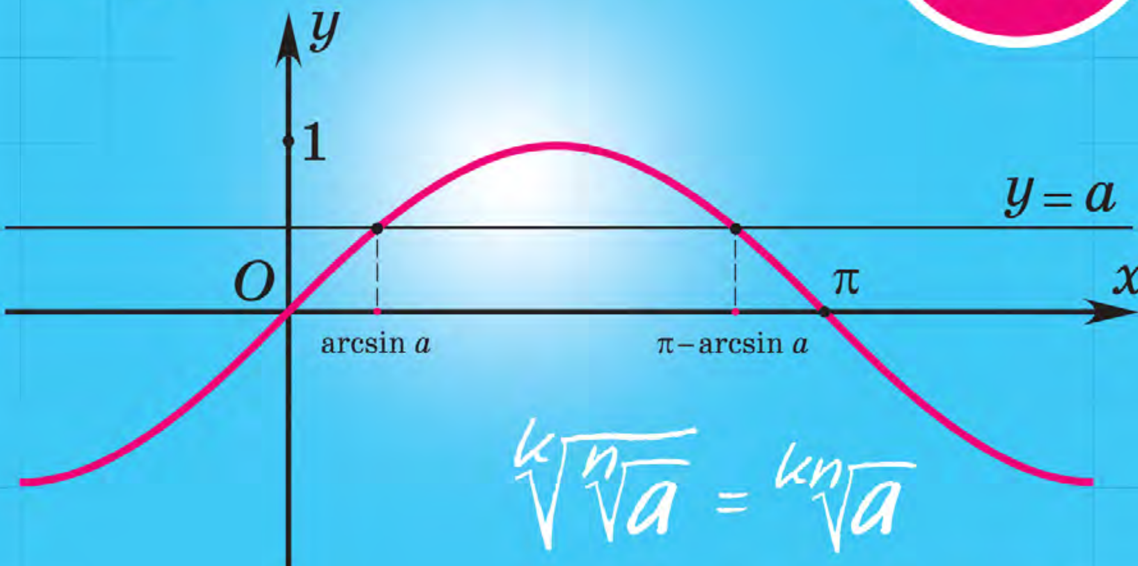
І. Г. Арэф'ева В. М. Пірутка

АЛГЕБРА

10

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$



$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

І. Г. Арэф'ева В. М. Пірутка

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск «Народная асвета» 2019

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.144я721
А89

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:
кафедра вышэйшай алгебры і абароны інфармацыі механіка-матэматычнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта (доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры *В. В. Беняш-Крывец*);
настаўнік матэматыкі кваліфікацыйнай катэгорыі «настаўнік-метадыст» ліцэя Беларускага нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта *А. Я. Цыбулька*

ISBN 978-985-03-3153-3

Шаноўныя дзесяцікласнікі!

Па гэтай кнізе вы працягнеце вывучэнне алгебры. Кніга складаецца з чатырох раздзелаў, кожны з якіх падзелены на параграфы, дзе вы сустрэнеце наступныя ўмоўныя абазначэнні:

— заданні на паўтарэнне для падрыхтоўкі да вывучэння новага матэрыялу;

— новы тэарэтычны матэрыял і метады яго прымянення;

— алгарытмы;

— важныя правілы і сцверджанні;

— дадатковы матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў;

— асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязным апісаннем паслядоўнасці дзеянняў;

— вусныя пытанні і заданні;

— заданні для работы ў класе;

— заданні для дамашняй работы;

— заданні для паўтарэння;

* — заданні павышанай складанасці.

Кожны раздзел вучэбнага дапаможніка заканчваецца рубрыкай «Выніковая самаацэнка», у якой вы знойдзеце пералік патрабаванняў да засваення тэарэтычнага матэрыялу і практычныя заданні для самаправеркі.

Для абагульнення раней вывучанага матэрыялу ў вучэбным дапаможніку дадзены раздзел «Паўтарэнне курса алгебры 7—9-х класаў».

У раздзеле «Матэматыка вакол нас» змешчаны задачы на прымяненне матэматыкі ў розных галінах жыцця.

Для тых, хто вывучае матэматыку на павышаным узроўні, дадатковы тэарэтычны матэрыял і заданні па алгебры размешчаны ў вучэбным дапаможніку «Зборнік задач па алгебры, 10 кл.».

Жадаем поспехаў!

1. Вызначце, якія з пунктаў $A(-5;\ 8)$; $B(5;\ -8)$; $C(-5;\ -8)$; $D(8;\ -5)$; $E(5;\ 8)$ сіметрычныя адносна: а) восі абсцыс; б) восі ардынат; в) пачатку каардынат.

2. Ці праўда, што:

а) $3 \in \boldsymbol{N}$; б) $0 \in \boldsymbol{N}$; в) $-2{,}6 \in \boldsymbol{Z}$; г) $-7 \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{5}{7} \in \boldsymbol{Q}$;

е) $8{,}(3) \in \boldsymbol{Q}$; ж) $\sqrt{7} \in \boldsymbol{I}$; з) $\pi \in \boldsymbol{I}$; і) $2 \in \boldsymbol{R}$; к) $-\sqrt{13} \in \boldsymbol{R}$?

3. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{330 \cdot 10^{-3}}{22 \cdot 10^{2}}$. Вынік запішыце ў стандартным выглядзе.

4. Скараціце дроб $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 7a + 6}$.

5. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{x-4}{3} - \frac{x+1}{2} = 3$; б) $(x-4)^2 - 2x = 7$;

в) $\frac{4}{x^2-9} + \frac{x+1}{x-3} = 1$; г) $9x^4 + 8x^2 - 1 = 0$.

6. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(3\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right)$; в) $\frac{21\sqrt{20}}{\sqrt{125} - \sqrt{45}}$.

7. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} x < 2, \\ 2x - 1 \leqslant 7. \end{array}\right.$

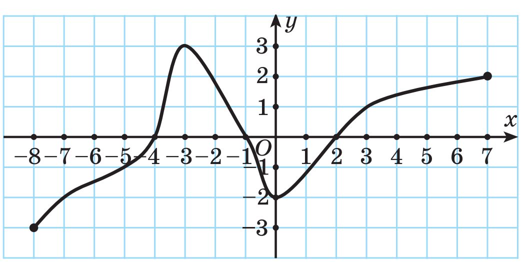
8. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt{4x^2 - 5x + 1}$.

9. Метадам інтэрвалаў рашыце няроўнасць $\frac{(x-4)^2(x+5)}{x-1} \leqslant 0$.

10. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2y = x + 2, \\ 2xy = 3. \end{cases}$

11. На рысунку 1 паказаны графік функцыі $y = f(x)$, зададзенай на мностве $[-8;\ 7]$. Знайдзіце:

а) мноства значэнняў функцыі; б) нулі функцыі; в) прамежкі знакапастаянства функцыі; г) прамежкі манатоннасці функцыі; д) значэнне выразу $f(-5) + f(3)$; е) усе карані ўраўнення $f(x) = -2$.



Рыс. 1

12. Запішыце формулу функцыі, графік якой атрымліваецца з графіка функцыі $y = \sqrt{x}$ зрухам яго: а) на 6 адзінак улева ўздоўж восі абсцыс і на 4 адзінкі ўверх уздоўж восі ардынат; б) на 5 адзінак управа ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат; в) на 1 адзінку ўлева ўздоўж восі абсцыс; г) на 9 адзінак уверх уздоўж восі ардынат.

13. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

$y = -(x+5)^2$; $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$; $y = -2(x-6)^2 + 3$; $y = (x-1)^2 + 2$.

Якая з дадзеных функцый з'яўляецца цотнай?

14. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\sqrt{3} - 2\right)^2 + \sqrt{\left(6 - 4\sqrt{3}\right)^2}$.

15. Вылічыце: $(0{,}0001)^{-4} \cdot 10^{-15}$.

16. Скараціце дроб $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$.

17. Рашыце ўраўненне:

а) $5(x-1) + 3 = 3x - 4$; б) $\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{4 - x}{x - 5} = 0$.

18. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt{27} + \sqrt{3}\right)^2$; б) $\left(2\sqrt{5} + 1\right)\left(1 - 2\sqrt{5}\right)$.

19. Рашыце няроўнасць:

а) $7x - 1 \leqslant 4(x+2)$; б) $6x^2 - x - 1 > 0$; в) $\frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-1)} \leqslant 0$.

20. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \sqrt{16 - x^2}$.

21. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x^2 - y = 15, \\ y - x = 5. \end{cases}$

22. Пабудуйце парабалу $y = -x^2 + 4$ і прамую $y = x - 2$ і знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння гэтых графікаў.

23. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу $\left(3 - \sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{\left(8 - 6\sqrt{2}\right)^2}$.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 10» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 10 клас».

Раздзел 1

ТРЫГАНАМЕТРЫЯ

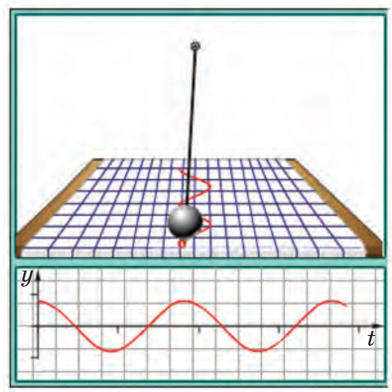
§ 1. Адзінкавая акружнасць. Градусная і радыянная мера адвольнага вугла

1.1. Вызначце, якія з дадзеных пунктаў каардынатнай плоскасці знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад пачатку каардынат:

$A(-4;\ 3);\ B(3;\ 4);\ C(4;\ -3);\ D(0{,}75;\ -0{,}4);\ E\left(-\frac{3}{4};\ -\frac{2}{5}\right).$

1.2. Назавіце каардынаты пунктаў, сіметрычных пунктам $A(3;\ 1)$ і $B(-1;\ 5)$ адносна: а) восі ардынат; б) восі абсцыс; в) пачатку каардынат.

На рысунку 2 адлюстраваны ваганні маятніка і паказаны відарыс графіка функцыі, якая апісвае зрушэнне маятніка ад становішча раўнавагі ў залежнасці ад часу. Вывучэнне працэсу вагання маятніка, а таксама многіх іншых працэсаў у фізіцы (механічныя, электрамагнітныя ваганні, хвалі і г. д.) прыводзіць да неабходнасці разглядаць трыганаметрычныя функцыі рэчаіснага аргумента.

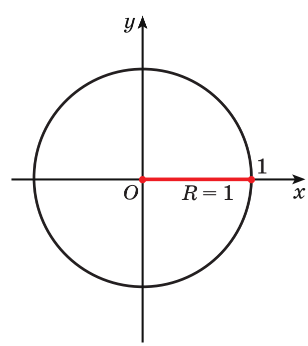


Рыс. 2

Для вывучэння трыганаметрычных функцый выкарыстоўваецца паняцце адзінкавай акружнасці.

Адзінкавую акружнасць называюць таксама каардынатнай акружнасцю.

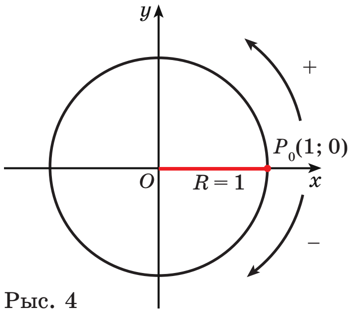
Азначэнне. Акружнасць на каардынатнай плоскасці адзінкавага радыуса з цэнтрам у пачатку каардынат (рыс. 3) называецца **адзінкавай акружнасцю.**



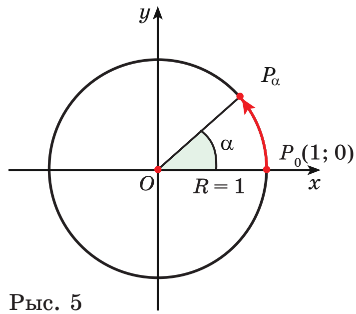
Рыс. 3

Для таго каб задаць каардынатную акружнасць, трэба пазначыць:

- пачатак адліку — пункт $P_0(1;\ 0)$;
- напрамак руху пункта па акружнасці (супраць гадзіннікавай стрэлкі — дадатны, а па гадзіннікавай стрэлцы — адмоўны (рыс. 4)).



Рыс. 4



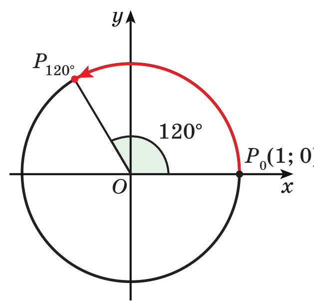
Рыс. 5

Пункты на акружнасці будзем атрымліваць шляхам павароту пункта $P_0(1; 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на зададзены вугал.

Пункт P_α (рыс. 5) атрыманы паваротам

- пункта $P_0(1; 0)$ (пазначаецца пункт, які паварочваецца)
- вакол пачатку каардынат (пазначаецца цэнтр павароту)
- на вугал α (пазначаецца, на які вугал выконваецца паварот — вугал павароту).

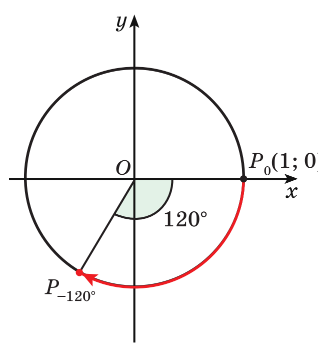
Такім чынам, пры павароце пункта P_0 вакол пачатку каардынат на вугал α у зададзеным напрамку атрымліваецца пункт P_α адзінкавай акружнасці.



Рыс. 6

Прыклад 1. Пабудаваць на адзінкавай акружнасці пункт $P_{120°}$.

Рашэнне. Пункт $P_{120°}$ атрымліваем паваротам **супраць** гадзіннікавай стрэлкі пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 120° (рыс. 6).



Рыс. 7

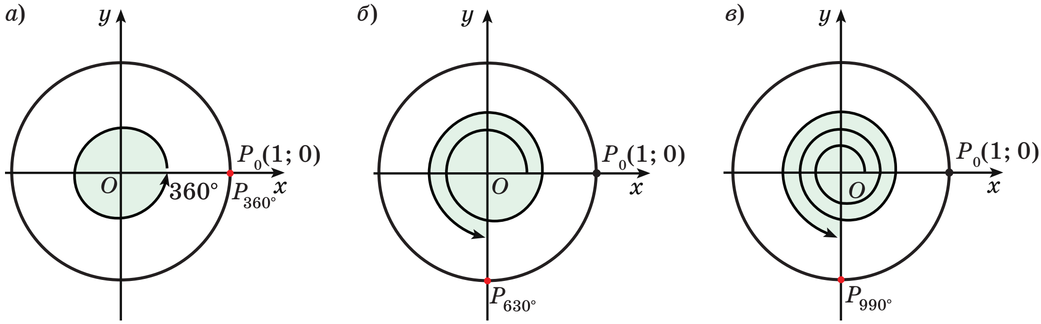
Прыклад 2. Пабудаваць на адзінкавай акружнасці пункт $P_{-120°}$.

Рашэнне. Пункт $P_{-120°}$ атрымліваем паваротам **па** гадзіннікавай стрэлцы пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 120° (рыс. 7).

Прыклад 3. Пабудаваць на адзінкавай акружнасці пункт:

а) $P_{360°}$; б) $P_{630°}$; в) $P_{990°}$.

Рашэнне. а) Паколькі паварот на 360° адпавядае аднаму поўнаму абароту, то неабходна выканаць паварот пункта $P_0(1; 0)$ супраць гадзіннікавай стрэлкі на 360° (поўны абарот). Пункт $P_{360°}$ супадае з пунктам P_0 (рыс. 8, *а*).



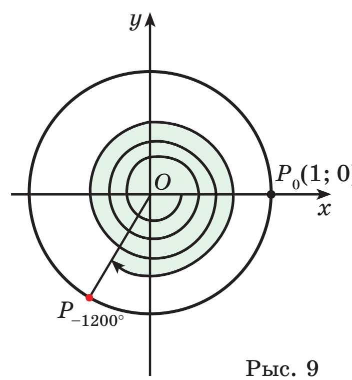
Рыс. 8

б) Паколькі $630° = 360° + 270°$, то неабходна выканаць адзін поўны абарот і яшчэ паварот пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат супраць гадзіннікавай стрэлкі на вугал 270° (рыс. 8, *б*).

в) Паколькі $990° = 2 \cdot 360° + 270°$, то трэба выканаць два поўныя абароты і яшчэ паварот пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат супраць гадзіннікавай стрэлкі на вугал 270° (рыс. 8, *в*).

Прыклад 4. Пабудаваць на адзінкавай акружнасці пункт $P_{-1200°}$.

Рашэнне. $-1200° = -360° \cdot 3 + (-120°)$, таму трэба выканаць тры поўныя абароты і яшчэ паварот пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат па гадзіннікавай стрэлцы на вугал 120° (рыс. 9).



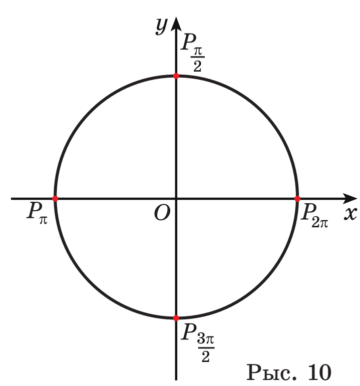
Рыс. 9

Радыяннае вымярэнне вуглоў

Па формуле даўжыні акружнасці $C = 2\pi R$ атрымаем, што даўжыня адзінкавай акружнасці ($R = 1$) роўна 2π.

На адзінкавай акружнасці (рыс. 10) лёгка адзначыць пункты $P_{\frac{\pi}{2}}$; P_{π}; $P_{\frac{3\pi}{2}}$; $P_{2\pi}$, якія адпавядаюць вуглам павароту 90° (чвэрць акружнасці), 180° (палова акружнасці), 270° (тры чвэрці акружнасці), 360° (уся акружнасць).

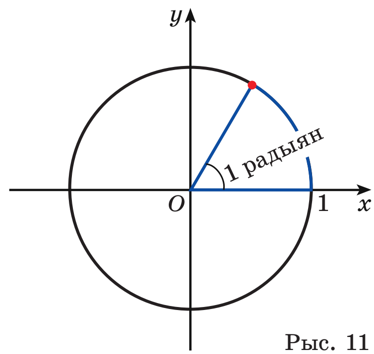
Лікі $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$; 2π — гэта радыянная мера вуглоў, градусная мера якіх адпаведна роўна 90°, 180°, 270°, 360°.



Рыс. 10

Вугал у 1 радыян (ад лац. *radius* — прамень, радыус) — гэта цэнтральны вугал, які абапіраецца на дугу, даўжыня якой роўна радыусу акружнасці.

На рысунку 11 адзначаны пункт адзінкавай акружнасці, які адпавядае вуглу ў 1 радыян. Даўжыня дугі адзінкавай акружнасці, якая адпавядае вуглу ў 1 радыян, роўна 1.



Рыс. 11

Паколькі 2π радыян адпавядае $360°$, то градусная мера вугла ў 1 радыян роўна:

$$1\text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°.$$

Скарочанае абазначэнне радыяна «рад» часцей за ўсё не пішуць.

$$180° = \pi\text{ рад};$$
$$1° = \frac{\pi}{180}\text{ рад}; \; 1\text{ рад} = \frac{180°}{\pi}$$

Каб выразіць **градусную** меру вугла $n°$ **у радыяннай**, трэба $n°$ памножыць на $\frac{\pi}{180°}$.

Напрыклад,

$$30° = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6};$$

$$-450° = -450° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{5\pi}{2}.$$

$$120° = 120° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$$
$$-225° = -225° \cdot \frac{\pi}{180°} = -\frac{5\pi}{4}$$

Каб выразіць **радыянную** меру вугла α **у градуснай**, трэба лік α памножыць на $\frac{180°}{\pi}$.

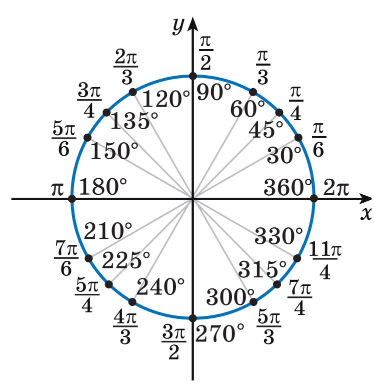
Напрыклад,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°;$$

$$2\text{ рад} = 2 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 2 \cdot 57° = 114°.$$

$$-\frac{9\pi}{4} = -\frac{9\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = -405°$$
$$5\text{ рад} = 5 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 5 \cdot 57° = 285°$$

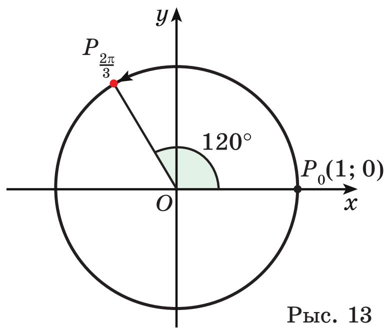
На рысунку 12 паказана адпаведнасць паміж градуснай і радыяннай мерай некаторых вуглоў.



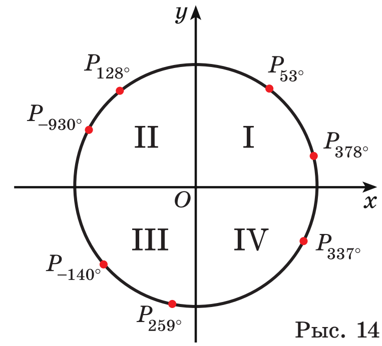
Рыс. 12

Прыклад 5. Пабудаваць на адзінкавай акружнасці пункт $P_{\frac{2\pi}{3}}$.

