэме $\begin{cases} 4x - 5 > x - 6, \\ x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -1, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3}, \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6 \Leftrightarrow x \in (6; +\infty)$.

Адказ: $(6; +\infty)$.

Прыклад 2. Рашыце няроўнасць $\log_2(x^2 - 4x) < \log_2(10 - x)$.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \text{ пры } a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рашэнне. Паколькі $a = 2 > 1$, то функцыя $y = \log_2 t$ нарастае пры $t > 0$, значыць, няроўнасць $\log_2(x^2 - 4x) < \log_2(10 - x)$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} x^2 - 4x < 10 - x, \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0, \\ x(x-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2;\ 5), \\ x \in (-\infty;\ 0) \cup (4;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in\ (-2;\ 0) \cup (4;\ 5).$$

Адказ: $(-2;\ 0) \cup (4;\ 5)$.

Прыклад 3. Рашыце няроўнасць $\log_{0,2}(8-4x) > \log_{0,2}(1-x)$.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ пры } 0 < a < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рашэнне. Паколькі $a = 0,2 < 1$, то функцыя $y = \log_{0,2}t$ спадае пры $t > 0$, значыць, няроўнасць $\log_{0,2}(8-4x) > \log_{0,2}(1-x)$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} 8 - 4x < 1 - x, \\ 8 - 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x < -7, \\ -4x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2\frac{1}{3}, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Адказ: $\varnothing$.

Прыклад 4. Рашыце няроўнасць $\log_{0,5}(x^2 - 1,5) < 1$.

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \text{ пры } 0 < a < 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Рашэнне. Запішам лік 1 у выглядзе лагарыфма ліку: $1 = \log_{0,5}0,5$. Тады дадзеную няроўнасць можна запісаць у выглядзе

$\log_{0,5}(x^2 - 1,5) < \log_{0,5}0,5.$

Паколькі $a = 0,5 < 1$, то функцыя $y = \log_{0,5}t$ спадае пры $t > 0$, значыць, няроўнасць $\log_{0,5}(x^2 - 1,5) < \log_{0,5}0,5$ раўназначна сістэме

$$\begin{cases} x^2 - 1,5 > 0,5, \\ 0,5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow\ x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ +\infty\right).$$

Адказ: $\left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

2. Няроўнасці, у якіх можна выканаць замену зменнай

Лагарыфмічныя няроўнасці, якія можна прывесці, напрыклад, да выгляду $af^2(x)+bf(x)+c>0$, дзе a, b, c — некаторыя рэчаісныя лікі, $a\neq 0$, $f(x)$ — лагарыфмічная функцыя, можна рашаць метадам замены зменнай.

Прыклад 5. Рашыце няроўнасць $3\log_3^2 x-4\log_3 x+1\leqslant 0$.

Увядзём новую зменную $t=\log_3 x$, тады дадзеную няроўнасць можна запісаць у выглядзе $3t^2-4t+1\leqslant 0$.

Рэшым атрыманую квадратную няроўнасць. Нулямі квадратычнай функцыі $y=3t^2-4t+1$ з'яўляюцца лікі $\frac{1}{3}$ і 1.

Рашэнне няроўнасці $3t^2-4t+1\leqslant 0$ — гэта мноства значэнняў аргумента $\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant 1$.

Падставім $t=\log_3 x$ у двайную няроўнасць $\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant 1$ і атрымаем $\frac{1}{3}\leqslant \log_3 x\leqslant 1$. Гэта няроўнасць раўназначна сістэме $\begin{cases}\log_3 x\geqslant \frac{1}{3},\\ \log_3 x\leqslant 1.\end{cases}$

Рэшым гэту сістэму няроўнасцей:

$$\begin{cases}\log_3 x\geqslant \frac{1}{3},\\ \log_3 x\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3 x\geqslant \log_3 3^{\frac{1}{3}},\\ \log_3 x\leqslant \log_3 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 3^{\frac{1}{3}},\\ x\leqslant 3\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[\sqrt[3]{3};\,3\right].$$

Адказ: $\left[\sqrt[3]{3};\,3\right]$.

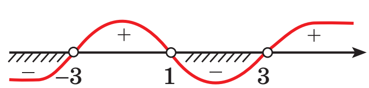
Прыклад 6. Рашыце няроўнасць $\lg x+1<\frac{8}{\lg x-1}$.

Рашэнне. Выканаем замену зменнай $t=\lg x$, тады дадзеную няроўнасць можна запісаць у выглядзе $t+1<\frac{8}{t-1}$.

Рэшым гэту дробава-рацыянальную няроўнасць метадам інтэрвалаў:

$$t+1<\frac{8}{t-1};\quad t+1-\frac{8}{t-1}<0;\quad \frac{(t+1)(t-1)-8}{t-1}<0;\quad \frac{t^2-9}{t-1}<0;\quad \frac{(t-3)(t+3)}{t-1}<0.$$

Адзначым на восі нулі функцыі $t=3$, $t=-3$ і значэнне аргумента, пры якім значэнні функцыі не існуюць $t=1$ (нуль назоўніка). Пабудуем схему графіка функцыі (рыс. 33).



Рыс. 33

У адпаведнасці са знакам няроўнасці атрымаем: $t \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$.

Аб'яднанне гэтых прамежкаў можна запісаць у выглядзе сукупнасці $\left[\begin{array}{l} t < -3, \\ 1 < t < 3. \end{array}\right.$

Падставім у атрыманую сукупнасць няроўнасцей $t = \lg x$:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x < -3, \\ 1 < \lg x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x < \lg 10^{-3}, \\ \lg 10 < \lg x < \lg 10^{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 10^{-3}, \\ 10 < x < 10^{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

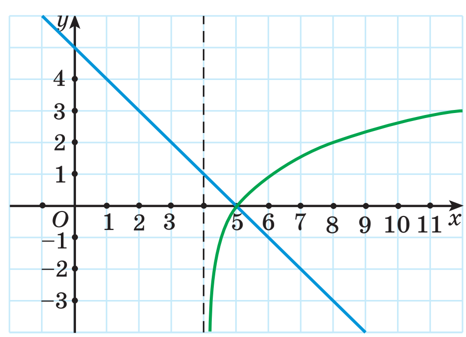
$$\Leftrightarrow x \in (0; 0{,}001) \cup (10; 1000).$$

Адказ: $(0; 0{,}001) \cup (10; 1000)$.

3*. Няроўнасці, пры рашэнні якіх прымяняюцца ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі

Прыклад 7. Рашыце няроўнасць $\log_2(x-4) > 5 - x$.

Рашэнне. Функцыя $y = \log_2(x-4)$ — лагарыфмічная з асновай $a = 2 > 1$, значыць, яна нарастае на $D(y)$. Функцыя $y = 5 - x$ — лінейная, выгляду $y = kx + b$. Паколькі $k = -1$, то гэта функцыя спадае на $\boldsymbol{R}$. Ураўненне $\log_2(x-4) = 5 - x$ мае адзіны корань, роўны 5 (рыс. 34).



Рыс. 34

Пры $x = 5$ значэнне функцыі $y = \log_2(x-4)$ роўна нулю, пры $x > 5$ значэнні гэтай функцыі большыя за нуль, а пры $4 < x < 5$ значэнні гэтай функцыі меншыя за нуль, паколькі функцыя $y = \log_2(x-4)$ нарастае на абсягу вызначэння.

Пры $x = 5$ значэнне функцыі $y = 5 - x$ роўна нулю, пры $x > 5$ значэнні гэтай функцыі меншыя за нуль, а пры $4 < x < 5$ значэнні гэтай функцыі большыя за нуль, паколькі функцыя $y = 5 - x$ спадае на $\boldsymbol{R}$.

Значыць, пры $x > 5$ значэнні функцыі $y = \log_2(x-4)$ большыя за значэнні функцыі $y = 5 - x$. Такім чынам, рашэннем няроўнасці $\log_2(x-4) > 5 - x$ з'яўляецца мноства значэнняў зменнай $x > 5$, або $x \in (5; +\infty)$.

Адказ: $(5; +\infty)$.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Рашыце няроўнасць:

а) $\lg x < -1$;

б) $\log_{\frac{1}{7}}(5x-3) \leqslant \log_{\frac{1}{7}}(2x+1)$;

в) $\log_5(x^2-4) \leqslant \log_5(2x^2+1)$;

г) $\log_4 \frac{3}{x} \geqslant 0$.

Рашэнне. а) $\lg x < -1 \Leftrightarrow \lg x < \lg 0{,}1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0{,}1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\ 0{,}1)$.

Адказ: $(0;\ 0{,}1)$.

б) $\log_{\frac{1}{7}}(5x-3) \leqslant \log_{\frac{1}{7}}(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3 \geqslant 2x+1, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geqslant 4, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1\frac{1}{3}, \\ x > -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Адказ: $\left[1\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

в) $\log_5(x^2-4) \leqslant \log_5(2x^2+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \leqslant 2x^2+1, \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geqslant -5, \\ x \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

Адказ: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

г) $\log_4 \frac{3}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \log_4 \frac{3}{x} \geqslant \log_4 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (0;\ 3]$.

Адказ: $(0;\ 3]$.

2. Рашыце няроўнасць, выканаўшы замену зменнай:

а) $\log_{0,5}^2 x - 3\log_{0,5} x - 4 < 0$;

б) $\log_3^2 x + \log_3 x - 6 \geqslant 0$.

Рашэнне. а) Выканаем замену зменнай: $t = \log_{0,5} x$, тады дадзеную няроўнасць можна запісаць у выглядзе $t^2 - 3t - 4 < 0$.

Рэшым атрыманую квадратную няроўнасць.

Нулямі квадратычнай функцыі $y = t^2 - 3t - 4$ з'яўляюцца лікі 4 і –1. Рашэнне няроўнасці $t^2 - 3t - 4 < 0$ — гэта мноства значэнняў аргумента $t \in (-1; 4)$, або $-1 < t < 4$.

Падставім $t = \log_{0,5} x$ у двайную няроўнасць $-1 < t < 4$ і атрымаем $-1 < \log_{0,5} x < 4$. Гэта няроўнасць раўназначна сістэме $\begin{cases}\log_{0,5} x > -1,\\ \log_{0,5} x < 4.\end{cases}$

Рэшым гэту сістэму няроўнасцей:

$$\begin{cases}\log_{0,5} x > -1,\\ \log_{0,5} x < 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_{0,5} x > \log_{0,5} 2,\\ \log_{0,5} x < \log_{0,5} \frac{1}{16}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x < 2,\\ x > \frac{1}{16}\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{16}; 2\right).$$

Адказ: $\left(\frac{1}{16}; 2\right)$.

б) Няхай $\log_3 x = t$, тады $t^2 + t - 6 \geqslant 0$; $(t + 3)(t - 2) \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l}t \geqslant 2,\\ t \leqslant -3,\end{array}\right.$ значыць, $\left[\begin{array}{l}\log_3 x \geqslant 2,\\ \log_3 x \leqslant -3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\log_3 x \geqslant \log_3 9,\\ \log_3 x \leqslant \log_3 \frac{1}{27};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x \geqslant 9,\\ 0 < x \leqslant \frac{1}{27};\end{array}\right.$

$x \in \left(0; \frac{1}{27}\right] \cup [9; +\infty)$.

Адказ: $\left(0; \frac{1}{27}\right] \cup [9; +\infty)$.

3*. Рашыце няроўнасць:

а) $2\log_2 x - \log_2 (x + 6) > 0$;

б) $\log_{0,3} \log_3 \frac{x}{x-1} \geqslant 0$;

в) $\log_9 \frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \frac{1}{2}$;

г) $\log_{\frac{1}{9}} (x-8)^2 + \log_{\frac{1}{3}} (2-x) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27$.

Рашэнне.

а) $2\log_2 x - \log_2 (x + 6) > 0 \Leftrightarrow 2\log_2 x > \log_2 (x + 6) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x^2 > \log_2 (x+6),\\ x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 > x + 6,\\ x + 6 > 0,\\ x > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - x - 6 > 0,\\ x > 0\end{cases} \Leftrightarrow x \in (3; +\infty).$$

Адказ: $(3; +\infty)$.

б) Дадзеная няроўнасць раўназначна сістэме няроўнасцей:

$$\begin{cases}\log_3 \dfrac{x}{x-1} \leqslant 1,\\ \log_3 \dfrac{x}{x-1} > 0;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{x}{x-1} \leqslant 3,\\ \dfrac{x}{x-1} > 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{x-3x+3}{x-1} \leqslant 0,\\ \dfrac{x-x+1}{x-1} > 0;\end{cases} \quad \begin{cases}\dfrac{3-2x}{x-1} \leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x-1} > 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x \in (-\infty;\ 1) \cup [1{,}5;\ +\infty),\\ x \in (1;\ +\infty);\end{cases} \quad x \in [1{,}5;\ +\infty).$$

Адказ: $[1{,}5;\ +\infty)$.

в) $\log_9 \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{4x-5}{|x-2|} \geqslant 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant \log_3 3 \Leftrightarrow \frac{4x-5}{|x-2|} \geqslant 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 2,\\ \dfrac{4x-5}{x-2} \geqslant 3,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 2,\\ \dfrac{4x-5}{2-x} \geqslant 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 2,\\ x \geqslant -1,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 2,\\ x \geqslant \dfrac{11}{7}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 2,\\ \dfrac{11}{7} \leqslant x < 2\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[\frac{11}{7};\ 2\right) \cup (2;\ +\infty).$$

Адказ: $\left[\dfrac{11}{7}; 2\right) \cup (2;\ +\infty)$.

г) Дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці

$$\log_{\frac{1}{3}} |x-8| + \log_{\frac{1}{3}} (2-x) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27.$$

Тады $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}} \left(|x-8|(2-x)\right) \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 27,\\ 2-x > 0;\end{cases}$ $\begin{cases}|x-8|(2-x) \leqslant 27,\\ x \neq 8,\\ x < 2.\end{cases}$

Пры $x < 2$ маем $|x-8| = 8-x$, тады $\begin{cases}(8-x)(2-x) \leqslant 27,\\ x \neq 8,\\ x < 2;\end{cases}$

$$\begin{cases} 16 - 8x - 2x + x^2 \leqslant 27, \\ x \neq 8, \\ x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 10x - 11 \leqslant 0, \\ x \neq 8, \\ x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-1;\ 11], \\ x \neq 8, \\ x < 2. \end{cases}$$

Такім чынам, $x \in [-1;\ 2)$.

Адказ: $[-1;\ 2)$.

4*. Рашыце няроўнасць $\log_{x+3}\left(\frac{2x+5}{4(x-1)}\right) \geqslant 0$.

Рашэнне.

$$\log_{x+3}\left(\frac{2x+5}{4(x-1)}\right) \geqslant 0;\ \log_{x+3}\left(\frac{2x+5}{4x-4}\right) \geqslant \log_{x+3} 1;$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+3 < 1, \\ 0 < \dfrac{2x+5}{4x-4} \leqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 > 1, \\ \dfrac{2x+5}{4x-4} \geqslant 1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x \in (-\infty;\ 1) \cup [4{,}5;\ +\infty), \\ x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x \in (1;\ 4{,}5]; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x \in (-3;\ -2{,}5), \\ x \in (1;\ 4{,}5]; \end{array}\right.$$

$$x \in (-3;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4{,}5].$$

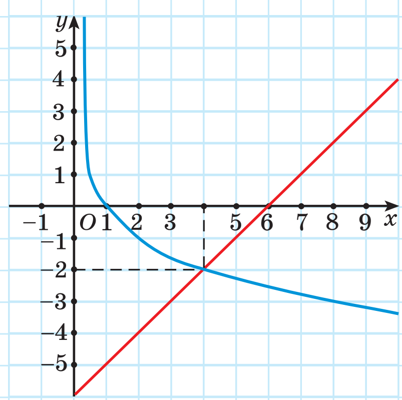
Адказ: $(-3;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4{,}5]$.

5.* Рашыце няроўнасць $\log_{0,5} x \geqslant x - 6$.

Рашэнне. Функцыя $y = \log_{0,5} x$ — лагарыфмічная з асновай $a = 0{,}5 < 1$, значыць, яна спадае на $D(y)$. Функцыя $y = x - 6$ — лінейная з каэфіцыентам $k = 1 > 0$, значыць, дадзеная функцыя нарастае на $\boldsymbol{R}$.

Ураўненне $\log_{0,5} x = x - 6$ мае адзіны корань, роўны 4 (рыс. 35).

Значэнні функцыі $y = \log_{0,5} x$ не меншыя за значэнні функцыі $y = x - 6$ пры $0 < x \leqslant 4$. Такім чынам, няроўнасць $\log_{0,5} x \geqslant x - 6$ выконваецца пры $x \in (0;\ 4]$.



Рыс. 35

Адказ: $(0;\ 4]$.

1. Няроўнасць $\log_4(x-2)<\log_4(2x+4)$ раўназначна сістэме:

а) $\begin{cases} x-2<2x+4, \\ 2x+4>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2>2x+4, \\ 2x+4>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2<2x+4, \\ x-2>0. \end{cases}$

Выберыце правільны адказ.

2. Няроўнасць $\log_{0,4}(x-2)<\log_{0,4}(2x+4)$ раўназначна сістэме:

а) $\begin{cases} x-2<2x+4, \\ 2x+4>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2>2x+4, \\ 2x+4>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2<2x+4, \\ x-4>0. \end{cases}$

Выберыце правільны адказ.

3.226. Рашыце лагарыфмічную няроўнасць:

а) $\log_5 x>2$; б) $\log_{0,5} x\leqslant -1$; в) $\log_2 x<-4$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} x\geqslant -2$; д) $\lg x<-2$; е) $\log_{\frac{1}{3}} x\geqslant 0$.

3.227. Рашыце няроўнасць, улічыўшы абсяг вызначэння і ўласцівасць манатоннасці лагарыфмічнай функцыі:

а) $\log_5(2x-4)>\log_5(14-x)$; б) $\log_3(9-2x)\leqslant\log_3(x+3)$;

в) $\log_{\frac{2}{7}}(1-2x)>\log_{\frac{2}{7}}(x-5)$; г) $\log_{0,3}(x-5)\geqslant\log_{0,3}(2x+1)$.

3.228. Рашыце няроўнасць, запісаўшы лік у правай яго частцы ў выглядзе лагарыфма ліку па зададзенай аснове:

а) $\log_4(3-5x)>-1$; б) $\log_2(8-3x)<1$;

в) $\log_{0,2}(15-2x)>-2$; г) $\log_{0,5}(15-5x)<-1$.

3.229. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $3\log_8(3x+8)<2$; б) $4\log_{16}(4x+3)>3$.

3.230. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-3x)>-1$; б) $\log_2(x^2+3x)\leqslant 2$;

в) $\log_3(x^2+2x+12)\leqslant 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8)\geqslant -4$;

д) $\log_2(x^2+5x+7)>0$; е) $\log_3(x^2-6x+9)\leqslant 0$.

3.231. Рашыце няроўнасць, выканаўшы раўназначныя пераўтварэнні:

а) $\log_{25}(x^2-7) > \log_{25}(x-1)$; б) $\log_7(x^2-4) < \log_7(3x+6)$;

в) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2-3x) > \log_{\frac{1}{7}}(2x-4)$; г) $\log_{\frac{3}{4}}(3x+4) \leqslant \log_{\frac{3}{4}} x^2$;

д) $\log_{0,7}(9-x^2) > \log_{0,7}(4x+4)$; е) $\log_{0,9}(x^2-6x) \geqslant \log_{0,9}(6x-35)$.

3.232. Запішыце лік у выглядзе лагарыфма і рашыце няроўнасць:

а) $\log_4 \frac{x+3}{2-x} < 1$; б) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{5+x}{3-x} > -1$; в) $\log_{0,5} \frac{2x-1}{x+1} > -2$;

г) $\log_3 \frac{x-3}{1-x} \geqslant 0$; д) $\log_{0,4} \frac{x^2-x}{x^2+x} < 0$; е) $\log_2 \frac{2x-5}{x+1} \leqslant 0$.

3.233. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $\log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{4}}(x-3) > -1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) < \log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_{\frac{1}{2}}(x-5)$;

в) $\lg(x-2) < 2 - \lg(27-x)$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 5 - \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$;

д) $\log_2(x-4) - \log_{0,5}(x-3) > 1$;

е) $\log_2 x + \log_2(x+1) - 1 \leqslant 0$.

3.234. Выканайце замену зменнай для рашэння няроўнасці:

а) $\lg^2 x \leqslant 1$; б) $\log_2^2 x - 4 > 0$;

в) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 < 0$; г) $\log_3^2 x - 2\log_3 x \leqslant 3$;

д) $\log_{0,5}^2 x + \log_2 x - 12 \leqslant 0$; е) $15 \leqslant \log_2^2 x - 2\log_2 x$.

3.235. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_2(x+5) < 2\log_2(x+3)$; б) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(6+x) \leqslant \log_{0,1} x$;

в) $\log_{49}(2x-1) > \log_7(x-2)$; г)* $\log_9(3-4x)^2 \leqslant \log_3 x$.

3.236*. Выканайце аналіз умовы і рашыце няроўнасць

$2\log_{0,5}(x-2) \geqslant 1 + \log_{0,5}(x^2-x-2)$.

3.237*. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы пераход да раўназначных сістэм няроўнасцей:

а) $\log_2 \log_{0,5} \frac{3x+4}{4x-8} \leqslant 0$; б) $\log_{0,2} \log_2 \log_{0,5}(2x-3) \geqslant 0$.

3.238*. Рашыце няроўнасць $\log_{0,2}(x^2 - x - 20) + \log_5(x+4) > \lg 1$.

3.239*. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці

$$\log_{0,5}(x^2 - 3x + 4) - \log_{0,5}(x-1) < \log_{0,5} 2.$$

3.240*. Рашыце няроўнасць $\log_{\lg 7}(x^2 + 3x) < \log_{\lg 7}(5x+1)$, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмічнай функцыі.

3.241*. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_x(x^2 - 3) < 0$; б) $\log_{x-2}(x^2 - 8x + 14) \geqslant 0$;

в) $\log_{x+2}(9x^2 + 15x - 6) < 2$; г) $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$.

3.242*. Знайдзіце лік цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$.

3.243*. Рашыце няроўнасць

$$\frac{1}{2}\log_{x+4}(x^2 + 2x + 1) \leqslant 3 - \log_{-x-1}(-x^2 - 5x - 4).$$

3.244. Рашыце лагарыфмічную няроўнасць:

а) $\log_3 x < 3$; б) $\log_{0,5} x \geqslant 1$;

в) $\log_5 x > -2$; г) $\log_{\frac{1}{6}} x \leqslant -3$.

3.245. Рашыце няроўнасць, улічыўшы абсяг вызначэння і ўласцівасць манатоннасці лагарыфмічнай функцыі:

а) $\log_7(3-x) < \log_7(4x+8)$; б) $\log_{0,4}(5x+1) \leqslant \log_{0,4}(3-4x)$;

в) $\log_5(2x+3) > \log_5(x-1)$; г) $\log_{0,3}(3x-2) \geqslant \log_{0,3}(x+1)$.

3.246. Запішыце лік у выглядзе лагарыфма і рашыце няроўнасць:

а) $\log_{0,2}(1 - 2,4x) > -2$; б) $\log_{0,3}(4x - 15) \geqslant 0$;

в) $\log_{\frac{1}{6}}(1,6x + 36,8) \geqslant -2$; г) $2\log_{0,09}(6 - 0,3x) > -1$.

3.247. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_3(x^2+8x)\leqslant 2$; б) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;

в) $\log_6(x^2-3x+2)\geqslant 1$; г) $\log_7(x^2-3)>0$.

3.248. Перайдзіце ад дадзенай няроўнасці да раўназначнай сістэмы для рашэння няроўнасці:

а) $\log_{0,1}(x^2+1)<\log_{0,1}(2x-5)$; б) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2+3x)<\log_{\frac{1}{7}}(5x-1)$;

в) $\log_{4,3}(x^2-9x)>\log_{4,3}(x-21)$; г) $\log_{5,7}(x^2-5x)\leqslant\log_{5,7}(2x-12)$.

3.249. Рашыце няроўнасць рацыянальным спосабам:

а) $\log_2\frac{3-x}{x+2}<1$; б) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{5-x}{x-2}>-1$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+3}{x-2}>2$; г) $\log_{0,7}\frac{5-x}{x-2}<0$.

3.250. Рашыце няроўнасць двума спосабамі:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4)\geqslant\log_{\frac{1}{3}}16-\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$;

б) $\log_5(2x+1)\leqslant\log_5 4-\log_5(x-3)$;

в) $\log_{0,5}(x-2)-\log_2(5-x)>-1$;

г) $\lg x+\lg(x-1)<\lg 6$.

3.251. Выканайце замену зменнай і рашыце няроўнасць:

а) $\log_3^2 x-9<0$; б) $\log_2^2 x-3\log_2 x\leqslant 4$;

в) $\log_3^2 x-5\log_3 x+6>0$; г) $6\leqslant\log_3^2 x+\log_3 x$.

3.252. Рашыце няроўнасць $2\log_{0,5}(1-x)<\log_{0,5}(3x+1)$.

3.253*. Рашыце няроўнасць $\log_2\log_{0,5}\frac{x+1}{x-3}\geqslant 1$.

3.254*. Рашыце няроўнасць, улічыўшы абсяг вызначэння і ўласцівасць манатоннасці лагарыфмічнай функцыі:

а) $\log_{x-1}(x^2-6x+7)<0$; б) $\log_{1-x}(2x^2+3x+1)\geqslant 2$.

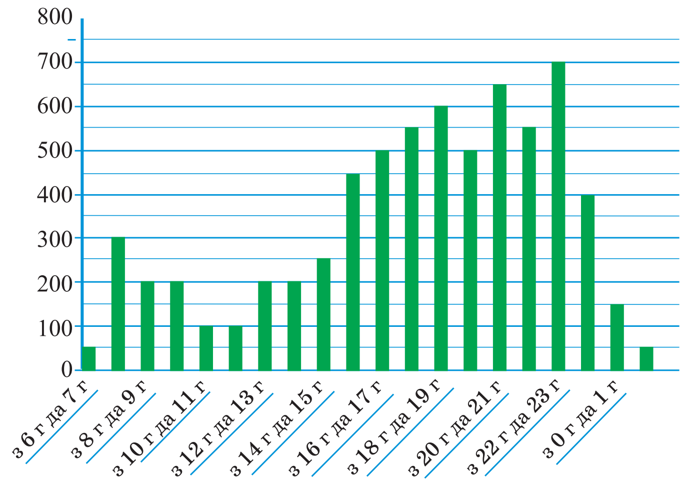
3.255. Паміж якімі двума паслядоўнымі цэлымі лікамі знаходзіцца на лікавай прамой лік:

а) $\log_2 29$; б) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

3.256. Якая з дадзеных роўнасцей няправільная:

а) $\sqrt[3]{64} = 4$; б) $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$; в) $\log_2 1 = 0$; г) $\arccos\frac{\pi}{2} = 1$?

3.257. Работнікамі тэлебачання было праведзена апытанне сярод моладзі аб часе прагляду тэлевізійных праграм. Усяго было апытана 1000 чалавек. Залежнасць колькасці гледачоў ад часу сутак паказана на дыяграме (рыс. 36).



Рыс. 36

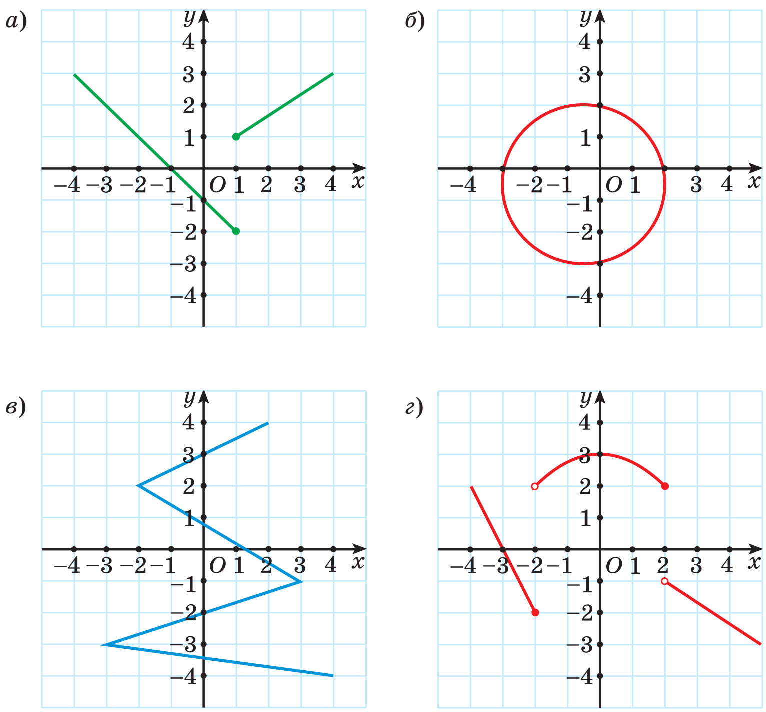
а) У якія перыяды часу колькасць чалавек, якія глядзяць тэлевізар, не меншая за 500? Які працэнт ад усяго часу паказу складае час, калі тэлевізар глядзіць не менш за 500 чалавек?