Рашэнне. Пункт $P_{\frac{2\pi}{3}}$ атрымліваем паваротам супраць гадзіннікавай стрэлкі пункта $P_0(1;\,0)$ вакол пачатку каардынат на вугал $\frac{2\pi}{3} = 120°$ (рыс. 13).



Рыс. 13



Рыс. 14

У залежнасці ад таго, у якую чвэрць каардынатнай плоскасці пападае пункт P_α, гавораць, што ў такой жа чвэрці знаходзіцца вугал α.

Напрыклад, вуглы 53° і 378° знаходзяцца ў першай чвэрці, вуглы 128° і –930° знаходзяцца ў другой чвэрці, вуглы 259° і –140° знаходзяцца ў трэцяй чвэрці, а вугал 337° знаходзіцца ў чацвёртай чвэрці (рыс. 14).

Вуглы 0°; 90°; 180°; 270°; 360°; ... адпавядаюць межам чвэрцяў.

Прыклад 6. Вызначце, у якой чвэрці знаходзіцца вугал 3 рад.

Рашэнне. $3 \text{ рад} \approx 3 \cdot 57° = 171°$. Паколькі $90° < 171° < 180°$ $\left(\frac{\pi}{2} < 3 \text{ рад} < \pi\right)$, то дадзены вугал знаходзіцца ў другой чвэрці.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

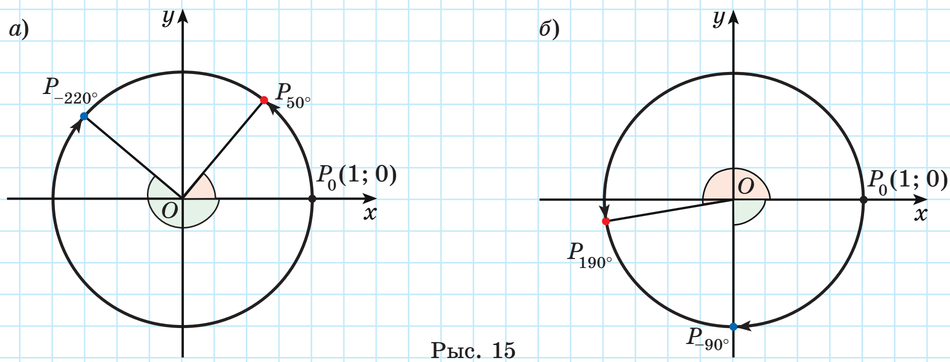
1. На адзінкавай акружнасці адзначце пункт, які атрымліваецца паваротам пункта $P_0(1;\,0)$ вакол пачатку каардынат на вугал:

а) 50°; б) –220°; в) –90°; г) 190°.

Рашэнне. а) Пункт $P_{50°}$ атрымліваем паваротам **супраць** гадзіннікавай стрэлкі пункта $P_0(1;\,0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 50° (рыс. 15, *а*).

б) Пункт $P_{-220°}$ атрымліваем паваротам **па** гадзіннікавай стрэлцы пункта $P_0(1;\,0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 220° (гл. рыс. 15, *а*).

в) Пункт $P_{-90°}$ атрымліваем паваротам **па** гадзіннікавай стрэлцы пункта $P_0(1;\,0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 90° (рыс. 15, *б*).



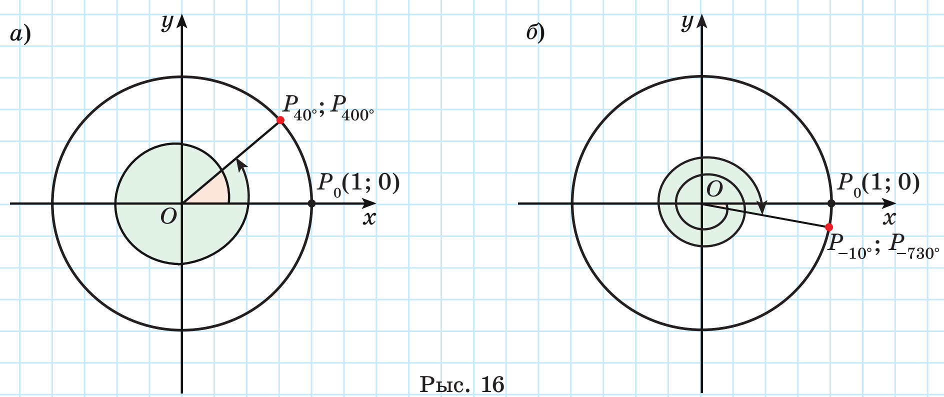
Рыс. 15

г) Пункт $P_{190°}$ атрымліваем паваротам **супраць** гадзіннікавай стрэлкі пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 190° (гл. рыс. 15, *б*).

2. Пакажыце, што пункты:
а) $P_{40°}$ і $P_{400°}$; б) $P_{-10°}$ і $P_{-730°}$ — адзінкавай акружнасці супадаюць.

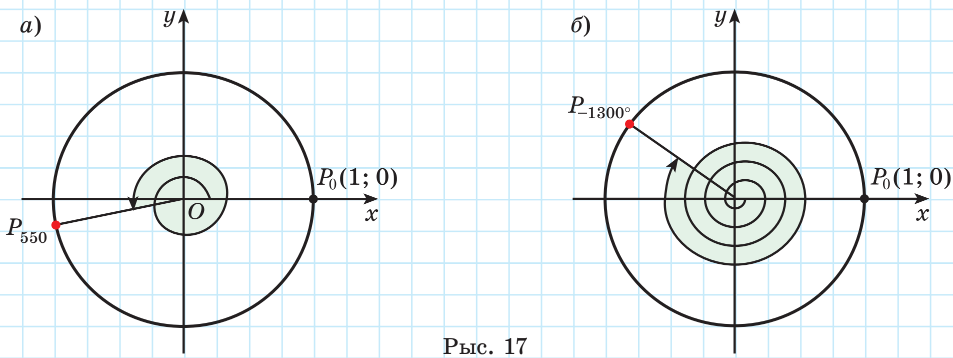
Рашэнне. а) Паколькі $400° = 360° + 40°$, то, для таго каб атрымаць пункт $P_{400°}$, трэба выканаць адзін поўны абарот і яшчэ паварот пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат супраць гадзіннікавай стрэлкі на вугал 40° (рыс. 16, *а*).

б) $-730° = -360° \cdot 2 + (-10°)$ (рыс. 16, *б*).



Рыс. 16

3. На адзінкавай акружнасці адзначце пункт, які атрымліваецца паваротам пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал:
а) 550°; б) −1300°.



Рыс. 17

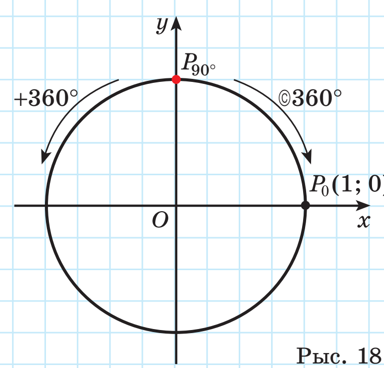
Рашэнне. а) Паколькі $550° = 360° + 190°$, то выканаем адзін поўны абарот і яшчэ паварот пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат супраць гадзіннікавай стрэлкі на вугал $190°$ (рыс. 17, *а*).

б) Паколькі $-1300° = -360° \cdot 3 + (-220°)$, то выканаем тры поўныя абароты і яшчэ паварот пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат па гадзіннікавай стрэлцы на вугал $220°$ (рыс. 17, *б*).

4. Запішыце ўсе вуглы α, для якіх пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{90°}$; б) $P_{-217°}$.

Рашэнне. а) Адзначым на адзінкавай акружнасці пункт $P_{90°}$. Паколькі, напрыклад, $450° = 90° + 360°$, $810° = 90° + 2 \cdot 360°$, $-270° = 90° - 360°$ і да т. п., то пункты адзінкавай акружнасці $P_{450°}$, $P_{810°}$, $P_{-270°}$ супадаюць з пунктам $P_{90°}$ адзінкавай акружнасці. Відавочна, што існуе бясконца многа вуглоў α, для якіх пункты адзінкавай акружнасці P_α і $P_{90°}$ супадаюць. Гэтыя вуглы могуць быць атрыманы ў выніку павароту пункта $P_{90°}$ на цэлы лік поўных абаротаў па або супраць гадзіннікавай стрэлкі (рыс. 18), такім чынам, $\alpha = 90° + 360° \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$.



Рыс. 18

б) $\alpha = -217° + 360° \cdot n, n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Выразіце ў радыянах вугал:

а) $150°$; б) $20°$; в) $-80°$; г) $2000°$.

Рашэнне.

а) $150^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{6}$; б) $20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{9}$;

в) $80^\circ \quad \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{4\pi}{9}$; г) $2000^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{100\pi}{9}$.

6. Выразіце ў градусах вугал:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\quad}{4}$; в) $\frac{7\pi}{18}$; г) $\frac{4\pi}{3}$; д) 4; е) –3.

Рашэнне.

а) $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ$; б) $\frac{\quad}{4} \quad \frac{\quad}{4} \cdot \frac{180}{\quad} \quad 45$;

в) $\frac{7\pi}{18} = \frac{7\pi}{18} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 70^\circ$; г) $\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$;

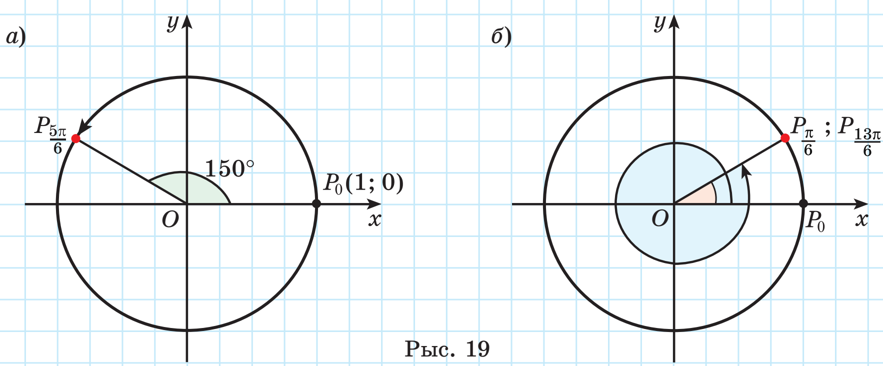
д) 4 рад $\quad 4 \cdot 57 \quad 228$; е) 3 рад $\quad 3 \cdot 57 \quad 171$.

7. На адзінкавай акружнасці адзначце пункт, які атрымліваецца паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал:

а) $\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

Рашэнне. а) Паколькі $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$, то выканаем паварот пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 150° (рыс. 19, *а*).

б) Паколькі $\frac{13}{6} \quad 2 \quad \frac{\quad}{6}$, то пункт $P_{\frac{13\pi}{6}}$ супадае з пунктам $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рыс. 19, *б*).



Рыс. 19

?

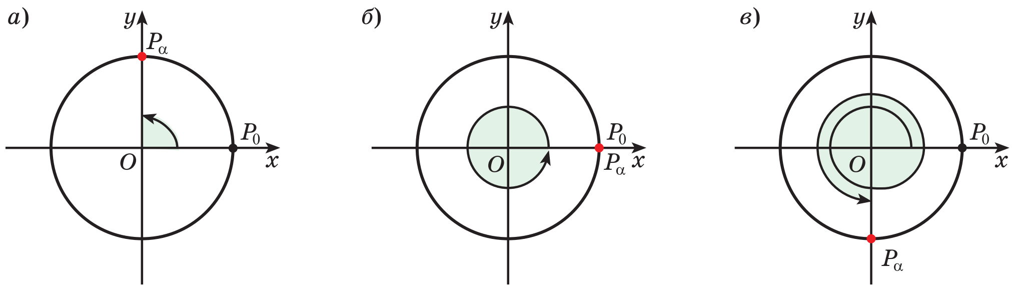
1. Выберыце вуглы, якія адпавядаюць пункту $P_0(1;\ 0)$ адзінкавай акружнасці:

а) 0°; б) 180°; в) 90°; г) –360°.

2. Якія з дадзеных пунктаў адзінкавай акружнасці супадаюць:

а) P_α; б) $P \quad _{180}$; в) $P \quad _{360}$; г) $P \quad _{90}$?

1.3. Знайдзіце градусную меру вугла, паказанага на рысунку 20.

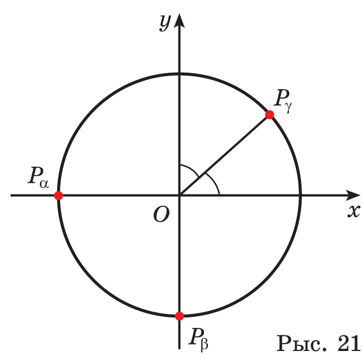


Рыс. 20

1.4. Начарціце адзінкавую акружнасць і адзначце пункты, якія атрымліваюцца паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал:

а) 150°; 210°; 540°; –45°; –135°; –720°;

б) –43°; 137°; –456°; 280°; –189°; 763°.



Рыс. 21

1.5. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α, P_β і P_γ, якія адпавядаюць вуглам павароту α, β і γ (рыс. 21). Запішыце градусныя меры вуглоў α, β і γ, калі вядома, што яны змяшчаюцца ў прамежку:

а) ад 0° да 360°;

б) ад –360° да 0°;

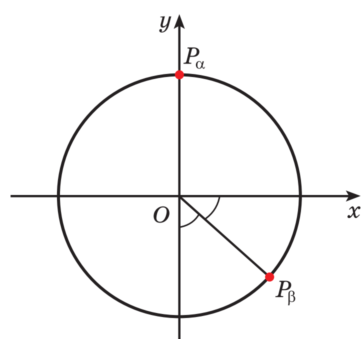
в) ад 720° да 1080°.

1.6. Запішыце два дадатныя і два адмоўныя вуглы α, для якіх пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{45°}$; б) $P_{-330°}$.

1.7. Сярод вуглоў павароту α, роўных 770°; 480°; –50°; 1560°; –240°; –310°, знайдзіце такія, для якіх пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{50°}$; б) $P_{120°}$.



Рыс. 22

1.8. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α і P_β, якія адпавядаюць вуглам павароту α і β (рыс. 22). Запішыце ўсе такія вуглы α і β.

1.9. Запішыце ўсе вуглы α, для якіх пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{180°}$; б) $P_{117°}$; в) $P_{245°}$; г) $P_{-107°}$.

1.10. Выразіце ў градусах вугал, радыянная мера якога роўна:

а) $-\pi$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{12}$; г) $\frac{3}{5}$.

1.11. Выразіце ў радыянах вугал:

а) 10°; б) –135°; в) –1200°; г) 720°.

1.12. Выразіце ў градусах вугал:

а) 3 рад; б) 0,8 рад; в) –6 рад; г) –1,1 рад.

1.13. Начарціце адзінкавую акружнасць і адзначце пункты, якія атрымліваюцца паваротам пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал: $\frac{}{6}$; $\frac{}{4}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{7}{6}$. Колькі розных пунктаў атрымалася?

1.14. Вызначце, вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі:

а) $\alpha = 126°$; б) $\alpha = -189°$; в) $\alpha = 722°$; г) $\frac{}{3}$; д) $\frac{3}{4}$;

е) $\frac{11}{5}$; ж) $\alpha = 2$; з) $\alpha = -4$; і) $\alpha = 7$; к) $\alpha = -3$.

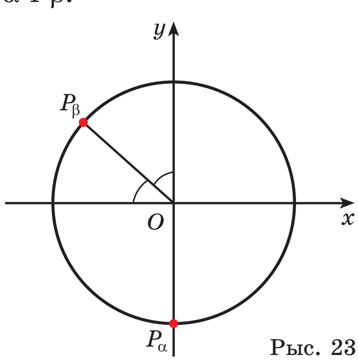
1.15. Вызначце, у якой чвэрці знаходзіцца вугал α, калі:

а) $< \quad < \frac{3}{2}$; б) $\frac{}{2} < \quad <$; в) $\frac{3}{2} < \quad < 2$; г) $\frac{3}{2} < \quad <$.

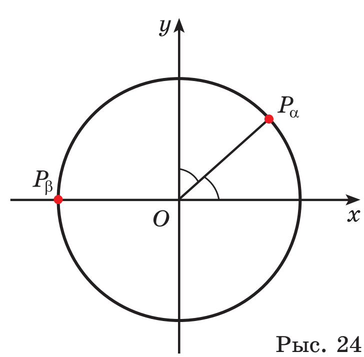
1.16. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α і P_β, якія адпавядаюць вуглам павароту α і β (рыс. 23). Запішыце радыянныя меры вуглоў α і β, калі вядома, што яны змяшчаюцца ў прамежку:

а) ад 0 да 2π; б) ад -2π да 0; в) ад 2π да 4π.

1.17. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α і P_β, якія адпавядаюць вуглам павароту α і β (рыс. 24). Запішыце (у радыянах) усе такія вуглы α і β.



Рыс. 23



Рыс. 24

1.18. Начарціце адзінкавую акружнасць і адзначце пункты, якія атрымліваюцца паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал 1 рад; 3 рад; –4 рад; 6 рад.

1.19. Колькі поўных абаротаў утрымлівае вугал, радыянная мера якога роўна: 4π; -6π; 12π; -100π? У якім напрамку пункт $P_0(1;\ 0)$ рухаецца па акружнасці ў кожным выпадку?

1.20. Як размешчаны на адзінкавай акружнасці пункты, атрыманыя паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ на вуглы:

а) α і $\alpha + 2\pi$;

б) α і $\alpha + \pi$;

в) α і $-\alpha$?

1.21. Вызначце від трохвугольніка, калі радыянная мера двух яго вуглоў роўна $\frac{2\pi}{5}$ і $\frac{3\pi}{10}$.

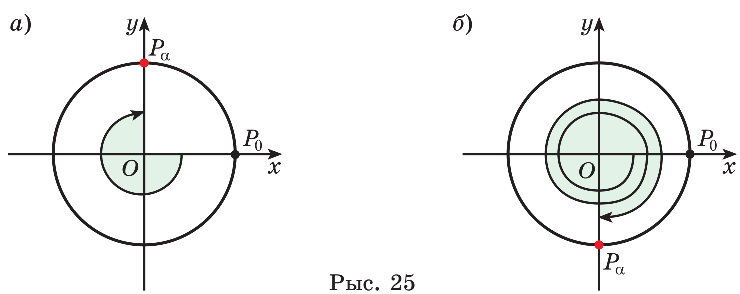
1.22. Выразіце ў градусах і радыянах вугал, на які паварочваецца мінутная стрэлка гадзінніка за 15, 20, 30 і 60 мінут.

1.23. Выразіце ў градусах і радыянах вугал, на які на працягу адных сутак паварочваецца:

а) гадзіннікавая стрэлка гадзінніка;

б) мінутная стрэлка гадзінніка.

1.24. Знайдзіце градусную меру вугла, паказанага на рысунку 25.



Рыс. 25

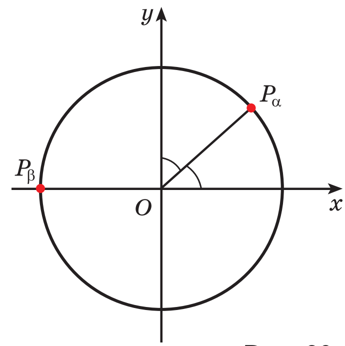
1.25. Начарціце адзінкавую акружнасць і адзначце пункты, якія атрымліваюцца паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал:

а) 120°; –90°; 450°; 240°;

б) 38°; 185°; –295°; 724°.

1.26. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α і P_β, якія адпавядаюць вуглам павароту α і β (рыс. 26). Запішыце градусныя меры вуглоў α і β, калі вядома, што яны знаходзяцца ў прамежку:

а) ад 0° да 360°; б) ад –360° да 0°;
в) ад 360° да 720°.



Рыс. 26

1.27. Запішыце два дадатныя і два адмоўныя вуглы α, для якіх пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{225°}$; б) $P_{-60°}$.

1.28. Запішыце ўсе вуглы α, для якіх пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{90°}$; б) $P_{-68°}$; в) $P_{318°}$; г) $P_{-125°}$.

1.29. Выразіце ў градусах вугал: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{11}{18}$; в) $\frac{5}{2}$.

1.30. Выразіце ў радыянах вугал: а) 18°; б) –60°; в) –1080°.

1.31. Выразіце ў градусах вугал: а) 4 рад; б) –0,5 рад.

1.32. Начарціце адзінкавую акружнасць і адзначце пункты, якія атрымліваюцца паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал: $\frac{}{3}$; $\frac{3}{4}$; ; $\frac{7}{6}$; $\frac{7}{3}$.

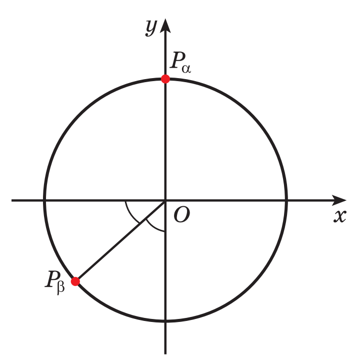
1.33. Вызначце, вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі:

а) α = 213°; б) α = –352°; в) $\frac{7}{10}$; г) $\frac{}{6}$;
д) α = 4; е) α = –1; ж) α = 9; з) α = –5.