б) Вызначце, колькі гледачоў у сярэднім глядзяць тэлевізар кожную гадзіну вяшчання.

3.258. Параўнайце $\log_{4\sqrt{2}} 128$ і $\log_{0,2} 0,0016$.

3.259. Знайдзіце значэнне выразу $(-0,2)^3 - \sqrt{(-0,2)^2}$.

3.260. Сярод рысункаў 37, *а—г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка некаторай функцыі $y = f(x)$.



Рыс. 37

3.261. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.262. Вылічыце: $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - 8^{-1\frac{2}{3}} + 7 \cdot (12^0)^{-2} + 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-\frac{3}{2}}$.

3.263. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $x - 1 = \sqrt{x + 5}$; б) $\sqrt[6]{x^6 + x^2 - x - 2} = x$.

3.264. Знайдзіце значэнне вытворнай функцыі $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$ у пункце $x = 1$.

3.265. Знайдзіце абсцысу пункта перасячэння графікаў функцый $y = \log_2 x$ і $y = 5 - \log_2 (x + 4)$.

3.266. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2\sin 22{,}5°\cos 22{,}5°$; б) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$; в) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

3.267. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[4]{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[6]{5^{x^2-x}-25}}$.

3.268. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\dfrac{(3+x)^2}{5-x} \leqslant 0$, якія належаць прамежку $[-4; 7]$.

3.269. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне:

а) $\log_5(3x-4) = \log_5(12-5x)$; б) $\log_3(x^2+3x-7) = 1$;

в) $\lg(x-1) + \lg(x+1) = \lg(9x+9)$; г) $3\log^2_{\frac{1}{8}} x + 5\log_{\frac{1}{8}} x - 2 = 0$.

3.270. Дадзена арыфметычная прагрэсія, дзе $a_n = 2n + 1$. Знайдзіце суму яе членаў з 11-га па 20-ы ўключна.

3.271. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$, калі $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$.

3.272. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$f(x) = (x^2 - 4x + 3)^{0,7} + (9 - x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

3.273. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 3\cdot 2^x - 2^y = 10. \end{cases}$

3.274. Функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай, а функцыя $y = g(x)$ — няцотнай. Вядома, што $f(-3) = -4$, а $g(-2) = 3$. Знайдзіце значэнне выразу $3f(3) + 5g(2)$.

3.275. Рашыце няроўнасць $2^{3x+10} - 3^{3x+9} + 2^{2x+9} + 3^{3x+7} < 0$.

3.276*. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\log_a \frac{a}{b}\cdot(\log_a b + \log_b a + 1)}{1-\log^3_a b}$, калі $a = b^4$.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць азначэнне і ўласцівасці лагарыфмаў;
- ведаць уласцівасці лагарыфмічнай функцыі;

- ведаць спосабы рашэння лагарыфмічных ураўненняў;
- ведаць спосабы рашэння лагарыфмічных няроўнасцей;
- умець выконваць пабудову графікаў лагарыфмічных функцый для розных асноў;
- умець прымяняць уласцівасці лагарыфмаў для вылічэнняў, спрашчэння выразаў, параўнання значэнняў выразаў;
- умець прымяняць уласцівасці лагарыфмічнай функцыі для рашэння лагарыфмічных ураўненняў;
- умець прымяняць функцыянальны падыход для рашэння лагарыфмічных ураўненняў і няроўнасцей;
- умець рашаць лагарыфмічныя няроўнасці на падставе ўласцівасцей лагарыфмічнай функцыі;
- умець прымяняць уласцівасці лагарыфмічнай функцыі для рашэння практычных задач.

Я правяраю свае веды

1. Абсягам вызначэння функцыі $y = \log_2(x-1)$ з'яўляецца прамежак:

а) $(-\infty; 1)$; б) $[1; +\infty)$; в) $(1; +\infty)$;
г) $(0; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$.

Выберыце правільны адказ.

2. Лагарыфмічная функцыя зададзена формулай $f(x) = \log_5 x$. Выберыце правільную роўнасць:

а) $f(25) = 10$; б) $f(25) = \sqrt{5}$;

в) $f(25) = \log_2 5$; г) $f(25) = 2$.

3. Вызначце, нарастальнай ці спадальнай з'яўляецца лагарыфмічная функцыя:

а) $y = \log_{1,5} x$; б) $y = \log_{0,4} x$;

в) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; г) $y = \log_{\frac{3}{7}} x$.

4. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \log_3 x$; б) $y = \log_{0,5} x$.

5. Вылічыце:

а) $\log_5 12{,}5 + \log_5 2$;

б) $\log_2 6 - \log_2 192$;

в) $\log_{16} \sqrt[5]{8}$;

г) $\log_4 91 - \log_4 13 + \log_4 \frac{2}{7}$.

6. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_5 (3x - 2) = 2$;

б) $\lg\left(x^2 - 6\right) - \lg x = 0$;

в) $\log_4 x + \log_4 (x - 3) = 1$;

г) $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 = 0$.

7. Рашыце няроўнасць:

а) $\log_{0,8}(2 - x) \geqslant 2$;

б) $\lg(3x - 2) \geqslant 1$;

в) $\log_{0,4}\left(x^2 + x - 4\right) \leqslant \log_{0,4} x$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2x - 1}{x + 2} > 1$;

д) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 \leqslant 0$.

8. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} \log_3 x + 2\log_3 y = 3, \\ 2\log_3 x - \log_3 y = 6. \end{cases}$

9. Рашыце няроўнасць $0{,}4^{\log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 (3x)} > 6{,}25^{\log_3 x^2 + 2}$.

10. Знайдзіце найменшы цэлы лік з мноства значэнняў функцыі $y = \log_2 (x^2 - 2x + 65)$.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 11» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 11 клас».

ПРАКТЫКАВАННІ ДЛЯ ВЫНІКОВАГА ПАЎТАРЭННЯ

Лікі і вылічэнні

1. Запішыце лікі ў стандартным выглядзе і размясціце іх у парадку нарастання:

$0,58 \cdot 10^{-6}$; $4700 \cdot 10^{-10}$; $0,041 \cdot 10^{-5}$.

> $b = a \cdot 10^n$,
> дзе $1 \leqslant a < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$

2. Вылічыце:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{2,56} + 1,5\sqrt{144}$;   б) $3,5 - 7\sqrt{\frac{16}{49}}$;

в) $\frac{1}{3}\sqrt{324} - 10\sqrt{0,36}$;   г) $\left(3\sqrt{1,5}\right)^2$;

д) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$;   е) $\frac{\sqrt{400}}{\left(-2\sqrt{5}\right)^2}$;

ж) $\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2$;   з) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$;

і) $\left(1+\sqrt{7}\right)^2 + \sqrt{\left(2\sqrt{7}-10\right)^2}$.

3. Выразіце ў радыянах вугал:

а) $12°$;   б) $225°$;
в) $-72°$;   г) $-810°$.

> $180° = \pi$ рад
> $1° = \frac{\pi}{180}$ рад
> 1 рад $= \frac{180°}{\pi}$

4. Выразіце ў градусах вугал:

а) $\frac{\pi}{12}$;   б) $\frac{2\pi}{3}$;   в) $-\frac{11\pi}{9}$;   г) $-\frac{23\pi}{4}$.

5. Знайдзіце $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, калі пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты:

а) $P_\alpha(0,6;\ -0,8)$;   б) $P_\alpha\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

6. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 180° + \sin 270°$;   б) $3\cos(-180°) - \sin 0°$;

в) $2\sin 180° - \cos(-270°)$;   г) $\operatorname{tg} 180° \cdot \cos 90°$;

д) $\cos(-360°) + 5\operatorname{ctg} 90°$;   е) $3\sin(-360°) - \operatorname{tg} 360°$.

7. Вылічыце:

а) $\cos 360° \cdot \sin 30° \cdot \cos 45°$; б) $\sin(-270°) - \cos 60° + \operatorname{tg} 45°$;

в) $\cos(-90°) + \cos^2 45°$; г) $\sin 450° - \sin 30° + \operatorname{tg}^2 30°$.

8. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2\sin(-2\pi) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\pi + \cos 2\pi$;

в) $\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{tg}\pi + \sin^2\frac{\pi}{4}$;

д) $-\operatorname{tg} 2\pi + \cos^2\frac{\pi}{3}$; е) $3\cos(-5\pi) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$.

9. Вызначце знак ліку:

а) $\sin\frac{5\pi}{7}$; б) $\cos 4$; в) $\operatorname{tg} 269°$; г) $\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{11}$.

10. Ведаючы значэнне адной з трыганаметрычных функцый вугла і чвэрць, у якой знаходзіцца вугал, знайдзіце значэнне трох іншых трыганаметрычных функцый гэтага вугла:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

11. Размясціце ў парадку нарастання лікі:

а) $\sin 85°$, $\sin 100°$, $\sin 140°$, $\sin 280°$;

б) $\cos 2$, $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 5$.

12. Выкарыстайце формулы прывядзення і вылічыце:

а) $\cos 225°$; б) $\sin\frac{11\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg} 300°$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

13. Вылічыце:

а) $\sin 225° \cos 120° \operatorname{ctg} 330° \operatorname{tg} 210°$; б) $\sin\frac{7\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}$.

14. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin^2 495° - \cos^2(-750°)$; б) $\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{6} + \operatorname{ctg}^3\frac{7\pi}{4}$.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

15. З дапамогай формул складання вылічыце:

а) $\sin 27°\cos 3° + \sin 3°\cos 27°$;

б) $\sin 89°\cos 29° - \cos 89°\sin 29°$;

в) $\cos 76°\cos 16° + \sin 76°\sin 16°$;

г) $\cos 87°\cos 33° - \sin 87°\sin 33°$;

д) $\dfrac{\mathrm{tg}\,10° + \mathrm{tg}\,35°}{1 - \mathrm{tg}\,10°\,\mathrm{tg}\,35°}$;

е) $\dfrac{\mathrm{tg}\,53° - \mathrm{tg}\,23°}{1 + \mathrm{tg}\,53°\,\mathrm{tg}\,23°}$.

16. Дакажыце, што:

а) $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; б) $\mathrm{tg}\,75° = 2 + \sqrt{3}$.

17. Знайдзіце:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$, калі $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$;

б) $\mathrm{tg}(\alpha - \beta)$, калі $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$, α і β — вуглы першай чвэрці.

18. Вылічыце:

а) $\sin\dfrac{13\pi}{5}\cos\dfrac{7\pi}{5} + \sin\dfrac{7\pi}{5}\cos\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right)$;

б) $\cos 53°\sin(-337°) + \sin 307°\sin 113°$;

в) $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{9} + \mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{36}}{1 + \mathrm{tg}\dfrac{8\pi}{9}\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{36}}$;

г) $\dfrac{1 - \mathrm{tg}\,192°\,\mathrm{ctg}\,237°}{\mathrm{ctg}\,78° - \mathrm{ctg}\,303°}$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

19. З дапамогай формул двайнога вугла вылічыце:

а) $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}$; б) $\sin^2 75° - \cos^2 75°$;

в) $4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$; г) $\sin 22{,}5°\cos 22{,}5°$;

д) $\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}}{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}$; е) $\dfrac{\mathrm{tg}\,67{,}5°}{1 - \mathrm{tg}^2\,67{,}5°}$.

20. Знайдзіце $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, калі $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

21. Выкарыстайце формулы пераўтварэння сумы трыганаметрычных функцый у здабытак і дакажыце, што:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

а) $\cos 105° + \cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin\frac{3\pi}{10} + \sin\frac{11\pi}{10} = \frac{1}{2}$;

в) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12} = 0$.

22. Выкарыстайце азначэнне арксінуса, арккосінуса, арктангенса або арккатангенса ліку і вылічыце:

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b$$

$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b$$

$$\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$$

$$\operatorname{arcctg}(-b) = \pi - \operatorname{arcctg} b$$

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin(-1)$;

в) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\arcsin 0$;

д) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arccos 1$;

ж) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; з) $\arccos 0$;

і) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; к) $\operatorname{arctg} 1$; л) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; м) $\operatorname{arctg} 0$;

н) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; о) $\operatorname{arcctg}(-1)$; п) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; р) $\operatorname{arcctg} 0$.

23. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

в) $\cos\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$;

д) $\operatorname{tg}(2\arccos(-1))$; е) $\cos\left(3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

ж) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right)$; з) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

24. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\operatorname{arcctg}\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

г) $\arcsin\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right)$; д) $\arccos(3\sin\pi)$; е) $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}\cos 4\pi\right)$.

25. З дадзеных выразаў выберыце тыя, што маюць сэнс:

а) $\sqrt[8]{2}$; б) $\sqrt[6]{-11}$; в) $\sqrt[5]{7}$;

г) $\sqrt[3]{-5}$; д) $\sqrt[10]{0}$; е) $\sqrt[9]{-1}$.

26. Выкарыстайце азначэнне кораня n-й ступені з ліку і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[4]{10\,000}+\sqrt[3]{0{,}125}$; б) $-\sqrt[4]{0{,}0001}+\sqrt[8]{1}$; в) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt[5]{-0{,}00001}$;

г) $-\sqrt[5]{0{,}00032}\cdot\sqrt[3]{8000}$; д) $-\sqrt[3]{-343}\cdot\sqrt[4]{64}$; е) $6\cdot\sqrt{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$;

ж) $4\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}-\frac{2}{3}\sqrt[4]{81}$; з) $-0{,}2\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}:\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}$.

27. Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{0{,}25\cos\frac{\pi}{3}}$; б) $\sqrt[3]{27\sin\frac{3\pi}{2}}$; в) $\sqrt[5]{\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}}$; г) $\sqrt[4]{27\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}}$.

28. Знайдзіце два паслядоўныя цэлыя лікі, паміж якімі на каардынатнай прамой знаходзіцца лік:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{7}$; в) $\sqrt[4]{19}$; г) $\sqrt[3]{29}$; д) $-\sqrt[4]{83}$; е) $-\sqrt[3]{123}$.

29. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^4$; б) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5$; в) $\left(-\sqrt[8]{3}\right)^8$; г) $\left(\sqrt[7]{-5}\right)^7$;

д) $\left(2\sqrt[4]{3}\right)^4$; е) $\left(-2\sqrt[5]{7}\right)^5$; ж) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{2}\right)^4$; з) $\left(2\sqrt[6]{0{,}1}\right)^6$.

30. Выканайце дзеянні: $80\sqrt[5]{-0{,}00001}-0{,}5\sqrt[3]{-0{,}008}-5\cdot\left(-2\sqrt[4]{3}\right)^4$.

31. Вылічыце з дапамогай уласцівасцей кораня n-й ступені:

а) $\sqrt[3]{27\cdot125}$; б) $\sqrt[5]{243\cdot0{,}00032}$;

в) $\sqrt[3]{\frac{1000}{0{,}008}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{0{,}0081}{625}}$.

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

32. Выкарыстайце ўласцівасці кораня n-й ступені і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{5000}$; в) $\sqrt[5]{0{,}32}\cdot\sqrt[5]{0{,}001}$;

г) $\sqrt[4]{0{,}2}\cdot\sqrt[4]{80}$; д) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$; е) $\dfrac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{400}}$;

ж) $\sqrt[3]{-162}:\sqrt[3]{2000}$; з) $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{30}}:\sqrt[3]{7\dfrac{1}{5}}$; і) $\sqrt[5]{33}:\sqrt[5]{-1\dfrac{1}{32}}$.

33. Вылічыце значэнне выразу:

а) $8\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{-16}$; б) $-2\sqrt[5]{27}\cdot 5\sqrt[5]{9}$;

в) $4\sqrt[3]{128}:\sqrt[3]{-2000}$; г) $3\sqrt[4]{10}:\left(0{,}2\sqrt[4]{100\,000}\right)$.

34. Запішыце выраз $\sqrt{3}$ у выглядзе кораня:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

а) чацвёртай ступені;
б) шостай ступені;
в) дзясятай ступені;
г) трыццаць другой ступені.

35. Запішыце ў выглядзе каранёў адной і той жа ступені лікі $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{2}$ і $\sqrt[6]{7}$.

36. Запішыце ў выглядзе кораня n-й ступені выраз:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[kn]{a}$$

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{\sqrt[5]{36}}$; г) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{32}}$.

37. Вылічыце:

а) $\sqrt[4]{\sqrt{27}}\cdot\sqrt[8]{3^5}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{49}}\cdot\sqrt[6]{7^5}$.

38. Знайдзіце значэнне выразу:

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, \text{ калі } n \text{ — цотны,}\\ a, \text{ калі } n \text{ — няцотны}\end{cases}$$

а) $\sqrt[4]{(-29)^4}$; б) $\sqrt[5]{(-7)^5}$;

в) $\sqrt[6]{(-10)^6}$; г) $\sqrt[7]{(-11)^7}$.

39. Вылічыце значэнне выразу:

а) $\sqrt[5]{-3^5}-\sqrt[5]{(-3)^5}$; б) $\sqrt[4]{(-7)^4}-\sqrt[3]{(-7)^3}$;

в) $\sqrt[7]{-5^7}+2\sqrt[8]{(-5)^8}$; г) $\sqrt[3]{-10^3}+\sqrt[9]{(-10)^9}-\sqrt[4]{(-10)^4}$.

40. Знайдзіце суму, рознасць, здабытак і дзель лікаў:

а) $2\sqrt[3]{7}$ і $5\sqrt[3]{7}$; б) $-3\sqrt[4]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$; в) $-\sqrt[5]{3}$ і $\sqrt[5]{3}$.

41. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}$; б) $5\sqrt[7]{3}-2\sqrt[7]{384}$; в) $6\sqrt[5]{64}-4\sqrt[5]{486}$.

42. Вылічыце:

а) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{32})^2$; б) $\left(\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{3}\right)^2$.

43. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt[3]{4}$; б) $3\sqrt[5]{3}\cdot\left(4\sqrt[5]{729}-5\sqrt[5]{3}\right)$;

в) $\left(7\sqrt[7]{2}+\sqrt[7]{256}\right):\sqrt[7]{2}$; г) $\left(\sqrt[3]{625}-2\sqrt[3]{5}\right):\sqrt[3]{135}$.

44. Прымяніце формулу рознасці квадратаў і вылічыце:

а) $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1-\sqrt[4]{3}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{49}+1\right)\left(\sqrt[8]{49}+1\right)\left(\sqrt[8]{49}-1\right)$.

45. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{7}+7}{\sqrt[3]{7}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{3}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[4]{3}}$; г) $\dfrac{\sqrt{5}-8}{2\sqrt{2}-\sqrt[4]{5}}$.

46. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{7}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$; в) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}}$; г) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{16}}$; д) $\dfrac{12}{\sqrt[4]{27}}$; е) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$.

47. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{30}{\sqrt[3]{25}}-\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[5]{2}+\dfrac{8}{\sqrt[5]{16}}$; в) $\sqrt[4]{3}-\dfrac{54}{\sqrt[4]{27}}$.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

48. Запішыце ступень з рацыянальным паказчыкам у выглядзе кораня:

а) $7^{\frac{2}{3}}$; б) $5^{\frac{1}{2}}$; в) $10^{0,8}$; г) $3^{-\frac{4}{7}}$.

49. Запішыце ў выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам выраз:

а) $\sqrt[7]{b}$; б) $\sqrt[5]{b^2}$; в) $\sqrt{b}$; г) $\sqrt{b^3}$; д) $\sqrt[10]{b^3}$; е) $\sqrt[15]{b^7}$.

50. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(1\dfrac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

в) $\left(2\dfrac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:(0,75)^{-2}$; г) $5^{0,6}\cdot125\cdot25^{-0,3}\cdot5^{-2,5}$.

51. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\left(10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}} + 10\,000^{-0,75}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $7,5 \cdot 4^{-1,5} + (-2)^{-4} - 0,81^{0,25}$.

52. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і вылічыце:

а) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}}$; б) $25^{\frac{2}{3}} : 25^{\frac{1}{6}}$;

в) $(2^{0,5})^{14}$; г) $\left(8^{-1} \cdot \frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

д) $\frac{12^{\frac{5}{6}}}{2^{1\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}$; е) $\frac{3^{2,5} \cdot 2^{2,75}}{18^{0,75}}$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

53. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $3^{2-3\sqrt{5}} \cdot 27^{\sqrt{5}}$; б) $9^{\sqrt{3}} : 3^{2\sqrt{3}-1}$.

54. Выкарыстайце азначэнне лагарыфма ліку і вылічыце:

а) $\log_2 32$; б) $\log_3 \frac{1}{9}$; в) $\log_{25} 5$;

г) $\log_2 1$; д) $\log_7 \sqrt[5]{7}$; е) $\log_{\sqrt{3}} 27$.

$$\log_a b = c$$
$$\Updownarrow$$
$$a^c = b$$

55. Знайдзіце дзесятковы лагарыфм ліку:

а) 1; б) 10; в) 100; г) 100 000;

д) 0,1; е) 0,01; ж) 0,0001; з) 0,000001;

і) $\sqrt{10}$; к) $\sqrt[7]{10}$; л) $\sqrt[5]{1000}$; м) $\sqrt{0,001}$.

56. Знайдзіце лагарыфм ліку 625 з асновай:

а) 5; б) 25; в) 625; г) $\sqrt{5}$; д) $\frac{1}{5}$;

е) $\frac{1}{125}$; ж) $\sqrt[3]{25}$; з) 0,04; і) $5\sqrt{5}$; к) $25\sqrt[7]{5}$.

57. Назавіце лік:

а) процілеглы ліку $-\frac{1}{3}$; $\sqrt{7}$; $\log_2 64$;

б) адваротны ліку 0,6; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin\frac{\pi}{6}$.

Прывядзіце прыклады лікаў, узаемна простых з лікам 12.

58. Знайдзіце два паслядоўныя цэлыя лікі, паміж якімі на каардынатнай прамой знаходзіцца лік:

а) $\sqrt[4]{83}$; б) $\log_2 33$; в)* $10\sin\frac{7\pi}{4}$.

59. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5^{\log_5 17}$; б) $3^{2+\log_3 5}$;

в) $7^{1-\log_7 15}$; г) $2^{3\log_2 5}$;

д) $36^{\log_6 5}$; е) $1000^{-\lg 3}$.

$$a^{\log_a b} = b$$

60. Вызначце знак ліку:

а) $\log_{0,5} 3$; б) $\log_{0,5}\frac{1}{3}$; в) $\lg 17$; г) $\lg 0,7$.

61. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і вылічыце:

а) $\log_5 12,5 + \log_5 10$;

б) $\lg 37 - \lg 0,37$;

в) $\frac{\lg 64}{\lg 2}$;

г) $\log_{16} 32$;

д) $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6,25$;

е) $\log_6 5 \cdot \log_{25} 6$.

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$
$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \cdot \log_a b$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

62. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_5 \lg 100\,000$; б) $\log_9 \log_2 8$;

в) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$; г) $\log_2 \log_7 \sqrt[8]{7}$;

д) $\log_{\frac{1}{3}} \log_5 125$; е) $\log_6 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$.

63. Вылічыце:

а) $\log_2 \sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\log_3 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$; в) $\log_{0,5} \cos\frac{7\pi}{4}$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; д) $\lg \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$; е) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{19\pi}{6}$.

64. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\log_{0,5}^2 \sqrt[3]{2}$; б) $\lg^3 \frac{1}{\sqrt[5]{0,1}}$; в) $\log_{\sqrt{3}}^2 27$; г) $\log_8^5 (2\sqrt{2})$.

65. Вылічыце:

а) $\log_{\sqrt{8}}\left(4\sqrt{2}\right)$; б) $36^{\log_{\frac{1}{6}}2}+10^{1-\lg 4}-4^{\log_2 3}$;

в) $\left(\log_7 5+\dfrac{1}{\log_2 7}\right)\cdot\lg 7$; г) $\left(\log_5 12-2\log_5 2\right):\left(\log_5 18+\log_5\dfrac{1}{2}\right)$.

66. Знайдзіце значэнне выразу $0{,}2^{\log_5 0{,}5}-\log_{\sqrt{3}}25+4\log_{\frac{1}{3}}0{,}2$.

67. Вылічыце: $\log_6 34-\log_6\dfrac{1}{2}+\log_{\sqrt{6}}3-2\log_6\sqrt{17}$.

68. Дакажыце, што значэнне выразу з'яўляецца цэлым лікам:

а) $\dfrac{\log_5 81}{\log_{0,2}27\cdot\log_2\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{\log_4 5\cdot\log_{\sqrt{3}}27}{\log_{0,25}125}$.

69. Выберыце набор лікаў, размешчаных у парадку нарастання:

а) $\log_2 0{,}5$; $\log_2 0{,}25$; $\log_2 0{,}125$; $\log_2 0{,}0625$;

б) $\log_{0,25}2$; $0{,}3$; $\sin 30°$; $\sqrt{1{,}44}$;

в) $\cos 2$; $\cos 3$; $\cos 4$; $\cos 6$;

г) $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[20]{31}$; $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[10]{10}$;

д) $-\dfrac{17}{27}$; $-\dfrac{17}{23}$; $-\dfrac{17}{21}$; $-\dfrac{17}{29}$.

70. Выпішыце адмоўныя лікі:

а) $\lg 0{,}999$; б) 7^{-1}; в) -2^4; г) $\log_2\sqrt{1{,}01}$; д) $\sin 237°$.

71. Вылічыце:

а) $\dfrac{1}{2}\sqrt{3{,}24}+1{,}5\sqrt{64}$; б) $3{,}5-9\sqrt{\dfrac{25}{81}}$;

в) $\left(-7\sqrt{2}\right)^2$; г) $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)$.

72. Выразіце ў радыянах вугал:

а) $10°$; б) $135°$; в) $-36°$; г) $-450°$.

73. Выразіце ў градусах вугал:

а) $\dfrac{\pi}{15}$; б) $\dfrac{7\pi}{6}$; в) $-\dfrac{13\pi}{10}$; г) $-\dfrac{17\pi}{4}$.

74. Знайдзіце $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, калі пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты:

а) $P_\alpha\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$; б) $P_\alpha\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

75. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 180° + \cos 180°$; б) $4\sin(-180°) - \cos 0°$;

в) $5\cos 180° - \sin(-270°)$; г) $\operatorname{tg} 180° + \sin(-90°)$;

д) $2\cos(-270°) + \operatorname{ctg} 90°$; е) $3\sin(-270°) - \operatorname{tg} 360°$.

76. Вылічыце:

а) $\cos 180° \cdot \sin 45° \cdot \cos 60°$; б) $\sin(-90°) - \sin 60° + \cos 30°$;

в) $\sin(-270°) + \operatorname{tg}^2 45°$; г) $\cos 450° - \cos 60° + \operatorname{tg}^2 30°$.

77. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2\cos(-2\pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\pi + \sin 2\pi$;

в) $\cos 3\pi + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $\operatorname{tg} 2\pi + \cos^2 \frac{\pi}{6}$;

д) $-\operatorname{tg}\pi + \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; е) $3\cos(-\pi) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$.

78. Вызначце знак ліку:

а) $\sin 183°$; б) $\cos\frac{8\pi}{7}$; в) $\operatorname{tg} 3$; г) $\operatorname{ctg} 473°$.

79. Ведаючы значэнне адной з трыганаметрычных функцый вугла і чвэрць, у якой знаходзіцца вугал, знайдзіце значэнне трох іншых трыганаметрычных функцый гэтага вугла:

а) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

80. Размясціце ў парадку нарастання лікі

$$\cos\frac{3\pi}{8},\ \cos\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{17\pi}{8} \text{ і } \cos\frac{23\pi}{8}.$$

81. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 240° + \cos 330°$; б) $\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{3} + \operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

82. З дапамогай формул складання вылічыце:

а) $\sin 16° \cos 29° + \sin 29° \cos 16°$; б) $\sin 67° \cos 37° - \sin 37° \cos 67°$;

в) $\cos 71° \cos 26° + \sin 71° \sin 26°$; г) $\cos 10° \cos 35° - \sin 10° \sin 35°$;

д) $\frac{\operatorname{tg} 21° + \operatorname{tg} 24°}{1 - \operatorname{tg} 21° \operatorname{tg} 24°}$; е) $\frac{\operatorname{tg} 72° - \operatorname{tg} 42°}{1 + \operatorname{tg} 72° \operatorname{tg} 42°}$.

83. Дакажыце, што $\sin 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

84. Знайдзіце $\cos(\alpha+\beta)$, калі $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$, α і β — вуглы першай чвэрці.

85. Вылічыце $\frac{\operatorname{tg}20^\circ + \operatorname{tg}25^\circ}{1 - \operatorname{ctg}65^\circ \operatorname{ctg}70^\circ}$.

86. З дапамогай формул двайнога вугла вылічыце:

а) $\cos^2 22{,}5^\circ - \sin^2 22{,}5^\circ$; б) $6\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{\operatorname{tg}15^\circ}{\operatorname{tg}^2 15^\circ - 1}$.

87. Знайдзіце $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, калі $\cos\alpha = -0{,}6$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

88. Пераўтварыце суму трыганаметрычных функцый у здабытак і вылічыце:

а) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; б) $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$.

89. Выкарыстайце азначэнне арксінуса, арккосінуса, арктангенса або арккатангенса ліку і вылічыце:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\arccos(-1)$; е) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

ж) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\operatorname{arctg}(-1)$; і) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

к) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; л) $\operatorname{arcctg} 1$; м) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

90. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; в) $\cos(2\operatorname{arctg}1)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; д) $\cos(2\operatorname{arctg}(-1))$; е) $\sin\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right)$.

91. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; б) $\cos(2\operatorname{arctg}1)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$; е) $\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

92. Выканайце дзеянні:

а) $\sqrt[3]{-125}+\sqrt[5]{243}$; б) $\sqrt[4]{1}-\sqrt[3]{0{,}001}$; в) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}064}\cdot\sqrt[5]{243}$; д) $\sqrt[3]{-0{,}125}:\sqrt[4]{10\,000}$; е) $-\sqrt[4]{0{,}0001}-\sqrt[3]{-8}$;

ж) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}\cdot\sqrt[3]{0{,}027}$; з) $\sqrt[3]{0{,}216}+\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; і) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}+\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

93. Знайдзіце ўсе цэлыя лікі, размешчаныя на каардынатнай прамой паміж лікамі:

а) 2 і $\sqrt[3]{129}$; б) $\sqrt[5]{-37}$ і $\sqrt[6]{71}$; в) $\sqrt[7]{-129}$ і $\sqrt[6]{1\,000\,001}$.

94. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt[6]{10}\right)^6$; б) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; в) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; г) $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3$;

д) $\left(2\sqrt[6]{5}\right)^6$; е) $\left(-\frac{2}{3}\sqrt[4]{12}\right)^4$; ж) $\left(0{,}1\sqrt[5]{-2}\right)^5$; з) $\left(-\frac{3}{4}\sqrt[4]{7}\right)^4$.

95. Вылічыце з дапамогай уласцівасцей кораня n-й ступені:

а) $\sqrt[4]{81\cdot16}$; б) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot0{,}001}$; в) $\sqrt[3]{\frac{1000}{0{,}027}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{0{,}0001}{16}}$.

96. Выкарыстайце ўласцівасці кораня n-й ступені і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$; б) $\sqrt[4]{62{,}5}\cdot\sqrt[4]{10}$; в) $\frac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{4}{25}}:\sqrt[3]{\frac{5}{16}}$.

97. Запішыце ў выглядзе каранёў адной і той жа ступені лікі $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt{2}$ і $\sqrt[10]{17}$.

98. Запішыце ў выглядзе кораня n-й ступені выраз:

а) $\sqrt[5]{\sqrt[5]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{\sqrt[4]{25}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{8}}$.

99. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}}\cdot\sqrt[9]{5^8}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{25}}\cdot\sqrt[6]{5^5}$.

100. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[8]{(-15)^8}$; б) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; в) $\sqrt[4]{(-3)^4}$; г) $\sqrt[5]{(-19)^5}$.

101. Вылічыце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{-5^3}+\sqrt[3]{(-5)^3}$; б) $\sqrt[6]{(-3)^6}-\sqrt[9]{(-3)^9}$; в) $\sqrt[10]{(-2)^{10}}+\sqrt[7]{(-2)^7}$.

102. Знайдзіце суму, рознасць, здабытак і дзель лікаў:

а) $7\sqrt[5]{3}$ і $\sqrt[5]{3}$; б) $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$; в) $-2\sqrt[3]{2}$ і $5\sqrt[3]{2}$.

103. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}$; б) $5\sqrt[7]{2}+\sqrt[7]{256}$; в) $2\sqrt[3]{320}-3\sqrt[3]{625}$.

104. Вылічыце:

а) $\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2$.

105. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{3}\right)\cdot\sqrt[3]{9}$; б) $4\sqrt[4]{2}\cdot\left(\sqrt[4]{162}+5\sqrt[4]{32}\right)$; в) $\left(2\sqrt[7]{3}-\sqrt[7]{384}\right):\sqrt[7]{3}$.

106. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{5}-5}{\sqrt[3]{5}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{3}+3}{6+\sqrt[4]{48}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{5}}$.

107. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{10}}$; б) $\dfrac{14}{\sqrt[3]{49}}$; в) $\dfrac{15}{\sqrt[4]{625}}$; г) $\dfrac{6}{\sqrt[7]{64}}$.

108. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{4}}-\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[5]{3}+\dfrac{12}{\sqrt[5]{81}}$.

109. Запішыце ступень з рацыянальным паказчыкам у выглядзе кораня:

а) $5^{\frac{2}{7}}$; б) $3^{\frac{1}{2}}$; в) $7^{1,2}$; г) $10^{-\frac{2}{3}}$.

110. Запішыце ў выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам выраз:

а) $\sqrt[3]{a}$; б) $\sqrt[5]{a^3}$; в) $\sqrt{a}$; г) $\sqrt{a^5}$.

111. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $32^{\frac{2}{5}}$; б) $(0{,}36)^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}:8^{-\frac{1}{3}}$; г) $9^{\frac{1}{2}}\cdot81^{\frac{3}{4}}\cdot\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

112. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і вылічыце:

а) $5^{\frac{1}{7}}\cdot5^{\frac{6}{7}}$; б) $8^{\frac{1}{2}}:8^{\frac{1}{6}}$; в) $\left(3^{0,8}\right)^5$;

г) $\left(\dfrac{1}{16}\cdot625^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$; д) $\dfrac{3^{\frac{5}{6}}\cdot2^{\frac{7}{12}}}{18^{\frac{5}{12}}}$; е) $\dfrac{45^{0,4}}{3^{2,8}\cdot5^{1,4}}$.

113. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5^{3-2\sqrt{2}}\cdot25^{\sqrt{2}}$; б) $4^{\sqrt{7}}:2^{2\sqrt{7}-5}$; в) $\left(5^{1-\sqrt{3}}\right)^{2\sqrt{3}+2}$.

114. Вылічыце:

а) $\log_3 81$; б) $\log_2 \frac{1}{8}$; в) $\log_{49} 7$;

г) $\log_2 1$; д) $\lg \sqrt[3]{10}$; е) $\log_{\sqrt{5}} 25$.

115. Знайдзіце два паслядоўныя цэлыя лікі, паміж якімі на каардынатнай прамой знаходзіцца лік:

а) $-\sqrt[3]{126}$; б) $\lg 9999$; в)* $-6\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}$.

116. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $3^{\log_3 29}$; б) $2^{3+\log_2 7}$; в) $5^{1-\log_5 13}$;

г) $7^{4\log_7 3}$; д) $100^{\lg 7}$; е) $125^{-\log_5 2}$.

117. Вызначце знак ліку:

а) $\log_{0,2} 5$; б) $\log_{0,2} \frac{1}{6}$; в) $\lg 23$; г) $\lg 0,9$.

118. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і вылічыце:

а) $\log_3 2,7 + \log_3 10$; б) $\lg 13 - \lg 1,3$; в) $\frac{\lg 81}{\lg 3}$;

г) $\log_{81} 243$; д) $\log_{\sqrt{3}} 2 + \log_3 2,25$; е) $\log_7 3 \cdot \log_3 49$.

119. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_2 \log_9 81$; б) $\log_9 \log_{11} 121$; в) $\log_3 \lg 1000$;

г) $\log_{27} \log_5 125$; д) $\log_{\frac{1}{5}} \log_2 32$; е) $\log_3 \log_5 \sqrt[9]{5}$.

120. Вылічыце:

а) $\log_2 \cos\frac{\pi}{4}$; б) $\log_5 \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; в) $\log_4 \sin\frac{25\pi}{6}$; г) $\log_3 \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

121. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\log_7^2 \sqrt[5]{7}$; б) $\log_5^3 \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$; в) $\lg \sqrt[4]{10}$; г) $\log_{27}^5 (3\sqrt{3})$.

122. Вылічыце:

а) $\log_{\sqrt{125}} (5\sqrt{5})$; б) $2^{4\log_4 3} - 5^{\frac{1}{4}\log_{\sqrt{5}} 0,25}$;

в) $\left(\log_9 2 + \frac{1}{\log_5 9}\right) \cdot \lg 9$; г) $\left(3\lg 4 + \lg\frac{1}{2}\right) : (\lg 7 - \lg 14)$.

123. Знайдзіце значэнне выразу $0,5^{\log_2 0,04} + \log_{\sqrt{7}} 0,5 - \log_{\frac{1}{7}} 4$.

124. З дадзеных лікаў выберыце ўсе дадатныя лікі:

а) $\cos\frac{13\pi}{6}$; б) $\log_{\sqrt{1,001}} 3$; в) -6^2; г) 3^{-1}; д) $\lg 0,99$.

Выразы і іх пераўтварэнні

125. Скараціце рацыянальны дроб:

а) $\frac{4-x^2}{x+2}$; б) $\frac{a^2-6a+9}{3-a}$; в) $\frac{4m^2-4mn+n^2}{4m^2-n^2}$; г) $\frac{4b^2+3b-1}{4b-1}$.

126. Выканайце дзеянні:

а) $\left(\frac{4a}{4-a^2}-\frac{a-2}{2a+4}\right)\cdot\frac{4}{a+2}-\frac{a}{2-a}$;

б) $\frac{b^2-64}{4b^2+23b}\cdot\left(\frac{4b}{b+8}-\frac{9b}{b^2+16b+64}\right)+\frac{8b-64}{b+8}$;

в) $\frac{1}{x^2}+\frac{x+12}{x^3-9x}:\left(\frac{x-3}{2x^2+5x-3}-\frac{9}{9-x^2}\right)$.

127. Выкарыстайце суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі аднаго і таго ж вугла і спрасціце выраз:

а) $\sin^2\alpha-1$;

б) $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$;

г) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$;

д) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

е) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

ж) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$;

з) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$$

128. Дакажыце тоеснасць:

а) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha$;

в) $(1-\operatorname{tg}\alpha)^2+(1+\operatorname{tg}\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$;

г) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

129. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{4\sin\alpha - 5\cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha}$, калі $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$;

б) $\frac{5\sin\alpha + 2\cos\alpha}{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}$, калі $\mathrm{ctg}\,\alpha = -2{,}5$.

130. Знайдзіце значэнне выразу $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$, калі вядома, што $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 3$.

131. З дапамогай формул прывядзення прывядзіце да трыганаметрычнай функцыі вугла α выраз:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $\mathrm{ctg}(\pi + \alpha)$; в) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

г) $\mathrm{tg}(\alpha - \pi)$; д) $\sin^2(3\pi - \alpha)$; е) $\mathrm{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$;

ж) $\cos^3(5\pi + \alpha)$; з) $\mathrm{tg}^4\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)$; і) $\sin^5\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$.

132. Спрасціце выраз:

а) $\sin(90° - \alpha) - \cos(90° + \alpha)$; б) $\mathrm{tg}(\alpha - 360°) - \mathrm{ctg}(270° - \alpha)$;

в) $\sin(180° + \alpha) + \cos(\alpha - 90°)$; г) $\mathrm{tg}(90° + \alpha) - \mathrm{ctg}(\alpha - 450°)$.

133. Спрасціце выраз:

а) $\cos(\pi - \alpha)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $\mathrm{ctg}(\alpha - 2\pi)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

в) $\sin(3\pi + \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; г) $\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) - \mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$.

134. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$;

б) $\dfrac{\mathrm{ctg}(1{,}5\pi - \alpha)}{1 - \mathrm{tg}^2(\alpha - \pi)} \cdot \dfrac{\mathrm{ctg}^2(2\pi - \alpha) - 1}{\mathrm{ctg}(\pi + \alpha)}$.

135. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cos(2\pi - \alpha)}{\mathrm{ctg}(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = -\sin\alpha$.

136. З дапамогай формул складання спрасціце выраз:

а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)$;

в) $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^\circ) - \sin\alpha + \cos\alpha$;

г) $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

137. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\cos\beta}$; б) $\frac{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta}$.

138. Знайдзіце $\mathrm{tg}\alpha$, калі вядома, што:

а) $\mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2$; б) $\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = 3$ і $\mathrm{tg}\alpha = 2$.

139. Дакажыце, што:

а) $\frac{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\alpha}{2\cos(\alpha - 30^\circ) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin(45^\circ - \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}$.

140. З дапамогай формул двайнога вугла пераўтварыце ў сінус, косінус або тангенс некаторага вугла выраз:

а) $\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$;

б) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$;

в) $\frac{2\mathrm{tg}1{,}5\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2 1{,}5\alpha}$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

141. Прымяніце формулы двайнога вугла і спрасціце выраз:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$; б) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; в) $\frac{\sin^2\alpha\mathrm{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$; г) $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$.

142. Спрасціце выраз:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; б) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$;

в) $\frac{\mathrm{tg}(45^\circ + \alpha)}{1 - \mathrm{tg}^2(45^\circ + \alpha)}$.

143. Дакажыце тоеснасць:

а) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; б) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha} = 1$;

в) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

144. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; б) $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$;

в) $\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha$; г) $\sin^3\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos^3\alpha$.

145. Знайдзіце $\sin 2\alpha$, калі вядома, што $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

146. Вылічыце $\dfrac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, калі $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

147. Пераўтварыце суму трыганаметрычных функцый у здабытак і спрасціце выраз:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

а) $\cos 6\alpha + \cos 4\alpha$;

б) $\cos(40^\circ + \alpha) - \cos(40^\circ - \alpha)$;

в) $\sin\dfrac{\alpha}{8} + \sin\dfrac{\alpha}{6}$;

г) $\sin 1{,}5\alpha - \sin 3{,}5\alpha$.

148. Дакажыце тоеснасць:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; б) $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$.

149. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

150. Спрасціце выраз:

а) $\left(\dfrac{1}{\cos 3\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}\right)$; б) $\dfrac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1 + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$.

151. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх мае сэнс выраз:

а) $\arcsin(2a - 1)$; б) $\arccos(7 - 3a)$;

в) $\operatorname{arctg}(a^2 + a)$; г) $\operatorname{arcctg}(5 - a^2)$.

152. Знайдзіце значэнне выразу $5\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{b}$ пры:

а) $a = 1$, $b = 0{,}125$; б) $a = 0$, $b = -27$; в) $a = 0{,}0016$, $b = 0{,}064$.

153. Запішыце выраз $\sqrt[4]{b}$ у выглядзе кораня:

а) восьмай ступені;

б) дванаццатай ступені;

в) шаснаццатай ступені.

154. Запішыце ў выглядзе кораня n-й ступені выраз:

а) $\sqrt[5]{\sqrt[5]{a}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{\sqrt[7]{a^2}}$;

г) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{10}}}$; д) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}$; е) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt{\sqrt[4]{a}}$.

155. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[6]{a^6}$, калі $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[8]{b^8}$, калі $b < 0$;

в) $\sqrt[8]{256m^8}$, калі $m \geqslant 0$; г) $\sqrt[4]{\frac{c^4}{81}}$, калі $c < 0$;

д) $-5\sqrt[6]{64b^6}$, калі $b < 0$; е) $-2a^2\sqrt[4]{\frac{a^4}{10\,000}}$, калі $a \geqslant 0$.

156. Запішыце выраз у выглядзе адначлена:

а) $\sqrt[9]{a^9}$; б) $-4\sqrt[5]{100\,000a^5}$; в) $7a\sqrt[7]{-a^7}$; г) $8a^4\sqrt[5]{-243a^5}$.

157. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і спрасціце выраз:

а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$; б) $b^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$;

в) $c^3 \cdot \sqrt[7]{c}$; г) $a^{\frac{1}{2}} : a^{1,5}$;

д) $d^{-\frac{5}{6}} : d^{\frac{1}{3}}$; е) $\sqrt{n} : n^2$;

ж) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$; з) $\left(b^{-0,2}\right)^{0,5}$;

і) $\left(\sqrt[4]{x^9}\right)^{-3}$; к) $\left(b^{0,75}\right)^{1,25} \cdot b^{\frac{17}{16}}$;

л) $\left(a^{0,4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{a^4}$; м) $\sqrt[10]{m} : \left(m^{-1,2}\right)^{-0,75}$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

158. Скараціце дроб $\dfrac{b^{\frac{7}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{5b^{\frac{4}{3}}}$ і вылічыце яго значэнне пры $b = 4$.

159. Прымяніце формулы скарочанага множання і спрасціце выраз:

а) $\left(4a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(4a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right) - 16a$; б) $\left(a^{\frac{1}{4}} + 5a^{\frac{3}{2}}\right)^2 - \sqrt{a} - 25a^3$.

160. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{a - 49}{a^{\frac{1}{2}} + 7}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{12}} - b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}}$; в) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 16}{x^{\frac{1}{3}} + 8x^{\frac{1}{6}} + 16}$; г) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}} - 2a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}} + b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}} - a}$.

161. Спрасціце выраз $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - 6} - \dfrac{3}{a^{\frac{1}{4}} + 6} + \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{36 - a^{\frac{1}{2}}}$.

162. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рэчаісным паказчыкам і выканайце дзеянні:

а) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; б) $a^{\sqrt{5}+2} : a^{\sqrt{5}-1}$;

в) $\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} : a^2$; г) $\left(a^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

163. Запішыце ў выглядзе здабытку суму:

а) $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1}$; б) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{1-x} + 81^{\frac{x}{2}} - 9^{x+1}$.

164. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_a(a^2b)$, калі вядома, што $\log_a b = 5$;

б) $\log_b \dfrac{\sqrt{a}}{b}$, калі вядома, што $\log_b a = 7$.

165. Ведаючы, што $\log_5 2 = a$, выразіце праз a значэнне выразу:

а) $\log_5 10$; б) $\log_5 2{,}5$.

166. Вядома, што $\lg a = b$. Выразіце праз b значэнне выразу:

а) $\lg(100a)$; б) $\lg\left(\sqrt{10}a\right)$; в) $\lg\dfrac{a}{1000}$; г) $\lg(0{,}0001a)$.

167. Знайдзіце значэнне выразу $\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, калі вядома, што $\log_b a = \sqrt{3}$.

168. Скараціце рацыянальны дроб:

а) $\frac{9-x^2}{x-3}$; б) $\frac{a^2-10a+25}{5-a}$; в) $\frac{9m^2+6mn+n^2}{9m^2-n^2}$; г) $\frac{2b^2-b-3}{b+1}$.

169. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{x}{1-x}-\frac{1-x^2}{x^2+1}\cdot\left(\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{x}{1-x^2}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{x+2}+\frac{5}{x^2-x-6}+\frac{2x}{x-3}\right):\frac{2x+1}{x}-\frac{x-9}{6-2x}$.

170. Выкарыстайце суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі аднаго і таго ж вугла і спрасціце выраз:

а) $\cos^2\alpha-1$; б) $\sin\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha$;

в) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; г) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;

д) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$; е) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin^2\alpha$.

171. Дакажыце тоеснасць:

а) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha=1$; б) $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha=\mathrm{ctg}^2\alpha$.

172. З дапамогай формул прывядзення пераўтварыце да трыганаметрычнай функцыі вугла α выраз:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\sin^2(2\pi-\alpha)$; г) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$.

173. Спрасціце выраз:

а) $\sin(270°-\alpha)+\cos(270°+\alpha)$; б) $\mathrm{ctg}(\alpha-270°)-\mathrm{tg}(540°-\alpha)$.

174. Знайдзіце значэнне выразу

$\mathrm{tg}^2(\alpha-2\pi)\cdot\sin^2(\alpha-1{,}5\pi)+\cos^2(2\pi+\alpha)$.

175. Дакажыце тоеснасць $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}+\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=-1$.

176. З дапамогай формул складання спрасціце выраз:

а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

177. Знайдзіце tgα, калі вядома, што $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=4.$

178. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

179. З дапамогай формул двайнога вугла пераўтварыце ў сінус, косінус або тангенс некаторага вугла выраз:

а) $\cos^2 7\alpha-\sin^2 7\alpha$; б) $2\sin\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{8}$; в) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$

180. Спрасціце выраз:

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; б) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right).$

181. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=1.$

182. Спрасціце выраз:

а) $4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; б) $\cos^2 4\alpha-4\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha.$

183. Пераўтварыце суму трыганаметрычных функцый у здабытак і спрасціце выраз:

а) $\cos 8\alpha+\cos 10\alpha$; б) $\cos(25^\circ-\alpha)-\cos(25^\circ+\alpha)$;

в) $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{5}$; г) $\sin 7{,}5\alpha-\sin 2{,}5\alpha.$

184. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$

185. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha}.$

186. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх мае сэнс выраз:

а) $\arcsin(a+3)$; б) $\arccos(1-2a)$;

в) $\operatorname{arctg}(3a+4)$; г) $\operatorname{arcctg}(a^2-7).$

187. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt[6]{x}-2\sqrt[3]{x}$, калі:

а) $x=1$; б) $x=0$; в) $x=64$; г) $x=0{,}000001.$

188. Запішыце ў выглядзе кораня n-й ступені выраз:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{b}}$; б) $\sqrt[5]{\sqrt{b}}$; в) $\sqrt{\sqrt[9]{b^2}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[10]{b^{15}}}.$

189. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[4]{m^4}$, калі $m \geqslant 0$; б) $\sqrt[10]{c^{10}}$, калі $c < 0$;

в) $\sqrt[6]{1\,000\,000x^6}$, калі $x \geqslant 0$; г) $\sqrt[6]{\frac{a^6}{64}}$, калі $a < 0$.

190. Запішыце выраз у выглядзе адначлена:

а) $\sqrt[5]{x^5}$; б) $-5\sqrt[3]{8b^3}$; в) $5c\sqrt[9]{-c^9}$; г) $-4a^6\sqrt[7]{-128a^7}$.

191. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рацыянальным паказчыкам і спрасціце выраз:

а) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}$; б) $b^5 : \sqrt[5]{b}$; в) $\left(c^{-0,75}\right)^{-\frac{2}{9}}$;

г) $\sqrt[10]{d} \cdot \left(d^{-1,2}\right)^{\frac{3}{4}}$; д) $\left(m^{\frac{4}{5}}\right)^{-0,75} : \left(m^{0,4}\right)^{-1}$; е) $\left(\sqrt{n}\right)^{-0,5} : \left(n^{-\frac{3}{7}}\right)^{\frac{7}{12}}$.

192. Скараціце дроб $\dfrac{a^{\frac{8}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}{4a^{\frac{5}{3}}}$ і вылічыце яго значэнне пры $a = 4$.

193. Прымяніце формулы скарочанага множання і спрасціце выраз:

а) $\left(a^{\frac{1}{2}} + 3b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - 3b^{\frac{1}{2}}\right) + 9b$; б) $\left(b^{\frac{1}{4}} - 2b^{\frac{5}{2}}\right)^2 - \sqrt{b} - 4b^5$.

194. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{a}{a - a^{\frac{1}{3}}}$; б) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + 5}{a - 25}$; в) $\dfrac{x^{\frac{1}{4}} - 36}{x^{\frac{1}{4}} - 12x^{\frac{1}{8}} + 36}$.

195. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з рэчаісным паказчыкам і выканайце дзеянні:

а) $a^{2-\sqrt{7}} \cdot a^{\sqrt{7}}$; б) $a^{\sqrt{3}+1} : a^{\sqrt{3}-2}$;

в) $a^5 : \left(a^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; г) $\left(a^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

196. Запішыце ў выглядзе здабытку суму $4^{x-1} - 2^{2x} + 4^{x+3}$.

197. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\log_a(ab)$, калі вядома, што $\log_a b = 2$;

б) $\log_b \frac{a}{\sqrt[3]{b}}$, калі вядома, што $\log_b a = 5$.

198. Ведаючы, што $\log_3 2 = a$, выразіце праз a значэнне выразу:

а) $\log_3 12$; б) $\log_3 1{,}5$.

199. Вядома, што $\lg a = b$. Выразіце праз b значэнне выразу:

а) $\lg(10a)$; б) $\lg\left(\sqrt[4]{10a}\right)$; в) $\lg\frac{a}{100}$; г) $\lg(0{,}001a)$.

Ураўненні і няроўнасці

200. Рашыце дробава-рацыянальнае ўраўненне:

а) $\frac{x^2+2x}{x+4} = \frac{8}{x+4}$;

б) $\frac{x^2-8x}{5-x} = \frac{15}{x-5}$;

в) $\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8} = 0$;

г) $\frac{(x^2+3x-18)(x^2-36)}{x+6} = 0$;

д) $1 - \frac{2x^2-x-6}{2-x} = 0$;

е) $\frac{2x^2+x-1}{x+1} = 3x+1$;

ж) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x+1}{x+2} = 0$;

з) $\frac{x}{x+3} - \frac{4}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$;

і) $\frac{3x+1}{x} + \frac{5}{x-2} = \frac{6x-2}{x^2-2x}$;

к) $\frac{x-2}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} = \frac{2}{x^2-1}$;

л) $\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}$;

м) $1 + \frac{45}{x^2-8x+16} = \frac{14}{x-4}$.

201. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy+x^2=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+2y=4, \\ x^2-4y^2=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=1, \\ xy=6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=-8, \\ x^2+y^2+6x+2y=0. \end{cases}$

202. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} xy-x^2=1, \\ y+4x=6 \end{cases}$ і знайдзіце значэнне выразу $x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$, калі $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ — рашэнні сістэмы ўраўненняў.

Ці праўда, што пара лікаў (1; 2) з'яўляецца рашэннем дадзенай сістэмы? Колькі рашэнняў мае дадзеная сістэма ўраўненняў?

Ці праўда, што дадзеная сістэма раўназначна сістэме $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + 5y = 11? \end{cases}$

203. Рашыце квадратную няроўнасць:

а) $2x^2 + 5x - 7 > 0$; б) $7x^2 - x \leqslant 0$;

в) $9 - x^2 < 0$; г) $6x^2 - x + 1 \geqslant 0$.

204. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

а) $\dfrac{x-3}{x+1} > 0$; б) $\dfrac{(x-8)(x+2)}{x-1} \leqslant 0$; в) $\dfrac{x^2+6x+5}{x+4} < 0$;

г) $\dfrac{(x-8)^2(x-5)}{x-1} \leqslant 0$; д) $\dfrac{3-8x}{x+1} \leqslant 1$; е) $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4x+3} > -3$;

ж) $\dfrac{x-10}{x^2+5} < -\dfrac{1}{2}$; з) $\dfrac{x-1}{3x+3} \leqslant \dfrac{x+1}{2x-3}$; і) $\dfrac{1}{x^2+2x-3} \geqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

205. Рашыце найпрацейшае трыганаметрычнае ўраўненне:

а) $\sin x = \dfrac{1}{2}$;

б) $\sin 5x = 0$;

в) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{5}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{10}\right) = 1$;

д) $\cos 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

е) $\cos\dfrac{x}{4} = 0$;

ж) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

$\sin x = a,$
$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$\cos x = a,$
$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg} x = a,$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{ctg} x = a,$
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

з) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$; і) $\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; к) $\operatorname{tg} 8x = 0$;

л) $\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{16}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; м) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{9}\right) = -1$; н) $\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$;

о) $\operatorname{ctg}\dfrac{2x}{5} = 1$; п) $\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; р) $\operatorname{ctg}\left(3x - \dfrac{\pi}{10}\right) = -1$.

206. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \mathrm{ctg}\,5x - \sqrt{3}$.

207. Рашыце ўраўненне, выканаўшы замену зменнай:

а) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; б) $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$;

в) $3\mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$; г) $\mathrm{ctg}^2 x - 4\mathrm{ctg}\,x + 3 = 0$.

208. Прымяніце асноўную трыганаметрычную тоеснасць і рашыце ўраўненне:

а) $3\sin^2 x + 7\cos x - 3 = 0$; б) $2\cos^2 x + 5\sin x = 4$;

в) $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$; г) $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$.

209. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад раскладання на множнікі:

а) $3\sin x - \cos^2 x \sin x = 0$; б) $\sqrt{2}\cos 5x = 2\sin x \cos 5x$.

210. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = \sin^2 x$ і прамой $y = \frac{3}{4}$; б) $y = \mathrm{ctg}^2 x$ і прамой $y = 1$.

211. Рашыце аднароднае трыганаметрычнае ўраўненне:

а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

б) $\sin x - \cos x = 0$;

в) $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$;

г) $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$.

212. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = \cos x$ і $y = 3\sin x$.

213. Прывядзіце ўраўненне да аднароднага і рашыце яго:

а) $6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$; б) $4\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 1$.

214. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы розныя трыганаметрычныя формулы:

а) $\sin 5x \cos 3x - \cos 5x \sin 3x = 1$; б) $\cos x \cos 3x = \sin x \sin 3x$;

в) $\sin 2x = \cos^2 x$; г) $4\sin^2 x - \cos 2x = 5$;

д) $\sin 4x - \sin 10x = 0$; е) $\cos 7x = \cos 3x$.

215. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$, якія належаць адрэзку $[-\pi; \pi]$.

216. Знайдзіце найменшы дадатны і найбольшы адмоўны карані ўраўнення:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$; б) $\cos x - \cos 5x = \sin 3x$.

217. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{3x-1} = 7$;

б) $\sqrt[3]{8x-3} = -5$;

в) $\sqrt{3x^2 + x - 15} = 3$;

г) $\sqrt[4]{x^2 - 5x + 81} - 3 = 0$;

д) $\sqrt[6]{3x^2 - 4x} = -5$;

е) $\sqrt[7]{x^2 - 16} = 2$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = a,\ n \in N$$

Калі $a \geqslant 0$, то $f(x) = a^{2n}$,

калі $a < 0$, то каранёў няма.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = a,\ n \in N$$

$$f(x) = a^{2n+1}.$$

218. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = \sqrt[4]{3x-5}$ і $y = 2$; б) $y = \sqrt[3]{x^2 - 10x + 1}$ і $y = -2$.

219. Рашыце ўраўненне двума спосабамі:

а) $\sqrt{12 - x} = x$; б) $\sqrt{x-2} = x - 2$;

в) $\sqrt{x+1} + 1 = x$; г) $\sqrt{x+1} + 5 - x = 0$.

220. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх роўныя значэнні выразаў:

а) $\sqrt{7-x}$ і $x - 1$;

б) $4\sqrt{x+6}$ і $x + 1$.

221. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$;

б) $\sqrt{6 - x - x^2} - 1 = x$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x),\quad n \in N$$

Першы спосаб

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Другі спосаб

$$f(x) = (g(x))^{2n}$$

Праверка

222. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = \sqrt{6 - 4x - x^2}$ і $y = x + 4$; б) $y = \sqrt{5 - x^2}$ і $y = x - 1$.

223. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 9} = x$;

б) $\sqrt[5]{6 - 3x - x^5} = -x$;

в) $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 7x + 6} = x$.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x), \quad n \in \boldsymbol{N}$$

$$f(x) = (g(x))^{2n+1}$$

224. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \sqrt{x + 2} - x$; б) $y = \sqrt{x^2 + 8} - 2x - 1$;

в) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 7} - x$.

225. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{2x - 9} = \sqrt{6 - x}$;

б) $\sqrt[4]{x + 2} = \sqrt[4]{2x - 5}$;

в) $\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x}$;

г) $\sqrt{6x^2 - 3x - 1} - \sqrt{2x - 1} = 0$;

д) $\sqrt[8]{x^2 - 4x + 5} = \sqrt[8]{x - 1}$;

е) $\sqrt{6x^2 + 2x - 14} = \sqrt{x^2 - x - 6}$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}, \quad n \in \boldsymbol{N}$$

Першы спосаб

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Другі спосаб

$$f(x) = g(x)$$

Праверка

226. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$ і $y = \sqrt{x + 1}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ і $y = \sqrt{x - 1}$.

227. Рашыце двума спосабамі ўраўненне $\sqrt[8]{x^2 + 4x - 16} - \sqrt[8]{2x - 1} = 0$.

228. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 6} = 2$;

б) $\sqrt{x - 5} + \sqrt{10 - x} = 3$;

в) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 1} = 2$;

г) $\sqrt{11x - 2} + 3\sqrt{x} = 6$.

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$$

$$\left(\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}\right)^2 = a^2$$

Праверка

229. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1}$ і прамой $y = 2$;

б) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$ і прамой $y = 3$.

230. Рашыце ўраўненне з дапамогай метаду замены зменнай:

а) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$; б) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 3$;

в) $\sqrt{x-8} - 3\sqrt[4]{x-8} + 2 = 0$; г) $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[6]{x+9} = 2$;

д) $x^2 + 5 + \sqrt{x^2+5} = 20$; е) $2x^2 - 4x + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 8$.

231. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\frac{x+3}{x} - 2\sqrt{\frac{x+3}{x}} = 3$; б) $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} + \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} = 2{,}5$.

232. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} = 4$; б) $\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{2}$;

в) $\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-2} = x$; г) $\sqrt{3x-5} \cdot \sqrt{x-2} = x-1$.

233. Прымяніце правіла роўнасці здабытку нулю і рашыце ўраўненне:

а) $(x+8)\sqrt{x+3} = 0$; б) $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x+2} = 0$;

в) $(2x-1)\sqrt{x^2-1} = 0$.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)},\ a \neq 1,\ a > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) = g(x)$$

234. Прывядзіце левую і правую часткі ўраўнення да ступеней з аднолькавай асновай і рашыце яго:

а) $2^{x-5} = 0{,}25$; б) $0{,}2^x = \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$;

в) $0{,}25^{\frac{5x-6}{2}} = 0{,}5^{x^2}$; г) $100^{x-2} = 0{,}1^{3x-x^2}$.

235. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = 2^{x^2+2x-3}$ і $y = 1$; б) $y = 7^{x^2-4x+6}$ і $y = 343$.

236. Знайдзіце нуль функцыі:

а) $y = \left(1\frac{2}{3}\right)^{x-8} - \frac{9}{25}$; б) $y = \sqrt{3^{3x-1}} - \frac{1}{3}$.

237. Рашыце ўраўненне:

а) $7^x = 10$; б) $1{,}2^{x+2} = 3$.

238. Выкарыстайце ўласцівасці ступеней і рашыце ўраўненне:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot 4^{x+1} = \frac{1}{64}$; б) $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(4\sqrt{2}\right)^x$;

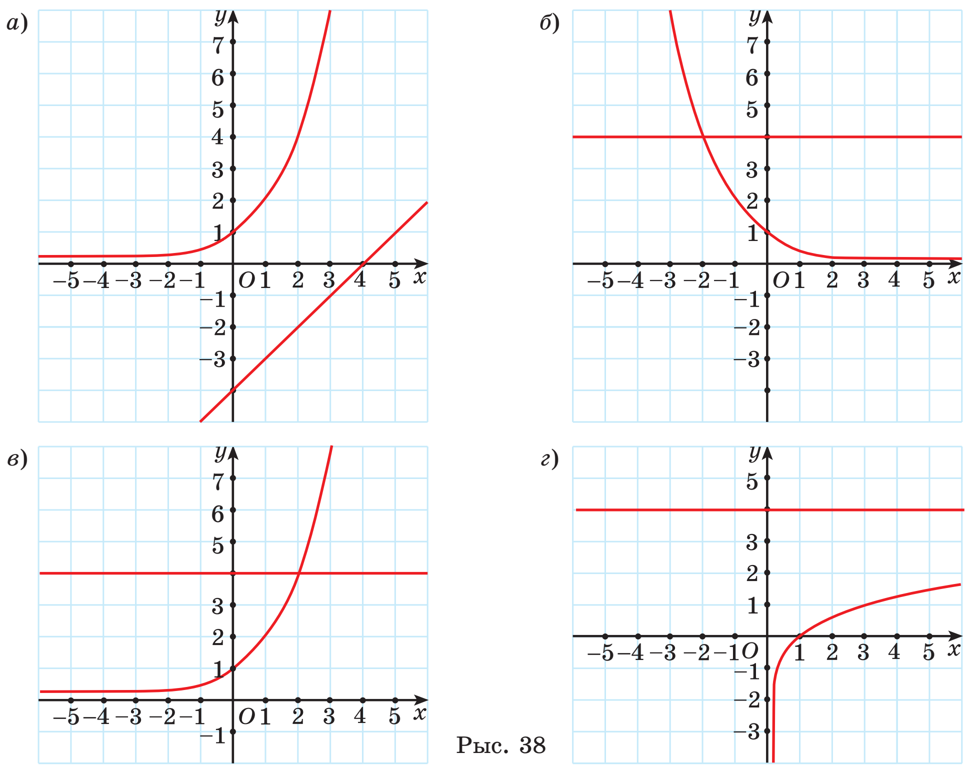
в) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 : \left(10^{2-x}\right)^4$; г) $(0{,}6)^x : \left(\frac{25}{9}\right)^{12-x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^9$.

239. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 3^{x+1} \cdot 5^x$ і $y = 675$.

240. Рашыце ўраўненне:

а) $3^{2x+1} - 5 \cdot 3^{2x-1} = 36$; б) $5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} = 155$.

241. Сярод рысункаў 38, *а—г* выберыце той, на якім паказана графічная мадэль сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} y = 2^x, \\ y = 4. \end{cases}$



Рыс. 38

242. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 7^{2x-3y} = 49\sqrt{7}, \\ 0{,}9^{4x+y-5} = 1. \end{cases}$

243. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі з воссю абсцыс:

а) $y = 9^{\sin x \cdot \cos x} - \sqrt{3}$; б) $y = 7^{\cos^2 x - \sin^2 x} - \sqrt{7}$.

244. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасці ступеней і ўласцівасці паказальнай функцыі:

а) $5^{4x-1} < \frac{1}{25}$;

б) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-7} > 1{,}2$;

в) $3^x \leqslant 10$;

г) $\left(\sqrt{2}\right)^{9-4x} \geqslant \frac{1}{2}$;

д) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{x-2} > \frac{1}{27}$;

е) $\left(\sqrt[7]{10}\right)^{5x-1} \leqslant 0{,}001$.

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	
Калі $a > 1$, то $f(x) > g(x)$	Калі $0 < a < 1$, то $f(x) < g(x)$

245. Рашыце паказальную няроўнасць:

а) $1{,}5^{7-2x} \leqslant \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2}$; б) $7^{x^2-7{,}2x+3{,}9} \geqslant 49\sqrt{7}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3x-1}{x+4}} > 27$; г) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} < 4^{-x} \cdot 8^{-x}$.

246. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt[4]{9^x - 28 \cdot 3^x + 27}$; б) $y = \frac{8}{\sqrt{2^{-x} - 4 \cdot 2^x - 3}}$.

247. Рашыце няроўнасць:

а) $2^x - 2^{x-4} \leqslant 15$; б) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x < 5$;

в) $3^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} \geqslant 36$; г) $2 \cdot 16^x - 2^{4x} - 4^{2x-2} > 15$.

248. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $4^x + 2^{x+1} > 80$; б) $3^{2x-1} - 3^{x-1} - 2 \leqslant 0$;

в) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$; г) $5 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{-x} > 2$.

249. Выберыце ўраўненні, якія не маюць каранёў:

а) $9^x = 5$; б) $\log_5(-x) = 3$; в) $5^x = -3$;

г) $\sqrt[6]{x} = -2$; д) $\cos x = \sqrt{2}$.

250. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

$$\log_a f(x) = b$$
$$f(x) = a^b$$

а) $\log_{0,5}(5x-1) = -2$; б) $\lg(x+7) = 3$;

в) $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2 - 5x + 2\right) = 6$; г) $\log_7\left(x^2 - 8\right) = 0$.

251. Знайдзіце нулі функцыі $y = \log_{0,25}\left(5x^2 - 3x + 1\right)$.

252. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2\left(x^2 - x - 17\right) = \log_2(2x - 7)$; б) $\lg\left(x^2 + 7x - 3\right) = \lg(4x + 1)$;

в) $\log_2(4x - 1) = \log_2(7x - 3) + 1$; г) $\lg\left(x^2 - 125\right) = \lg(x - 6) + 2$.

253. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = \log_2(x - 1)$ і $y = \log_2\left(x^2 - x - 16\right)$;

б) $y = \lg\left(1 - x^2\right)$ і $y = \lg\left(x^2 + 5x - 2\right)$.

254. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і рашыце ўраўненне:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

Першы спосаб

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Другі спосаб

$$f(x) = g(x)$$

Праверка

а) $\log_7 x + \log_7(x + 6) = 1$;

б) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 3) = 1$;

в) $\log_5(x - 1) = 1 - \log_5(x + 3)$;

г) $\log_2(x - 2) = 3 - \log_2 x$;

д) $\lg(x + 3) + \lg(x - 3) = \lg(2x - 1)$;

е) $\log_4(x + 2) + \log_4(10 - x) = 2 + \log_4 x$.

255. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

а) значэнне выразу $\log_4 \log_3 \log_2 x$ роўна $\frac{1}{2}$;

б) значэнне выразу $\lg\lg\lg(x - 5)$ роўна нулю.

256. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$;

б) $3\log_8^2 x - 7\log_8 x + 2 = 0$;

в) $\log_5^2 x + 6\log_5 \sqrt{x} = 10$;

г) $\log_{0,2}^2 x + 6 = 5\log_5 x$.

257. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне:

а) $\log_x\left(5x^2 + 6x\right) = 3$;

б) $\log_{x-1}\left(2x^2 - 8x + 9\right) = 2$.

258. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$;

б) $2\lg^2 x + 3 = \dfrac{5}{\log_x 10}$;

в) $\log_4 x - \log_x 16 - 1 = 0$;

г) $\log_{0,2}\sqrt{3x+4} = \log_{0,2} x$;

д) $4^{\log_3 x} - 6 \cdot 2^{\log_3 x} + 8 = 0$;

е) $\log_3\left(10 - 3^x\right) = 2 - x$.

259. Рашыце ўраўненне $\log_x\left(9x^2\right) \cdot \log_3^2 x = 4$.

260. Знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 10^{\lg x}$ і $y = x^2 - 6$.

261. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $1 + 2\log_2 \cos x = \log_2(-3\sin x)$.

262. Выберыце ўраўненне, не раўназначнае ўраўненню $x^2 + 5 = 0$:

а) $\dfrac{3}{x-6} = 0$;

б) $x^2 - 7x + 13 = 0$;

в) $\log_2(x - 8) = -3$;

г) $7^x = -5$;

д) $5x - 12 = 3(x + 4) + 2x$.

263. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f(x) = \log_2(2^x - 7) - 3 + x$;

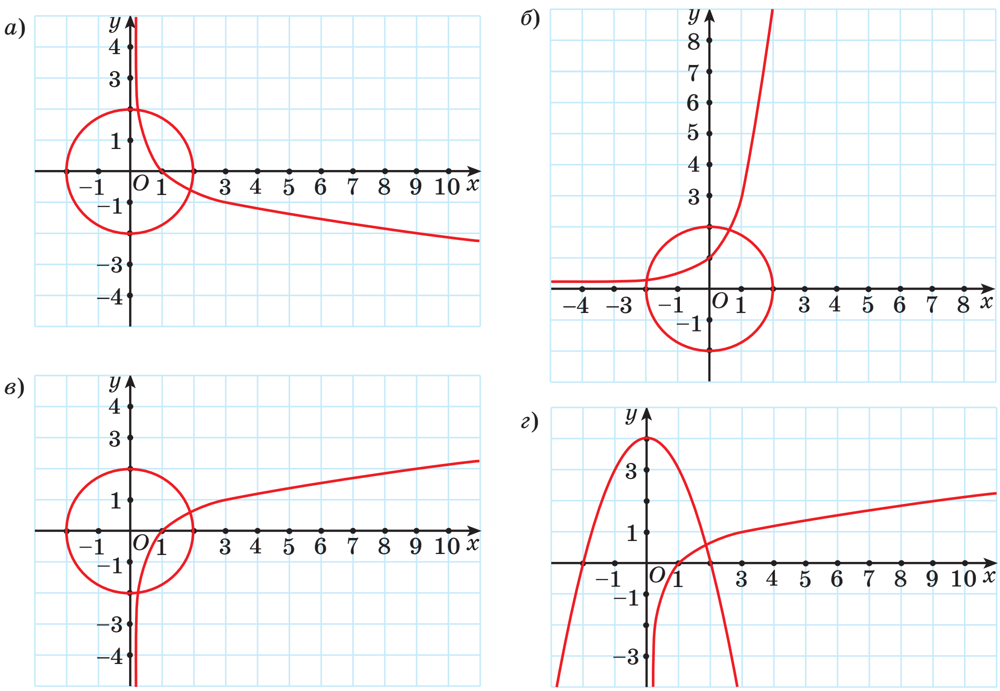
б) $f(x) = \log_2(1 - x) - \log_2\left(-\dfrac{12}{x+3}\right)$.

264. Рашыце ўраўненне:

а) $\dfrac{\log_2^2(x+1) - 6}{\log_2(x+1)} = 1$;

б) $\dfrac{2\log_2^2 x - 1}{\log_2^2 x + 2\log_2 x + 2} = 1$.

265. Сярод рысункаў 39, *а—г* выберыце той, які з'яўляецца графічнай мадэллю сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} y = \log_3 x, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$



Рыс. 39

266. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0, \\ \log_4 x - \log_2 y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 2. \end{cases}$

267. Рашыце няроўнасць, улічыўшы абсяг вызначэння і ўласцівасць манатоннасці лагарыфмічнай функцыі:

а) $\log_3(5x - 1) > \log_3(2 - 3x)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}}(2 - x) \geqslant \log_{0,2}(2x + 4)$;

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	
пры $a > 1$	пры $0 < a < 1$
$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

в) $\log_{0,1}\left(x^2 - 4\right) \leqslant \log_{0,1}(3x)$;

г) $\log_{0,2}\left(x^2 - 25\right) \geqslant \log_{0,2}(-24x)$.

268. Рашыце няроўнасць, запісаўшы лік у правай яе частцы ў выглядзе лагарыфма ліку па зададзенай аснове:

а) $\lg(x-1) < 1$;

б) $\log_{\frac{1}{12}}\left(x^2 - x\right) \geqslant -1$;

в) $\log_{0,3}\left(5x - x^2 + 15\right) \leqslant 0$;

г) $\log_2 \dfrac{3x-6}{x+2} > 3$.

269. Выканайце замену зменнай і рашыце няроўнасць:

а) $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leqslant 0$;

б) $\log^2_{0,5} x - 5\log_{0,5} x + 6 \leqslant 0$;

в) $\log^2_5 x < 4$;

г) $\log^2_{0,5}(x-4) \geqslant 1$.

270. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2$;

б) $\log_{0,5}(x+1) - \log_2(x-2) > -2$;

в) $\log_{\frac{1}{6}}(x-1) + \log_{\frac{1}{6}}(x+4) \geqslant -1$;

г) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x-1) + \log_2(x-1) > -2$.

271. Рашыце двайную няроўнасць $0 \leqslant \log_8(x+3) \leqslant \dfrac{1}{3}$.

272. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} \log_2(3x-4) \geqslant 1, \\ \log_{0,5}(x+1) \geqslant \log_{0,5} 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{0,5} x^2 \geqslant \log_{0,5} 20 - \log_{0,5} 5, \\ \log_3(4x-1) \geqslant 0. \end{cases}$

273. Для функцыі $f(x) = \log_5\left(26 - 3^x\right)$ знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх $f(x) > 2$.

274. Вядома, што лік $\sqrt{3}$ з'яўляецца рашэннем няроўнасці $\log_a(x-1) \geqslant \log_a(3-x)$. Знайдзіце астатнія рашэнні гэтай няроўнасці.

275. Рашыце дробава-рацыянальнае ўраўненне:

а) $\dfrac{6}{x^2-1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{x+1}{x-1}$;

б) $\dfrac{3}{x+2} + 1 = \dfrac{4}{x^2+4x+4}$.

276. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x + y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$

277. Рашыце квадратную няроўнасць:

а) $3x^2 - 4x + 1 \leqslant 0;$ б) $x^2 + 3x < 0;$

в) $x^2 - 25 \geqslant 0;$ г) $7x^2 + 3x + 2 > 0.$

278. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

а) $\frac{x+5}{x-7} \leqslant 0;$ б) $\frac{(x+3)(x-7)}{x+9} > 0;$

в) $\frac{x^2 - x - 2}{x+7} \geqslant 0;$ г) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-6} < 0;$

д) $\frac{x+2}{3-x} > 2;$ е) $\frac{2x^2 + 16x - 3}{x^2 + 8x} \leqslant 2.$

279. Рашыце найпрасцейшае трыганаметрычнае ўраўненне:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$ б) $\sin 3x = 0;$ в) $\sin \frac{x}{4} = -\frac{1}{2};$

г) $\cos 2x = 1;$ д) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$ е) $\cos \frac{x}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

ж) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1;$ з) $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{15}\right) = -\sqrt{3};$ і) $\operatorname{ctg} 8x = 0;$

к) $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

280. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right);$ б) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1.$

281. Рашыце ўраўненне, выканаўшы замену зменнай:

а) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0;$ б) $2\sin^2 x + \sin x = 1;$

в) $6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0;$ г) $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0;$

д) $4\cos^2 x - 3\sin x = 3;$ е) $2\cos^2 x + 5\sin x = 4.$

282. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад раскладання на множнікі:

а) $5\cos x - \sin^2 x\cos x = 0$; б) $\sqrt{3}\sin 7x = 2\sin 7x\cos x$.

283. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y = \cos^2 x$ і прамой $y = \frac{1}{4}$; б) $y = \mathrm{tg}^2 x$ і прамой $y = 3$.

284. Рашыце аднароднае трыганаметрычнае ўраўненне:

а) $\sqrt{2}\sin x + \cos x = 0$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

г) $7\sin^2 x - 8\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

285. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = \sin x$ і $y = 5\cos x$.

286. Прывядзіце ўраўненне да аднароднага і рашыце яго:

а) $6\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 3$; б) $3\cos^2 x + \sin x\cos x = 1$.

287. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы розныя трыганаметрычныя формулы:

а) $\sin 8x\sin 5x - \cos 8x\cos 5x = 0$; б) $\sin 3x\cos 9x = \cos 3x\sin 9x$;

в) $\sin 2x = \sin^2 x$; г) $4\cos^2 x + \cos 2x = 5$;

д) $\sin 3x + \sin 5x = 0$; е) $\cos 8x = \cos 6x$.

288. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{5x - 1} = 9$; б) $\sqrt[3]{x + 3} - 4 = 0$;

в) $\sqrt{2x^2 + 5x + 11} = 3$; г) $\sqrt[4]{x^2 - 5x + 16} - 2 = 0$.

289. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = \sqrt[6]{8 - x}$ і $y = 2$; б) $y = \sqrt[5]{x^2 - 8x + 6}$ і $y = -1$.

290. Рашыце ўраўненне двума спосабамі:

а) $\sqrt{x + 5} = x - 1$; б) $2\sqrt{x + 5} - x = 2$.

291. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх роўныя значэнні выразаў $\sqrt{5x + 1}$ і $1 - x$.

292. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{6-14x+9x^2}=2x-1$;　　б) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$.

293. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y=\sqrt{1+4x-x^2}$ і $y=x-1$.

294. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[3]{8x^3+x^2-1}=2x$;　　б) $\sqrt[5]{7-2x+x^5}=x$.

295. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y=\sqrt{x+7}-x+1$;

б) $y=\sqrt{4+2x-x^2}-x+2$;

в) $y=\sqrt[3]{x^2-4-x^3}+x$.

296. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{7x+1}=\sqrt{4x+16}$;　　б) $\sqrt[6]{4x-7}=\sqrt[6]{3x-4}$;

в) $\sqrt{x^2+16x+3}=\sqrt{8x+3}$;　　г) $\sqrt{6x^2+2x-10}-\sqrt{x^2-x-2}=0$.

297. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y=\sqrt{7x^2+x-2}$ і $y=\sqrt{7x-2}$.

298. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sqrt{x-9}-\sqrt{x-18}=1$;　　б) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$;

в) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$;　　г) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3$.

299. Рашыце ўраўненне з дапамогай метаду замены зменнай:

а) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-20=0$;　　б) $\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[6]{x-3}-6=0$;

в) $x^2-5+\sqrt{x^2-5}=42$;　　г) $2x^2+3x=5\sqrt{2x^2+3x+9}-3$.

300. Знайдзіце карані ўраўнення $\sqrt{\dfrac{x}{x+7}}+4\sqrt{\dfrac{x+7}{x}}=4$.

301. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+4}=2$;　　б) $\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}=x$.

302. Прымяніце ўласцівасць аб роўнасці здабытку нулю і рашыце ўраўненне:

а) $(x-5)\sqrt{x-9}=0$;

б) $\left(x^2+6x+8\right)\sqrt{x+3}=0$;

в) $(x-1)\sqrt{x^2-4}=0$.

303*. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1$;

б) $\sqrt{3\cos 2x-1}=\sqrt{2}\sin x$.

304. Прывядзіце левую і правую часткі ўраўнення да ступеней з аднолькавай асновай і рашыце ўраўненне:

а) $3^{2x}=\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$;

б) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x}=(1{,}2)^{x+7}$;

в) $3^{\frac{7x^2-5x}{5}}=\sqrt[5]{9}$.

305. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y=5^{x^2+6x+8}$ і $y=1$.

306. Знайдзіце нуль функцыі $y=\sqrt[3]{1{,}5^{5x}}-3\frac{3}{8}$.

307. Рашыце ўраўненне:

а) $5^x=6$; б) $2{,}9^{x-1}=3$.

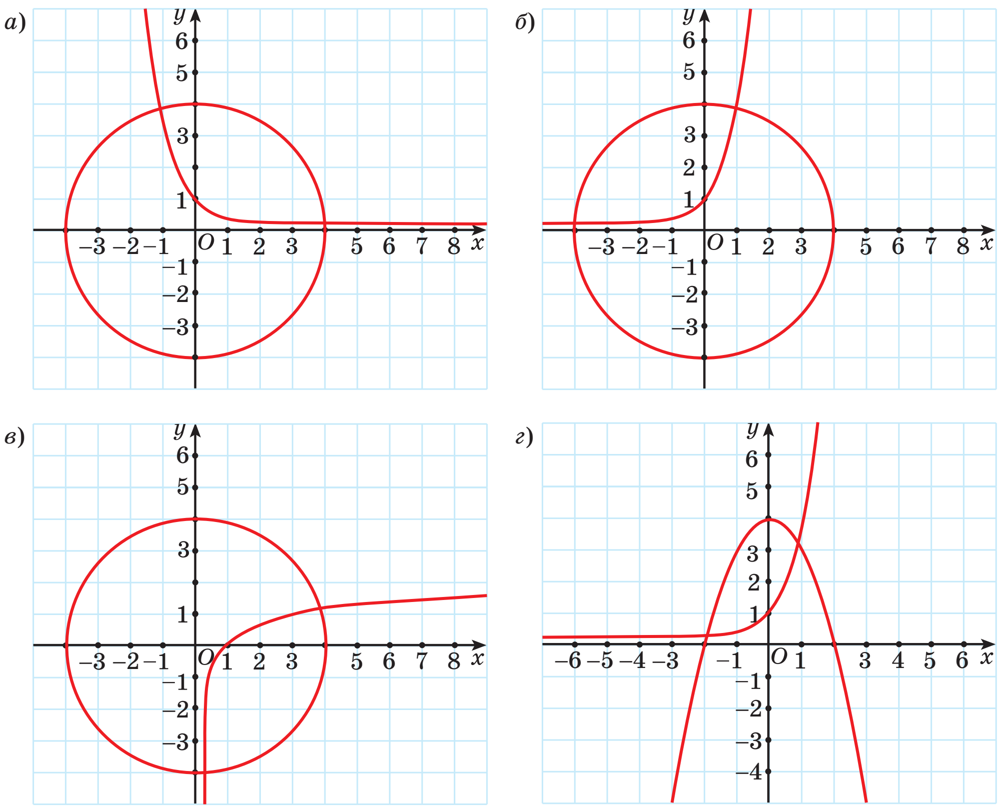
308. Выкарыстайце ўласцівасці ступеней і рашыце ўраўненне:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-2}=2{,}25^4$;

б) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01:\left(10^{1-x}\right)^3$.