1.34. Вызначце, у якой чвэрці знаходзіцца вугал α, калі:

а) 0° < α < 90°; б) 180° < α < 270°;
в) –180° < α < –90°; г) 360° < α < 450°.

1.35. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α і P_β, якія адпавядаюць вуглам павароту α і β (рыс. 27). Запішыце ўсе такія вуглы α і β, выкарыстаўшы радыянную меру.



Рыс. 27

1.36. Знайдзіце градусную меру ўсіх вуглоў трохвугольніка, калі радыянная мера двух яго вуглоў роўна $\frac{\pi}{15}$ і $\frac{3\pi}{15}$.

1.37. Выразіце ў градусах і радыянах вугал, на які на працягу дзвюх гадзін павернецца:

а) мінутная стрэлка гадзінніка;
б) секундная стрэлка гадзінніка.

1.38. З дадзеных пунктаў выберыце пункт з адмоўнай абсцысай:
а) $A(-2;\ 3)$; б) $B(5;\ -8)$; в) $C(0;\ -7)$; г) $D(4;\ 0)$.

1.39. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $9 + 2\frac{3}{8}$; б) $9 - 2\frac{3}{8}$; в) $2\frac{3}{8} - 9$; г) $-9 - 2\frac{3}{8}$; д) $-2\frac{3}{8} + 9$.

§ 2. Азначэнне сінуса і косінуса адвольнага вугла

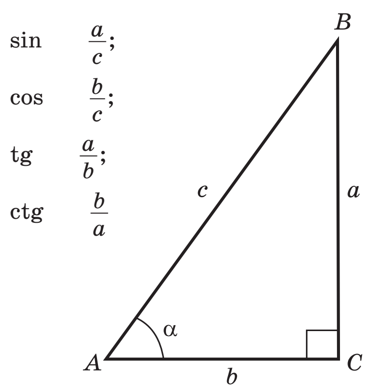
1.40. З пунктаў $A(-4;\ 0)$; $B(0;\ 3)$; $C(4;\ 1)$; $D(1;\ 0)$; $E\ 0;\ \frac{1}{2}$ выберыце пункты, якія ляжаць на восі:
а) абсцыс; б) ардынат.

1.41. З пунктаў $A(-4;\ 6)$; $B(3;\ -7)$; $C(-1;\ -10)$; $D(0{,}1;\ -0{,}4)$; $E(-0{,}3;\ -0{,}4)$; $F(1;\ 0{,}5)$ выберыце пункты, якія ляжаць у:
а) першай чвэрці; б) другой чвэрці;
в) трэцяй чвэрці; г) чацвёртай чвэрці.

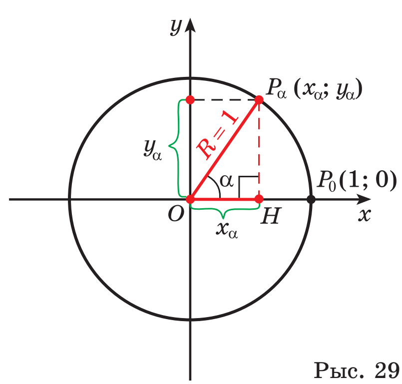
1.42. Назавіце некалькі пунктаў, якія ляжаць:
а) на восі ардынат; б) на восі абсцыс;
в) у трэцяй чвэрці; г) у чацвёртай чвэрці.

Пры вывучэнні геаметрыі вы разглядалі адносіны старон у прамавугольным трохвугольніку і пазнаёміліся з паняццямі сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вострага вугла (рыс. 28).

Пабудуем пункт $P_\alpha(x_\alpha;\ y_\alpha)$ адзінкавай акружнасці паваротам пункта P_0 вакол пачатку каардынат на вугал α (рыс. 29).



Рыс. 28



Рыс. 29

Разгледзім прамавугольны трохвугольнік $P_\alpha OH$, у якім гіпатэнуза $P_\alpha O$ роўна 1 (радыусу адзінкавай акружнасці). Па азначэнні сінуса і косінуса вострага вугла атрымаем: $\sin \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{1}$, $\cos \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\quad}{1}$.

Такім чынам, сінус вугла α роўны ардынаце пункта P_α, а косінус вугла α роўны абсцысе пункта P_α.

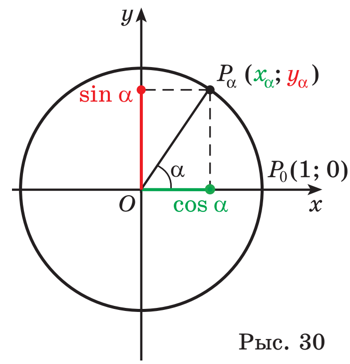
Паколькі ў трыганаметрыі разглядаюцца вуглы $\alpha \in (-\infty; +\infty)$, то дадзім азначэнне сінуса і косінуса для любога вугла α.

Азначэнне. Сінусам вугла α называецца **ардыната** пункта P_α, атрыманага паваротам пункта $P_0(1; 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на вугал α:

$$\sin\alpha = y_\alpha \text{ (рыс. 30).}$$

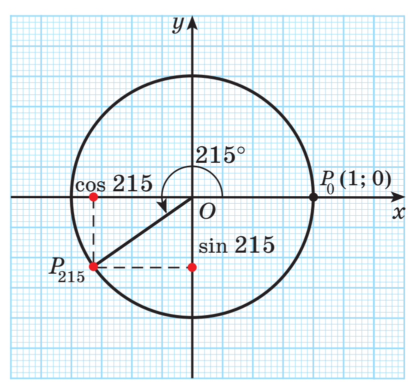
Косінусам вугла α называецца **абсцыса** пункта P_α, атрыманага паваротам пункта $P_0(1; 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на вугал α:

$$\cos\alpha = x_\alpha \text{ (гл. рыс. 30).}$$



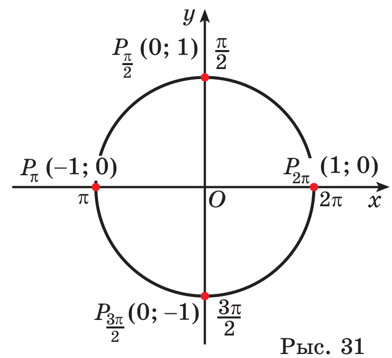
Рыс. 30

Для таго каб знайсці сінус і косінус адвольнага вугла α, трэба:

① Пабудаваць пункт P_α адзінкавай акружнасці. ② Знайсці ардынату пункта P_α: $\sin\alpha = y_\alpha$. ③ Знайсці абсцысу пункта P_α: $\cos\alpha = x_\alpha$.	Знайдзіце сінус і косінус вугла $\alpha = 215°$. ①  ② $\sin 215 \quad y_{215} \quad 0{,}6$. ③ $\cos 215 \quad x_{215} \quad 0{,}8$.

Значэнні сінуса і косінуса адвольнага вугла з дапамогай адзінкавай акружнасці ў асноўным можна вызначыць толькі прыбліжана.

Аднак для некаторых вуглоў значэнні сінуса і косінуса можна вызначыць дакладна. Знойдзем значэнні сінуса і косінуса для вуглоў, якія адпавядаюць пунктам перасячэння акружнасці з восямі каардынат (0; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3\pi}{2}$ і 2π). Вызначым $\sin\frac{\pi}{2}$ і $\cos\frac{\pi}{2}$. Вуглу $\frac{}{2}$ адпавядае пункт $P_{\frac{\pi}{2}}$, які мае каардынаты (0; 1). Па азначэнні сінус вугла $\frac{}{2}$ роўны ардынаце пункта $P_{\frac{\pi}{2}}$, значыць, $\sin\frac{}{2}$ 1. Косінус вугла $\frac{}{2}$ роўны абсцысе пункта $P_{\frac{\pi}{2}}$, г. зн. $\cos\frac{}{2}$ 0 (рыс. 31).



Рыс. 31

Выкарыстаўшы азначэнне сінуса і косінуса вугла α, атрымаем, што: $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$; $\sin$ 0; $\cos$ 1; $\sin\frac{3}{2}$ 1; $\cos\frac{3}{2}$ 0; $\sin 2$ 0; $\cos 2$ 1.

Паколькі ардынаты і абсцысы пунктаў адзінкавай акружнасці змяняюцца ад –1 да 1, то значэнні сінуса і косінуса адвольнага вугла належаць прамежку [–1; 1], г. зн. $1 \leqslant \sin \leqslant 1$ і $1 \leqslant \cos \leqslant 1$.

$$1 \leqslant \sin \leqslant 1$$
$$1 \leqslant \cos \leqslant 1$$

Напрыклад, высветлім, ці можа $\sin\alpha$ прымаць значэнні, роўныя: $\frac{1}{3}$; $\sqrt{3}$; -2; $-0{,}7$.

Значэнні сінуса адвольнага вугла належаць адрэзку [–1; 1], значыць, $\sin\alpha$ можа прымаць значэнні, роўныя $\frac{1}{3}$ і $-0{,}7$, бо $\frac{1}{3}$ 1; 1 і 0,7 1; 1 . Паколькі $\sqrt{3}$ 1; 1 і 2 1; 1 , то $\sin\alpha$ не можа прымаць значэнні, роўныя $\sqrt{3}$ і –2.

Па азначэнні сінуса і косінуса вугла α, сінус вугла α роўны ардынаце пункта P_α, а косінус вугла α роўны абсцысе гэтага пункта. Значыць, знакі $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ супадаюць са знакамі ардынаты і абсцысы пункта P_α адпаведна.

Прыклад 1. Вызначце знак выразу:

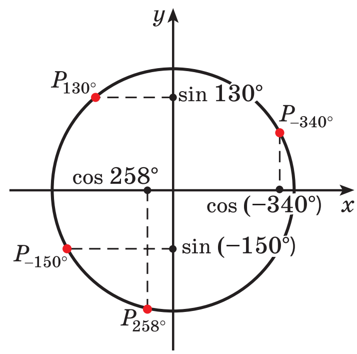
а) $\sin 130°$; б) $\cos 258°$; в) $\sin(-150°)$; г) $\cos(-340°)$.

Рашэнне. а) Паколькі 130° — вугал другой чвэрці (рыс. 32), а ардынаты пунктаў адзінкавай акружнасці, якія знаходзяцца ў другой чвэрці, дадатныя, то $\sin 130° > 0$.

б) Паколькі 258° — вугал трэцяй чвэрці (гл. рыс. 32), а абсцысы пунктаў адзінкавай акружнасці, якія знаходзяцца ў трэцяй чвэрці, адмоўныя, то $\cos 258° < 0$.

в) Паколькі –150° — вугал трэцяй чвэрці (гл. рыс. 32), а ардынаты пунктаў адзінкавай акружнасці, якія знаходзяцца ў трэцяй чвэрці, адмоўныя, то $\sin(-150°) < 0$.

г) Паколькі –340° — вугал першай чвэрці (гл. рыс. 32), а абсцысы пунктаў адзінкавай акружнасці, якія знаходзяцца ў першай чвэрці, дадатныя, то $\cos(-340°) > 0$.



Рыс. 32

З геаметрыі нам вядомы значэнні сінусаў і косінусаў вострых вуглоў (гл. табл.).

Градусы	30°	45°	60°
Радыяны	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

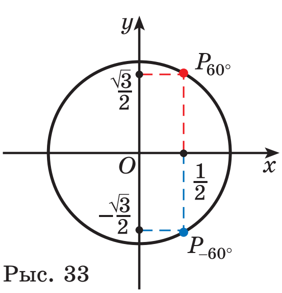
З дапамогай гэтых значэнняў можна знаходзіць значэнні сінусаў і косінусаў некаторых іншых вуглоў α.

Прыклад 2. Вылічыце:

а) $\sin(\ 60\ )$ і $\cos(\ 60\ )$; б) $\sin 120°$ і $\cos 120°$;

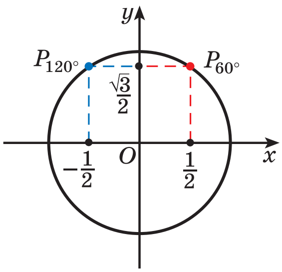
в) $\sin 240°$ і $\cos 240°$; г) $\sin 420°$ і $\cos 420°$.

Рашэнне. а) Адзначым на адзінкавай акружнасці пункт $P_{60°}$. Паколькі вядома, што $\sin 60\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 60\ \ \frac{1}{2}$, то ардыната пункта $P_{60°}$ роўна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а абсцыса гэтага пункта роўна $\frac{1}{2}$.

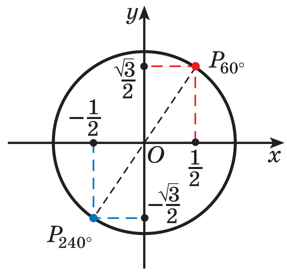


Рыс. 33

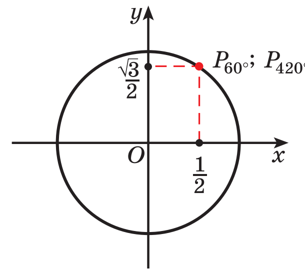
Пункты $P_{60°}$ і $P_{-60°}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна восі абсцыс (рыс. 33), значыць, іх ардынаты (сінусы вуглоў 60° і –60°) процілеглыя, а абсцысы (косінусы вуглоў 60° і –60°) роўныя. Такім чынам, $\sin(\ 60\ )\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos(\ 60\ )\ \ \frac{1}{2}$.



Рыс. 34



Рыс. 35



Рыс. 36

б) Паколькі $120° = 180° - 60°$, то пункты $P_{60°}$ і $P_{120°}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна восі ардынат (рыс. 34). Тады іх ардынаты (сінусы вуглоў 60° і 120°) роўныя, а абсцысы (косінусы вуглоў 60° і 120°) процілеглыя. Значыць, $\sin 120 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 120 \quad \frac{1}{2}$.

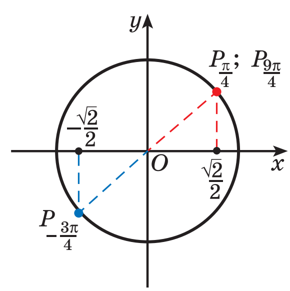
в) Пункты $P_{60°}$ і $P_{240°}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна пачатку каардынат (рыс. 35), паколькі $240° = 180° + 60°$. Тады і іх ардынаты процілеглыя, і іх абсцысы процілеглыя, г. зн. $\sin 240 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 240 \quad \frac{1}{2}$.

г) Паколькі $420° = 60° + 360°$, то пункты $P_{60°}$ і $P_{420°}$ адзінкавай акружнасці супадаюць (рыс. 36), а значыць, іх каардынаты роўныя. Тады $\sin 420 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos 420 \quad \frac{1}{2}$.

*Прыклад 3**. Вылічыце:

а) $\cos\frac{9\pi}{4}$; б) $\cos \quad \frac{3}{4}$.

Рашэнне. а) Паколькі $\frac{9}{4} \quad \frac{8}{4} \quad 2 \quad \frac{}{4}$, то пункт $P_{\frac{9\pi}{4}}$ адзінкавай акружнасці супадае з пунктам $P_{\frac{\pi}{4}}$ (рыс. 37).



Рыс. 37

Паколькі $\cos\frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos\frac{9}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$.

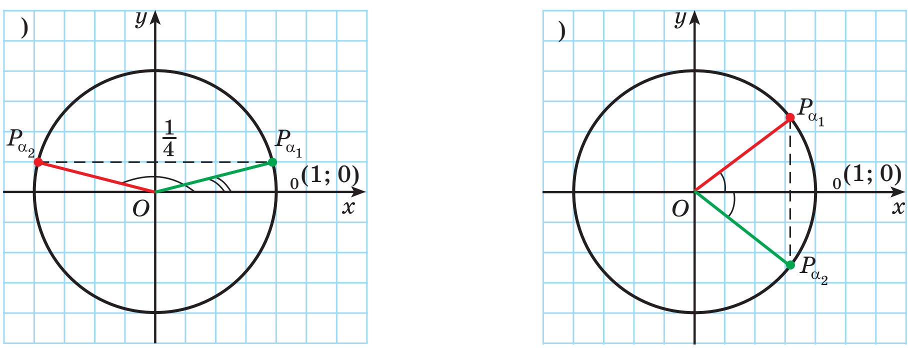
б) Пункты $P_{\frac{3}{4}}$ і $P_{\frac{\pi}{4}}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна пачатку каардынат (гл. рыс. 37), а значыць, іх абсцысы (косінусы вуглоў $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3}{4}$) адрозніваюцца толькі знакам. Паколькі $\cos\frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos \quad \frac{3}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Прыклад 4. Пабудуйце адзін з вуглоў, калі:

а) sin $\frac{1}{4}$; б) cos 0,8.

Рашэнне. а) Паколькі y sin , то на восі ардынат адзначым $\frac{1}{4}$. Правядзём прамую, паралельную восі абсцыс, і знойдзем на адзінкавай акружнасці пункты P_{α_1} і P_{α_2}, ардыната кожнага з якіх роўна $\frac{1}{4}$. Адзначым адзін з вуглоў, які адпавядае пунктам P_{α_1} або P_{α_2} (рыс. 38, *а*).

б) Паколькі x cos , то на восі абсцыс адзначым 0,8. Правядзём прамую, паралельную восі ардынат, і знойдзем на адзінкавай акружнасці пункты P_{α_1} і P_{α_2}, абсцыса кожнага з якіх роўна 0,8. Адзначым адзін з вуглоў, які адпавядае пунктам P_{α_1} або P_{α_2} (рыс. 38, *б*).



Рыс. 38

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты P $\frac{1}{5}$; $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Выкарыстаўшы азначэнне сінуса і косінуса адвольнага вугла, знайдзіце $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

Рашэнне. Сінусам вугла α называецца ардыната пункта P_α, атрыманага паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на вугал α. Па ўмове ардыната пункта P_α роўна $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$, значыць, sin $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

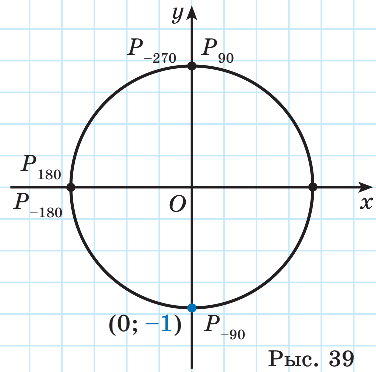
Косінусам вугла α называецца абсцыса пункта P_α, атрыманага паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на вугал α. Па ўмове абсцыса пункта P_α роўна $\frac{1}{5}$, значыць, $\cos \quad \frac{1}{5}$.

2. Калі $\sin\alpha = -1$, то вугал α можа быць роўны:

а) 180°; б) 90°; в) –90°;
г) –180°; д) –270°.

Выберыце правільны адказ.

Рашэнне. Паколькі сінусам вугла α называецца ардыната пункта P_α, атрыманага паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на вугал α, то трэба знайсці пункт адзінкавай акружнасці, ардыната якога роўна –1. Гэты пункт ляжыць на восі ардынат, і з дадзеных вуглоў яму адпавядае вугал $\alpha = -90°$ (рыс. 39). Правільны адказ в).



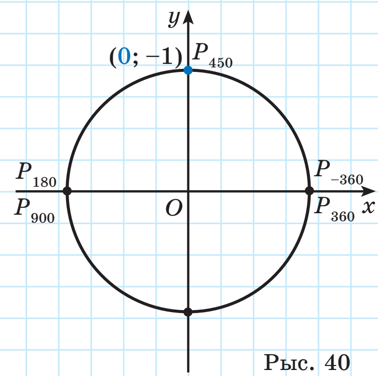
Рыс. 39

3. Калі $\cos\alpha = 0$, то вугал α можа быць роўны:

а) 180°; б) 360°; в) 450°;
г) 900°; д) –360°.

Выберыце правільны адказ.

Рашэнне. Паколькі косінусам вугла α называецца абсцыса пункта P_α, атрыманага паваротам пункта $P_0(1;\ 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на вугал α, то трэба знайсці пункт адзінкавай акружнасці, абсцыса якога роўна 0. Гэты пункт ляжыць на восі ардынат, і з дадзеных вуглоў яму адпавядае вугал $\alpha = 450°$ (рыс. 40). Правільны адказ в).

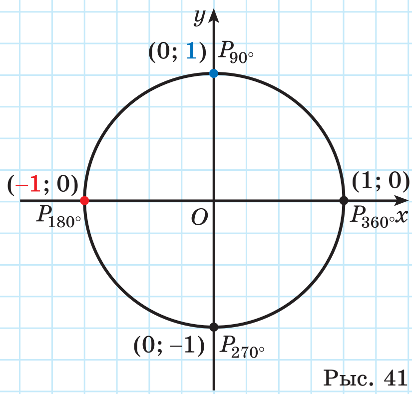


Рыс. 40

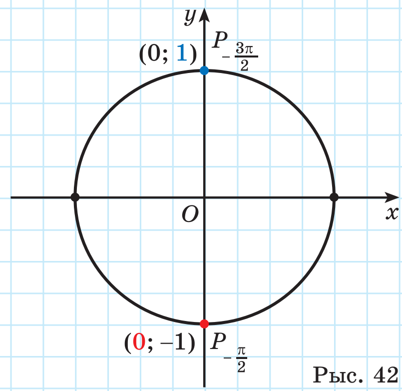
4. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 180° + \sin 90°$; б) $\cos \frac{\ }{2} \quad \sin \frac{3}{2}$.

Рашэнне. а) Абсцыса пункта $P_{180°}$, які адпавядае вуглу 180°, роўна –1 (рыс. 41), значыць, $\cos 180° = -1$. Ардыната пункта $P_{90°}$, які адпавядае вуглу 90°, роўна 1 (гл. рыс. 41), г. зн. $\sin 90° = 1$. Значыць, $\cos 180$ $\sin 90$ 1 1 0.



Рыс. 41



Рыс. 42

б) cos $\frac{\ }{2}$ 0, а sin $\frac{3}{2}$ 1 (рыс. 42), тады cos $\frac{\ }{2}$ sin $\frac{3}{2}$ $= 0 - 1 = -1$.

5. Ці можа $\cos\alpha$ быць роўным:

а) 1,2; б) 0,89; в) $-\sqrt{5}$; г) $-\frac{3}{7}$?

Рашэнне. Паколькі 1 ⩽ cos ⩽1, то $\cos\alpha$:

а) не можа быць роўным 1,2, бо 1,2 1; 1 ;

б) можа быць роўным 0,89, бо 0,89 1; 1 ;

в) не можа быць роўным $-\sqrt{5}$, бо $\sqrt{5}$ 1; 1 ;

г) можа быць роўным $-\frac{3}{7}$, бо $\frac{3}{7}$ 1; 1 .

6. Вызначце знак выразу:

а) $\cos(-49°)$; б) $\cos(-297°)$; в) $\sin\frac{18\pi}{19}$; г) $\sin 6$.

Рашэнне. а) $\cos(-49°) > 0$, паколькі $-49°$ — вугал чацвёртай чвэрці, а косінус у чацвёртай чвэрці дадатны;

б) $\cos(-297°) > 0$, паколькі $-297°$ — вугал першай чвэрці, а косінус у першай чвэрці дадатны;

в) $\sin\frac{18\pi}{19} > 0$, паколькі $\frac{18\pi}{19}$ — вугал другой чвэрці, а сінус у другой чвэрці дадатны;

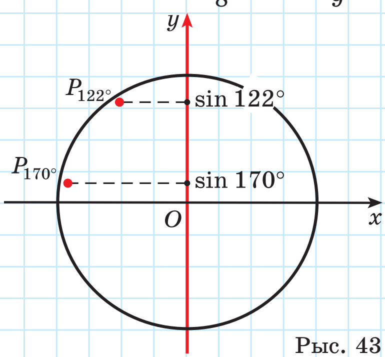
г) $\sin 6 < 0$, паколькі 6 радыян — вугал чацвёртай чвэрці, а сінус у чацвёртай чвэрці адмоўны.

7. Параўнайце: а) $\sin 122°$ і $\sin 170°$; б) $\cos\frac{\pi}{8}$ і $\cos\frac{10\pi}{9}$.

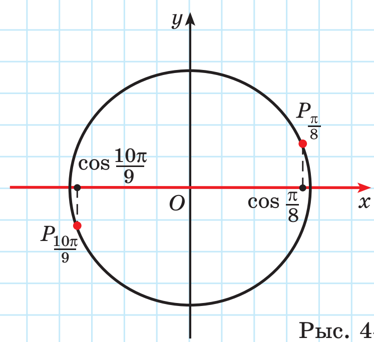
Рашэнне. а) Адзначым на адзінкавай акружнасці пункты, якія адпавядаюць вуглам 122° і 170°, і параўнаем ардынаты гэтых пунктаў. Ардыната пункта $P_{122°}$ большая за ардынату пункта $P_{170°}$ (рыс. 43), значыць, $\sin 122° > \sin 170°$.

б) Параўнаем абсцысы пунктаў адзінкавай акружнасці $P_{\frac{10\pi}{9}}$ і $P_{\frac{\pi}{8}}$.

Паколькі абсцыса пункта $P_{\frac{\pi}{8}}$ большая за абсцысу пункта $P_{\frac{10\pi}{9}}$ (рыс. 44), то $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{10\pi}{9}$.



Рыс. 43



Рыс. 44

8. З дапамогай адзінкавай акружнасці знайдзіце значэнне:

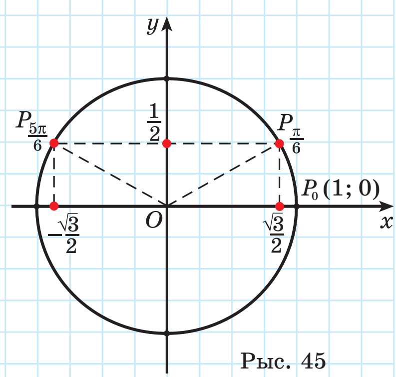
а) $\sin\frac{5\pi}{6}$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}$.

Рашэнне. а) Ардыната пункта $P_{\frac{5\pi}{6}}$ роўна ардынаце пункта $P_{\frac{\pi}{6}}$ (рыс. 45), таму

$\sin\frac{5}{6} \quad \sin\frac{}{6} \quad \frac{1}{2}$.

б) Абсцыса пункта $P_{\frac{5\pi}{6}}$ процілеглая абсцысе пункта $P_{\frac{\pi}{6}}$ (гл. рыс. 45), таму

$\cos\frac{5}{6} \quad \cos\frac{}{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Рыс. 45

1. Абсцыса пункта P_α адзінкавай акружнасці роўна 0,3. Тады правільная роўнасць:
а) sin   0,3;   б) sin   0,3;   в) cos   0,3;   г) cos   0,3.
Выберыце правільны адказ.
2. Вядома, што вуглам α і β адпавядаюць пункты $P \quad \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$ і $P \quad \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}$. Выберыце ўсе правільныя роўнасці:

а) $\sin \quad \frac{4}{5}$;   б) $\sin \quad \frac{3}{5}$;   в) $\cos \quad \frac{1}{4}$;   г) $\cos \quad \frac{\sqrt{15}}{4}$.

1.43. Выкарыстаўшы азначэнне сінуса і косінуса адвольнага вугла, знайдзіце $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, калі вядома, што пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты:

а) $P \quad \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$;   б) $P \quad \frac{5}{13}; \quad \frac{12}{13}$;

в) $P \quad \frac{1}{7}; \quad \frac{4\sqrt{3}}{7}$;   г) $P \quad 0,8; 0,6$.

У якой каардынатнай чвэрці размешчаны кожны пункт?

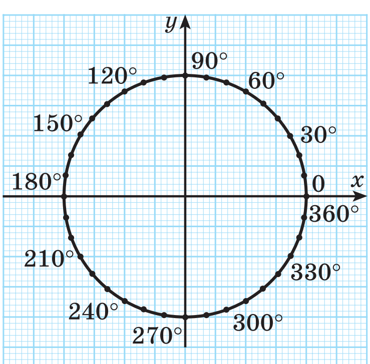
1.44. З дапамогай адзінкавай акружнасці (рыс. 46) знайдзіце прыблізныя значэнні сінуса і косінуса вугла: а) 40°; б) 170°; в) 250°; г) –70°.

1.45. З дапамогай адзінкавай акружнасці (рыс. 47) знайдзіце прыблізнае значэнне выразу:

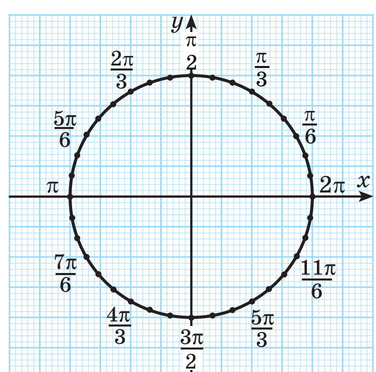
а) $\sin\frac{2\pi}{5}$;   б) $\cos \quad \frac{}{8}$;   в) $\sin\frac{13\pi}{10}$;   г) $\cos 0,6\pi$.

1.46. Для некаторага вугла α вядома, што $\sin\alpha = 1$. Тады вугал α можа быць роўным: а) 90°; б) 270°; в) –180°; г) 450°. Выберыце правільны адказ.

Назавіце яшчэ два дадатныя і два адмоўныя вуглы α, для якіх правільная роўнасць $\sin\alpha = 1$.



Рыс. 46



Рыс. 47

1.47. Адзначце на адзінкавай акружнасці пункты, якія адпавядаюць усім такім вуглам α, для кожнага з якіх справядлівая роўнасць:

а) $\sin\alpha = 0$; б) sin $\frac{1}{2}$; в) sin $\frac{1}{3}$;

г) $\cos\alpha = 1$; д) cos $\frac{2}{5}$; е) cos $\frac{3}{5}$.

1.48. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 180° - \sin 270°$; б) $\sin 0° - \cos 0°$;
в) $2\cos(-180°) - \sin 360°$; г) $\sin(-180°) + 5\sin(-270°)$;
д) $-\sin 90° + 3\cos 0°$; е) $8\sin 180° - 6\cos(-270°)$.

1.49. Вылічыце:

а) $\cos 360° \cdot \cos 30° \cdot \sin 45°$; б) sin 90 cos 60 sin 30 ;

в) cos 90 $\cos^2$ 30 ; г) sin 450 cos 60 $\sin^2$ 45 .

1.50. Знайдзіце значэнне выразу:

а) sin $\frac{}{2}$ · sin $\frac{}{2}$; б) cos sin $\frac{3}{2}$;

в) sin $\frac{3}{2}$ 2cos ; г) 2sin 2 cos ;

д) sin $\frac{}{2}$ · cos · cos 2 ; е) sin $\frac{}{2}$ 8sin cos 2 .

1.51. Вылічыце:

а) sin $\frac{3}{2}$ sin $\frac{}{6}$; б) cos 2 · cos $\frac{}{4}$;

в) sin $\sin^2$ $\frac{}{4}$; г) 3cos 5 sin $\frac{}{6}$ · cos $\frac{}{3}$.

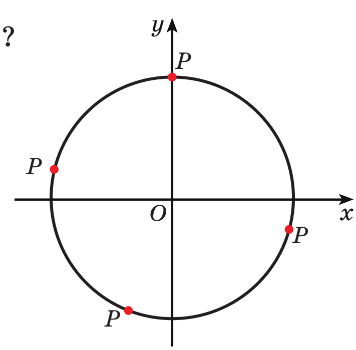
1.52. Ці праўда, што:

а) sin $\frac{}{2}$ sin $\frac{}{2}$; б) sin $\frac{3}{2}$ sin $\frac{}{2}$;

в) cos cos ; г) cos $\frac{}{2}$ cos $\frac{3}{2}$?

1.53. Якія значэнні можа прымаць сінус адвольнага вугла? З лікаў $\frac{3}{7}$; -5; 1,2; $-0{,}8$; $\sqrt{3}$; 0; $\frac{1}{\sqrt{5}}$ выберыце тыя, якім можа быць роўны $\sin\alpha$.

1.54. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α, P_β, P_γ і P_φ, якія адпавядаюць вуглам павароту α, β, γ і φ (рыс. 48). Параўнайце з нулём значэнні сінуса і косінуса гэтых вуглоў.



Рыс. 48

1.55. Вызначце знак выразу:

а) $\cos 811°$; б) $\sin \frac{2}{9}$;

в) $\sin 4$; г) $\cos 6$.

1.56. Вызначце знак выразу:

а) $\cos 451° \cdot \sin(-92°)$; б) $\sin \frac{7}{9} \cdot \cos 1{,}1$.

1.57. Вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі:

а) $\sin\alpha > 0$ і $\cos\alpha > 0$; б) $\sin\alpha < 0$ і $\cos\alpha > 0$?

1.58. Параўнайце:

а) $\sin 40°$ і $\sin 50°$; б) $\sin 100°$ і $\sin 110°$;
в) $\sin(-20°)$ і $\sin(-40°)$; г) $\sin 192°$ і $\sin 48°$.

1.59. Параўнайце:

а) $\cos\frac{\pi}{8}$ і $\cos\frac{5\pi}{8}$; б) $\cos 0{,}7\pi$ і $\cos 0{,}8\pi$;

в) $\cos \frac{3}{10}$ і $\cos \frac{7}{10}$; г) $\cos 1{,}1\pi$ і $\cos 0{,}1\pi$.

1.60. Параўнайце:

а) $\sin 3$ і $\sin\pi$; б) $\cos 4$ і $\cos 5$; в) $\sin 1$ і $\cos 1$.

1.61. Ці праўда, што:

а) $\sin(-45°) = -\sin 45°$; б) $\cos(-60°) = -\cos 60°$;
в) $\sin 120° = \sin 60°$; г) $\cos 135° = -\cos 45°$?

1.62. З дапамогай адзінкавай акружнасці знайдзіце:

а) $\sin(-30°)$ і $\cos(-30°)$; б) $\sin 150°$ і $\cos 150°$;
в) $\sin 210°$ і $\cos 210°$; г) $\sin 390°$ і $\cos 390°$.

1.63. З вуглоў 60°; 120°; 300°; –60°; –210°; 420°; –780° выберыце тыя, косінусы якіх роўны $\frac{1}{2}$.

1.64. Пабудуйце адзін з вуглоў α, для якога:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$; б) $\cos \frac{2}{3}$.

1.65*. З дапамогай адзінкавай акружнасці і значэнняў сінусаў і косінусаў вуглоў $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{3}$ (гл. табл. на с. 21) вылічыце:

а) $\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\cos\frac{7\pi}{6}$;

в) $\sin \frac{5}{3}$; г) $\cos\frac{19\pi}{6}$.

1.66. Выкарыстаўшы азначэнне сінуса і косінуса адвольнага вугла, знайдзіце $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, калі вядома, што пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты: а) $P \quad 0{,}6; 0{,}8$; б) $P \quad \frac{8}{17}; \ \frac{15}{17}$.

У якой каардынатнай чвэрці размешчаны кожны пункт?

1.67. З дапамогай адзінкавай акружнасці (гл. рыс. 46) знайдзіце прыбліжаныя значэнні сінуса і косінуса вугла:

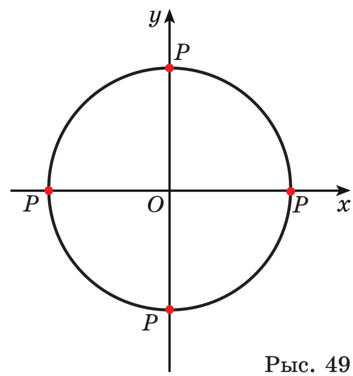
а) 70°; б) 220°; в) –80°.

1.68. З дапамогай адзінкавай акружнасці (гл. рыс. 47) знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу:

а) $\cos\frac{\pi}{5}$; б) $\sin \quad \frac{3}{5}$; в) $\cos\frac{11\pi}{9}$.

1.69. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α, P_β, P_γ і P_φ, якія адпавядаюць вуглам павароту α, β, γ і φ (рыс. 49). Знайдзіце:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\varphi$; в) $\sin\gamma$;
г) $\cos\gamma$; д) $\sin\beta$; е) $\cos\beta$.



Рыс. 49

1.70. Назавіце два дадатныя і два адмоўныя вуглы α, для якіх правільная роўнасць $\sin\alpha = 0$.

1.71. Адзначце на адзінкавай акружнасці пункты, якія адпавядаюць усім вуглам α, для кожнага з якіх справядлівая роўнасць:

а) $\cos\alpha = 0$; б) $\cos \quad \frac{1}{2}$; в) $\sin\alpha = -1$; г) $\sin \quad \frac{1}{4}$.

1.72. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 90 \quad \cos 180$; б) $\cos \quad 180 \quad 2\sin 270$;

в) $\sin 180 \quad 5\cos \quad 270$; г) $\cos 180 \quad \cos 60$;

д) $\cos 0° \cdot \sin 45° \cdot \cos 45°$; е) $\sin \quad 90 \quad \sin^2 60$.

1.73. Вылічыце:

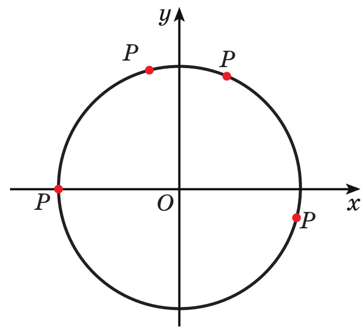
а) $\sin\frac{}{2} \quad 2\cos$; б) $\sin \quad \frac{}{2} \quad \cos\frac{3}{2}$;

в) $\cos \quad 2 \quad 2\cos\frac{}{3}$; г) $\cos\pi \cdot \cos\frac{\pi}{6}$;

д) $\sin\frac{3}{2} \quad \cos\frac{}{6} \cdot \sin\frac{}{3}$; е) $\sin \quad \cos^2\frac{}{4}$.

1.74. Якія значэнні можа прымаць косінус адвольнага вугла? Сярод лікаў $\frac{2}{5}$; -3; $2{,}4$; $-0{,}3$; $\sqrt{2}$; 1; $\frac{1}{\sqrt{7}}$ выберыце тыя, якім можа быць роўны $\cos\alpha$.

1.75. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α, P_β, P_γ і P_φ, якія адпавядаюць вуглам α, β, γ і φ (рыс. 50). Параўнайце з нулём значэнні сінуса і косінуса гэтых вуглоў.



Рыс. 50

1.76. Вызначце знак выразу:

а) $\cos 1125°$; б) $\sin \quad \frac{12}{17} \quad$;

в) $\sin 3$; г) $\cos\frac{15\pi}{8}$.

1.77. Параўнайце:

а) $\sin 130°$ і $\sin 140°$; б) $\cos 40°$ і $\cos 50°$;
в) $\cos(-80°)$ і $\cos(-81°)$; г) $\sin(-22°)$ і $\sin(-43°)$.

1.78. Вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі:

а) $\sin\alpha > 0$ і $\cos\alpha < 0$; б) $\sin\alpha < 0$ і $\cos\alpha < 0$?

1.79. З дапамогай адзінкавай акружнасці знайдзіце:

а) $\sin \quad 45 \quad$ і $\cos \quad 45 \quad$; б) $\sin 135°$ і $\cos 135°$;
в) $\sin 225°$ і $\cos 225°$; г) $\sin 405°$ і $\cos 405°$.

1.80. З вуглоў 30 ; 120 ; 60 ; 210 ; 330 ; 750 выберыце тыя, сінусы якіх роўны $\frac{1}{2}$.

1.81. Пабудуйце адзін з вуглоў α, для якога: а) $\cos \quad \frac{3}{4}$; б) $\sin\alpha = -0{,}2$.

1.82*. Вылічыце:

а) $\cos\frac{2\pi}{3}$; б) $\sin\frac{7\pi}{6}$; в) $\sin \quad \frac{7}{3} \quad$; г) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

1.83. Для функцыі $g \quad x \quad \frac{x^4 - 5x^2 \quad 4}{x - 1 \quad ^2}$ знайдзіце, калі гэта магчыма:

а) $g(0)$; б) $g(-1)$; в) $g(-2)$; г) $g(1)$.

1.84. Выберыце функцыю, графік якой атрыманы з графіка функцыі $y = -7x^2$ зрухам яго на 4 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат:

а) $y = -7x^2 + 4$; б) $y = -7(x + 4)^2$;
в) $y = -7x^2 - 4$; г) $y = -(7x + 4)^2$.

§ 3. Азначэнне тангенса і катангенса адвольнага вугла

1.85. З дадзеных выразаў выберыце тыя, абсягі вызначэння якіх супадаюць:

а) $\frac{4}{x(x+2)}$; б) $x^3 - 4x^2 + 2$; в) $\frac{8}{x^2} - \frac{3x}{7x+14}$;

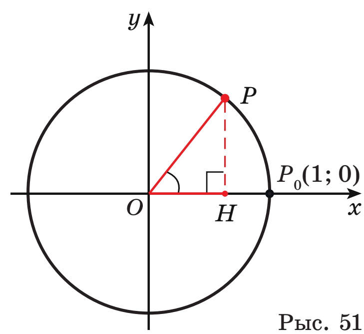
г) $\frac{12x-1}{x^2+1}$; д) $\frac{15}{x^2-4}$.

1.86. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y \quad \sqrt{x-1 \quad x \quad 3}$.

1.87. З дадзеных функцый выберыце функцыі, якія дасягаюць найменшага значэння пры $x = 1$:

а) $f(x) = 2(x-1)^2$; б) $f(x) = -3(x-1)^2$;
в) $f(x) = (x-1)^2 - 5$; г) $f(x) = (x-1)^2 + 5$.

Пабудуем пункт $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ адзінкавай акружнасці паваротам пункта P_0 вакол пачатку каардынат на вугал α. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік $P_\alpha OH$, у якім гіпатэнуза $P_\alpha O$ роўна 1 (радыусу адзінкавай акружнасці), а катэты роўны: cos , sin (рыс. 51).



Рыс. 51

Па азначэнні тангенса вострага вугла атрымаем: tg $\quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\sin}{\cos}$.

> **Азначэнне.** Тангенсам вугла α называецца адносіна сінуса вугла α да косінуса вугла α: tg $\quad \frac{\sin}{\cos}$.