309. Рашыце ўраўненне $7^{x+2}+2\cdot 7^{x-1}=345$.

310. Сярод рысункаў 40, *а*—*г* выберыце той, які з'яўляецца графічнай мадэллю сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} y=4^x, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$



Рыс. 40

311. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2^{x-y} = 128, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1} = 0{,}125. \end{cases}$

312. Рашыце паказальную няроўнасць:

а) $7^{3x+1} \geqslant \frac{1}{49}$;   б) $\left(\sqrt{5}\right)^{8x-3} < 0{,}2$;   в) $3^{8-x} \leqslant 1$;

г) $\left(\sqrt[3]{0{,}1}\right)^{4x-1} > 1000$;   д) $5^{x^2+3x} > 125 \cdot 5^x$;   е) $3^{x^2-6x+0{,}5} \leqslant \frac{1}{81\sqrt{3}}$.

313. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt[4]{0{,}25^x - 4 \cdot 0{,}5^x}$.

314. Рашыце няроўнасць:

а) $3^{x+2} - 3^x > 72$;   б) $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} + 4 \cdot 5^{x-1} \leqslant 29$.

315. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 > 0$; б) $5^{x+1} + 5^{1-x} \leqslant 26$.

316. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне, выкарыстаўшы азначэнне лагарыфма:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) = -1$; б) $\lg(x-4) = 2$;

в) $\log_{\sqrt{3}}\left(x^2 - 3x - 7\right) = 2$; г) $\log_5\left(x^2 - 3\right) = 0$.

317. Рашыце ўраўненне:

а) $\log_2(4x-8) = \log_2(3x-5)$;

б) $\log_7\left(x^2 - 9\right) = \log_7(9-2x) + 1$.

318. Выкарыстайце ўласцівасці лагарыфмаў і рашыце ўраўненне:

а) $\log_2(x+3) + \log_2(x+1) = 3$;

б) $\log_8(x-7) = 1 - \log_8 x$;

в) $\log_{0,3}(x-3) + \log_{0,3}(x+3) = \log_{0,3}(7x-1)$;

г) $\log_4(7-x) + \log_4(5+x) = 2 + \log_4(5-x)$.

319. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнне выразу $\log_{25}\log_2(8-x)$ роўна $\frac{1}{2}$.

320. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$;

б) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$;

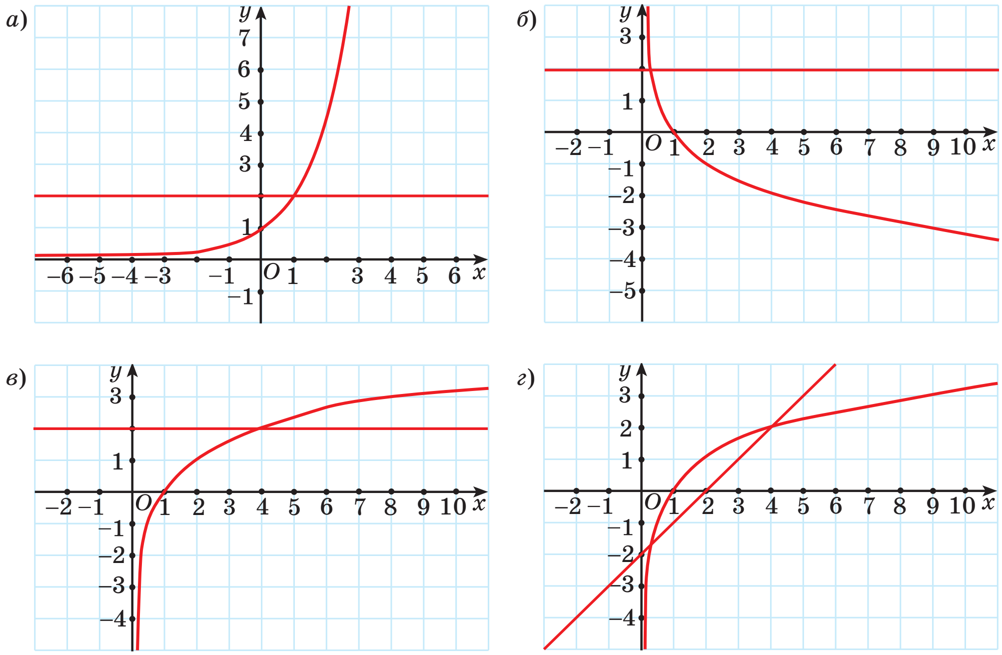
в) $3\log_{27}^2 x + 5\log_{27} x - 2 = 0$;

г) $\lg^2 x + 10\lg x - 11 = 0$.

321. Рашыце лагарыфмічнае ўраўненне:

а) $\log_x\left(4x^2 - 3x\right) = 3$; б) $\log_{5-x}\left(x^2 - 2x + 65\right) = 2$.

322. Сярод рысункаў 41, *а—г* выберыце той, на якім паказана графічная мадэль сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} y = \log_2 x, \\ y = 2. \end{cases}$



Рыс. 41

323. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 5, \\ \log_3 x - \log_3 y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900. \end{cases}$

324. Рашыце няроўнасць, улічыўшы абсяг вызначэння і ўласцівасць манатоннасці лагарыфмічнай функцыі:

а) $\log_4 (2x - 7) < \log_4 (x - 3)$; б) $\log_{\frac{1}{7}} (12 - x) \geqslant \log_{\frac{1}{7}} x^2$.

325. Рашыце няроўнасць, запісаўшы лік у правай яе частцы ў выглядзе лагарыфма ліку па зададзенай аснове:

а) $\log_3 (2x - 4) > 1$; б) $\log_{\frac{1}{2}} (4x + 3) \geqslant -3$;

в) $\log_{0,2} \left(x^2 - 4x\right) \geqslant -1$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 - 2x}{2x - 3} < 1$.

326. Выканайце замену зменнай і рашыце няроўнасць:

а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 \leqslant 0$; б) $\log_2^2 x \geqslant 9$.

327. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы ўласцівасці лагарыфмаў:

а) $\log_6(x+3)+\log_6(x+2)>1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)>\log_{\frac{1}{2}}(x+8)$.

328. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}\log_7(x+6)\geqslant\log_7(3x+1),\\ \log_{0,3}(2x+3)<\log_{0,3}(x-2).\end{cases}$

329. Вядома, што лік $\sqrt{5}$ з'яўляецца рашэннем няроўнасці $\log_a(x+1)>\log_a(7-x)$. Знайдзіце астатнія рашэнні гэтай няроўнасці.

Функцыі і іх уласцівасці

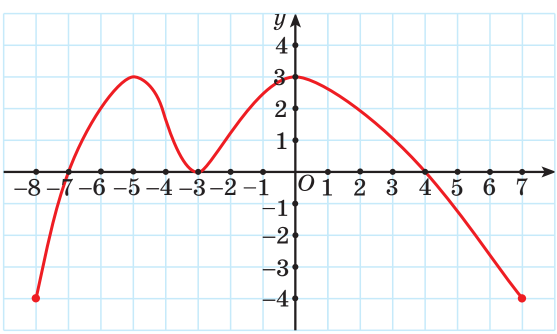
330. Знайдзіце $f(4)$ для функцыі:

а) $f(x)=-x^2+2$; б) $f(x)=\sqrt{x+5}$;

в) $f(x)=-\frac{8}{x}$; г) $f(x)=x^3$.

331. Знайдзіце нулі і прамежкі знакапастаянства функцыі $f(x)=-x^2+2x+3$.

332. З дапамогай рысунка 42, на якім паказаны відарыс графіка функцыі, зададзенай на мностве $[-8; 7]$, знайдзіце:



Рыс. 42

а) абсяг вызначэння функцыі;
б) мноства значэнняў функцыі;
в) нулі функцыі;
г) прамежкі знакапастаянства функцыі;
д) прамежкі манатоннасці функцыі;
е) найбольшае і найменшае значэнні функцыі.

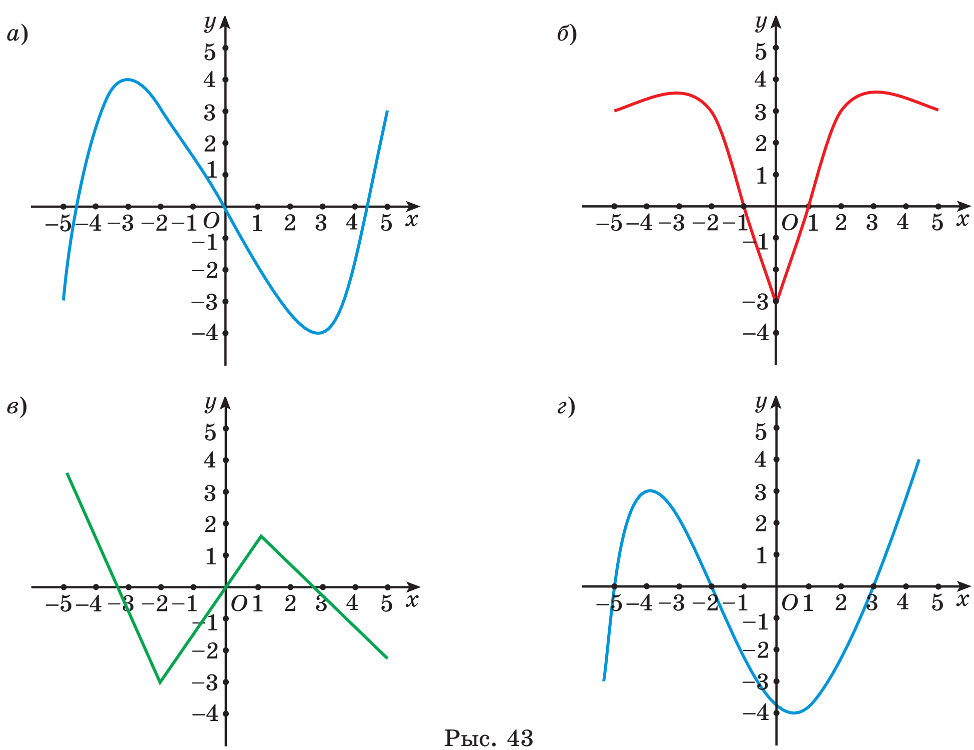
333. Вядома, што функцыя $y = h(x)$ спадае на прамежку $(-3; 8)$. Размясціце ў парадку нарастання значэнні выразаў $h(0)$, $h(-1,7)$ і $h(5,2)$.

334. Як называецца графік ураўнення:

а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$; б) $xy = 4$;
в) $y = -(x + 1)^2 - 5$; г) $x + y = 5$?

Пакажыце відарысы графікаў дадзеных ураўненняў.
Для кожнага ўраўнення адкажыце на пытанне:
1) ці перасякае графік прамую $y = -7$; $x = -15$;
2) ці праходзіць графік праз пачатак каардынат;
3) ці належыць графіку пункт $A(1; 4)$;
4) ці перасякае графік вось абсцыс, калі перасякае, то ў колькіх пунктах;
5) ці сіметрычны графік адносна восі абсцыс; восі ардынат; пачатку каардынат?

335. Сярод рысункаў 43, *а*—*г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка няцотнай функцыі.



Рыс. 43

336. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай і $f(1) = 9$; $f(5) = -8$. Знайдзіце значэнне выразу $f(-1) + f(-5)$.

337. Запішыце ўраўненне парабалы, якую можна атрымаць зрухам парабалы $y = x^2$ уздоўж восі абсцыс на 8 адзінак управа і ўздоўж восі ардынат на 6 адзінак уніз.

338. Дакажыце, што функцыя $f(x) = 5x^4 - 3x^2$ з'яўляецца цотнай.

339. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x + 1|$;

в) $f(x) = |x - 2|$; г) $f(x) = |x| + 3$;

д) $f(x) = |x| - 4$; е) $f(x) = |x + 2| - 5$.

340. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца няцотнай. На рысунку 44 паказаны відарыс графіка гэтай функцыі для $x \geqslant 0$. Пакажыце ў сшытку відарыс графіка дадзенай функцыі для $x \in [-7; 7]$. Знайдзіце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі, на якіх функцыя прымае адмоўныя значэнні;

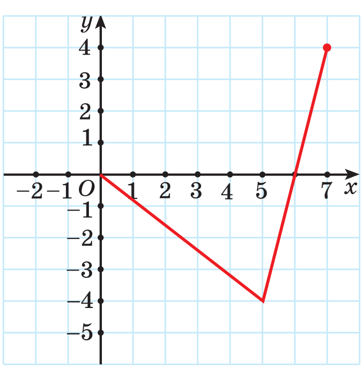
в) прамежкі нарастання функцыі.

341. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца няцотнай. На рысунку 45 паказаны відарыс графіка гэтай функцыі для $x \geqslant 0$. Знайдзіце:

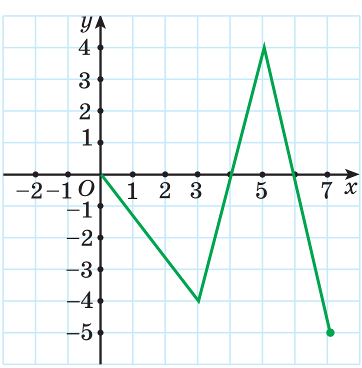
а) $f(-1)$; $f(-5)$; $f(-3)$;

б) лік каранёў ураўнення $f(x) = -2$; $f(x) = 4$;

в) усе цэлыя рашэнні няроўнасці $f(x) \geqslant 1$; $f(x) < -3$.

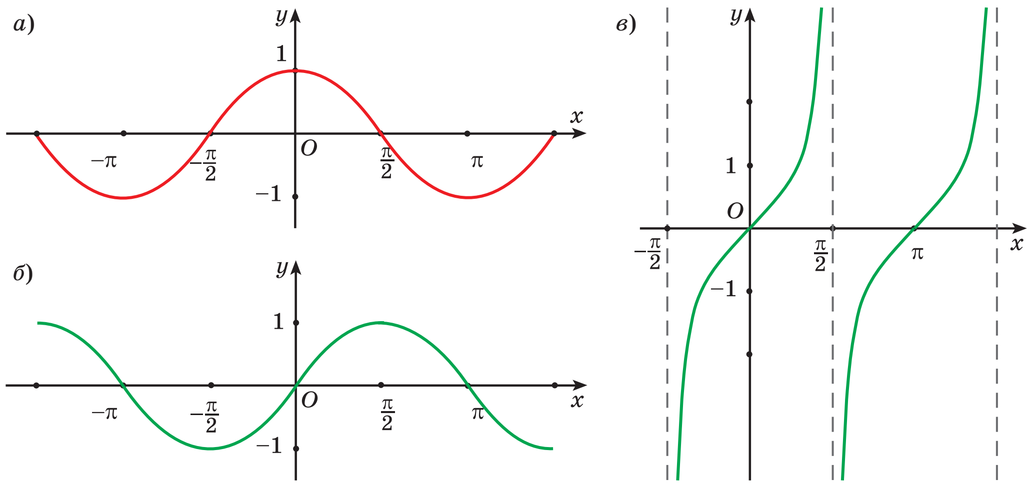


Рыс. 44



Рыс. 45

342. Сярод рысункаў 46, *а*—*в* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $y = \cos x$.



Рыс. 46

343. Вызначце, якія з дадзеных пунктаў належаць графіку функцыі $y = \sin x$:

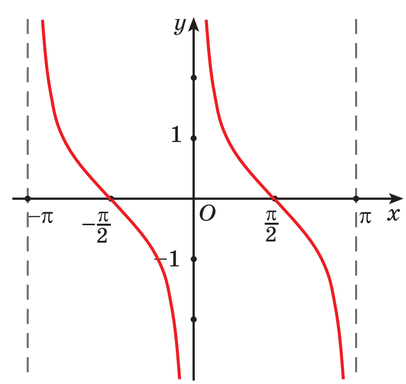
а) $A\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $B\left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $C(3\pi; 0)$; г) $D\left(-\frac{3\pi}{2}; -1\right)$.

344. З дапамогай графіка функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ (рыс. 47) вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным $\frac{\pi}{2}$, значэнне функцыі роўна 0;

б) лікі -2π і π з'яўляюцца нулямі функцыі;

в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.



Рыс. 47

345. Для функцыі $f(x) = \cos x$ знайдзіце:

а) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; б) $f(-2\pi)$;

в) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $f\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$.

346. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \sin x + 2$; б) $y = 3\cos x - 1$.

347. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = 3\cos 5x$; б) $y = 1{,}5\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \cos 8x + 9$; г) $y = -0{,}7\sin\left(x + \frac{\pi}{10}\right) - 1{,}3$.

348. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = -\sin 3x$; б) $g(x) = 5x \cdot \cos 2x$;

в) $h(x) = 5x - \sin x$; г) $p(x) = 5\cos 7x - 1$.

349. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{5}\right) + 1$; г) $y = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

350. Ці праўда, што $\sin x < 0$, калі:

а) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$;

в) $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$; г) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$?

351. Ці праўда, што $\operatorname{ctg} x > 0$, калі:

а) $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;

в) $x \in \left(-3\pi; -\frac{5\pi}{2}\right)$; г) $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$?

352. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos x + 3$; в) $y = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$;

г) $y = \cos x - 1$; д) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3$.

353. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = \cos x$ зрухам яго ўздоўж восі абсцыс на $\frac{\pi}{3}$ адзінкі ўлева і ўздоўж восі ардынат на 2 адзінкі ўніз. Знайдзіце значэнне выразу $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

354. Пабудуйце графік функцыі $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі манатоннасці функцыі;

в) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

г) прамежкі знакапастаянства функцыі.

355. Пабудуйце графік функцыі $y = \cos x - 3$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) прамежкі манатоннасці функцыі;

б) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

в) нулі функцыі;

г) мноства значэнняў функцыі.

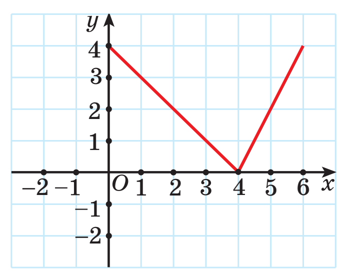
356. Пабудуйце графік функцыі $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі манатоннасці функцыі;

в) прамежкі знакапастаянства функцыі.

357. На рысунку 48 паказаны адрэзак графіка перыядычнай функцыі $y = f(x)$ на адрэзку $[0; 6]$. Вядома, што перыяд функцыі $y = f(x)$ роўны 6. Знайдзіце значэнне выразу $f(-5) + f(24)$.



Рыс. 48

358. Вылічыце вытворную функцыі ў пунктах $x = -2;\ -1;\ 0{,}5;\ 8$:

а) $f(x) = 2x^2 - 1$;

б) $f(x) = -5x - 1$;

в) $f(x) = 2x^3 + 5x$;

г) $f(x) = \frac{6}{x}$.

359. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы правілы дыферэнцыравання:

а) $f(x) = \frac{2}{7}x^7 - 4x^3 + \frac{2}{x}$;

б) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^3 + 8}$;

в) $f(x) = x^3\sqrt{x}$.

$$(U + V)' = U' + V'$$

$$(UV)' = U'V + V'U$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

360. Вылічыце $f'(1)$, калі $f(x) = x^5 + x^4 - \frac{1}{x}$.

361. Знайдзіце $f'(2)$, калі:

а) $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x^7}{7}$; б) $f(x) = 8x^2\left(3 - \sqrt{x}\right)$; в) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 + 3}$.

362. Рашыце няроўнасць $f'(x) \leqslant 0$, калі $f(x) = 3x - x^2 - \frac{x^3}{3}$.

363. Рашыце няроўнасць $f'(x) < 0$, калі $f(x) = 5x^2 - 2x$.

364. Рашыце няроўнасць $f'(x) \geqslant 0$, калі $f(x) = (3x - 1)^2$.

365. Рашыце няроўнасць $f'(x) > 0$, калі $f(x) = (x + 4)(x - 5)^2$.

366. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$, калі $f(x) = 3x + \frac{9}{x}$.

367. На рысунку 49 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$ на прамежку $[-7; 7]$. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх $f'(x) = 0$ на зададзеным прамежку.

368. Знайдзіце тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = 3x^2 - 8x + 7$ у пункце з абсцысай $x_0 = 1$.

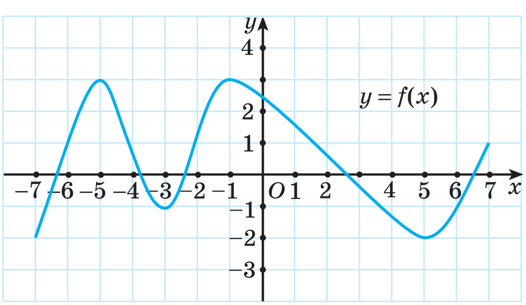
$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)}$

369. Знайдзіце тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 8$ у пункце з абсцысай $x_0 = 2$.

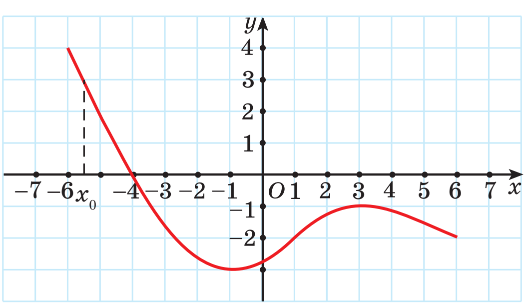
370. Знайдзіце тангенс вугла, утворанага датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ у пункце з абсцысай $x_0 = 2$ і воссю абсцыс.

371. На рысунку 50 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Выберыце правільнае сцверджанне:

а) $f'(x_0) > 0$; б) $f'(x_0) < 0$; в) $f'(x_0) = 0$; г) $f'(x_0) = 2$.



Рыс. 49



Рыс. 50

372. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = 5x - 1 - 2x^2$ у пункце з абсцысай $x_0 = 1$.

373. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ у пункце з абсцысай $x_0 = 3$.

374. Датычная да графіка функцыі $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5$ паралельна восі абсцыс. Знайдзіце абсцысы пунктаў дотыку.

375. Датычная да графіка функцыі $f(x) = 3x^2 - 7$ паралельна прамой $y = 12x - 3$. Знайдзіце абсцысу пункта дотыку.

376. Датычная да крывой $y = -3x^2 + 2\sqrt{3}x + 6$ утварае з воссю абсцыс вугал $60°$. Знайдзіце абсцысу пункта дотыку.

377. Знайдзіце, пад якімі вугламі перасякаецца з воссю абсцыс графік функцыі $y = x^2 + x$.

378. Закон руху зададзены функцыяй:

а) $s(t) = 5t + 3$; б) $s(t) = t^2 + 4$.

Знайдзіце скорасць руху ў момант часу $t = 2$.

379. Цела рухаецца па законе $s(t) = t^3 - t^2 + 5t$ (s вымяраецца ў метрах, t — у секундах). Знайдзіце скорасць цела праз 3 с пасля пачатку руху.

380. Рух пункта адбываецца па законе $s(t) = t^2 + 4t + 2$ (s вымяраецца ў метрах, t — у секундах). Знайдзіце, у які момант часу скорасць руху пункта роўна 8 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

381. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання, пункты мінімуму і максімуму функцыі $f(t) = x^3 - 6x^2 - 15x + 8$.

382. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання, пункты мінімуму і максімуму функцыі $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 9$.

383. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $\frac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant 0$, дзе $f(x) = 8x - x^2$, $g(x) = 12x - x^3$.

384. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = x^2(x - 1)$ на адрэзку $[0,5; 1]$.

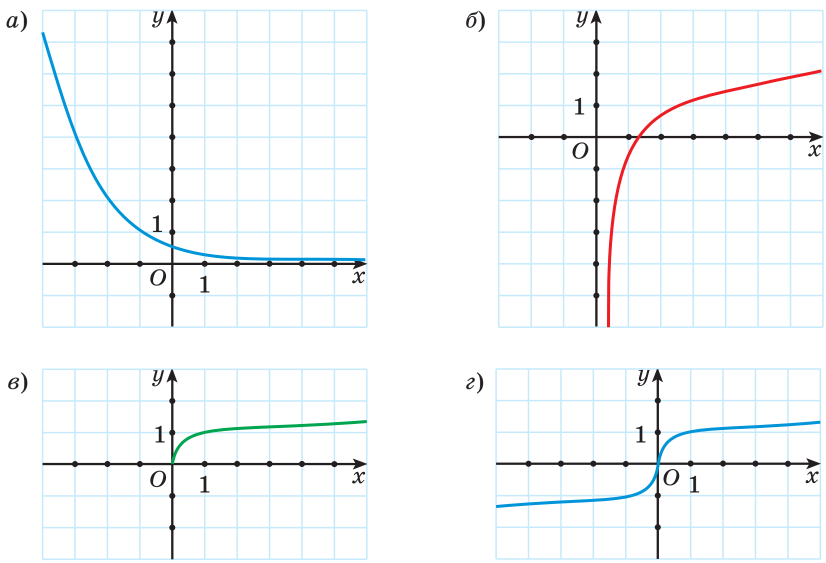
385. Да графіка функцыі $f(x) = 3x - x^2$ праведзены дзве датычныя. Першая датычная праведзена ў пункце на графіку з абсцысай $x_0 = 2$, другая — у пункце максімуму дадзенай функцыі. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, утворанага воссю ардынат і гэтымі датычнымі.

386. Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$; б) $f(x) = 2x^2 - x^3 - x$;

в) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$; г) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x + 4$.

387. Сярод рысункаў 51, *а—г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $f(x) = \sqrt[5]{x}$.



Рыс. 51

388. Выберыце пункты, якія належаць графіку функцыі $y = \sqrt[3]{x}$:

а) $A(8;\ 2)$; б) $B\left(\frac{1}{27};\ \frac{1}{3}\right)$; в) $C(-1;\ 1)$;

г) $D(0{,}001;\ 0{,}1)$; д) $E(125;\ -5)$; е) $F\left(5;\ \sqrt[3]{5}\right)$.

389. Для функцыі $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ знайдзіце $f(0)$; $f(1)$; $f(-7)$; $f\left(1\frac{1}{216}\right)$; $f\left(1 - 3\sqrt{3}\right)$.

390. Для функцыі $f(x) = \sqrt[4]{x}$ знайдзіце значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна 0; 1; $\frac{1}{3}$; $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[4]{2}$. Ці можа дадзеная функцыя прымаць значэнне, роўнае -16?

391. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[4]{8 - 5x}$;

б) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[5]{4x + 1}}$;

в) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[8]{x^2 - 25}}$;

г) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x - 2}{x + 3}}$;

д) $f(x) = \dfrac{\sqrt[7]{x + 5}}{\sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}}$;

е) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 5x + 4} - \sqrt[10]{x^2 + x}$.

392. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[6]{x} - 5$;

б) $f(x) = \sqrt[4]{x - 1} + 9$.

393. Вызначце, якія з дадзеных функцый з'яўляюцца цотнымі, а якія — няцотнымі:

а) $f(x) = \sqrt[6]{x}$;

б) $f(x) = \sqrt[5]{x}$;

в) $f(x) = \sqrt[10]{|x| - 5}$;

г) $f(x) = \sqrt[7]{|x| + 1}$.

Якую ўласцівасць мае графік цотнай функцыі?

394. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{x + 3} + 1$.

395. Пабудуйце графік функцыі:

а) $g(x) = \sqrt[4]{x}$;

б) $g(x) = \sqrt[4]{x + 3}$;

в) $g(x) = \sqrt[4]{x} + 3$;

г) $g(x) = \sqrt[4]{x - 2} - 3$.