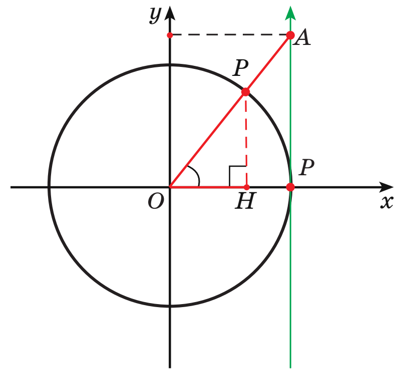
Напрыклад, $\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{}{6} \quad \frac{\sin\frac{}{6}}{\cos\frac{}{6}} \quad \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Выкарыстаўшы азначэнне тангенса вугла і значэнні сінуса і косінуса гэтага вугла, знойдзем таксама значэнні тангенсаў вуглоў $\frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{}$:

$$\operatorname{tg}\frac{}{4} \quad \frac{\sin\frac{}{4}}{\cos\frac{}{4}} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1, \quad \operatorname{tg}\frac{}{3} \quad \frac{\sin\frac{}{3}}{\cos\frac{}{3}} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} \quad \sqrt{3}.$$

Паколькі $\cos\frac{}{2} \quad 0$, то $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не існуе.

Праз пункт P_0 правядзём прамую, перпендыкулярную восі абсцыс, і прадоўжым прамень OP_α да перасячэння з гэтай прамой у пункце A (рыс. 52). Атрымаем трохвугольнік OAP_0, падобны трохвугольніку $OP_\alpha H$.

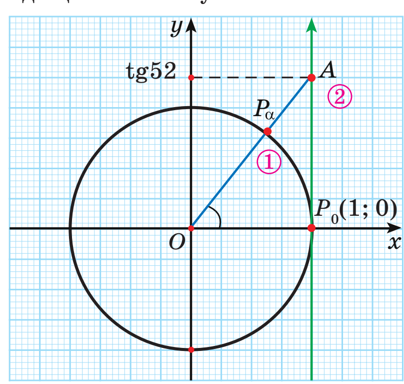


Рыс. 52

З падобнасці трохвугольнікаў OAP_0 і $OP_\alpha H$ запішам роўнасць адносін іх старон: $\frac{0}{0}$ ——, або $\frac{AP_0}{1}$ $\frac{\sin}{\cos}$. Паколькі AP_0 $\frac{\sin}{\cos}$ tg , то ардыната пункта A роўна тангенсу вугла α.

Прамая, перпендыкулярная восі абсцыс, якая праходзіць праз пункт P_0, называецца **воссю тангенсаў**.

Для таго каб знайсці тангенс адвольнага вугла α з дапамогай восі тангенсаў, трэба:

① Пабудаваць пункт P_α на адзінкавай акружнасці. ② Прадоўжыць прамую OP_α да перасячэння з воссю тангенсаў. ③ Знайсці ардынату пункта перасячэння прамой OP_α з воссю тангенсаў.	Знайдзіце тангенс вугла $\alpha = 52°$.  ③ $\text{tg}\,52° \approx 1{,}3$.

Значэнне тангенса адвольнага вугла з дапамогай восі тангенсаў можна знайсці толькі прыблізна. Для знаходжання значэння тангенса адвольнага вугла карыстаюцца таксама чатырохзначнымі табліцамі значэнняў тангенса (сінуса, косінуса)* або калькулятарамі. Метады вышэйшай матэматыкі дазваляюць вылічваць значэнні тангенса (сінуса, косінуса) з любой зададзенай ступенню дакладнасці.

* Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы. — 13-е изд., стер. — М. : Дрофа, 2010. — 96 с.

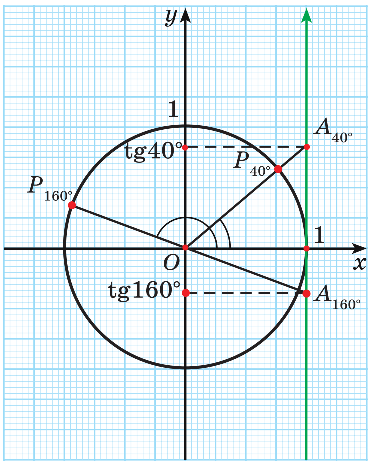
Прыклад 1. Вызначце з дапамогай восі тангенсаў:

а) $\mathrm{tg}\,40°$; б) $\mathrm{tg}\,160°$; в) $\mathrm{tg}\,\frac{\ }{6}$; г) $\mathrm{tg}\,\frac{4\pi}{3}$.

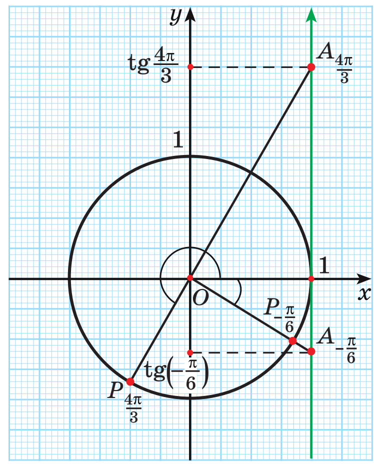
Рашэнне.

а) $\mathrm{tg}\,40° \approx 0{,}8$ (рыс. 53); б) $\mathrm{tg}\,160° \approx -0{,}4$ (гл. рыс. 53);

в) $\mathrm{tg}\,\frac{\ }{6}$ $0{,}6$ (рыс. 54); г) $\mathrm{tg}\,\frac{4}{3}$ $1{,}7$ (гл. рыс. 54).



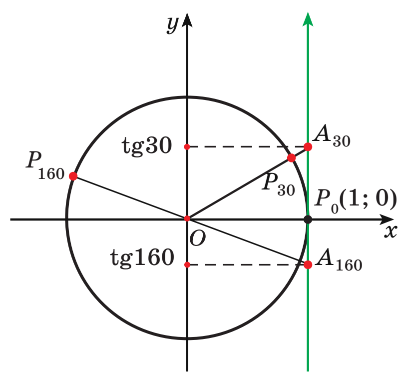
Рыс. 53



Рыс. 54

Прыклад 2. З дапамогай восі тангенсаў параўнайце значэнні выразаў $\mathrm{tg}\,30°$ і $\mathrm{tg}\,160°$.

Рашэнне. Адзначым на восі тангенсаў пункты, якія адпавядаюць вуглам 30° і 160° (рыс. 55), і параўнаем ардынаты гэтых пунктаў. Ардыната пункта $A_{30°}$ большая за ардынату пункта $A_{160°}$, значыць, $\mathrm{tg}\,30° > \mathrm{tg}\,160°$.



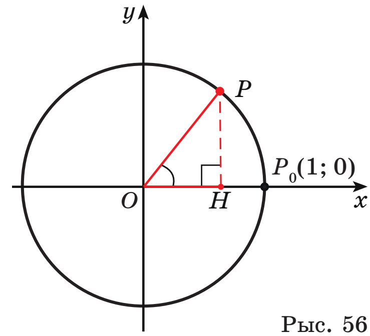
Рыс. 55

Для вуглоў $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; … тангенс не існуе, паколькі косінусы гэтых вуглоў роўны нулю. Напрыклад, $\mathrm{tg}\,630°$, $\mathrm{tg}\,\frac{\ }{2}$ не існуюць.

Пабудуем пункт $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ адзінкавай акружнасці паваротам пункта P_0 вакол пачатку каардынат на вугал α. Разгледзім прамавугольны трохвугольнік $P_\alpha OH$, у якім гіпатэнуза $P_\alpha O$ роўна 1 (радыусу адзінкавай акружнасці), а катэты роўны: cos , sin (рыс. 56).

Па азначэнні катангенса вострага вугла атрымаем: —— ——

Азначэнне. Катангенсам вугла α называецца адносіна косінуса вугла α да сінуса вугла α: ——



Рыс. 56

Напрыклад, —— — — —— $\sqrt{}$: — $\sqrt{}$

Паколькі tg $\frac{\sin}{\cos}$, а —— то ——

Выкарыстаем атрыманую роўнасць і знойдзем значэнні катангенсаў вуглоў $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{3}$: — —— — — $\frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{}{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

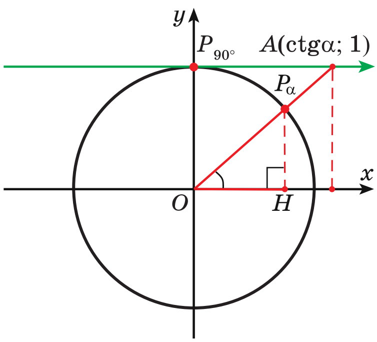
Паколькі $\sin 0 = 0$, то $\mathrm{ctg}\,0$ не існуе.

Знойдзеныя значэнні сінуса, косінуса, тангенса і катангенса вуглоў 0°; 30°; 45°; 60° і 90° запішам у табліцу.

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°
Радыяны	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існуе
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не існуе	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Прыклад 3. Знайдзіце значэнне выразу
$\operatorname{ctg} 45° + \operatorname{ctg} 30° - \operatorname{tg} 60° \quad 2\sin 30$.

Рашэнне. $\sqrt{\ } \quad \sqrt{\ } \quad \cdot -$



Рыс. 57

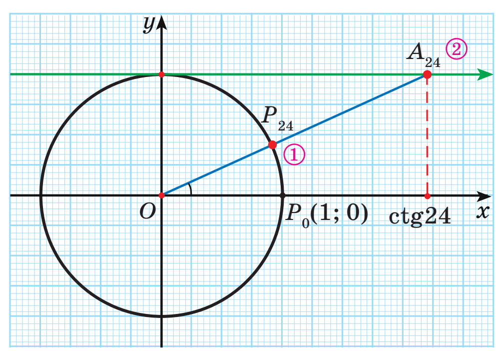
Праз пункт $P_{90°}(0;\ 1)$ правядзём прамую, перпендыкулярную восі ардынат, і прадоўжым прамень OP_α да перасячэння з гэтай прамой у пункце A (рыс. 57).

Атрымаем трохвугольнік $OAP_{90°}$, падобны трохвугольніку $P_\alpha OH$.

З падобнасці трохвугольнікаў $OAP_{90°}$ і $P_\alpha OH$ запішам роўнасць адносін іх старон: $\frac{\ \ 90}{90}$ $\frac{\quad}{\quad}$, або $\frac{AP_{90}}{1}$ $\frac{\cos}{\sin}$. Паколькі AP $\frac{\quad}{\quad}$ то абсцыса пункта A роўна катангенсу вугла α.

Прамая, перпендыкулярная восі ардынат, якая праходзіць праз пункт $P_{90°}$, называецца **воссю катангенсаў.**

Для таго каб знайсці катангенс адвольнага вугла α з дапамогай восі катангенсаў, трэба:

① Пабудаваць пункт P_α на адзінкавай акружнасці. ② Прадоўжыць прамую OP_α да перасячэння з воссю катангенсаў. ③ Знайсці абсцысу пункта перасячэння прамой OP_α з воссю катангенсаў.	Знайдзіце катангенс вугла α = 24°.  ③ ctg 24° ≈ 2,2.

Значэнне катангенса адвольнага вугла з дапамогай восі катангенсаў можна знайсці толькі прыбліжана.

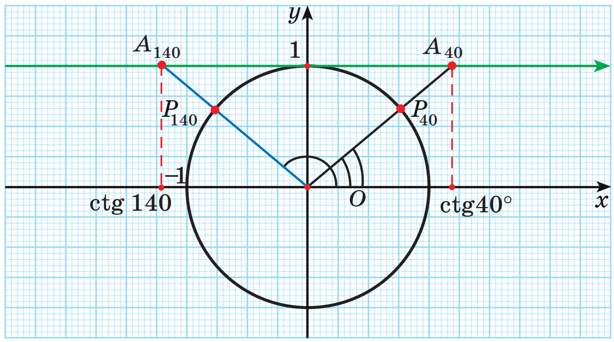
Прыклад 4. Вызначце з дапамогай восі катангенсаў:

а) ctg 40°; б) ctg 140°; в) ctg $\frac{\ }{6}$; г) ctg $\frac{4\pi}{3}$.

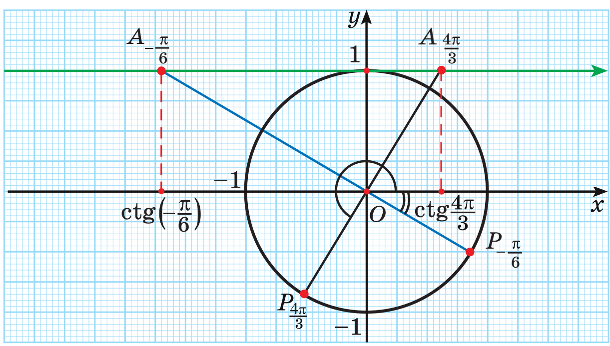
Рашэнне.

а) $\operatorname{ctg} 40° \approx 1{,}2$ (рыс. 58); б) $\operatorname{ctg} 140° \approx -1{,}2$ (гл. рыс. 58);

в) $\operatorname{ctg} \frac{\ }{6}$ 1,7 (рыс. 59); г) $\operatorname{ctg} \frac{4}{3}$ 0,6 (гл. рыс. 59).



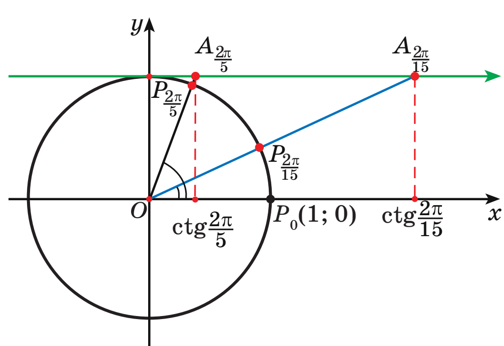
Рыс. 58



Рыс. 59

Прыклад 5. З дапамогай восі катангенсаў параўнайце значэнні выразаў $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5}$ і $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{15}$.

Рашэнне. Адзначым на восі катангенсаў пункты, якія адпавядаюць вуглам $\frac{2\pi}{5}$ і $\frac{2\pi}{15}$ (рыс. 60), і параўнаем абсцысы гэтых пунктаў. Абсцыса пункта $A_{\frac{2\pi}{15}}$ большая за абсцысу пункта $A_{\frac{2\pi}{5}}$, значыць, $\frac{\pi}{\ } > \frac{\pi}{\ }$



Рыс. 60

Для вуглоў 0, π, 2π і г. д. катангенс не існуе, паколькі сінусы гэтых вуглоў роўны нулю. Напрыклад, $\operatorname{ctg} 900°$, $\operatorname{ctg}(-3\pi)$ не існуюць.

Прыклад 6. З дапамогай восі:

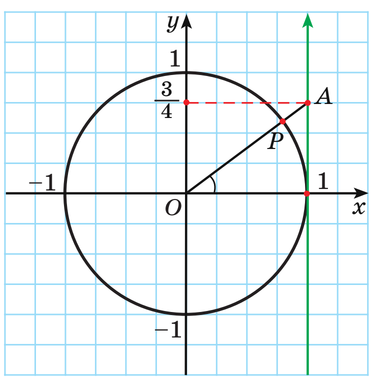
а) тангенсаў знайдзіце адзін з вуглоў, тангенс якога роўны $\frac{3}{4}$;

б) катангенсаў знайдзіце адзін з вуглоў, катангенс якога роўны $-\frac{5}{4}$.

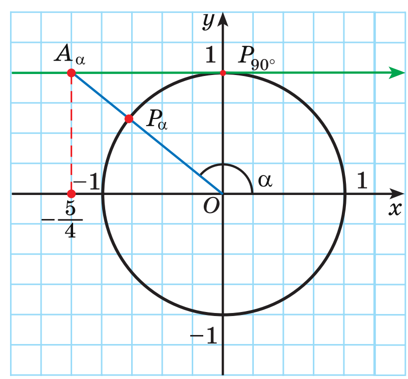
Рашэнне. а) ① Адзначым на восі тангенсаў пункт A_α, ардыната якога роўна $\frac{3}{4}$ (рыс. 61).

② Злучым гэты пункт з пачаткам каардынат.
③ Знойдзем адпаведны пункт P_α на адзінкавай акружнасці.
④ Адзначым адзін з вуглоў, які адпавядае гэтаму пункту (гл. рыс. 61).

б) ① Адзначым на восі катангенсаў пункт A_α, абсцыса якога роўна $-\frac{5}{4}$ (рыс. 62).
② Злучым гэты пункт з пачаткам каардынат.
③ Знойдзем адпаведны пункт P_α на адзінкавай акружнасці.
④ Адзначым адзін з вуглоў, які адпавядае гэтаму пункту (гл. рыс. 62).



Рыс. 61



Рыс. 62

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты $P\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Выкарыстаўшы азначэнне тангенса і катангенса адвольнага вугла, знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.

Рашэнне. Паколькі пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты $P \quad \frac{4}{5}; \frac{3}{5}$, то $\sin \quad \frac{3}{5}$, а $\cos \quad \frac{4}{5}$.

Па азначэнні тангенса: $\mathrm{tg} \quad \frac{\sin}{\cos}$, г. зн. $\mathrm{tg} \quad \frac{3}{5} : \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{4}$.

Па азначэнні катангенса: —— значыць, — : — —

2. Знайдзіце значэнне выразу — — — —

Рашэнне. — — — — $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$ $\sqrt{}$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

3. Знайдзіце, калі гэта магчыма, значэнне выразу:

а) $\mathrm{tg}\,\pi$; б) $\mathrm{ctg}\,2\pi$; в) $\mathrm{tg} \quad \frac{5}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\,(-8{,}5\pi)$.

Рашэнне. а) $\mathrm{tg} \quad \frac{\sin}{\cos} \quad \frac{0}{1} \quad 0$;

б) $\mathrm{ctg}\,2\pi$ не існуе, паколькі $\sin 2\pi = 0$;

в) $\mathrm{tg} \quad \frac{5}{2}$ не існуе, паколькі $\cos \quad \frac{5}{2} \quad 0$;

г) $\mathrm{ctg} \quad 8{,}5 \quad \frac{\cos \quad 8{,}5}{\sin \quad 8{,}5} \quad \frac{0}{1} \quad 0$.

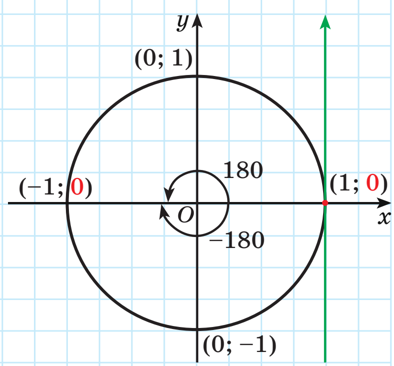
4. Калі $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, то α можа быць роўны:

а) 180°; б) 90°; в) –90°; г) –180°; д) –270°.

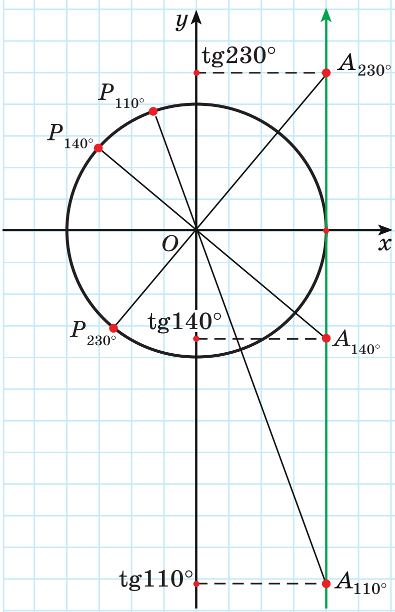
Выберыце правільныя адказы.

Рашэнне. Паколькі тангенсам вугла α называецца адносіна сінуса вугла α да косінуса вугла α, то трэба знайсці тыя вуглы α, сінус якіх роўны нулю. Сярод прапанаваных вуглоў гэта вуглы –180° і 180°. Можна таксама выкарыстаць вось тангенсаў: знайсці пункт на восі тангенсаў, у якога ардыната роўна нулю (рыс. 63), і вызначыць адпаведныя вуглы.

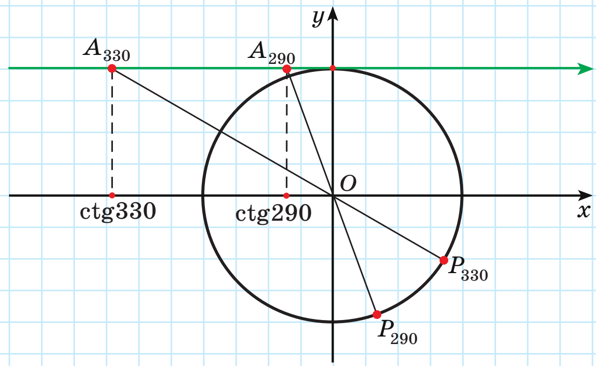
Правільныя адказы а) і г).



Рыс. 63



Рыс. 64



Рыс. 65

5. Размясціце ў парадку нарастання: $\mathrm{tg}\,110°$; $\mathrm{tg}\,140°$ і $\mathrm{tg}\,230°$.

Рашэнне. Адзначым на восі тангенсаў пункты, якія адпавядаюць вуглам 110°, 140° і 230° (рыс. 64), і параўнаем ардынаты гэтых пунктаў. Паколькі ардыната пункта $A_{110°}$ меншая за ардынату пункта $A_{140°}$, а ардыната пункта $A_{140°}$ меншая за ардынату пункта $A_{230°}$, то $\mathrm{tg}\,110° < \mathrm{tg}\,140° < \mathrm{tg}\,230°$.