396. Ступенная функцыя зададзена формулай $f(x) = x^{-\frac{4}{5}}$. Знайдзіце:

а) $f(1)$;

б) $f(32)$;

в) $f(0{,}00001)$;

г) $f\left(\sqrt[4]{2}\right)$.

397. Вызначце, праз які з дадзеных пунктаў праходзіць графік функцыі $y = x^{\frac{2}{3}}$:

а) $(-8;\ 4)$;

б) $(4;\ 8)$;

в) $\left(2\sqrt{2};\ 2\right)$;

г) $\left(2;\ 2\sqrt{2}\right)$.

398. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = (x+3)^{-3,1}$; б) $y = (5-x)^{\frac{1}{7}}$;

в) $y = \left(x^2 - 4\right)^{-\frac{3}{11}}$; г) $y = \left(\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x+2}\right)^{\sqrt{2}}$.

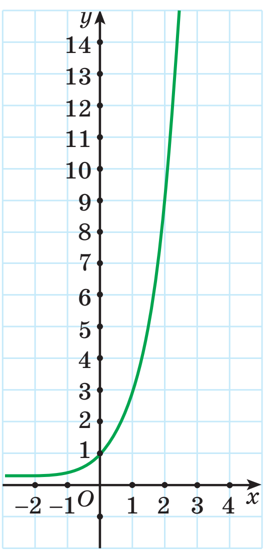
399. Пакажыце схематычна відарыс графіка функцыі:

а) $f(x) = x^{0,5}$; б) $g(x) = x^{-\frac{7}{3}}$.

400. Паказальная функцыя зададзена формулай $f(x) = 10^x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(-3)$; в) $f(0)$;

г) $f(5)$; д) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $f(\lg 3)$.



Рыс. 52

401. Выберыце функцыю, відарыс графіка якой паказаны на рысунку 52:

а) $y = x^3$;
б) $y = 3^x$;
в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;
г) $y = \frac{x}{3}$.

402. Функцыя зададзена формулай $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$.

а) Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў дадзенай функцыі.

б) Пабудуйце графік дадзенай функцыі.

в) Знайдзіце $f(1)$; $f(-2)$; $f(1,5)$.

г) Вызначце, у якіх пунктах графік функцыі $y = f(x)$ перасякае вось абсцыс; вось ардынат.

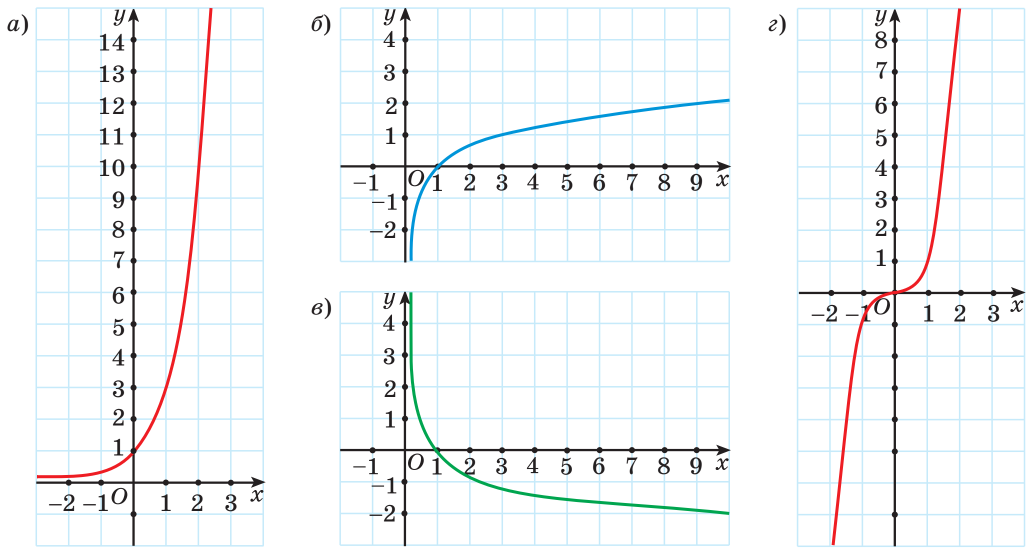
д) Знайдзіце абсцысу пункта перасячэння графіка дадзенай функцыі і прамой $y = \sqrt{2}$.

е) Знайдзіце найменшае і найбольшае значэнні дадзенай функцыі на адрэзку [–2; 3].

ж) Знайдзіце корань ураўнення $f(x) = \sqrt[5]{2}$.

з) Рашыце няроўнасць $f(x) < 0,125$.

403. Сярод рысункаў 53, *а—г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $y = \log_3 x$.



Рыс. 53

404. Выберыце функцыі, графікі якіх праходзяць праз пункт (0; 1):

а) $y = \cos x$; б) $y = \log_2 x$; в) $y = 5^x$;

г) $y = x - 1$; д) $y = \frac{1}{x}$.

405. Лагарыфмічная функцыя зададзена формулай $f(x) = \log_5 x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(5)$; в) $f(\sqrt{5})$;

г) $f(25\sqrt[4]{5})$; д) $f(0{,}2)$; е) $f\left(\frac{1}{5\sqrt[3]{5}}\right)$.

406. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат:

а) $y = \lg(x + 10) - 7$; б) $y = \log_2(x + 13) - \log_2 6{,}5$.

407. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \lg(x^2 - 9x + 8)$; б) $y = \log_2 \frac{3 - x}{x + 7}$;

в) $y = \log_{x-1}(5 - x)$; г) $y = \log_{7-x}(x^2 - 4)$.

408. Функцыя зададзена формулай $f(x) = \log_2(x + 3)$.

а) Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі.

б) Пабудуйце графік дадзенай функцыі.

в) Знайдзіце $f(1)$; $f(-2)$; $f(29)$.

г) Вызначце, у якіх пунктах графік функцыі $y = f(x)$ перасякае вось абсцыс; вось ардынат.

д) Знайдзіце абсцысу пункта перасячэння графіка дадзенай функцыі і прамой $y = -5$.

е) Знайдзіце найменшае і найбольшае значэнні дадзенай функцыі на адрэзку $[-1; 5]$.

ж) Знайдзіце корань ураўнення $f(x) = 3$.

з) Рашыце няроўнасць $f(x) < -2$.

409. З прапанаваных функцый выберыце ўсе цотныя функцыі:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$;

г) $y = x^6$; д) $y = 4^x$.

410. З прапанаваных функцый выпішыце функцыі, якія спадаюць на абсягу вызначэння:

а) $y = 3^x$; б) $y = \log_{0,9} x$; в) $y = \sqrt{x}$;

г) $y = x^3$; д) $y = -2x + 1$.

411. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt[8]{6x - 1} + \log_3(4 - x)$.

412. Знайдзіце $f(2)$ для функцыі:

а) $f(x) = -x^2 - 1$; б) $f(x) = \sqrt{6 - x}$;

в) $f(x) = -\frac{10}{x}$; г) $f(x) = x^3$.

413. Знайдзіце нулі і прамежкі знакапастаянства функцыі $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

414. З дапамогай рысунка 54, на якім паказаны відарыс графіка функцыі, зададзенай на мностве $[-6; 10]$, знайдзіце:

а) абсяг вызначэння функцыі;

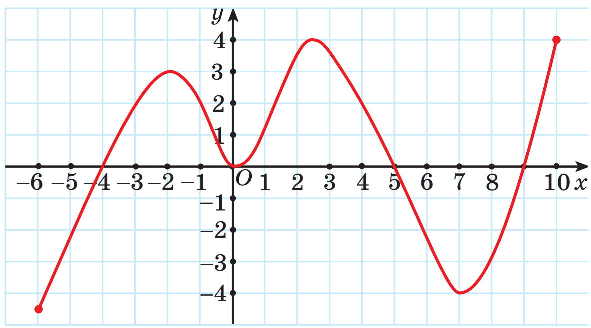
б) мноства значэнняў функцыі;

в) нулі функцыі;

г) прамежкі знакапастаянства функцыі;

д) прамежкі манатоннасці функцыі;

е) найбольшае і найменшае значэнні функцыі.



Рыс. 54

415. Вядома, што функцыя $y = h(x)$ спадае на прамежку $(-3; 8)$. Размясціце ў парадку нарастання значэнні выразаў $h(2)$, $h(-3,7)$ і $h(7,9)$.

416. Як называецца графік ураўнення:

а) $y = x^2 - 4$; б) $xy = -12$;

в) $5x - y = 3$; г) $x^2 + y^2 = 16$?

Пакажыце відарысы графікаў дадзеных ураўненняў.
Для кожнага ўраўнення адкажыце на пытанне:

1) ці перасякае графік прамую $y = 99$; $x = -77$;

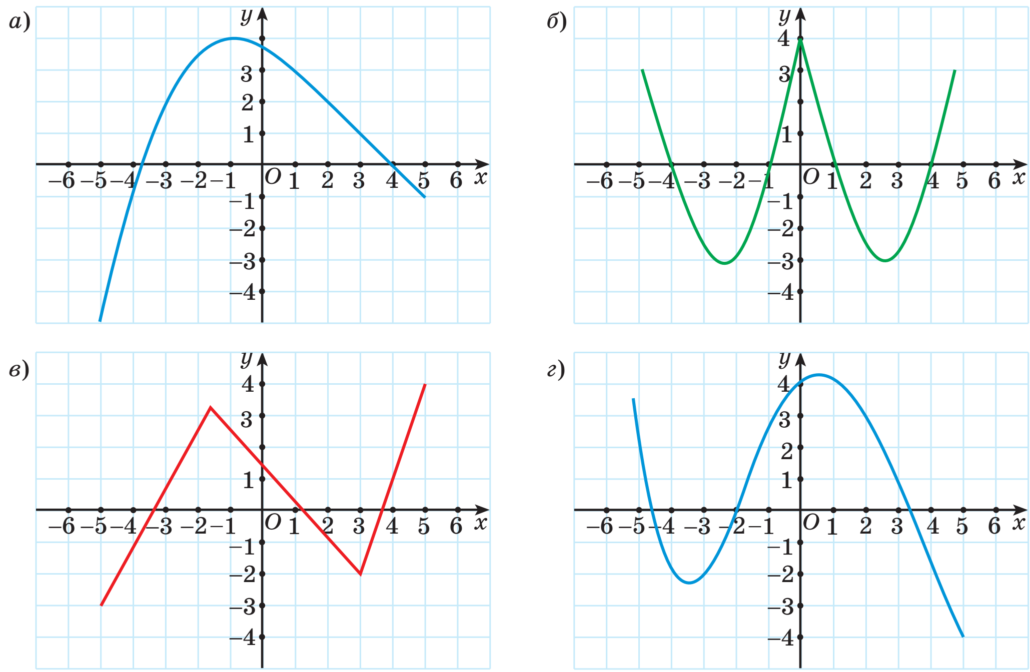
2) ці праходзіць графік праз пачатак каардынат;

3) ці належыць графіку пункт $A(0; -4)$;

4) ці перасякае графік вось абсцыс, калі перасякае, то ў колькіх пунктах;

5) ці сіметрычны графік адносна восі абсцыс; восі ардынат; пачатку каардынат?

417. Сярод рысункаў 55, *а*—*г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка цотнай функцыі.



Рыс. 55

418. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай і $f(2) = -6$; $f(-3) = 10$. Знайдзіце значэнне выразу $f(-2) + f(3)$.

419. Запішыце ўраўненне парабалы, якую можна атрымаць зрухам парабалы $y = x^2$ уздоўж восі абсцыс на 2 адзінкі ўлева і ўздоўж восі ардынат на 5 адзінак уверх.

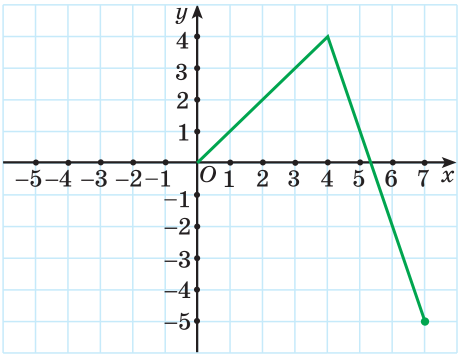
420. Дакажыце, што функцыя $f(x) = x^6 - 2x^2$ з'яўляецца цотнай.

421. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

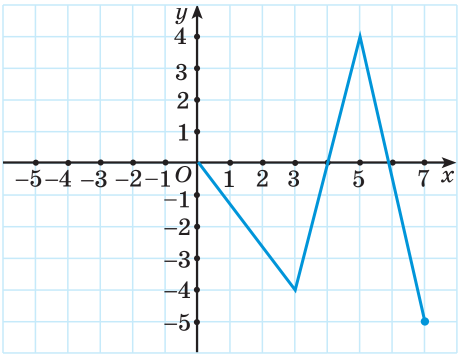
а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x - 1|$; в) $f(x) = |x + 2|$;

г) $f(x) = |x| - 3$; д) $f(x) = |x| + 4$; е) $f(x) = |x - 2| + 5$.

422. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца няцотнай. На рысунку 56 паказаны відарыс графіка гэтай функцыі для $x \geqslant 0$. Пакажыце ў сшытку відарыс графіка дадзенай функцыі для $x \in [-7; 7]$. Знайдзіце:



Рыс. 56



Рыс. 57

а) нулі функцыі;

б) прамежкі, на якіх функцыя прымае дадатныя значэнні;

в) прамежкі спадання функцыі.

423. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай. На рысунку 57 паказаны відарыс графіка гэтай функцыі для $x \geqslant 0$. Знайдзіце:

а) $f(-1)$; $f(-5)$; $f(-3)$;

б) лік каранёў ураўнення $f(x) = -2$; $f(x) = 4$;

в) усе цэлыя рашэнні няроўнасці $f(x) \geqslant 1$; $f(x) < -3$.

424. Вызначце, якія з дадзеных пунктаў належаць графіку функцыі $y = \cos x$:

а) $A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

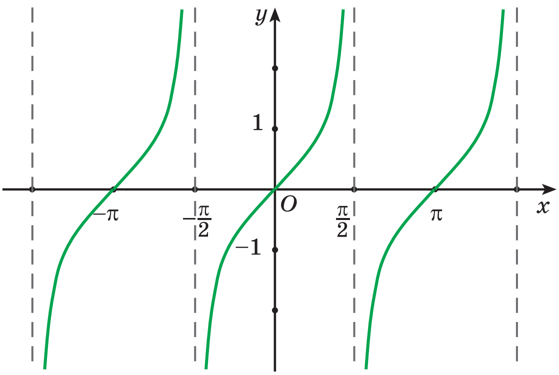
б) $B\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

в) $C\left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

г) $D(3\pi; -1)$.

425. З дапамогай графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ (рыс. 58) вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным $\frac{\pi}{4}$, значэнне функцыі роўна 1;



Рыс. 58

б) лікі $-\pi$ і 2π з'яўляюцца нулямі функцыі;

в) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$.

426. Для функцыі $f(x) = \sin x$ знайдзіце:

а) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; б) $f(-3\pi)$; в) $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$; г) $f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$.

427. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \cos x - 5$; б) $y = 2\sin x + 7$.

428. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = 5\sin 8x$; б) $y = 2{,}5\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$;

в) $y = \sin 5x - 2$; г) $y = -1{,}2\cos\left(x - \frac{\pi}{15}\right) + 3{,}8$.

429. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = \cos 3x$; б) $g(x) = x \cdot \sin 2x$;

в) $h(x) = 5x^2 + \cos x$; г) $p(x) = \sin\frac{x}{5} - x$.

430. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \cos 3x$; б) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 1$; г) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{3}$.

431. Ці праўда, што $\cos x > 0$, калі:

а) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$?

432. Ці праўда, што $\operatorname{tg} x < 0$, калі:

а) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right)$;

в) $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right)$; г) $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$?

433. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \sin x + 2$; в) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$;

г) $y = \sin x - 1$; д) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

434. Пабудуйце графік функцыі $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі манатоннасці функцыі;

в) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

г) прамежкі знакапастаянства функцыі.

435. Пабудуйце графік функцыі $y = \sin x - 3$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) прамежкі манатоннасці функцыі;

б) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

в) нулі функцыі;

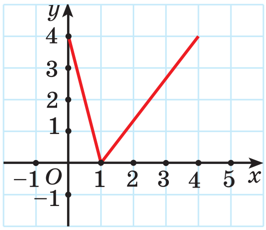
г) мноства значэнняў функцыі.

436. Пабудуйце графік функцыі $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі манатоннасці функцыі;

в) прамежкі знакапастаянства функцыі.



Рыс. 59

437. На рысунку 59 паказаны відарыс графіка перыядычнай функцыі $y = f(x)$ на адрэзку $[0; 4]$. Вядома, што перыяд функцыі $y = f(x)$ роўны 4. Знайдзіце значэнне выразу $f(-1) + f(12)$.

438. Вылічыце вытворную функцыі ў пунктах $x = -3$; 0; 1,5; 9:

а) $f(x) = x^2 - 2x$; б) $f(x) = -\frac{4}{x}$.

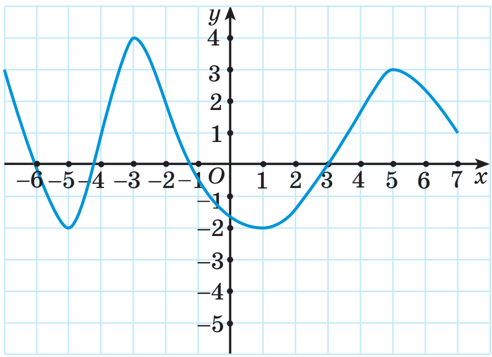
439. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы правілы дыферэнцыравання:

а) $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x$; б) $f(x) = \sqrt{x}(x + 6)$; в) $f(x) = \frac{2x + 8}{x - 3}$.

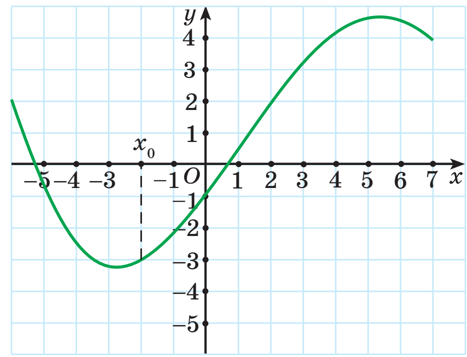
440. Рашыце няроўнасць $f'(x) \geqslant 0$, калі $f(x) = 4x^2 - 3x$.

441. Рашыце няроўнасць $f'(x) \leqslant 0$, калі $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + x$.

442. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$, калі $f(x) = x + \frac{6}{x}$.



Рыс. 60



Рыс. 61

443. На рысунку 60 паказаны відарыс графіка функцыі $y = (x)$ на прамежку $[-7;\ 7]$. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх $f'(x) = 0$ на зададзеным прамежку.

444. Знайдзіце тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ у пункце з абсцысай $x_0 = 1$.

445. На рысунку 61 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Выберыце правільнае сцверджанне:

а) $f'(x_0) > 0$; б) $f'(x_0) < 0$; в) $f'(x_0) = 0$; г) $f'(x_0) = -2$.

446. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{x^2}{2} - 7x$ у пункце з абсцысай $x_0 = -1$.

447. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = 5 - 3x^2 - 12x$ у пункце з абсцысай $x_0 = 1$.

448. Знайдзіце тангенс вугла, утворанага датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ у пункце з абсцысай $x_0 = 1$ і воссю абсцыс.

449. Закон руху зададзены функцыяй $s(t) = t^2 + 3$. Знайдзіце скорасць руху ў момант часу $t = 5$.

450. Цела рухаецца па законе $s(t) = t^3 + 9t^2 + 12t$ (s вымяраецца ў метрах, t — у секундах). Знайдзіце скорасць цела праз 2 с пасля пачатку руху.

451. Рух пункта адбываецца па законе $s(t) = t^2 - 6t + 8$ (s вымяраецца ў метрах, t — у секундах). Знайдзіце, у які момант часу скорасць руху пункта роўна 9 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

452. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання, пункты мінімуму і максімуму функцыі $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 5x - 10$.

453. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання, пункты мінімуму і максімуму функцыі $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2{,}5x^2 - 14x - 9$.

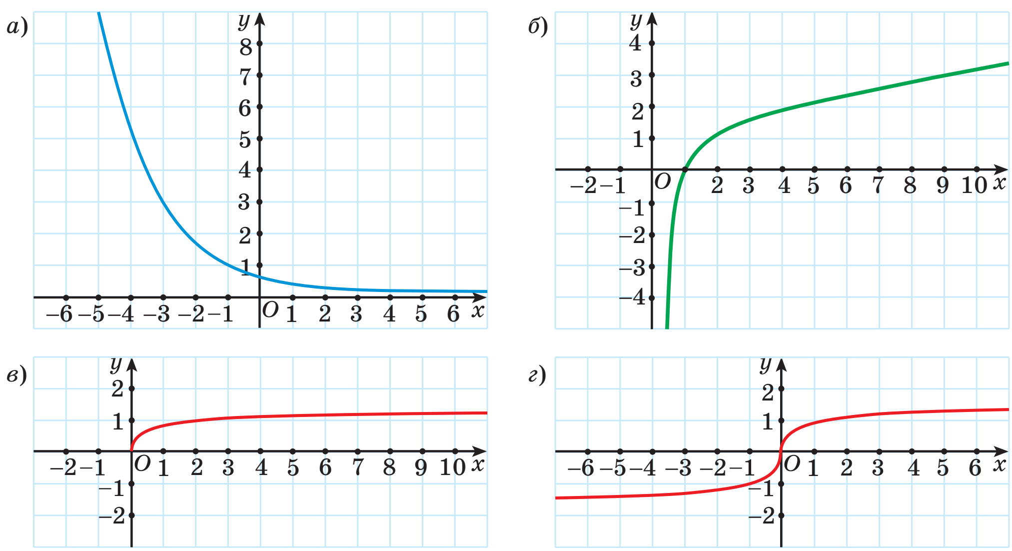
454. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\frac{f'(x)}{g'(x)} \geqslant 0$, дзе $f(x) = 16x - 2x^2$, $g(x) = 24x - 2x^3$.

455. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = x^2(x^2 + x)$ на адрэзку $[-0{,}5;\ 1]$.

456. Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік.

а) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$; б) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

457. Сярод рысункаў 62, *а*—*г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $f(x) = \sqrt[4]{x}$.



Рыс. 62

458. Для функцыі $h(x) = \sqrt[5]{x} - 3$ знайдзіце $h(0)$; $h(-1)$; $h\left(\frac{1}{32}\right)$; $h(0{,}00243)$; $h\left(-25\sqrt{5}\right)$.

459. Для функцыі $f(x) = \sqrt[3]{x}$ знайдзіце значэнне аргумента, пры якім $f(x) = -1$; $f(x) = 2$; $f(x) = \frac{1}{5}$; $f(x) = -\sqrt[3]{2}$.

460. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[6]{x - 7}$;

б) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[5]{5 - 6x}}$;

в) $f(x) = \dfrac{6x}{\sqrt[4]{x^2 - 3x}}$;

г) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 7x + 6} - \sqrt[10]{x^2 - 1}$.

461. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[8]{x} + 3$;

б) $f(x) = \sqrt[6]{x - 5} - 7$.

462. Вызначце, якія з дадзеных функцый з'яўляюцца цотнымі, а якія — няцотнымі:

а) $f(x) = \sqrt[10]{x}$; б) $f(x) = \sqrt[9]{x}$;

в) $f(x) = \sqrt[8]{|x| + 7}$; г) $f(x) = \sqrt[13]{|x| - 3}$.

Якую ўласцівасць мае графік няцотнай функцыі?

463. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2} + 3$.

464. Ступенная функцыя зададзена формулай $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$. Знайдзіце:

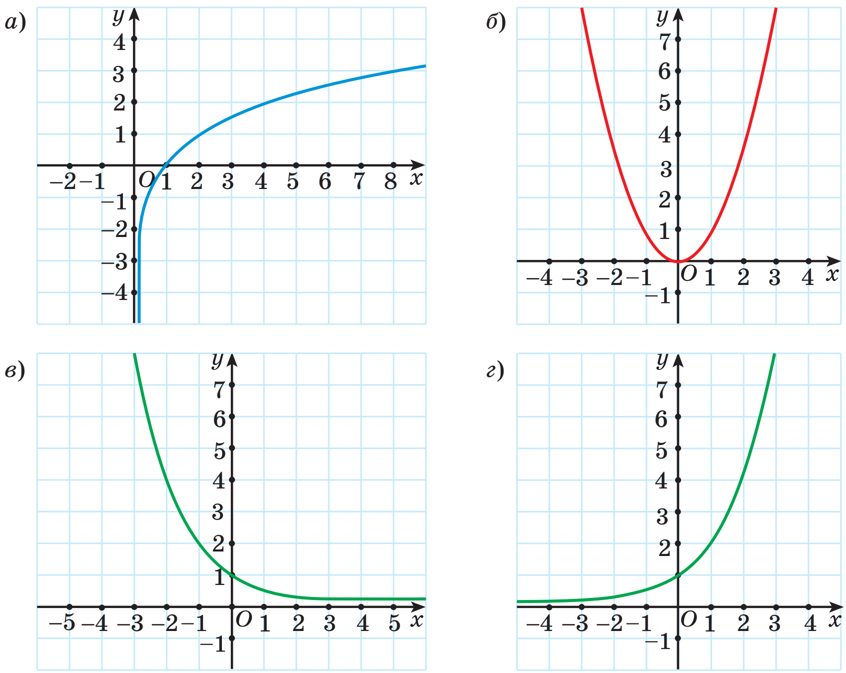
а) $f(1)$; б) $f(27)$; в) $f\left(\dfrac{1}{125}\right)$; г) $f(1000)$.

465. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = (x - 9)^{0,3}$; б) $y = (2x + 7)^{-\frac{5}{7}}$;

в) $y = \left(x^2 + x - 6\right)^{\sqrt{5}}$; г) $y = \left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^{-\sqrt{10}}$.

466. Сярод рысункаў 63, *а—г* выберыце той, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $y = 2^x$.



Рыс. 63

467. Паказальная функцыя зададзена формулай $f(x) = 7^x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(-2)$; в) $f(0)$;

г) $f(-1)$; д) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; е) $f(\log_7 5)$.

468. Функцыя зададзена формулай $f(x) = 3^{x+1}$.

а) Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі.

б) Пабудуйце графік дадзенай функцыі.

в) Знайдзіце $f(1)$; $f(-2)$; $f(-0{,}5)$.

г) Вызначце, у якіх пунктах графік функцыі $y = f(x)$ перасякае вось абсцыс; вось ардынат.

д) Знайдзіце абсцысу пункта перасячэння графіка дадзенай функцыі і прамой $y = \sqrt[4]{3}$.

е) Знайдзіце найменшае і найбольшае значэнні дадзенай функцыі на адрэзку $[1;\ 2]$.

ж) Знайдзіце корань ураўнення $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$.

з) Рашыце няроўнасць $f(x) > \frac{1}{81}$.

469. Лагарыфмічная функцыя зададзена формулай $f(x) = \lg x$. Знайдзіце:

а) $f(1)$; б) $f(10)$; в) $f\left(\sqrt[3]{10}\right)$;

г) $f(0{,}1)$; д) $f(0{,}001)$; е) $f\left(\frac{1}{10\sqrt[4]{10}}\right)$.

470. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат:

а) $y = \log_5(x+1) - 8$; б) $y = \log_3(x+5) + \log_3 0{,}6$.

471. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \lg\left(x^2 + 6x\right)$; б) $y = \log_2 \frac{x+5}{6-x}$;

в) $y = \log_{x+2}(7-x)$; г) $y = \log_{3-x}\left(x^2 - 2x\right)$.

472. Функцыя зададзена формулай $f(x) = \log_3(x-1)$.

а) Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі.

б) Пабудуйце графік дадзенай функцыі.

в) Знайдзіце $f(2)$; $f(4)$; $f(28)$.

г) Вызначце, у якім пункце графік функцыі $y = f(x)$ перасякае вось абсцыс.

д) Знайдзіце абсцысу пункта перасячэння графіка дадзенай функцыі і прамой $y = 2$.

е) Знайдзіце найменшае і найбольшае значэнні дадзенай функцыі на адрэзку $[2;\ 10]$.

ж) Знайдзіце корань ураўнення $f(x) = -3$.