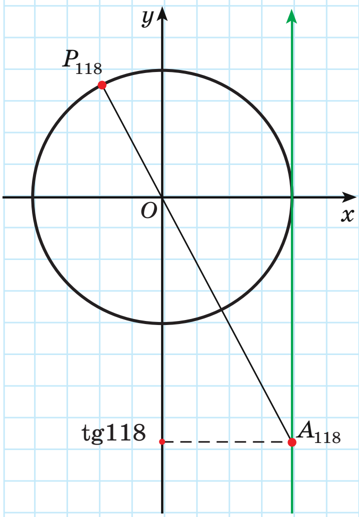
6. Ці праўда, што °> °

Рашэнне. Адзначым на восі катангенсаў пункты, якія адпавядаюць вуглам 290° і 330° (рыс. 65), і параўнаем абсцысы гэтых пунктаў. Паколькі абсцыса пункта $A_{290°}$ большая за абсцысу пункта $A_{330°}$, то няроўнасць °> ° правільная.

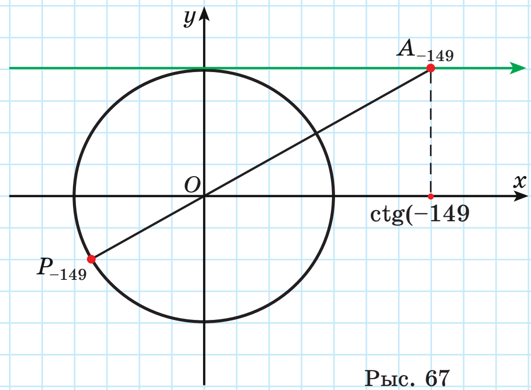
7. Вызначце знак выразу: а) $\mathrm{tg}\,118°$; б) $\mathrm{ctg}\,(-149°)$.

Рашэнне. а) Першы спосаб. Па азначэнні тангенса: $\mathrm{tg}\,118 \quad \frac{\sin 118}{\cos 118}$. Паколькі вугал 118° знаходзіцца ў другой чвэрці, то $\sin 118° > 0$, а $\cos 118° < 0$, значыць, $\mathrm{tg}\,118° < 0$.

Другі спосаб. Адзначым на восі тангенсаў пункт, які адпавядае вуглу 118° (рыс. 66). Ардыната пункта $A_{118°}$ роўна $\mathrm{tg}\,118°$. Паколькі пункт $A_{118°}$ мае адмоўную ардынату, то $\mathrm{tg}\,118° < 0$.



Рыс. 66



Рыс. 67

б) Першы спосаб. Па азначэнні катангенса: ——— Паколькі вугал –149° знаходзіцца ў трэцяй чвэрці, то sin 149 < 0 і cos 149 < 0, значыць, >

Другі спосаб. Адзначым на восі катангенсаў пункт, які адпавядае вуглу –149° (рыс. 67). Абсцыса пункта $A_{-149°}$ роўна ctg(–149°). Паколькі пункт $A_{-149°}$ мае дадатную абсцысу, то >

8. Вызначце знак здабытку .

Рашэнне. Паколькі вугал 3 радыяны знаходзіцца ў другой чвэрці, а вугал 4 радыяны — у трэцяй, то < а tg 4 > 0, значыць,

?

1. На адзінкавай акружнасці зададзены пункт $P_{\alpha}(0; -1)$. Тады для вугла α правільнымі з'яўляюцца роўнасці:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = 0$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$; д) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$.

Выберыце правільны адказ.

2. На адзінкавай акружнасці зададзены пункт $P_{\alpha}(0,6; 0,8)$. Тады для вугла α правільнымі з'яўляюцца роўнасці:

а) sin 0,6; б) cos 0,6; в) tg $\frac{4}{3}$; г) д) —

Выберыце правільны адказ.

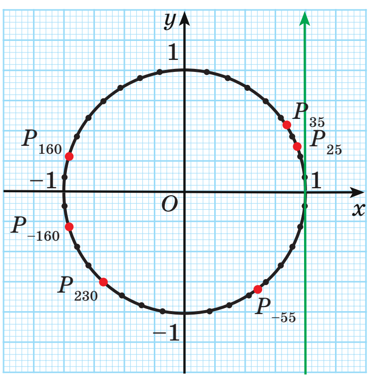
1.88. Выкарыстаўшы азначэнне тангенса і катангенса адвольнага вугла, знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, калі вядома, што пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты:

а) $P\quad \frac{5}{13};\ \ \frac{12}{13}\ ;$ б) $P\quad \frac{1}{7};\ \frac{4\sqrt{3}}{7}\ ;$

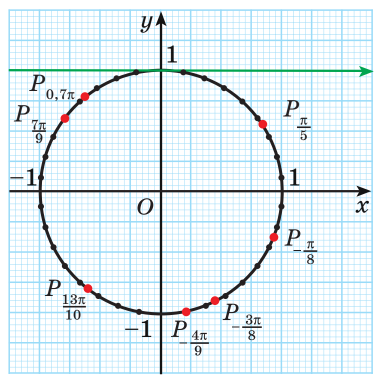
в) $P\quad 0,8;\quad 0,6\ ;$ г) $P\quad \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\ .$

1.89. З дапамогай восі тангенсаў (рыс. 68) знайдзіце прыбліжаныя значэнні тангенса вугла:

а) 25°; б) 160°; в) 230°; г) –55°.



Рыс. 68



Рыс. 69

1.90. З дапамогай восі катангенсаў (рыс. 69) знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу:

а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; б) $\operatorname{ctg}\quad \frac{4}{9}\ $; в) $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{10}$; г) $\operatorname{ctg}0,7\pi$.

1.91. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\ \ -\cdot\quad -\quad\quad -$ б) $\sin^2\frac{}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{}{6}\quad \sin\frac{}{3}$;

в) $6\operatorname{tg}\frac{}{6}\quad 4\cos\frac{}{3}\quad 9\operatorname{ctg}\frac{}{3}$.

1.92. З дапамогай адзінкавай акружнасці знайдзіце значэнне выразу (калі гэта магчыма):

а) $\operatorname{ctg}90°$; б) $\operatorname{tg}3\pi$; в) $\operatorname{tg}\quad \frac{}{2}\ $; г) $\operatorname{ctg}(-540°)$.

1.93. Для якіх вуглоў α не існуе $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$?

1.94. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg}\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2}$; б) — — ; в) — —

г) — — — ; д) $\sin \frac{}{2}$ $5\operatorname{ctg}\frac{}{4}$; е)

1.95. Знайдзіце некалькі значэнняў α, пры якіх:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

1.96. Параўнайце:

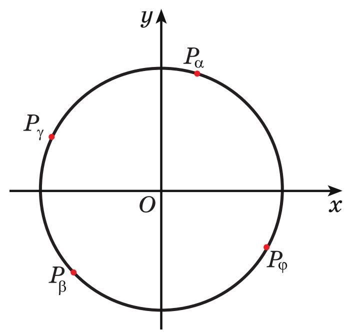
а) $\operatorname{tg}47°$ і $\operatorname{tg}53°$; б) $\operatorname{ctg}32°$ і $\operatorname{ctg}58°$;

в) $\operatorname{tg}189°$ і $\operatorname{tg}242°$;

г) $\operatorname{ctg}(-13°)$ і $\operatorname{ctg}(-25°)$.

1.97. Размясціце ў парадку спадання: $\operatorname{ctg}46°$; $\operatorname{ctg}118°$ і $\operatorname{ctg}79°$.

1.98. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α, P_β, P_γ і P_φ, якія адпавядаюць вуглам павароту α, β, γ і φ (рыс. 70). Параўнайце з нулём значэнні тангенса і катангенса гэтых вуглоў.



Рыс. 70

1.99. Вызначце знак здабытку:

а) $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{11} \cdot \operatorname{tg}\frac{14\pi}{13}$; б) $\operatorname{ctg}(-401°) \cdot \operatorname{ctg}(-739°)$; в) $\operatorname{ctg}4 \cdot \operatorname{tg}3$.

1.100. Вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі:

а) $\operatorname{tg}\alpha > 0$ і $\cos\alpha < 0$; б) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$?

1.101. З дапамогай восі тангенсаў знайдзіце адзін з вуглоў, тангенс якога роўны: а) $\frac{5}{3}$; б) $-\frac{2}{5}$.

1.102. З дапамогай восі катангенсаў знайдзіце адзін з вуглоў, катангенс якога роўны: а) 2; б) $-\frac{2}{3}$.

1.103. Ці праўда, што:

а) $\operatorname{tg}\frac{}{4}$ $\operatorname{tg}\frac{}{4}$; б) — —

в) $\operatorname{tg}\frac{2}{3}$ $\operatorname{tg}\frac{}{3}$; г) — —

1.104. Выкарыстаўшы азначэнне тангенса і катангенса адвольнага вугла, знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, калі вядома, што пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты:

а) P $\frac{15}{17}$; $\frac{8}{17}$; б) P 0,6; 0,8 .

1.105. З дапамогай восі тангенсаў на рысунку 68 (восі катангенсаў на рысунку 69) знайдзіце прыбліжанае значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg} 35°$; б) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{9}$; в) $\operatorname{tg}(-160°)$; г) $\operatorname{ctg} \quad \frac{3}{8}$.

1.106. Знайдзіце значэнне выразу:

а) — · — — б) — · — —

1.107. З дапамогай адзінкавай акружнасці знайдзіце значэнне выразу (калі гэта магчыма):

а) $\operatorname{ctg} 180°$; б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$; в) $\operatorname{tg}(-3\pi)$; г) $\operatorname{ctg}(-450°)$.

1.108. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$; б) — —

в) $\sin \frac{}{6} \quad \operatorname{tg} 2$; г) — —

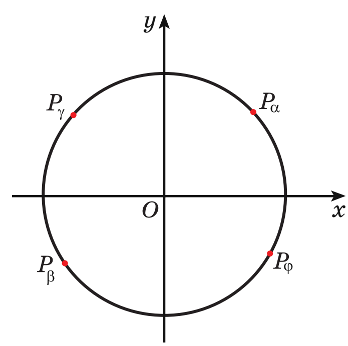
1.109. Знайдзіце некалькі значэнняў α, пры якіх:

а) $\operatorname{ctg} \alpha = 0$; б) $\operatorname{tg} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.110. Параўнайце:

а) $\operatorname{ctg} 55°$ і $\operatorname{ctg} 63°$; б) $\operatorname{tg} 42°$ і $\operatorname{tg} 68°$;
в) $\operatorname{ctg} 200°$ і $\operatorname{ctg} 225°$; г) $\operatorname{tg}(-35°)$ і $\operatorname{tg}(-55°)$.

1.111. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α, P_β, P_γ і P_φ, якія адпавядаюць вуглам α, β, γ і ϕ (рыс. 71). Параўнайце з нулём значэнні тангенса і катангенса гэтых вуглоў.



Рыс. 71

1.112. Вызначце знак здабытку:

а) $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9} \cdot \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}$;

б) $\operatorname{tg}(-511°) \cdot \operatorname{tg}(-183°)$;

в) $\operatorname{ctg} 2 \cdot \operatorname{tg} 5$.

1.113. Вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі:

а) $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ і $\cos \alpha < 0$;

б) $\sin \alpha > 0$ і $\operatorname{tg} \alpha < 0$?

1.114. З дапамогай восі тангенсаў знайдзіце адзін з вуглоў, тангенс якога роўны $\frac{4}{5}$.

1.115. З дапамогай восі катангенсаў знайдзіце адзін з вуглоў, катангенс якога роўны –1,5.

1.116. Ці праўда, што:

а) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $(x - 4) \; + (y + 8) \; = 16$, з'яўляецца пункт (4; –8);

б) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $x \; + (y - 9) \; = 36$, з'яўляецца пункт (0; –9);

в) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $x \; + y \; = 8$, з'яўляецца пункт (0; 0);

г) радыус акружнасці, зададзенай ураўненнем $(x + 5) \; + y \; = 16$, роўны 4?

1.117. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай t, пры якіх:

а) $t \; = 9$; б) $16t \; = 1$; в) $t \; = 5$; г) $t \; = 0{,}75$.

1.118. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{c^2 - a^2}{c^2 \quad a^2 \quad 2ac}$; б) $\dfrac{5x - 7x^2 - 5y \quad 7xy}{x^2 \quad xy}$.

§ 4. Суадносіны паміж сінусам, косінусам, тангенсам і катангенсам аднаго і таго ж вугла (трыганаметрычныя тоеснасці)

1.119. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай m, пры якіх правільная роўнасць:

а) $m \; = 1$; б) $m^2 = \dfrac{49}{64}$; в) $m \; = 2$; г) $m^2 = \dfrac{1}{3}$.

1.120. Вызначце каардынаты цэнтра і радыус акружнасці, зададзенай ураўненнем:

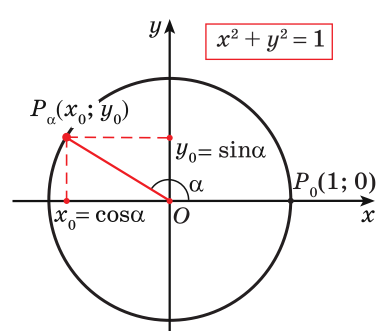
а) $(x - 1) \; + (y - 3) \; = 16$; б) $x \; + (y + 2) \; = 9$;

в) $(x + 5) \; + y \; = 7$; г) $x \; + y \; = 1$.

1.121. Скараціце дроб $\dfrac{4a^2 - 4ab + b^2}{b^2 - 4a^2}$.

Установім суадносіны паміж сінусам, косінусам, тангенсам і катангенсам аднаго і таго ж вугла.

Паколькі цэнтрам адзінкавай акружнасці з'яўляецца пачатак каардынат, а яе радыус роўны 1 (рыс. 72), то ўраўненне адзінкавай акружнасці мае выгляд $x \; + y \; = 1$.



Рыс. 72

Каардынаты любога пункта $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ адзінкавай акружнасці задавальняюць ураўненне гэтай акружнасці. Па азначэнні сінуса і косінуса вугла α пункт $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ мае каардынаты $x_0 =$ α і $y_0 =$ α.

Падставім каардынаты пункта $P_\alpha(x_0;\ y_0)$ ва ўраўненне адзінкавай акружнасці і атрымаем формулу sin α + α = 1.

Атрыманую формулу называюць **асноўнай трыганаметрычнай тоеснасцю**, а таксама трыганаметрычнай адзінкай.

α + α =

Пры дапамозе асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці, ведаючы значэнне сінуса (косінуса) вугла α, можна знайсці косінус (сінус) гэтага ж вугла.

Напрыклад, знойдзем cos α, калі вядома, што sin $\frac{1}{3}$.

Для гэтага з формулы sin α + α = 1 выразім cos α і атрымаем α = − α. Паколькі sin $\frac{1}{3}$, то знойдзем $\cos^2 \quad 1 \quad \frac{1}{3}^{2} \quad 1 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{8}{9}$.

Тады cos $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ або cos $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Знак cos α залежыць ад таго, у якой чвэрці знаходзіцца вугал α.

Прыклад 1. Вядома, што cos $\frac{3}{5}$. Знайдзіце sin α, калі $\frac{3}{2}$; 2 .

Рашэнне. З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці sin α + α = выразім sin α і атрымаем sin α = − α.

Па ўмове cos $\frac{3}{5}$, тады $\sin^2 \quad 1 \quad \frac{3}{5}^{2} \quad 1 \quad \frac{9}{25} \quad \frac{16}{25}$. Значыць, sin $\frac{4}{5}$ або sin $\frac{4}{5}$.

Па ўмове $\frac{3}{2}$; 2 (чацвёртая чвэрць), тады sin α < 0, значыць, sin $\frac{4}{5}$.

Адказ: sin $\frac{4}{5}$.

Па азначэнні тангенса вугла α атрымаем формулу $\frac{\sin}{\cos}$ tg .

Формула $\frac{\sin}{\cos}$ tg справядлівая для ўсіх вуглоў α такіх, што $\frac{}{2}$ n, n $\boldsymbol{Z}$. Паколькі пры $\frac{}{2}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$, абсцыса адпаведных пунктаў адзінкавай акружнасці роўна нулю, то cos α = 0 пры $\frac{}{2}$ n, n $\boldsymbol{Z}$, г. зн. дроб $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ пры гэтых значэннях α не мае сэнсу.

$\frac{\sin}{\cos}$ tg

$\frac{}{2}$ n, n $\boldsymbol{Z}$

Па азначэнні катангенса вугла α атрымаем формулу $\frac{\cos}{\sin}$ ctg .

$\frac{\cos}{\sin}$ ctg

n, n $\boldsymbol{Z}$

Формула $\frac{\cos}{\sin}$ ctg справядлівая для ўсіх вуглоў α такіх, што n, n $\boldsymbol{Z}$.

Паколькі пры n, n $\boldsymbol{Z}$, ардыната адпаведных пунктаў адзінкавай акружнасці роўна нулю, то $\sin\alpha = 0$ пры n, n Z, г. зн. дроб $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ пры гэтых значэннях α не мае сэнсу.

tg $\cdot$ ctg 1

$\frac{n}{2}, n$ $\boldsymbol{Z}$

Паколькі $\frac{\sin}{\cos} \cdot \frac{\cos}{\sin}$ 1, то $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Формула $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ справядлівая для ўсіх вуглоў α такіх, што $\frac{n}{2}, n$ $\boldsymbol{Z}$.

Падзелім абедзве часткі асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці sin α + α = 1 на cos α і атрымаем:

$$\frac{\sin^2 \quad \cos^2}{\cos^2} \quad \frac{1}{\cos^2}; \quad \frac{\sin^2}{\cos^2} \quad \frac{\cos^2}{\cos^2} \quad \frac{1}{\cos^2};$$

$$\frac{\sin^2}{\cos^2} \quad 1 \quad \frac{1}{\cos^2}; \quad 1 \quad \operatorname{tg}^2 \quad \frac{1}{\cos^2},$$

дзе $\frac{}{2}$ n, n $\boldsymbol{Z}$.

1 tg^2 $\frac{1}{\cos^2}$

$\frac{}{2}$ n, n $\boldsymbol{Z}$

n n $\boldsymbol{Z}$

Падзяліўшы абедзве часткі асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці на sin α, атрымаем формулу

n n $\boldsymbol{Z}$

Формулы (***трыганаметрычныя тоеснасці***), што мы вывелі, апісваюць суадносіны паміж сінусам, косінусам, тангенсам і катангенсам аднаго і таго ж вугла.

Атрыманыя формулы дазваляюць знаходзіць значэнні sin α, cos α, tg α, ctg α, калі вядома адно з гэтых значэнняў.

Прыклад 2. Знайдзіце значэнні sin α, cos α, ctg α вугла α, калі tg α = 0,75, ; $\frac{3}{2}$.

Рашэнне. З формулы $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ выразім

Паколькі па ўмове tg 0,75 $\frac{3}{4}$, то :

Па формуле $1 \quad \mathrm{tg}^2 \quad \frac{1}{\cos^2}$ знойдзем $\cos\alpha$:

$1 \quad \frac{3}{4}^{2} \quad \frac{1}{\cos^2}; \frac{25}{16} \quad \frac{1}{\cos^2}; \cos^2 \quad \frac{16}{25}$, значыць, $\cos \quad \frac{4}{5}$ або $\cos \quad \frac{4}{5}$.

Паколькі ; $\frac{3}{2}$ (трэцяя чвэрць), то $\cos \quad \frac{4}{5}$.

З формулы $\frac{\sin}{\cos} \quad \mathrm{tg}$ выразім $\sin \quad \mathrm{tg} \cdot \cos$ і знойдзем $\sin\alpha =$ $\frac{3}{4} \cdot \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5}$.

Адказ: $\sin \quad \frac{3}{5}$, $\cos \quad \frac{4}{5}$, —

Разгледзім, як трыганаметрычныя тоеснасці выкарыстоўваюцца для спрашчэння выразаў.

Прыклад 3. Спрасціце выраз:

а) $3 \quad \sin^2 \quad \cos^2$; б)

в) $\frac{1}{\cos^2} \quad \mathrm{tg}^2 \quad \sin^2$; г) $1 \quad \sin^2 \quad \mathrm{tg}^2 \quad 1$.

Рашэнне.

а) $3 \quad \sin^2 \quad \cos^2 \quad 3 \quad \sin^2 \quad \cos^2 \quad 3 \quad 1 \quad 2$;

б) $\cdot \quad \cdot$

$= \quad \alpha$;

в) $\frac{1}{\cos^2} \quad \mathrm{tg}^2 \quad \sin^2 \quad 1 \quad \mathrm{tg}^2 \quad \mathrm{tg}^2 \quad \sin^2 \quad 1 \quad \sin^2 \quad \cos^2$;

г) $1 \quad \sin^2 \quad \mathrm{tg}^2 \quad 1 \quad \cos^2 \cdot \frac{\sin^2}{\cos^2} \quad 1 \quad \sin^2 \quad 1 \quad 1 \quad \sin^2$

$= - \quad \alpha$.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Ці могуць сінус і косінус аднаго вугла быць роўнымі адпаведна:

а) $\frac{5}{13}$ і $\frac{12}{13}$; б) $-0,3$ і $0,4$; в) $0,8$ і $0,6$?

Рашэнне. Для адказу на пытанне дастаткова праверыць, ці правільная роўнасць $\sin^2 \quad \cos^2 \quad 1$ (г. зн. ці выконваецца ўмова прыналежнасці пункта P_α адзінкавай акружнасці).

а) $\frac{5}{13}^{2} \quad \frac{12}{13}^{2} \quad \frac{25 \quad 144}{169} \quad 1$, могуць;

б) $(-0,3)^2 + (0,4)^2 = 0,09 + 0,16 \quad 0,25 \quad 1$, не могуць;

в) $0,8^{\ 2} \quad 0,6^{\ 2} \quad 0,64 \quad 0,36 \quad 1$, могуць.

2. Знайдзіце:

а) $\cos\beta$, калі $\sin \quad \frac{5}{13}$ і $\frac{3}{2} < \quad < 2 \quad$;

б) $\sin\alpha$, калі $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ і $180 < \quad < 270$.

Рашэнне. а) З роўнасці $\sin^2 \quad \cos^2 \quad 1$ выразім $\cos^2 \quad 1 \quad \sin^2$.

Паколькі $\sin \quad \frac{5}{13}$, то $\cos^2 \quad 1 \quad \frac{5}{13}^{2} \quad \frac{144}{169}$. Тады $\cos \quad \frac{12}{13}$

або $\cos \quad \frac{12}{13}$. Паколькі $\frac{3}{2} < \quad < 2$ (вугал чацвёртай чвэрці), то

$\cos \quad \frac{12}{13}$.

б) Паколькі —— то — З формулы ——

знойдзем $\sin\alpha$: $1 \quad \frac{1}{2}^{2} \quad \frac{1}{\sin^2}$; $\frac{5}{4} \quad \frac{1}{\sin^2}$, $\sin^2 \quad \frac{4}{5}$. Паколькі

$180 < \quad < 270$, а значэнні сінуса вугла ў трэцяй чвэрці адмоўныя,

то $\sin \quad \frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. Спрасціце выраз:

а) $\cos^2 \quad \sin^2 \quad 7$;

б) $\frac{2\sin \quad \cos \quad 1}{\sin \quad \cos}$;

в)

г) $\sin^4 \quad \sin^2 \quad \cos^2$.

Рашэнне. а) $\cos^2 \quad \sin^2 \quad 7 \quad 1 \quad 7 \quad 6$;

б) $\frac{2\sin \quad \cos \quad 1}{\sin \quad \cos} \quad \frac{2\sin \quad \cos \quad \sin^2 \quad \cos^2}{\sin \quad \cos} = \frac{\sin \quad \cos}{\sin \quad \cos}^{2} \quad \sin \quad \cos$;

в)

$+ \quad = 4$;

г) $\sin^4 \quad \sin^2 \quad \cos^2 = \sin^2 \quad 1 \sin^2 \quad \cos^2$

$\cos^2 \cdot \sin^2 \quad \cos^2 = \cos^2 \quad \sin^2 \quad 1$

$\cos^2 \quad 1 \quad \sin^2 \quad \cos^2 \cdot \cos^2 \quad \cos^4$.

4*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{3\sin \quad \cos}{\sin \quad 2\cos}$, калі $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Рашэнне. Вядома, што $\operatorname{tg}\alpha = 5$, г. зн. $\frac{\sin}{\cos}$ 5, тады $\sin\alpha =$ α.

Значыць, $\frac{3\sin \quad \cos}{\sin \quad 2\cos} \quad \frac{3\cdot 5\cos \quad \cos}{5\cos \quad 2\cos} \quad \frac{14\cos}{7\cos} \quad 2.$

Калі $\operatorname{tg}\alpha = -2$, то:
а) $\operatorname{ctg}\alpha = -2$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$; в) — г) —
Выберыце правільны адказ.

1.122. Ці могуць сінус і косінус аднаго і таго ж вугла быць роўнымі адпаведна:
а) 0,6 і –0,8; б) 0,2 і 0,4?

1.123. Ці могуць тангенс і катангенс аднаго і таго ж вугла быць роўнымі адпаведна:
а) 4 і 0,25; б) $\sqrt{7}$ і $-\frac{1}{\sqrt{7}}$?

1.124. Знайдзіце $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\cos \quad \frac{4}{5}$ і $\frac{\ }{2} < \quad < \quad .$

1.125. Знайдзіце $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\sin \quad \frac{12}{13}$ і $2 \quad < \quad < \frac{5}{2}$.

1.126. Спрасціце выраз:

а) $1 - \quad \alpha$;

б) $\cos \quad \alpha - 1$;

в) $2\sin \quad \alpha + \quad \alpha - 7$;

г) $\frac{2\sin^2 \quad - 2}{1 \quad \cos^2}$;

д) $\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha$;

е) $\sin\alpha \quad \alpha \operatorname{tg}\alpha - 1$;

ж) $1 - \quad \alpha + \operatorname{tg} \quad \alpha \quad \alpha$;

з) $\frac{1 \quad \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad \operatorname{tg}\alpha$;

і) $\frac{1-\sin^2}{1-\cos^2} \quad \operatorname{tg} \quad \operatorname{ctg}$;

к) $\frac{\cos^2 \quad 1}{\cos^2} \cdot \sin^2 \quad 1$.

1.127. Знайдзіце значэнне выразу:

а) 49(1 − α), калі sin $\frac{5}{7}$;

б) 36 $\sin^2$ 1 , калі cos $\frac{2}{3}$.

1.128. Знайдзіце sin α, cos α, ctg α, калі tg $\frac{7}{24}$ і $\frac{3}{2} < \quad < 2$.

1.129. Дакажыце тоеснасць:

а) (1 + tg α)cos α + α = 1;

б) (1 + ctg α)(1 − α) = ctg α.

1.130. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\sin \quad \cos \quad ^2}{1 \quad 2\sin \quad \cdot \cos}$;

б) $\frac{\sin^4 \quad - 2\sin^2 \quad 1}{1 - \sin^2}$;

в) $\frac{\cos^4 \quad \sin^2 \quad \cos^2}{\sin^2 \quad - 1}$;

г) $\frac{\cos}{1 \quad \sin}$ tg ;

д) $\frac{\cos^2}{\cos^3 \quad \sin \quad \cos \quad \sin^3}$;

е) $\frac{\sin}{1 \quad \cos} \quad \frac{\sin}{1 \quad \cos}$;

ж) $\frac{1 \quad \cos}{\sin}^2 \quad 1 : \frac{1 \quad \cos}{\sin^2}$;

з) $\frac{\mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}^2} \quad \frac{\mathrm{ctg}}{1 \quad \mathrm{ctg}^2}$.

1.131. Знайдзіце sin α, cos α, ctg α, калі tg $\frac{5}{12}$ і $\frac{5}{2} < \quad < 3$.

1.132. Знайдзіце $9\sqrt{2}\cos\alpha$, калі sin $\frac{1}{3}$ і tg α < 0.

1.133. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{\cos^4 \quad - \sin^4}{\cos^2} \quad 2\mathrm{tg}^2 \quad \frac{1}{\cos^2}$;

б) $\frac{\mathrm{tg}}{\mathrm{tg} \quad \mathrm{ctg}} \quad \sin^2$.

1.134. Спрасціце выраз (tg α − 3ctg α) − (tg α + 3ctg α) .

1.135. Спрасціце выраз:

а) (1 − α)(1 + α)tg α;

б) tg α ctg α − (cos α tg α) ;

в) cos α + α α + α;

г) $\frac{\mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}^2} \quad \frac{\mathrm{ctg}^2 \quad 1}{\mathrm{ctg}}$;

д) $\frac{\sin^3\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$;

е) $\frac{\sin \quad \cos \quad ^2 \quad 1}{\mathrm{ctg} \quad - \sin \quad \cos}$.

1.136. Знайдзіце sin α і tg α, калі вядома, што cos $\frac{2}{\sqrt{5}}$ і α ляжыць не ў другой чвэрці.

1.137. Дакажыце тоеснасць:

а) $\sin\ \alpha + \quad \alpha - \quad \alpha = 1$; б) $\frac{\text{ctg}}{\text{tg} \quad \text{ctg}} \quad \cos^2$;

в) $(\sin\alpha + \quad \alpha) + (\sin\alpha - \quad \alpha) = 2$.

1.138*. Знайдзіце $\frac{2\sin \quad - 3\cos}{3\cos \quad 2\sin}$, калі $\text{tg}\,\alpha = 7$.

1.139. Знайдзіце $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,\alpha$, калі $\sin\alpha = -0{,}6$ і $\quad < \quad < \frac{3}{2}$.

1.140. Спрасціце выраз:

а) $1 - \quad \alpha$; б) $\sin\ \alpha - 1$;

в) $5\sin\ \alpha + \quad \alpha + 3$; г) $\frac{3 - 3\cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$;

д) $\sin\alpha\ \text{ctg}\,\alpha$; е) $1 - \quad \alpha \quad \alpha\ \text{ctg}\,\alpha$;

ж) $1 - \quad \alpha + \text{ctg}\ \alpha \quad \alpha$; з) $(1 - \quad \alpha)\text{tg}\ \alpha + \quad - \text{tg}\ \alpha$.

1.141. Знайдзіце $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, калі $\text{ctg} \quad \frac{5}{12}$ і $\frac{}{2} < \quad < \quad$.

1.142. Дакажыце тоеснасць:

а) $(1 + \text{ctg}\ \alpha)\sin\ \alpha + \quad \alpha = 1$; б) $(1 - \quad \alpha)(1 + \text{tg}\ \alpha) = \text{tg}\ \alpha$.

1.143. Спрасціце выраз:

а) $\frac{1 \quad \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad \text{ctg}\,\alpha$; б) $\frac{\cos^4 \quad - 2\cos^2 \quad 1}{1 - \cos^2}$; в) $\frac{\sin^4 \quad \cos^2 \quad \sin^2}{\cos^2 \quad 1}$;

г) $\frac{\sin}{1 \quad \cos} \quad \text{ctg}$; д) $\frac{\sin^4 \quad \sin^2 \quad \cos^2}{\sin^2 \quad \cos^2}$; е) $\frac{\cos}{1 \quad \sin} \quad \frac{\cos}{1 \quad \sin}$;

ж) $\frac{3\cos}{1 \quad \sin} \quad \frac{3\cos}{1 \quad \sin} \cdot \cos$.

1.144. Знайдзіце $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$, калі $\text{ctg}\,\alpha = \quad$ і $\sin\alpha < 0$.

1.145. Спрасціце выраз:

а) $(1 - \quad \alpha)(1 + \quad \alpha)\text{ctg}\ \alpha$; б) $\text{tg}\,\alpha\,\text{ctg}\,\alpha - (\sin\alpha\,\text{ctg}\,\alpha)$;

в) $\frac{1}{1 \quad \text{tg}^2} \quad \frac{1}{1 \quad \text{ctg}^2}$.

1.146. Знайдзіце $\cos\alpha$ і $\text{ctg}\,\alpha$, калі вядома, што $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і α не ляжыць у першай чвэрці.

1.147*. Знайдзіце $\text{ctg}\,\alpha$, калі $\frac{4\sin \quad - 3\cos}{2\cos \quad 3\sin} \quad 3$.

1.148. Знайдзіце, не выконваючы пабудовы графіка, пункты перасячэння з восямі каардынат графіка функцыі:

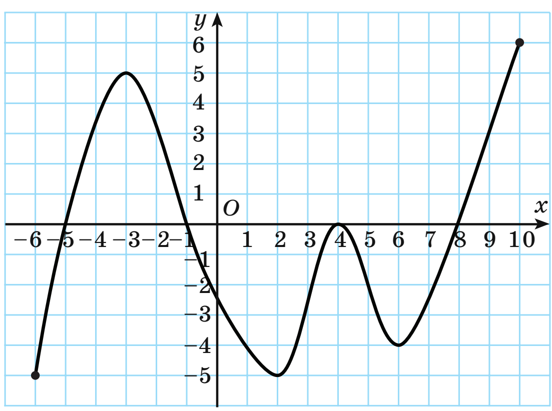
а) $f(x) = \quad - \quad x$; б) $f(x) = \quad x \quad + \quad x - 1$; в) $f \quad x \quad \dfrac{x^2 \quad 3x \quad 2}{x \quad 2}$.

1.149. Дадзена функцыя $y = q(x)$. Вядома, што $q(-2) = 3$, а $q(9) = 7$. Знайдзіце значэнне выразу $5q(2) - q(-9)$, калі функцыя $y = q(x)$ з'яўляецца:

а) цотнай; б) няцотнай.

1.150. Па графіку функцыі $y = f(x)$, паказанаму на рысунку 73, знайдзіце:

а) абсяг вызначэння функцыі;
б) мноства значэнняў функцыі;
в) нулі функцыі;
г) прамежкі знакапастаянства функцыі;
д) прамежкі нарастання і спадання функцыі;
е) найбольшае і найменшае значэнні функцыі.



Рыс. 73

§ 5. Функцыі $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Іх уласцівасці і графікі

1.151. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ няцотная, а функцыя $y = q(x)$ цотная і $f(2) = -5$; $q(7) = 9$. Знайдзіце значэнне выразу $f(-2) + \quad q(-7)$.

1.152. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y \quad \dfrac{\sqrt{1 \quad x^2}}{2x \quad 1}$.

1.153. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі $y = x \quad + \quad x - 6$.

Функцыя $y = \sin x$. Уласцівасці і графік

Разглядаючы адвольны рэчаісны лік x, мы можам паставіць яму ў адпаведнасць вугал у x радыян і вызначыць значэнне сінуса гэтага вугла.

Такім чынам мы ўстановім адпаведнасць паміж мноствам рэчаісных лікаў і мноствам значэнняў сінусаў вуглоў. Кожнаму рэчаіснаму ліку адпавядае адзінае значэнне сінуса. Такая адпаведнасць задае трыганаметрычную функцыю $y = \quad x$.

Азначэнне. Залежнасць, пры якой кожнаму рэчаіснаму ліку x адпавядае значэнне $\sin x$, называецца функцыяй $y = \quad x$.

Разгледзім уласцівасці функцыі $y = \quad x$ і пабудуем яе графік.

1. Абсягам вызначэння функцыі $y = \quad x$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, паколькі для любога $x \in \boldsymbol{R}$ існуе $\sin x$.

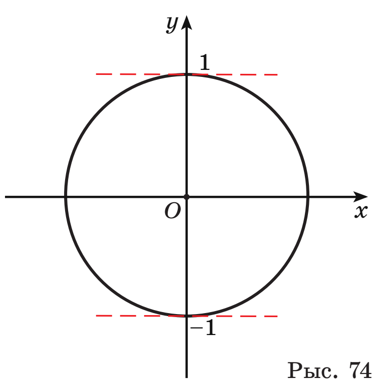
$D(\sin x) = \boldsymbol{R}$

Графічна гэта азначае, што для любой абсцысы знойдзецца пункт графіка функцыі $y = \quad x$.

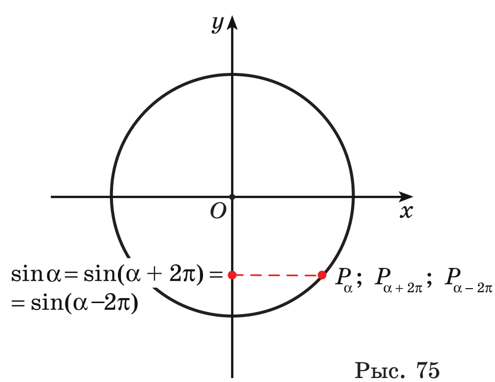
$E(\sin x) = [-1;\ 1]$

2. Мноствам значэнняў функцыі $y = \quad x$ з'яўляецца прамежак $[-1;\ 1]$, паколькі ардынаты пунктаў адзінкавай акружнасці (значэнні сінусаў лікаў) змяняюцца ад -1 да 1.

Графічна гэта азначае, што графік функцыі $y = \quad x$ размешчаны ў паласе паміж прамымі $y = -1$ і $y = 1$ (рыс. 74).



Рыс. 74



Рыс. 75

3. Перыядычнасць функцыі $y = \sin x$. Пункты адзінкавай акружнасці P_α, $P_{\alpha + \ \pi}$, $P_{\alpha - \ \pi}$ супадаюць для любога α (рыс. 75), значыць, значэнні сінусаў гэтых вуглоў таксама супадаюць, г. зн. $\sin\alpha = \sin(\alpha + \ \pi) = \sin(\alpha - \ \pi)$.

Гавораць, што лік 2π з'яўляецца перыядам функцыі $y = \quad x$.

Азначэнне. Функцыя $y = f(x)$ называецца **перыядычнай функцыяй з перыядам $T \neq 0$**, калі для любога значэння x з абсягу вызначэння функцыі лікі $x + T$ і $x - T$ таксама належаць абсягу вызначэння і пры гэтым правільная роўнасць

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Каб вызначыць, ці з'яўляецца функцыя перыядычнай з перыядам $T \neq 0$, неабходна праверыць:

1) ці належаць абсягу вызначэння функцыі лікі $x + T$ і $x - T$, калі x належыць абсягу вызначэння функцыі;

2) ці выконваецца роўнасць $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Вызначым, ці праўда, што лік π з'яўляецца перыядам функцыі $y = \quad x$.

1) Лікі $x + \pi$ і $x - \pi$ належаць абсягу вызначэння функцыі, паколькі $D(\sin x) = \boldsymbol{R}$.

2) Праверым, ці выконваецца роўнасць $\sin(x + \pi) = \quad x$ для ўсіх x.

Няхай $x \quad \frac{}{2}$, тады $\sin \quad \frac{}{2} \qquad \sin\frac{}{2} \quad 1$, а $\sin \quad \frac{}{2} \qquad 1$,

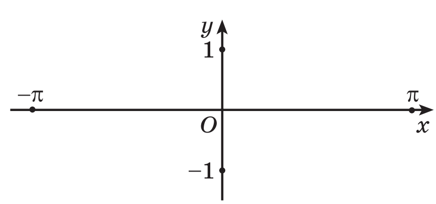
г. зн. $\sin \quad \frac{}{2} \qquad \sin \quad \frac{}{2}$.

Значыць, лік π не з'яўляецца перыядам функцыі $y = \quad x$.

Перыядам функцыі $y = \quad x$ з'яўляюцца лікі выгляду $2\pi n$, дзе $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq 0$. Лік 2π з'яўляецца найменшым дадатным перыядам функцыі $y = \quad x$.

Функцыя $y = \quad x$ з'яўляецца перыядычнай з найменшым дадатным перыядам $T = \quad \pi$ (рыс. 76). Гэта азначае, што яе графік складаецца з частак, якія паўтараюцца, таму дастаткова яго пабудаваць на адрэзку даўжынёй 2π (напрыклад, $[-\pi; \pi]$), а затым паўтарыць пабудову на кожным наступным адрэзку даўжынёй 2π.

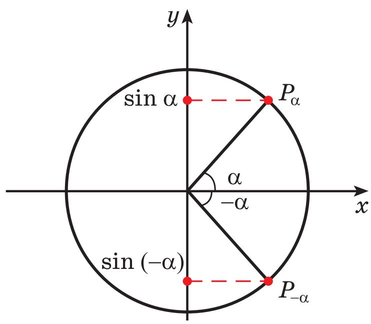
$T = \quad \pi$



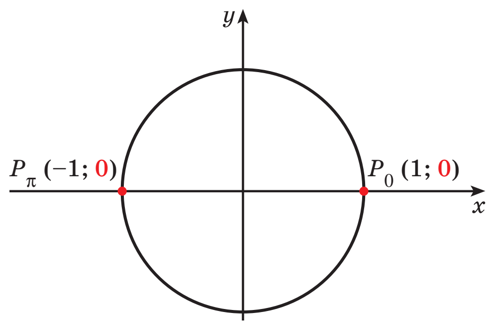
Рыс. 76

4. Цотнасць (няцотнасць) функцыі. $D(y) = \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля. Паколькі пункты P_α і $P_{-\alpha}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна восі абсцыс для любога $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то ардынаты гэтых пунктаў процілеглыя, г. зн. $\sin(-\alpha) = -\ \ \alpha$ (рыс. 77). Значыць, функцыя $y = \ \ x$ **няцотная.**

$\sin(-\alpha) = -\ \ \alpha$, функцыя няцотная



Рыс. 77



Рыс. 78

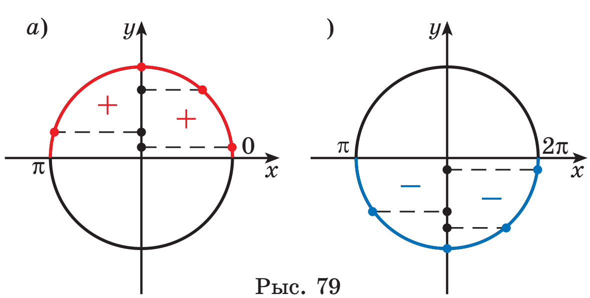
Для пабудовы графіка функцыі $y = \ \ x$ дастаткова пабудаваць яго частку для неадмоўных значэнняў аргумента і адлюстраваць гэту частку сіметрычна адносна пачатку каардынат.

5. Нулі функцыі. Ардынаты пунктаў $P_0(1;\ 0)$ і $P_\pi(-1;\ 0)$ роўны нулю. Значыць, $\sin x = 0$ у пунктах $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 78), г. зн. графік функцыі перасякае вось абсцыс у пунктах з абсцысамі $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Нулі функцыі: $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

6. Прамежкі знакапастаянства функцыі. На прамежках $(2\pi n;\ \pi + \ \ \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, функцыя $y = \ \ x$ прымае дадатныя значэнні, паколькі ардынаты пунктаў адзінкавай акружнасці дадатныя ў першай і другой чвэрцях (рыс. 79, *а*).

На прамежках $(\pi + \ \ \pi n;\ 2\pi + \ \ \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, функцыя $y = \ \ x$ прымае адмоўныя значэнні, паколькі ардынаты пунктаў адзінкавай акружнасці адмоўныя ў трэцяй і чацвёртай чвэрцях (рыс. 79, *б*).