з) Рашыце няроўнасць $f(x) \leqslant 1$.

473. З прапанаваных функцый выберыце ўсе няцотныя:

а) $y = \sin x$; б) $y = \lg x$; в) $y = -\frac{5}{x}$;

г) $y = 7^x$; д) $y = \operatorname{ctg} x$.

474. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt[4]{3x+1} + \log_2(3-x)$.

ТЭМАТЫЧНЫЯ ТЭСТЫ

Тэст 1. Прымяненне ўласцівасцей ступені і кораня для пераўтварэння выразаў

Умовы	Варыянты адказаў
1. Знайдзіце значэнне выразу $81^{0,75} \cdot 32^{-0,4} - 8^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} + 256^{0,5}$.	а) 23,5; б) 22; в) 18; г) 19,5; д) 27.
2. Запішыце выраз $\dfrac{x\sqrt[5]{x^2}}{(\sqrt[10]{x})^2}$ у выглядзе ступені з рацыянальным паказчыкам.	а) $x^{\frac{8}{5}}$; б) $x^{\frac{7}{2}}$; в) $x^{\frac{6}{5}}$; г) $x^{\frac{5}{6}}$; д) x.
3. Вядома, што значэнне выразу $\dfrac{\sqrt[7]{a^7} - \sqrt[6]{a^6}}{-2a}$ роўна –1. Тады a прымае любое значэнне з прамежку ...	а) $(0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)$; г) $(-\infty; 0]$; д) $(-\infty; +\infty)$.
4. Вынесіце множнік з-пад знака кораня ў выразе $\sqrt[4]{-a^{11}}$.	а) $a^8\sqrt[4]{-a^3}$; б) $-a^2\sqrt[4]{a^3}$; в) $a^2\sqrt[4]{a^3}$; г) $-a^2\sqrt[4]{-a^3}$; д) $a^2\sqrt[4]{-a^3}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
5. Скараціце дроб $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}b^{-1} - a}$ і вылічыце яго значэнне пры $a = 0{,}25$ і $b = \frac{1}{3}$.	а) $-2{,}5$; б) -3; в) $-3{,}5$; г) -4; д) $-4{,}5$.
6. Размясціце лікі $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ і $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ у парадку нарастання.	а) $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$; $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$; б) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$; $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$; $-\sqrt[3]{7}$; в) $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$; г) $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$; $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$; д) $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$; $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$.
7. Унясіце множнік пад знак кораня ў выразе $-y\sqrt[6]{-y^7}$.	а) $\sqrt[6]{-y^8}$; б) $-\sqrt[6]{-y^{13}}$; в) $\sqrt[6]{y^{13}}$; г) $\sqrt[6]{-y^{13}}$; д) $-\sqrt[6]{y^{13}}$.
8. Скараціце дроб $\dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 6}$.	а) $\dfrac{\sqrt{3} - 2}{3}$; б) $\dfrac{7}{6}$; в) $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{3}$; г) $\sqrt{3}$; д) $-4\sqrt{3}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
9. Раскладзіце на множнікі выраз $x - y + \sqrt{-x} + \sqrt{-y}$.	а) $\left(\sqrt{-x} + \sqrt{-y}\right)\left(\sqrt{-x} - \sqrt{-y} + 1\right)$; б) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{-y} - \sqrt{-x} + 1\right)$; в) $\left(\sqrt{-x} + \sqrt{-y}\right)\left(\sqrt{-y} - \sqrt{-x} + 1\right)$; г) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y} - \sqrt{x} + 1\right)$; д) $\left(\sqrt{-x} + \sqrt{-y}\right)\sqrt{-y}$.
10. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{25a^2} + \sqrt[3]{64a^3} - \sqrt[4]{16a^4} - \sqrt[6]{676}$ пры $a = \sqrt[3]{26} - 3$.	
11. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot \left(\sqrt{6} + 11\right)$.	
12. Спрасціце выраз $\left(\frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27}}{3-\sqrt{3}} + \frac{1+3^{-0,5}}{3^{-0,25}}\right)^2 \cdot \left(4 - \frac{6}{\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{3} - 3\right)$.	
13. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \sqrt[5]{49\sqrt{7}} + \sqrt{19 - 4\sqrt{21}}}\right)^2$.	
14. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\right) \cdot A$, дзе $A = \frac{x + 6\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x}+1} - \frac{x + 6\sqrt{x-1} + 4}{\sqrt{x-1}+1}$.	
15. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{10a + 2\sqrt{25a^2 - b^2}} - \sqrt{10a - 2\sqrt{25a^2 - b^2}} - 2\sqrt{5a - b}$ пры $a = \sqrt{2},\ b = \sqrt[3]{3}$.	

Тэст 2. Ірацыянальныя ўраўненні

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце ўраўненне, коранем якога з'яўляецца лік 5: 1) $\sqrt{x+5}=0$; 2) $\sqrt[3]{x}=\frac{1}{5}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5-x}}=0$; 4) $\sqrt{2x-9}=1$; 5) $\sqrt[5]{x}=1$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sqrt{x-2}=x-2$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
3. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$.	а) 4; б) 8; в) 9; г) 10; д) -5.
4. Рашыце ўраўненне $3x^2-5(\sqrt{x})^2-2=0$.	а) $-\frac{1}{3}$; 2; б) 2; в) -2; $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) 4.
5. Рашыце ўраўненне $4\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[3]{x}=4$.	а) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) -2; 2; в) $\sqrt[3]{2}$; г) $4\sqrt[3]{2}$; д) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
6. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $x^2 - 8x + 11 = 6\sqrt{x^2 - 8x + 3}$.	а) 13; б) 8; в) 16; г) –5,7; д) 64.
7. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $(x^2 - 5x) \cdot \sqrt{x - 3} = 0$.	а) $2\frac{2}{3}$; б) –1; в) 0; г) 3; д) 4.
8. Знайдзіце лік каранёў ураўнення $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 0.
9. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 4} = \sqrt{6}$.	а) –3; б) 2; в) 5; г) 3; д) –5.
10. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\left(\sqrt{47 + x} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{47 + x} - 2\right) = 20$.	
11. Знайдзіце лік каранёў ураўнення $\sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{x^3 + 12x^2 - 11x - 2} = 0$.	

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
12. Знайдзіце значэнне выразу $x^2 - 5x$, калі $\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{x-2}}} + \sqrt{1+\sqrt{x-2}} = 6$.	
13. Знайдзіце найбольшы корань ураўнення $\frac{x^2}{\sqrt{x+2}} + x = 2\sqrt{x+2}$.	
14. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{5x^2-20x+21} + \sqrt{3x^2-12x+28} = 8x - 2x^2 - 3$.	
15. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}$.	

Тэст 3. Прымяненне ўласцівасцей трыганаметрычных функцый і формул трыганаметрыі

Умовы	Варыянты адказаў
1. Знайдзіце каардынаты пункта, атрыманага паваротам пункта $P_0(1; 0)$ на вугал $-\frac{9\pi}{2}$.	а) (1; 0); б) (0; 1); в) (–1; 0); г) (0; –1); д) (0; 0).
2. Выразіце ў радыяннай меры велічыню вугла 144°.	а) $\frac{12\pi}{13}$; б) $\frac{11\pi}{18}$; в) $\frac{2\pi}{5}$; г) $\frac{8\pi}{5}$; д) $\frac{4\pi}{5}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
3. Выберыце выраз, які мае найменшае значэнне: 1) $\sin 1$; 2) $\cos 1$; 3) $\sin 2$; 4) $\cos 2$; 5) $\operatorname{tg} 0{,}5$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\cos 111^\circ - 2\sin 159^\circ + \cos 450^\circ}{\sin 21^\circ}$.	а) 3; б) 4; в) -3; г) -1; д) 2.
5. Вылічыце $\cos(\alpha - 4\pi)$, калі $\operatorname{tg}^2\alpha = 49$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	а) $-\frac{7}{5\sqrt{2}}$; б) $-\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{5\sqrt{2}}$; г) $-\frac{1}{5\sqrt{2}}$; д) $\frac{7}{5\sqrt{2}}$.
6. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{3\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + 2\cos\alpha}$, калі $\operatorname{tg}\alpha = 5$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
7. Спрасціце выраз $2\sin 10^\circ \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$.	а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
8. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.	а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) 2; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
9. Знайдзіце $\sin 105°$.	а) $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{3})$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2}-1)$; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; д) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.
10. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\dfrac{\sin 49° - \cos 79°}{1-2\sin^2 35{,}5°}\right)^2$.	
11. Знайдзіце значэнне выразу $100 \cdot (2\sin 5x \cos 7x - \sin 12x)$, калі $\sin x + \cos x = 0{,}3$.	
12. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{1}{\cos^2 70° + \sin^2 25° + \sqrt{2} \cdot \cos 70° \cdot \cos 65°}$.	
13. Знайдзіце значэнне выразу $32 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}$.	
14. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{1}{\cos\alpha}$, калі $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{6} < 2\pi$.	

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
15. Сінусы двух вострых вуглоў трохвугольніка роўны $\frac{7}{25}$ і $\frac{4}{5}$. Знайдзіце значэнне выразу $125\cos\gamma$, дзе γ — трэці вугал трохвугольніка.	

Тэст 4. Адваротныя трыганаметрычныя функцыі

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце няправільную роўнасць: 1) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos(-1) = \pi$; 3) $\arcsin 0 = 0$; 4) $\arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$; 5) $\arccos 1 = 0$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Знайдзіце значэнне выразу $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{arcctg}(-\sqrt{3})$.	а) $\frac{5\pi}{12}$; б) $-\frac{7\pi}{12}$; в) $-\frac{5\pi}{12}$; г) $\frac{7\pi}{12}$; д) $-\frac{\pi}{3}$.
3. Знайдзіце значэнне выразу $\cos(\mathrm{arctg} 1)$.	а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
4. Знайдзіце значэнне выразу $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{2}{7}\right)\right)+\mathrm{ctg}\left(\mathrm{arcctg}\,\frac{3}{7}\right)$.	а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $-\frac{5}{7}$; г) $-\frac{1}{7}$; д) 1.
5. Знайдзіце значэнне выразу $\mathrm{tg}\left(5\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.	а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) −1; д) $-\sqrt{3}$.
6. Знайдзіце лік цэлых значэнняў зменнай, пры якіх мае сэнс выраз $\arcsin\left(x^2-x-1\right)$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
7. Ацаніце выраз $\frac{3\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,x$.	а) $\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,x<\frac{5\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,x<\frac{5\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,x<\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,x<\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{5\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}-\mathrm{arctg}\,x<-\frac{\pi}{4}$.

Працяг

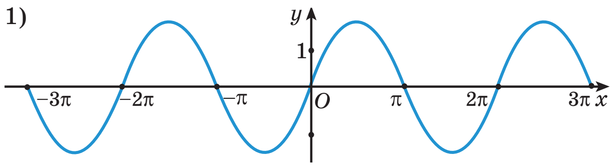
Умовы	Варыянты адказаў
8. Знайдзіце значэнне выразу $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arcctg}7\right)+\cos\left(\pi-\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.	а) $7\frac{3}{4}$; б) $6\frac{1}{4}$; в) $-7\frac{3}{4}$; г) $-6\frac{1}{4}$; д) 7.
9. Знайдзіце значэнне выразу $\sin\left(\arccos-\left(\frac{1}{5}\right)\right)$.	а) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{5}$; д) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.
10. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{96}{\pi}\arccos\left(\sin\left(-\frac{23\pi}{48}\right)\right)$.	
11. Знайдзіце значэнне выразу $38\cdot\left(\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{19}\right)-\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{5}{19}\right)\right)$.	
12. Знайдзіце значэнне выразу $65\cdot\cos\left(\arcsin 0{,}6+\arccos\frac{5}{13}\right)$.	
13. Знайдзіце значэнне выразу $50\cdot\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.	
14. Знайдзіце (у градусах) значэнне вугла $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}676°)$.	
15. Знайдзіце (у градусах) значэнне выразу $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.	

Тэст 5. Трыганаметрычныя функцыі

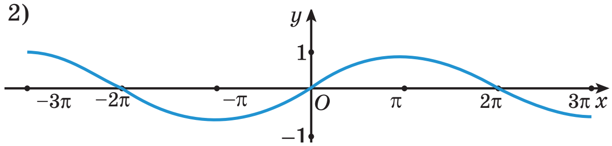
<table>
<tr><th>Умовы</th><th>Варыянты адказаў</th></tr>
<tr><td>

1. Выберыце рысунак, на якім паказаны відарыс графіка функцыі $y = 0{,}5 \sin x$.

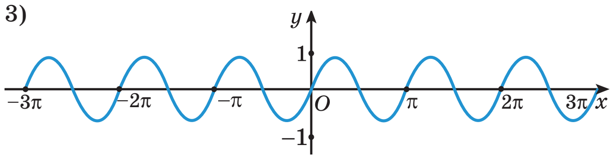
1)



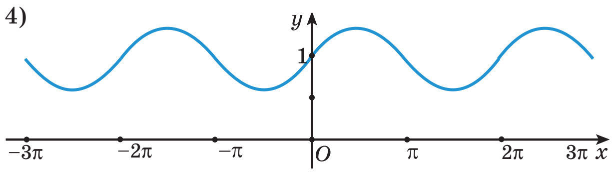
2)



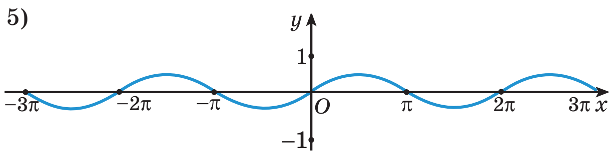
3)



4)



5)



</td><td>

а) 1);
б) 2);
в) 3);
г) 4);
д) 5).

</td></tr>
<tr><td>

2. Выберыце функцыю, якая нарастае на прамежку $[-\pi; 0]$:

1) $y = \operatorname{tg} x$;
2) $y = \cos x$;
3) $y = \operatorname{ctg} x$;
4) $y = \sin x$;
5) усе функцыі.

</td><td>

а) 1);
б) 2);
в) 3);
г) 4);
д) 5).

</td></tr>
</table>

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
3. Выберыце функцыю, графік якой сіметрычны адносна пачатку каардынат: 1) $y = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \lvert x \rvert\right)$; 2) $y = -\cos 2x$; 3) $y = \mathrm{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = -\sin\frac{x}{3}$; 5) $y = \cos(\pi + 4x)$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. Для функцыі $y = \cos 3x - 2$ выберыце няправільнае сцверджанне: 1) графік функцыі сіметрычны адносна восі ардынат; 2) функцыя не мае нулёў; 3) найменшым значэннем функцыі з'яўляецца лік –3; 4) функцыя з'яўляецца перыядычнай з найменшым дадатным перыядам $T = \frac{2\pi}{3}$; 5) графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце (0; –2).	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
5. Выберыце функцыю, графік якой супадае з графікам функцыі $y = 1$ на мностве рэчаісных лікаў.	а) $y = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x$; б) $y = \frac{\cos x}{\cos x}$; в) $y = 4\sin x - 3\sin x$; г) $y = \sin^2 5x + \cos^2 5x$; д) $y = \cos 1$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
6. Выберыце лік, які не з'яўляецца перыядам функцыі $y = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{10} - 7\right) + 5$.	а) 10; б) –20; в) 15; г) 100; д) –50.
7. Для функцыі $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ знайдзіце пункт максімуму на прамежку $[0;\ 4\pi]$.	а) $\frac{7\pi}{2}$; б) $\frac{7\pi}{6}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $\frac{5\pi}{3}$; д) $\frac{5\pi}{6}$.
8. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = \cos x$ зрухам яго ўздоўж восі абсцыс на $\frac{\pi}{3}$ адзінкі ўлева і ўздоўж восі ардынат на 2 адзінкі ўніз. Знайдзіце значэнне выразу $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.	а) –1; б) 1,5; в) 0,5; г) 3; д) –2,5.
9. Знайдзіце найменшы дадатны лік, які не ўваходзіць у абсяг вызначэння функцыі $y = \operatorname{tg}(2\pi x + 1{,}2\pi)$.	а) 0,1; б) 0,2; в) 0,15; г) 0,2; д) 0,25.
10. Знайдзіце здабытак найбольшага і найменшага цэлых значэнняў функцыі $y = 3\lvert\sin x\rvert + 7$.	
11. Знайдзіце (у градусах) суму нулёў функцыі $y = \frac{1}{7}\cos 2x$ на прамежку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.	

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
12. Знайдзіце лік пунктаў перасячэння прамой $y = \sqrt{3}$ і графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ на прамежку $\left(\frac{4\pi}{3};\ 4\pi\right]$.	
13. Знайдзіце, колькі разоў на прамежку $[-\pi;\ 2{,}5\pi]$ функцыя $y = 4\sin^2 3x$ дасягае свайго найбольшага значэння.	
14. Знайдзіце адносіну найбольшага і найменшага значэнняў функцыі $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$.	
15. Знайдзіце (у градусах) найменшае дадатнае значэнне зменнай, якое не ўваходзіць у абсяг вызначэння функцыі $f(x) = \frac{1}{\sin 3x - \cos 3x}$.	

Тэст 6. Трыганаметрычныя ўраўненні

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце лік, які не з'яўляецца коранем ураўнення $\sin x = -\frac{1}{2}$.	а) $\frac{7\pi}{6}$; б) $-\frac{\pi}{6}$; в) $-\frac{13\pi}{6}$; г) $\frac{5\pi}{6}$; д) $-\frac{5\pi}{6}$.
2. Знайдзіце лік каранёў ураўнення $\cos x = \frac{2}{3}$ на прамежку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ 2\pi\right]$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
3. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-1$, якія належаць прамежку $(-\pi; 4\pi)$.	а) $3{,}5\pi$; б) 2π; в) 3π; г) 7π; д) $2{,}5\pi$.
4. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{5}\right)=-3$, якія задавальняюць умову $-2<x<1$.	а) $-0{,}2$; б) $-0{,}3$; в) $-0{,}4$; г) $-0{,}7$; д) $-0{,}5$.
5. Знайдзіце лік каранёў ураўнення $\left(7\sin x-4\sqrt{3}\right)\left(7\sin x-5\sqrt{2}\right)=0$ на прамежку $[-3\pi; 2\pi]$.	а) 10; б) 12; в) 8; г) 4; д) 6.
6. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $4\sin^2 x+4\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0$.	а) -30; б) -60; в) -150; г) -120; д) -180.
7. Знайдзіце лік каранёў ураўнення $\sqrt{2}\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$, якія належаць прамежку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
8. Знайдзіце лік каранёў ураўнення $(\sin x+1)\cdot \mathrm{tg}x=0$ на прамежку $[0; 50\pi]$.	а) 76; б) 75; в) 25; г) 50; д) 51.

Працяг

Умовы		Варыянты адказаў
9.	Знайдзіце лік каранёў ураўнення $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$ на прамежку $[-1{,}5\pi; 2\pi]$.	а) 8; б) 9; в) 7; г) 6; д) 10.
10.	Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 1.$	
11.	Знайдзіце лік каранёў ураўнення $\cos 6\pi x \sin 9\pi x = \cos\pi x \sin 14\pi x$ на прамежку $[3; 4]$.	
12.	Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}.$	
13.	Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\cos x \cdot \lvert\sin x\rvert = 0{,}25.$	
14.	Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x.$	
15.	Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення $2\cos^6\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 4 + \sin x + \sqrt{3}\cos x.$	

Тэст 7. Прымяненне ўласцівасцей паказальнай функцыі. Паказальныя ўраўненні

Умовы		Варыянты адказаў
1.	Выберыце прамую, якую не перасякае графік функцыі $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.	а) $x = -3$; б) $x = \frac{1}{3}$; в) $y = 0{,}36$; г) $y = -3$; д) $y = 100$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
2. Знайдзіце значэнне выразу 6^{x+1}, калі $6^x = 2{,}1$.	а) 12,6; б) 3,1; в) 8,1; г) $1 + \log_6 2{,}1$; д) 6,1.
3. Рашыце ўраўненне $(0{,}8)^{\frac{2x-3}{6}} = (1{,}25)^{x+1}$.	а) –2; б) $-\frac{3}{8}$; в) 1,5; г) $\frac{3}{5}$; д) –1.
4. Рашыце ўраўненне $1000^{2-x} = 4^x \cdot 5^{2x}$.	а) 0; б) 1,2; в) –2; г) 2; д) 1.
5. Рашыце ўраўненне $(0{,}125)^{-x} = \frac{1}{\sqrt[5]{8^{2x-1}}}$.	а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 7; г) $-\frac{1}{7}$; д) $\frac{1}{7}$.
6. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $4^{\frac{1}{x}} - 5 \cdot 2^{2+\frac{1}{x}} + 64 = 0$.	а) 1; б) 2^{-1}; в) 2^{-3}; г) 2^{-2}; д) 2^{-4}.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
7. Выберыце прамежак, якому належыць корань ураўнення $3^{x+3} + 3^{x} = 5 \cdot 2^{x+4} - 17 \cdot 2^{x}$.	а) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; б) $(0{,}5;\ 1{,}5)$; в) $(1{,}5;\ 2{,}5)$; г) $(2{,}5;\ 3{,}5)$; д) $(3{,}5;\ 4{,}5)$.
8. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = 4^{\lvert x-3\rvert + 2}$.	а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{16}$; в) 2; г) 4; д) 16.
9. Рашыце ўраўненне $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162$.	а) 66; б) 58; в) 54; г) 68; д) 60.
10. Знайдзіце значэнне выразу $2^{x} + 2^{-x}$, калі $16^{x} + 16^{-x} = 527$.	
11. Знайдзіце найменшы корань ураўнення $4^{2x+1} - 7 \cdot 12^{x} + 3^{2x+1} = 0$.	
12. Знайдзіце значэнне выразу 2^{m}, дзе m — модуль рознасці каранёў ураўнення $8 \cdot 2^{\lvert x\rvert} + 7 \cdot 2^{x} = 30$.	
13. Знайдзіце значэнне выразу 3^{m}, дзе m — сума каранёў ураўнення $12^{x} + 6^{x} - 2 \cdot 4^{x} - 2 \cdot 3^{x} - 2^{x+1} + 4 = 0$.	
14. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\left(6 - \sqrt{35}\right)^{x} + \left(6 + \sqrt{35}\right)^{x} = 142$.	
15. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $2^{x} + 2^{-x} = 2\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.	

Тэст 8. Паказальныя няроўнасці

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце няроўнасць, якая не мае рашэнняў: 1) $2^x \leqslant 10$; 2) $2^x > 5$; 3) $2^x \leqslant 0$; 4) $2^x > 0$; 5) $2^x \geqslant -7$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Рашыце няроўнасць $3^{x^2} \leqslant 81$.	а) $(-\infty; 2]$; б) $[-2; 2]$; в) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; г) $[-4; 4]$; д) $[0; 2]$.
3. Рашыце няроўнасць $2^x \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x \leqslant 1{,}44$.	а) $(-\infty; 2]$; б) $[2; +\infty)$; в) $[-2; 2]$; г) $(-\infty; 1{,}5]$; д) $[1{,}5; +\infty)$.
4. Рашыце няроўнасць $0{,}7^{\frac{x^2-9}{x-1}} < 1$.	а) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3) \cup (1; 3)$; в) $(-3; 1) \cup (3; +\infty)$; г) $(-3; 0) \cup (0; 3)$; д) $(-3; 3)$.
5. Рашыце няроўнасць $3^x \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{5x-2} < \frac{1}{3}$.	а) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $\left(-\frac{5}{9}; +\infty\right)$; в) $(1{,}8; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{5}{9}\right)$; д) $\left(\frac{5}{9}; +\infty\right)$.

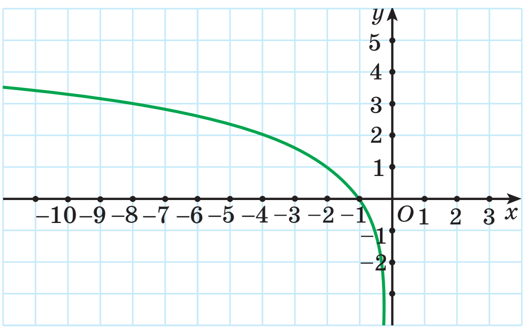
Працяг

Умовы		Варыянты адказаў
6.	Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $9^{\frac{x}{2}} - 12 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 27 \leqslant 0$.	а) 2; б) 12; в) 6; г) 9; д) 3.
7.	Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $9^x + 8 \cdot 3^{2x} > 4^x + 5 \cdot 2^{2x}$.	а) 1; б) –3; в) 0; г) –1; д) –2.
8.	Знайдзіце лік цэлых рашэнняў няроўнасці $1 < 3^{\left\|x^2 - x\right\|} < 9$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) 4.
9.	Рашыце няроўнасць $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.	а) (0; 1); б) (0; 2); в) (1; 2); г) (0; 5); д) (2; 5).
10.	Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці $5^{x-4} \leqslant 7^{8-2x}$.	
11.	Знайдзіце лік цэлых рашэнняў няроўнасці $7^{x+2} - 64 \cdot 8^x < 42 \cdot 7^x - 7 \cdot 8^{x+1}$ на прамежку [–10; 5].	
12.	Знайдзіце найбольшае цэлае адмоўнае рашэнне няроўнасці $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 14^x + 7 \cdot 49^x > 0$.	
13.	Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\frac{2^x - 2^{2-x} - 3}{2^x - 2} \geqslant 0$ на прамежку [–5; 3].	
14.	Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81}{x^2 + 2x + 5} < 0$.	
15.	Знайдзіце лік цэлых рашэнняў няроўнасці $2^{x^2 - 4x + 5} \leqslant 4x - 2 - x^2$.	

Тэст 9. Лагарыфмічная функцыя. Уласцівасці лагарыфмаў

Умовы	Варыянты адказаў
1. Размясціце лікі $\log_2 5$; $\log_{\frac{1}{2}} 7^{-1}$; $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 3$; $\log_{32} 1$; $\log_2 \sqrt[5]{16}$ у парадку спадання.	а) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 3$; $\log_{32} 1$; $\log_2 \sqrt[5]{16}$; $\log_2 5$; $\log_{\frac{1}{2}} 7^{-1}$; б) $\log_2 \sqrt[5]{16}$; $\log_2 5$; $\log_{32} 1$; $\log_{\frac{1}{2}} 7^{-1}$; $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 3$; в) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 3$; $\log_2 5$; $\log_2 \sqrt[5]{16}$; $\log_{32} 1$; $\log_{\frac{1}{2}} 7^{-1}$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 7^{-1}$; $\log_2 5$; $\log_2 \sqrt[5]{16}$; $\log_{32} 1$; $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 3$; д) $\log_2 \sqrt[5]{16}$; $\log_2 5$; $\log_{\frac{1}{2}} 7^{-1}$; $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 3$; $\log_{32} 1$.
2. Выберыце выраз, значэнне якога роўна 0,5: 1) $\log_6 36 + \log_2 16$; 2) $\log_{27} 81 + \log_{27} 9$; 3) $\log_2 24 - \log_2 6$; 4) $\log_{16} \log_3 81$; 5) $\left(7^{\log_7 \sqrt[5]{3}}\right)^5$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
3. Выберыце функцыю, графік якой паказаны на рысунку.  	а) $y = \log_2 x$; б) $y = -\log_2 x$; в) $y = \log_2(-x)$; г) $y = -\log_2(-x)$; д) $y = -2^x$.
4. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 25} + 2^{\log_{\sqrt{2}} 13}$.	а) $\sqrt{5} + 13$; б) 174; в) 19; г) 194; д) 18.
5. Знайдзіце значэнне выразу $\log^2_{625} \sqrt[3]{5}$.	а) $\frac{1}{144}$; б) $\frac{9}{16}$; в) $\frac{1}{48}$; г) $\frac{1}{36}$; д) $\frac{1}{12}$.
6. Спрасціце выраз $2\log_5(-a) + \log_5 a^2$.	а) $2\log_5(-a) + 2\log_5 a$; б) $\log_5(-a)$; в) 0; г) 1; д) $4\log_5(-a)$.

Працяг

Умовы	**Варыянты адказаў**
7. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай мае сэнс выраз $\log_x\left(-x^2+2x+3\right)$.	а) $(0;\ 1)\cup(1;\ 3)$; б) $(0;\ 3)$; в) $(3;\ +\infty)$; г) $(0;\ 1)\cup(0;\ +\infty)$; д) $(-1;\ 3)$.
8. Выразіце праз a значэнне выразу $\log_{49}28$, калі вядома, што $\log_7 2 = a$.	а) $a+2$; б) $2a+1$; в) $\frac{a+1}{2}$; г) $\frac{a+1}{a}$; д) $\frac{2a+1}{2}$.
9. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $f(x)=\log_2\left(x^2+2x+9\right)$.	а) $[9;\ +\infty)$; б) $[2;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $(0;\ +\infty)$; д) $[3;\ +\infty)$.
10. Вылічыце $\left(12+2^{1+\log_2 15}\right)\cdot\log_5\sqrt{7}\cdot\log_7 25$.	
11. Вылічыце $\left(\left(25-\log_2^2 5\right)\cdot\log_{160}2+\log_2 5\right)\cdot 7^{\log_7 6}$.	
12. Знайдзіце значэнне выразу $64^{\frac{1}{2\lg 8}}+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}\right)$.	
13. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{\log_2 250}{\log_{50}5}-\frac{\log_5 10}{\log_{1250}5}$.	

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
14. Знайдзіце значэнне выразу $2\log_2\left(12+4\sqrt{5}\right)+4\log_2\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$.	
15. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{3\log_3^2 45-2\cdot\log_3 45\cdot\log_3 5-\log_3^2 5}{3\log_3 45+\log_3 5}$.	

Тэст 10. Лагарыфмічныя ўраўненні

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце ўраўненне, коранем якога з'яўляецца лік $\log_{11}13$: 1) $13^x=11$; 2) $\log_{11}x=13$; 3) $\log_{11}x^{13}=1$; 4) $4+x=\log_{11}17$; 5) $11^x=13$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Рашыце ўраўненне $\log_2\left(18-2^{-x}\right)=3-x$.	а) $\frac{1}{2}$; б) -2; в) -1; г) 0; д) 2.
3. Рашыце ўраўненне $\dfrac{\log_4\left(x^2-3\right)}{x-2}=0$.	а) -2; 2; б) -2; в) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; г) 4; д) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.
4. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\log_3\left(x^3+x^2-4x+2\right)=\log_3\left(x^3-1\right)$.	а) 1; б) -4; в) -3; г) 4; д) 3.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
5. Рашыце ўраўненне $\log_x\left(9x^2\right)\cdot\log_3^2 x = 4$.	а) $\frac{1}{27}$; 9; б) $\frac{1}{9}$; 3; в) $\frac{1}{3}$; 9; г) $\frac{1}{9}$; 27; д) $\frac{1}{3}$; 3.
6. Рашыце ўраўненне $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$.	а) 49; б) 1000; в) 7; г) 10; д) 100.
7. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\log_3(2x-1) - 2\log_3(2x+5) = \log_{\frac{1}{2}} 8$.	а) 13; б) 6,5; в) 2; г) 2,5; д) 15.
8. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{x+2}\cdot\log_2(4+x) = 0$.	а) –6; б) –3; в) –5; г) –2; д) 0.
9. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $3\log_3^2(x+1) - 4\log_3(7x+1)\cdot\log_3(x+1) + {}$ $+ \log_3^2(7x+1) = 0$.	а) –1; б) 0,5; в) –0,5; г) 2; д) $\frac{1}{3}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
10. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{2\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$.	
11. Знайдзіце здабытак найбольшага кораня ўраўнення $x^{2\lg^3 x - 1{,}5\lg x} = \sqrt{10}$ і ліку яго каранёў.	
12. Знайдзіце суму паслядоўных цэлых лікаў, паміж якімі змяшчаецца сума каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $0{,}5\log_{2-x}\left(x^2 + x - 6\right)^2 = 2$.	
13. Знайдзіце суму квадратаў каранёў ураўнення $2^{\log_2 x + \log_2^2 x + \log_2^3 x + \ldots} = 4^{\log_2 x}$, дзе $\lvert\log_2 x\rvert < 1$.	
14. Знайдзіце значэнне выразу $2S$, дзе S — сума каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\log_2\left(4x^2 + 1\right) = \log_2 x + 8x(1 - x)$.	
15. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $2\lvert\sin x\rvert = \log_{\mathrm{ctg}\,x} \frac{\lvert\cos x\rvert}{\sin x}$.	

Тэст 11. Лагарыфмічныя няроўнасці

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце няроўнасць, раўназначную няроўнасці $\lg x > 0$: 1) $x^2 > x$; 2) $0{,}2^x > 0{,}2$; 3) $\lvert x\rvert > 1$; 4) $\sqrt{x-1} \geqslant 0$; 5) $\sqrt[3]{x} > 1$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
2. Рашыце няроўнасць $\log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4$.	а) $(3; +\infty)$; б) $(1; +\infty)$; в) $(-\infty; 3)$; г) $(1; 3)$; д) $(-3; -1)$.
3. Рашыце няроўнасць $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x+1\right) < 0$.	а) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; в) $(-2; 0)$; г) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; д) $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
4. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $3^{\log_{0,25}(1-x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.	а) -1; б) 0; в) 1; г) -2; д) 2.
5. Рашыце няроўнасць $\log_3(x+4) \cdot \log_{0,3}7 \geqslant 0$.	а) $[-4; -3]$; б) $[-3; +\infty)$; в) $(-4; -3]$; г) $[0; +\infty)$; д) $(0; +\infty)$.
6. Рашыце няроўнасць $\log_{0,5}\log_5\frac{x}{x-1} \geqslant 0$.	а) $[1,25; +\infty)$; б) $(-\infty; 1) \cup [1,25 +\infty)$; в) $[1; 1,25)$; г) $(-\infty; -0,5) \cup [2; +\infty)$; д) $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right]$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
7. Знайдзіце лік цэлых рашэнняў няроўнасці $6 \leqslant \log_3^2 x + \log_3 x$ на прамежку [–2; 12].	а) 1; б) 7; в) 6; г) 4; д) 2.
8. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $2\log_{0,5}(x-2) - \log_{0,5}\left(x^2 - x - 2\right) \geqslant 1.$	а) 10; б) 15; в) 7; г) 12; д) 14.
9. Рашыце няроўнасць $\log_{0,09}(x^2 - 12x + 36) \geqslant \log_{0,3}(x-3).$	а) $(3; +\infty)$; б) $[4,5; 6) \cup (6; +\infty)$; в) $(6; +\infty)$; г) $(3; 4,5]$; д) $(-\infty; 6)$.
10. Знайдзіце значэнне выразу $24a + b$, дзе a — найбольшае адмоўнае, а b — найменшае дадатнае рашэнні няроўнасці $\log_2(3x+1) \cdot \log_{0,5}(6x+2) \leqslant -6.$	
11. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_{0,5}(x-4) - \log_{0,5}(x+2) - \log_{\frac{x+2}{x-4}} 2 > 0.$	
12. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне сістэмы няроўнасцей $\begin{cases} \lg^2 x + \lg 0,01x > 0, \\ \frac{1}{x} < 1000. \end{cases}$	

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
13. Знайдзіце лік цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_{\frac{2x-1}{x}} 5 < \log_{\frac{x}{2x-1}} \frac{1}{x}$ на прамежку $[-1; 11]$.	
14. Знайдзіце лік цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_9 \left(x^2 - 4x + 5\right) \geqslant \log_{11} \left(4x - x^2 - 3\right)$.	
15. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\log_{0,5}(2x + 5) \geqslant 2x - 1$.	

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 11», а таксама адказы і рашэнні тэматычных тэстаў можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 11 клас».

Матэматыка вакол нас

З дапамогай лагарыфмічнай і паказальнай функцый мадэлююцца некаторыя рэальныя працэсы.

Адным з прыкладаў практычнага прымянення ўласцівасцей лагарыфмаў з'яўляюцца лагарыфмічныя шкалы.

Лагарыфмічнай называюць любую шкалу, значэнні якой выражаюцца лагарыфмамі (даўжыня адрэзка шкалы прапарцыянальна лагарыфму адносіны велічынь, адзначаных на канцах гэтага адрэзка). Лагарыфмічныя шкалы маюць шырокае распаўсюджанне ў навуцы і тэхніцы як найбольш зручны спосаб адлюстравання вялікіх дыяпазонаў значэнняў велічынь.

Напрыклад, лагарыфмічная шкала выкарыстоўваецца для вымярэння амплітуды гукавой хвалі. Паказчык pH, які абазначае ўзровень кіслотнасці раствора, таксама задаецца ў лагарыфмічным маштабе.

Адна з самых вядомых лагарыфмічных шкал — гэта шкала вымярэння інтэнсіўнасці землетрасенняў, распрацаваная ў 1935 г. амерыканскім сейсмолагам Чарльзам Рыхтарам. Кожнае значэнне па шкале Рыхтара ўяўляе сабой дзесятковы лагарыфм актыўнасці сейсмічных хваль, зарэгістраваных прыборамі.

Важнай часткай матэматычнага апарату, які выкарыстоўваецца пры праектаванні ракет, з'яўляецца атрыманая ў канцы XIX ст. формула Цыялкоўскага, якая задае залежнасць скорасці ракеты ад яе масы: $v = v_{\text{с}} \ln \frac{m_0}{m}$, дзе $v_{\text{с}}$ — скорасць выцякання газаў, m_0 — стартавая маса ракеты, а $\ln x = \log_e x$, дзе $e = 2{,}7182818284590\ldots$ — бясконцы неперыядычны дзесятковы дроб.

Прыкладам практычнага прымянення паказальнай функцыі можа быць мадэляванне працэсу росту дражджэй, які апісваецца формулай $m = m_0 1{,}2^t$, дзе m_0— першапачатковая маса дражджэй.

Ужо знаёмая нам формула $N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, дзе $N(t)$ — колькасць атамаў радыеактыўнага рэчыва, што не распаліся да моманту часу t, N_0 — першапачатковая колькасць радыеактыўных ядзер, T — перыяд паўраспаду рэчыва, можа быць выкарыстана ў практычных мэтах, напрыклад для атрымання інфармацыі аб магчымасці выкарыстання раней забруджаных радыенуклідамі тэрыторый.

АДКАЗЫ

Раздзел 1. Абагульненне паняцця ступені

1.37. а) 5; б) 0,2; в) 8; г) $\frac{1}{27}$; д) 9; е) $\frac{1}{25}$; ж) 0,2 з) 1000; і) $3\frac{3}{8}$; к) 2,25.

1.38. а) $x^{\frac{1}{20}}$; б) $a^{\frac{2}{3}}$; в) $c^{\frac{23}{30}}$; г) $b^{2,8}$; д) $y^{-1,7}$; е) m^2.

1.39. а) 0,2; б) 1; в) 100; г) 4; д) $\frac{1}{25}$; е) 1; ж) 32; з) 0,6; і) $11\frac{1}{9}$.

1.40. а) $6a^{-2}$; б) $\frac{b^4}{3}$; в) $12b^{0,8}$.

1.41. а) d^3; б) $2d^{\frac{2}{3}}$; в) 0.

1.42. а) 18,75; б) 3,2; в) 55; г) 1.

1.43. 3.

1.44. а) 100,1; б) –0,297; в) –57.

1.45. а) $a^{1,5}b^{-2,5}$; б) $a^{-3}b^7$.

1.46. а) $x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $m^{\frac{3}{4}}\left(m^{\frac{1}{4}}+1\right)$; в) $b^{\frac{1}{4}}\left(1-3b^{\frac{1}{4}}\right)$; г) $a^{\frac{1}{6}}\left(7-4a^{\frac{1}{2}}\right)$.

1.47. а) $1+b^{\frac{3}{4}}$; б) $-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$; в) $-a^{\frac{7}{8}}$.

1.48. -10.

1.49. а) $-9b$; б) $9a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}$.

1.50. а) $\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}+7}$; б) $\frac{a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{7}{8}}b^{\frac{7}{8}}}$; в) $\frac{a^{\frac{1}{12}}+3b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{12}}-3b^{\frac{1}{12}}}$.

1.51. 1.

1.52. –5,75.

1.53. а) a^2; б) 1; в) b^{10}.

1.54. а) 25; б) 343; в) 125; г) 1; д) 9; е) 0,01.

1.55. а) $b^{\sqrt{5}}+c^{\sqrt{7}}$; б) $\frac{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{3}}-b^{\sqrt{2}}}$.

1.56. $5^{\sqrt{3}}<25$.

1.57. 81.

1.58*. $-\frac{n}{m^{\sqrt{2}}}$.

1.97. а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 2,5; г) 3,5.

1.98. *A, B, C.*

1.99. а) Нарастальнай; б) спадальнай; в) нарастальнай; г) спадальнай.

1.100. а) $3{,}7^{-0{,}4} > 7{,}4^{-0{,}4}$; б) $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{5}{7}} < \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{5}{7}}$.

1.101. а) $D = [-4; +\infty)$; б) $(-\infty; 5)$; в) $(-4; 4)$; г) $D = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; д) $D = (-\infty; 0) \cup (9; +\infty)$; е) $\left(-7; 0\right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

1.103. а) 2; 1; б) 4; $\frac{1}{25}$.

1.139. б).

1.140. 1; -2; 0; $\frac{1}{2}$.

1.141. а) 2; б) 5; в) 2; г) 1; д) -1; е) -2; ж) 0; з) $\frac{1}{2}$; і) $\frac{1}{5}$; к) 3; л) -2; м) $\frac{1}{2}$.

1.142. а) 5; б) 9; в) 8; г) $\sqrt{10}$.

1.143. а) $\log_2 2$; б) $\log_2 4$; в) $\log_2 8$; г) $\log_2 1$; д) $\log_2 \frac{1}{2}$; е) $\log_2 \frac{1}{4}$; ж) $\log_2 \frac{1}{8}$; з) $\log_2 \sqrt{2}$; і) $\log_2 \sqrt[3]{2}$; к) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$; л) $\log_2 \sqrt[3]{4}$; м) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

1.144. а) 4; б) $\frac{1}{2}$; в) 5; г) 7.

1.145. а) 2; б) 2; в) 1,5; г) $2\frac{5}{6}$.

1.146. а) 1; б) 125; в) -27; г) $\frac{1}{16}$.

1.147. а) 1; б) 0; в) -2.

1.148. $1\frac{1}{3}$.

1.149. а) 3; б) 2; в) 3; г) -5; д) 23; е) -3.

1.150. а) 75; б) $\frac{1}{2}$; в) 25; г) 75.

1.152. а) 8; б) 49; в) 64; г) $\frac{1}{25}$; д) 15; е) 9; ж) 125; з) 6.

1.153*. 150.

1.154*. 3.

1.155*. $-6{,}25$.

Я правяраю свае веды

1. в). **2.** в). **3.** а) 3; б) -1; в) 0; г) -2. **4.** а) 7; б) 100; в) 9; г) 5. **5.** а) $(3; +\infty)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right]$; в) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; д) $\left[-\sqrt{7}; \sqrt{7}\right]$; е) $(-2; 1) \cup (2; +\infty)$. **6.** а) 16; б) $\frac{1}{49}$; в) 100; г) $\frac{8}{27}$; д) 3; е) $\sqrt{5}$; ж) $\frac{3}{25}$; з) 338. **7.** $-\frac{\sqrt{x}}{5}$. **8.** а) 4; б) 6,5; в) 10; г) $-31{,}5$. **9.** $x^{\frac{2}{3}} - 1$.

10. $(-\infty; -4) \cup (-3; 1]$.

Раздзел 2. Паказальная функцыя

2.33. а) 2; б) 32; в) 1; г) 0,5; д) $\frac{1}{8}$; е) $\sqrt{2}$; ж) 5; з) $\frac{1}{3}$.

2.34. а) $g(4) < 7g(0)$; б) $g(-1) + g(-2) > g(\log_3 2)$.

2.36. а) Праходзіць; б) праходзіць; в) праходзіць; г) праходзіць.

2.37. б).

2.38. а); в); г).

2.40. а) Спадальнай; б) нарастальнай; в) нарастальнай; г) спадальнай; д) нарастальнай; е) нарастальнай.

2.41. а) $3^{8,1} > 3^{8,01}$; б) $0,2^{-1,3} > 0,2^{0,5}$; в) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 > \left(\frac{1}{3}\right)^{1,2}$; г) $7^{\sqrt{2}} > 7^{1,4}$.

2.42. y_2; y_1; y_3; y_4.

2.43. а) $m > n$; б) $m < n$; в) $m < n$; г) $m < n$.

2.44. а) $5^{-2,8} < 1$; б) $0,3^{2,7} < 1$; в) $5,4^{-0,6} < 1$; г) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{0,2} > 1$.

2.45. а) Да; б) да.

2.48. а) $(-3; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(4; +\infty)$; г) $(-\infty; 0)$; д) $(-\infty; -3)$; е) $(-\infty; 6)$.

2.49. а) 3; б) 59; в) 17.

2.50. а) 3; $\frac{1}{9}$; б) 4; $\frac{1}{8}$.

2.51*. а) 3; $\frac{1}{3}$; б) $2\frac{2}{3}$; $\frac{3}{8}$; в) 36; 1; г) 125;5; д) –1; –2,5; е) 7; $4\frac{1}{3}$.

2.53*. а) $[1; +\infty)$; б) $(2; 3]$; в) $\left[\frac{1}{49}; +\infty\right)$; г) $(0; 4]$.

2.114. а) 6; б) –9; в) $\log_7 6$; г) $-1\frac{2}{7}$; д) $-6\frac{2}{3}$; е) –0,25.

2.115. а) 9,5; б) –1; 1; в) 0,5.

2.116. а) –2; 1; б) –3; 3; в) –2; 0; г) –3; 3; д) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; е) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$.

2.117. а) 2,5; б) 0,6; 1; в) –0,25; 1; г) 1; 4.

2.118. а) 3; б) 7.

2.119. а) 4,5; б) –1; в) –0,5.

2.120. а) 0,25; б) 0; $3\frac{1}{6}$; в) 24.

2.121. а) 1; б) 2; в) 4; г) –1,6.

2.122. а) 1,5; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; 3.

2.123. а) 1; б) 1; в) 4.

2.124. а) 1,5; б) –1; в) 1.

2.125. а) (1; 3); б) (–1; 3); в) $\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$.

2.126. а) 0; 1; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; г) $\log_5 3$; д) $\log_3 5$; е) $\log_5 2$; 1.

2.127. а) –2; б) $\log_2 5$.

2.128. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2.129. а) -6; б) $4{,}5$; в) 0; 5.

2.130. а) 0; 1; б) -1; $\log_{\frac{5}{3}} 2$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\log_{0,4} 2$; $\log_{0,4} \frac{1}{3}$.

2.131. 0; -1.

2.132. -1; 0.

2.133. а) 1; б) 0.

2.134. а) 1; б) 66.

2.135. -1; 0; 1.

2.136. а) 2; б) 1.

2.137. $1{,}5$.

2.138*. $-1{,}5$.

2.139*. -5; 0.

2.140*. 2.

2.141*. -1; 1.

2.192. а) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$; б) $(7; +\infty)$; в) $[\log_2 3; +\infty)$; г) $(-10; +\infty)$; д) $(-\infty; -11]$; е) $[-12{,}5; +\infty)$.

2.193. $(-\infty; 5)$.

2.194. а) $[-2; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $(-\infty; -2{,}5]$; г) $(-\infty; 4)$.

2.195. $(0{,}2; +\infty)$.

2.196. а) $[-3; 3]$; б) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; в) $[1; 6]$; г) $[-5; 5]$; д) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; е) $(1; 2)$.

2.197. а) $(-2; 3)$; б) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$; в) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

2.198. а) $[0; +\infty)$; б) $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right]$; в) $(-\infty; -3{,}5)$; г) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

2.199. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 5]$; в) $(-\infty; 3)$; г) $[-2{,}5; 0{,}25]$.

2.200. а) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right]$; б) $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $(2; 2{,}8]$; г) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

2.201. а) $(1; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; в) $[0; +\infty)$; г) $(-\infty; 1)$.

2.202. а) $(-\infty; 2]$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 3)$.

2.203. а) $[3; 6]$; б) $(0; 2)$; в) $(\log_6 2; +\infty)$; г) $[3; +\infty)$.

2.204. $(-\infty; 0]$.

2.205. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

2.206. а) $(-\infty; -1)$; б) $(-\infty; 2]$.

2.207. $[0; +\infty)$.

2.208. а) $(-\infty; -8] \cup [-5; 4{,}5)$; б) $(-\infty; -3] \cup (0; 1]$.

2.209. $[-2; 0]$.

2.210. а) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; б) $[0; 1]$; в) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

2.211. $[-4; 4)$.

2.212. $[-3; 6]$.

2.213. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

2.214*. а) $[-4; 4]$; б) $(-\infty; 2{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; -4] \cup \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right] \cup [4; +\infty]$.

2.215*. а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; 0)$; в) $[1; 4] \cup (5; +\infty)$.

Я правяраю свае веды

1. б). **2.** б). **3.** а) Нарастальная; б) спадальная; в) нарастальная; г) спадальная.

5. а) $-1{,}5$; б) $8{,}25$; в) 1; г) $0{,}1$. **6.** а) $[-2{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$; г) $[3; +\infty)$.

8. -1; 0. **9.** $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$. **10.** 9.

Раздзел 3. Лагарыфмічная функцыя

3.39. а) 2; б) 2; в) 3; г) 1; д) -1; е) $\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{7}$; з) 4; і) $\frac{1}{2}$.

3.40. а) 7; б) 84; в) -1; г) 2.

3.41. а) 8; б) 2.

3.42. а) $b + 2$; б) $1 - b$.

3.43. а) 1; б) 1.

3.44. 2,2.

3.45. а) 0; б) 1.

3.46. а) -4; б) 1,5; в) 5,5; г) $6\frac{1}{3}$; д) $\frac{2}{7}$; е) $\frac{3}{28}$.

3.47. а) 0,25; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{4}{3}$.

3.48. а) 0,6; б) -2; в) $-\frac{1}{15}$; г) $\frac{3}{28}$; д) $\frac{1}{36}$; е) $1\frac{1}{3}$; ж) $\frac{8}{21}$.

3.49. 0,6.

3.50. а) 5; б) $\frac{1}{47}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\frac{1}{7}$.

3.51. а) $-\frac{1}{7}$; б) $-\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{2}$.

3.52. а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) 1.

3.53. а) 1; б) 2.

3.54. а) 6; б) $\frac{1}{2}$; в) 0,2; г) -4.

3.55. -1.

3.56. а) 1; б) $5\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{3}$.

3.57. а) 1; б) 1.

3.58. а) 3; б) 11; в) 64; г) $\sqrt{5}$; д) 121.

3.59. а) 16; б) 2; в) 4.

3.60. $\frac{a+1}{2b}$.

3.61. а) 47; б) 6,5.

3.62*. 18.

3.109. а) Спадальная; б) нарастальная; в) нарастальная; г) спадальная.

3.110. а).

3.112. а) Не; б) належыць; в) належыць; г) належыць.

3.113. а) Праходзіць; б) праходзіць.

3.114. а) $\log_3 7{,}1 > \log_3 7{,}01$; б) $\log_{0,2} 2{,}3 < \log_{0,2} 2{,}2$; в) $\log_{\frac{1}{6}} 0{,}23 > \log_{\frac{1}{6}} 0{,}46$.

3.115. y_2; y_1; y_3; y_4.

3.116. а) $\log_4 8{,}3 > 0$; б) $\log_{\sqrt{7}} 0{,}45 < 0$; в) $\lg 0{,}5 < 0$; г) $\log_{0,8} 29 < 0$; д) $\log_{\frac{3}{7}} 0{,}9 > 0$; е) $\log_{0,5} 3 < 0$.

3.119. а) $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right)$; б) $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $\left(\frac{1}{7}; 5\right)$; г) $(-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

3.120. 3.

3.121. 4; 0.

3.122.* $[4; +\infty)$.

3.177. а) 32; б) 8; в) −4; 1; г) −2.

3.178. а) 5; б) няма каранёў; в) 2; г) −3; д) −3; е) 3.

3.179. а) 3; б) 4; в) 4.

3.180. а) $\frac{1}{2}$; 4; б) $\frac{1}{2}$; 16; в) 10^{-4}; 10; г) $\frac{1}{5}$; 125.

3.181. 81.

3.182. а) 2; б) 5; в) 2.

3.183. а) $\frac{1}{3}$; 27; б) $1\frac{1}{3}$; 28.

3.184. $\frac{1}{9}$; 3.

3.185. а) 5; б) 1; 6.

3.186. 4.

3.187. 4.

3.188. а) 2; б) 2.

3.189. а) (7; −35); б) (62; 2); в) (6; −1).

3.190. а) $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$; б) (4; 8).

3.191. а) (16; 5); б) (16; 6).

3.192. $\left(2\sqrt{3}; 2\right)$; $\left(-2\sqrt{3}; -2\right)$.

3.193*. а) 3; 9; б) 0,0001; 10.

3.194*. $-\frac{1}{8}$.

3.195*. -1.

3.196*. 10.

3.197*. (4; 2).

3.198*. 0,25; 2.

3.244. а) $(0; 27)$; б) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$; в) $\left(\frac{1}{25}; +\infty\right)$; г) $[216; +\infty)$.

3.245. а) $(-1; 3)$; б) $\left[\frac{2}{9}; \frac{3}{4}\right)$; в) $(1; +\infty)$; г) $\left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right]$.

3.246. а) $\left(-10; \frac{5}{12}\right)$; б) $(3{,}75; 4]$; в) $(-23; -0{,}5]$; г) $\left(8\frac{8}{9}; 20\right)$.

3.247. а) $[-9; -8) \cup (0; 1]$; б) $[-1; 1) \cup (3; 5]$; в) $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

3.248. а) $(2{,}5; +\infty)$; б) $(0{,}2; 1) \cup (1; +\infty)$; в) $(21; +\infty)$; г) няма рашэнняў.

3.249. а) $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$; б) $(2{,}6; 5)$; в) $\left(-4\frac{2}{3}; -3\right)$; г) $(2; 3{,}5)$.

3.250. а) $(2; 4]$; б) $(3; 3{,}5]$; в) $(2; 3) \cup (4; 5)$; г) $(1; 3)$.

3.251. а) $\left(\frac{1}{27}; 27\right)$; б) $\left[\frac{1}{2}; 16\right]$; в) $(0; 9) \cup (27; +\infty)$; г) $\left(0; \frac{1}{27}\right] \cup [9; +\infty)$.

3.252. $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

3.253*. $\left[-2\frac{1}{3}; -1\right)$.

3.254*. а) $\left(1; 3-\sqrt{3}\right) \cup \left(3+\sqrt{2}; 3+\sqrt{3}\right)$; б) $(-\infty; -5]$.

Я правяраю свае веды

1. в). **2.** г). **3.** а) Нарастальнай; б) спадальнай; в) нарастальнай; г) спадальнай. **5.** а) 2; б) -5; в) $\frac{3}{20}$; г) $\frac{1}{2}$. **6.** а) 9; б) 3; в) 4; г) 4; 16. **7.** а) $[1{,}36; 2)$; б) $[4; +\infty)$; в) $[2; +\infty)$; г) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; д) $[3; 81]$. **8.** (27; 1). **9.** $\left(\frac{1}{27}; \frac{1}{3}\right)$. **10.** 6.

ЗМЕСТ

Вучэбнае выданне

Арэф'ева Ірына Глебаўна
Пірутка Вольга Мікалаеўна

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 11 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева*. Рэдактар *Л. М. Ясніцкая*. Мастацкія рэдактары *А. М. Багушэвіч, А. А. Праваловіч*. Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *А. Ю. Агафонавай*. Карэктары *В. С. Бабеня, В. С. Казіцкая, А. П. Тхір, Г. В. Алешка*.

Падпісана да друку 28.01.2020. Фармат $70 \times 90^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Умоўн. друк. арк. 19,89 + 0,29 форз. Ул.-выд. арк. 14,21 + 0,29 форз. Тыраж 11 500 экз. Заказ 180.

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь. Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013. Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецтва «Беларускі Дом друку». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/102 ад 01.04.2014. Пр. Незалежнасці, 79, 220013, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Арэф’ева, І. Г.

А89 Алгебра : вучэбны дапаможнік для 11-га класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / І. Г. Арэф’ева, В. М. Пірутка ; пер. з рус. мовы Н. М. Алганавай. — Мінск : Народная асвета. — 270 с. : іл.

ISBN 978-985-03-3166-3.

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.144я721