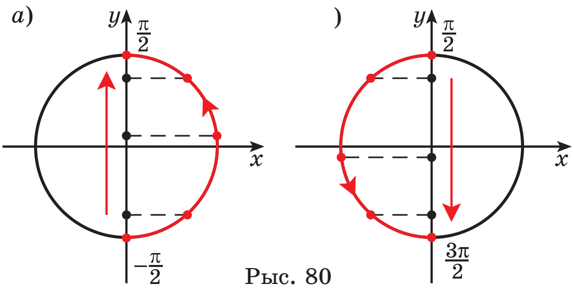


Рыс. 79

$y > 0$ пры $x \in (2\pi n;\ \pi + \ \ \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

$y < 0$ пры $x \in (\pi + \ \ \pi n;\ 2\pi + \ \ \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

7. Манатоннасць функцыі. Паколькі ардынаты пунктаў адзінкавай акружнасці павялічваюцца ад –1 да 1 пры змяненні вугла ад — да $\frac{\pi}{}$ (рыс. 80, *а*) і памяншаюцца ад 1 да –1 пры змяненні вугла ад $\frac{\pi}{}$ да $\frac{3\pi}{2}$ (рыс. 80, *б*), то з улікам перыядычнасці вызначым прамежкі нарастання функцыі $y =$ x: $\frac{}{2}$ 2 n; $\frac{}{2}$ 2 n , n $\boldsymbol{Z}$, і прамежкі спадання функцыі $y =$ x: $\frac{}{2}$ 2 n; $\frac{3}{2}$ 2 n , n $\boldsymbol{Z}$.



Рыс. 80

> Функцыя $y =$ x
> нарастае на прамежках
> $\frac{}{2}$ 2 n; $\frac{}{2}$ 2 n , n $\boldsymbol{Z}$,
> і спадае на прамежках
> $\frac{}{2}$ 2 n; $\frac{3}{2}$ 2 n , n $\boldsymbol{Z}$

Найбольшае значэнне функцыі $y =$ x роўна 1 і дасягаецца ў пунктах $\frac{}{2}$ 2 n, n $\boldsymbol{Z}$.

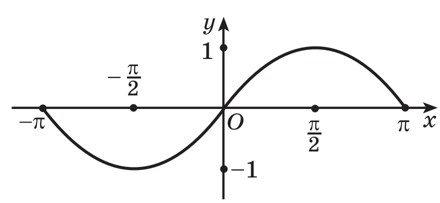
Найменшае значэнне функцыі $y =$ x роўна –1 і дасягаецца ў пунктах $\frac{}{2}$ 2 n, n $\boldsymbol{Z}$.

На падставе праведзенага даследавання пабудуем графік функцыі $y =$ x на адрэзку ад $-\pi$ да π, даўжыня якога роўна 2π, г. зн. даўжыні перыяду функцыі $y =$ x.

На гэтым перыядзе функцыя $y =$ x:

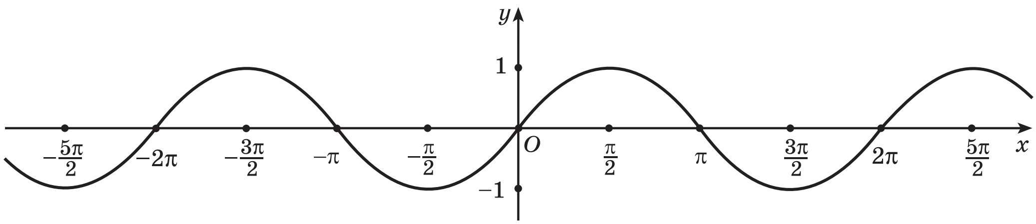
- роўна нулю ў пунктах $-\pi$; 0; π;
- дасягае значэнняў, роўных 1 і –1, адпаведна ў пунктах $\frac{\pi}{}$ і $\frac{}{2}$;
- прымае дадатныя значэнні пры значэннях аргумента ад 0 да π, а адмоўныя — пры значэннях аргумента ад $-\pi$ да 0;
- нарастае ад — да $\frac{\pi}{}$ і спадае ад $-\pi$ да — і ад $\frac{\pi}{}$ да π.

На рысунку 81 паказана частка графіка функцыі $y =$ x на прамежку ад $-\pi$ да π.



Рыс. 81

Перанясём гэту частку на іншыя перыяды і атрымаем графік функцыі $y = \quad x$ (рыс. 82). Графік функцыі $y = \quad x$ называецца *сінусоідай*.



Рыс. 82

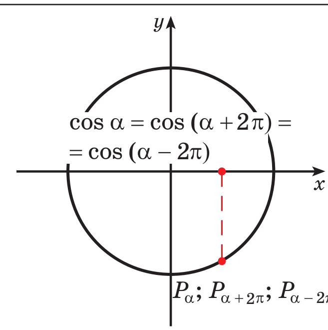
Функцыя $y = \cos x$. Уласцівасці і графік

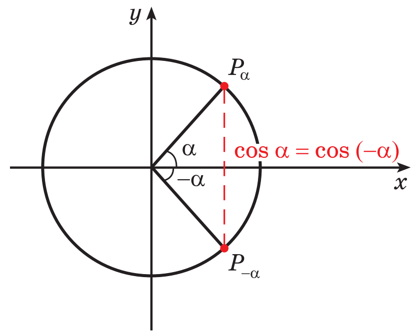
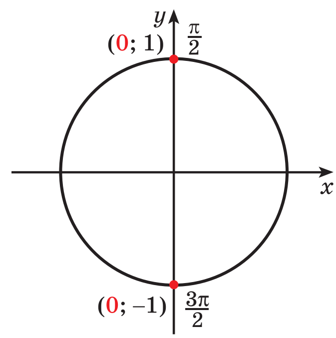
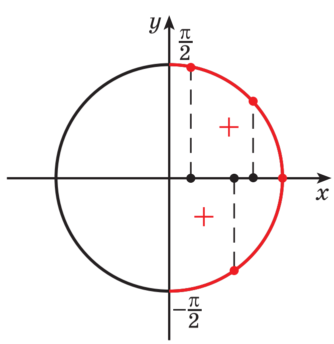
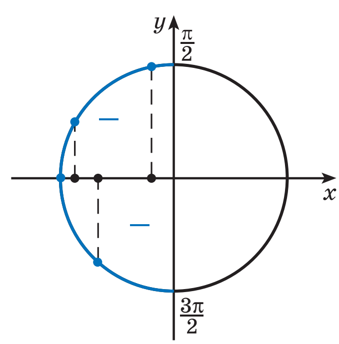
Азначэнне. Залежнасць, пры якой кожнаму рэчаіснаму ліку x адпавядае значэнне $\cos x$, называецца функцыяй $y = \quad x$.

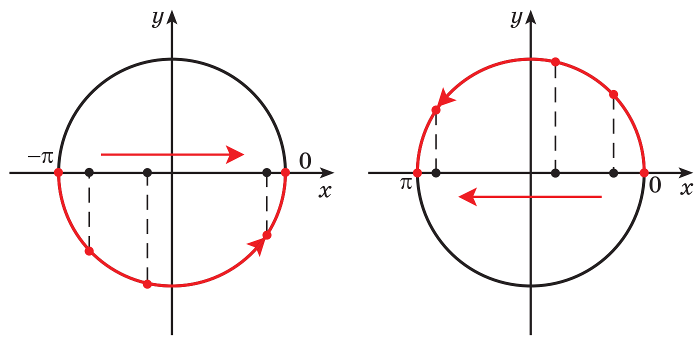
Некаторыя ўласцівасці функцыі $y = \quad x$ супадаюць з уласцівасцямі функцыі $y = \quad x$.

Напрыклад, абсягам вызначэння функцыі $y = \quad x$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, мноствам значэнняў функцыі $y = \quad x$ з'яўляецца адрэзак $[-1; 1]$, найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \quad x$ роўны 2π.

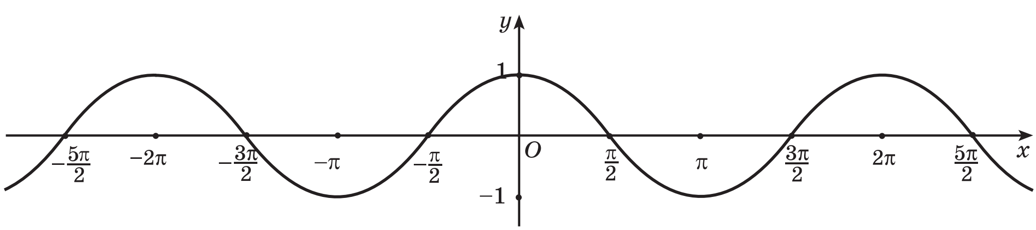
Уласцівасці функцыі $y = \quad x$ прыведзены ў табліцы.

1. Абсяг вызначэння функцыі	$D = (-\infty; +\infty)$
2. Мноства значэнняў функцыі	$E = [-1; 1]$
3. Перыядычнасць функцыі	Перыядычная з перыядам $T = \quad \pi$ 

4. Цотнасць (няцотнасць) функцыі	$D(y) = \boldsymbol{R}$ — сіметрычны адносна нуля. cos(−α) = α. Цотная 
5. Нулі функцыі	x = 0 пры x $\frac{}{2}$ n, n $\boldsymbol{Z}$ 
6. Прамежкі знакапастаянства функцыі	$y > 0$ пры x $\frac{}{2}$ 2 n; $\frac{}{2}$ 2 n , n $\boldsymbol{Z}$ $y < 0$ пры x $\frac{}{2}$ 2 n; $\frac{3}{2}$ 2 n , n $\boldsymbol{Z}$  

7. Манатоннасць функцыі	Функцыя нарастае на прамежках $[-\pi + \ \ \pi n;\ 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ Функцыя спадае на прамежках $[2\pi n;\ \pi + \ \ \pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ 
Найбольшае і найменшае значэнні функцыі	$y_{\text{найб}} = 1$ пры $x = \ \ \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $y_{\text{найм}} = -1$ пры $x = \pi + \ \ \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Графік функцыі $y = \ \ \ x$ паказаны на рысунку 83. Гэты графік можна атрымаць шляхам пераўтварэння (зруху) графіка функцыі $y = \ \ \ x$.



Рыс. 83

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Вызначце, ці належыць графіку функцыі $y = \ \ \ x$ пункт:

а) $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; б) $B\ \frac{}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $C(-\pi;\ 0)$; г) $D\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$.

Рашэнне. а) Падставім у формулу $y = \ \ \ x$ значэнне аргумента x — і знойдзем адпаведнае значэнне функцыі $y \ \ \sin\frac{}{2} \ \ 1$.

Атрыманае значэнне функцыі роўна ардынаце пункта $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, значыць, пункт $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ належыць графіку функцыі $y = \quad x$.

б) Пры $x \quad -$ атрымаем $y \quad \sin \frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$. Пункт $B \; \frac{}{4}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ не належыць графіку функцыі $y = \quad x$.

в) Пры $x = -\pi$ атрымаем $y \quad \sin \qquad 0$. Пункт $C(-\pi;\ 0)$ належыць графіку функцыі $y = \quad x$.

г) Пры $x \quad \frac{3}{2}$ атрымаем $y \quad \sin \frac{3}{2} \qquad 1 \quad 1$. Пункт $D\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ не належыць графіку функцыі $y = \quad x$.

2. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $f \; x \qquad 2\sin 5x$; б) $g \; x \qquad \sin \frac{x}{3} \quad 7$.

Рашэнне. а) Паколькі абсяг вызначэння функцыі $y = \quad t$ — усе рэчаісныя лікі, г. зн. $t \qquad \infty; \quad \infty$, то і $5x \qquad \infty; \quad \infty$, значыць, $x \qquad \infty; \quad \infty$. Такім чынам, $D \; f \qquad \infty; \quad \infty$.

Мноствам значэнняў функцыі $y = \quad t$ з'яўляецца адрэзак $[-1;\ 1]$, значыць, $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, г. зн. $-1 \leqslant \sin 5x \leqslant 1$. Тады па ўласцівасці няроўнасцей $-2 \leqslant 2\sin 5x \leqslant 2$. Такім чынам, $\qquad 2; 2$.

б) $D \; g \qquad \infty; \quad \infty$. Паколькі $-1 \leqslant \sin \frac{x}{3} \leqslant 1$, то па ўласцівасці няроўнасцей $-1-7 \leqslant \sin \frac{x}{3} - 7 \leqslant 1 - 7$; $-8 \leqslant \sin \frac{x}{3} - 7 \leqslant -6$, г. зн.

$\qquad 8; \quad 6$.

3. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $y = -2\sin x + 5$.

Рашэнне. Паколькі $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, значыць, $-2 \leqslant -2\sin x \leqslant 2$, тады $-2+5 \leqslant -2\sin x + 5 \leqslant 2+5$. Такім чынам, маем: $3 \leqslant -2\sin x + 5 \leqslant 7$. Найбольшае значэнне функцыі $y = -2\sin x + 5$ роўна 7.

4. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f \; x \qquad \sin x$:

а) $\sin \frac{9\pi}{4}$; б) $\sin \frac{13\pi}{3}$; в) $\sin \frac{21\pi}{2}$.

Рашэнне. Паколькі лік 2π з'яўляецца найменшым дадатным перыядам функцыі $y = \quad x$, то $\sin \; 2 \; n \qquad \sin \quad, n \quad \boldsymbol{Z}$. Тады:

а) $\sin\frac{9}{4}\quad \sin\frac{8}{4}\quad \sin 2\quad \frac{}{4}\quad \sin\frac{}{4}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin\frac{13}{3}\quad \sin\frac{12}{3}\quad \sin 4\quad \frac{}{3}\quad \sin 2\ \cdot 2\quad \frac{}{3}\quad \sin\frac{}{3}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\frac{21}{2}\quad \sin\frac{20}{2}\quad \sin 10\quad \frac{}{2}\quad \sin 2\ \cdot 5\quad \frac{}{2}\quad \sin\frac{}{2}\quad 1$.

5. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцыі $y = \quad x$:

а) $\sin\quad \frac{}{6}$; б) $\sin\quad \frac{5}{2}$.

Рашэнне. Паколькі функцыя $y = \quad x$ няцотная, то $\sin \qquad \sin$. Тады:

а) $\sin\quad \frac{}{6}\quad \sin\frac{}{6}\quad \frac{1}{2}$;

б) $\sin\quad \frac{5}{2}\quad \sin\frac{5}{2}\quad \sin 2\quad \frac{}{2}\quad \sin\frac{}{2}\quad 1$.

6. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f\ x\quad 2\sin 6x$; б) $g\ x\quad 4x\cdot\sin 3x\quad 8$.

Рашэнне. а) $D\ f\quad \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля;

$f(-x) = -2\sin(-6x) = -2(-\sin 6x) = 2\sin 6x = -f(x)$, значыць, функцыя з'яўляецца няцотнай.

б) $D\ g\quad \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля;

$g\quad x\quad 4\quad x\ \cdot\sin\quad 3x\quad 8\quad 4x\cdot\quad \sin 3x\quad 8$

$4x\cdot\sin 3x\quad 8\quad g\ x$, значыць, функцыя з'яўляецца цотнай.

7. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y\quad \sin\ x\quad \frac{}{10}$.

Рашэнне. а) Няхай $5x = t$. Нулямі функцыі $y = \quad t$ з'яўляюцца лікі $t\quad n, n\quad \boldsymbol{Z}$. Тады $5x\quad n, n\quad \boldsymbol{Z}$, значыць, $x\quad \frac{n}{5}, n\quad \boldsymbol{Z}$. Такім чынам, лікі $x\quad \frac{n}{5}, n\quad \boldsymbol{Z}$, з'яўляюцца нулямі функцыі $y = \quad x$.

б) Няхай $x\quad \frac{}{10}\quad t$. Нулямі функцыі $y = \quad t$ з'яўляюцца лікі $t\quad n, n\quad \boldsymbol{Z}$. Тады $x\quad \frac{}{10}\quad n, n\quad \boldsymbol{Z}$, значыць, $x\quad \frac{}{10}\quad n, n\quad \boldsymbol{Z}$.

Такім чынам, лікі $x \quad \frac{}{10} \quad n, n$ з'яўляюцца нулямі функцыі $y \quad \sin\, x \quad \frac{}{10}$.

8. Вызначце знак здабытку $\sin 4 \cdot \sin 2 \cdot \sin 1$.

Рашэнне. Паколькі $\quad 3{,}14$, то $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, г. зн. вугал 4 радыяны належыць прамежку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, на якім функцыя $y = \quad x$ прымае адмоўныя значэнні, значыць, $\sin 4 < 0$.
Вуглы 2 радыяны і 1 радыян належаць прамежку $(0; \pi)$, на якім функцыя $y = \quad x$ прымае дадатныя значэнні, г. зн. $\sin 2 > 0$ і $\sin 1 > 0$. Значыць, $\sin 4 \quad \sin 2 \quad \sin 1 \quad 0$.

9. Што больш: $\sin 37°$ ці $\sin 67°$?

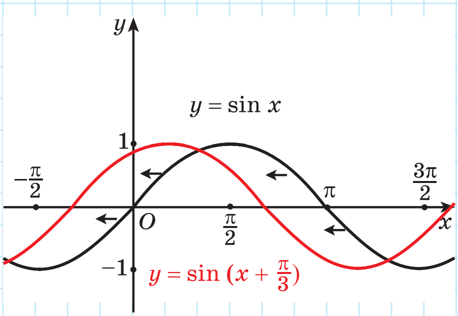
Рашэнне. Паколькі функцыя $y = \quad x$ нарастае на прамежку $\quad 90 \; ; 90 \quad$ і $\quad 37 \quad\quad 90 \; ; 90 \quad , \quad 67 \quad\quad 90 \; ; 90 \quad$, то з таго, што $37° < 67°$, вынікае, што $\sin 37° < \sin 67°$.

10. Пабудуйце графік функцыі:

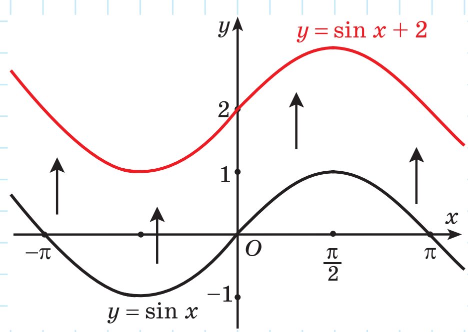
а) $y \quad \sin\, x \quad \frac{}{3}$; б) $y = \quad x + 2$.

Рашэнне. а) Графік функцыі $y \quad \sin\, x \quad \frac{}{3}$ атрымліваем з графіка функцыі $y = \quad x$ зрухам яго ўздоўж восі абсцыс на $\frac{\pi}{}$ улева (рыс. 84).

б) Графік функцыі $y = \quad x + 2$ атрымліваем з графіка функцыі $y = \quad x$ зрухам яго ўздоўж восі ардынат на 2 адзінкі ўверх (рыс. 85).



Рыс. 84



Рыс. 85

11. Вызначце, якія з дадзеных пунктаў належаць графіку функцыі $y =$ x:

а) $A(\pi; -1)$; б) $B\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$; в) $C(0; 0)$; г) $D\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Рашэнне. а) Падставім у формулу $y =$ x значэнне аргумента $x = \pi$ і знойдзем адпаведнае значэнне функцыі y cos 1. Атрыманае значэнне функцыі роўна ардынаце пункта $A(\pi; -1)$, значыць, пункт $A(\pi; -1)$ належыць графіку функцыі $y =$ x.

б) Пры x — атрымаем y $\cos\frac{}{3}$ $\frac{1}{2}$. Пункт $B\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$ належыць графіку функцыі $y =$ x.

в) Пры $x = 0$ атрымаем $y = \cos 0 = 1$. Пункт $C(0; 0)$ не належыць графіку функцыі $y =$ x.

г) Пры x — атрымаем y $\cos\frac{}{2}$ 0. Пункт $D\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ належыць графіку функцыі $y =$ x.

12. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі $y =$ $x - 4$.

Рашэнне. Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, г. зн. D y $\boldsymbol{R}$.

Мноствам значэнняў функцыі $y =$ x з'яўляецца адрэзак $[-1; 1]$, значыць, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Тады па ўласцівасці няроўнасцей $-3 \leqslant 3\cos x \leqslant 3$ і $-7 \leqslant 3\cos x - 4 \leqslant -1$. Такім чынам, $7; 1$.

13. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі $y = -\cos x - 5$.

Рашэнне. Паколькі $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, значыць, $-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$, тады $-6 \leqslant -\cos x - 5 \leqslant -4$.

Найменшае значэнне функцыі $y = -\cos x - 5$ роўна -6.

14. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі f x $\cos x$, знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos\frac{9\pi}{4}$; б) $\cos\frac{19\pi}{3}$; в) $\cos 17\pi$.

Рашэнне. Паколькі лік 2π з'яўляецца найменшым дадатным перыядам функцыі $y =$ x, то cos 2 n cos , n $\boldsymbol{Z}$. Тады:

а) $\cos\frac{9}{4}$ $\cos\frac{8}{4}$ $\cos 2$ $\frac{}{4}$ $\cos\frac{}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\frac{19}{3} \quad \cos\frac{18}{3} \quad \cos\ 6 \quad \frac{}{3} \quad \cos\ 2 \quad \cdot 3 \quad \frac{}{3} \quad \cos\frac{}{3} \quad \frac{1}{2}$;

в) $\cos 17 \quad \cos\ 16 \quad \cos\ 2 \quad \cdot 8 \quad \cos \quad 1$.

15. Выкарыстаўшы ўласцівасць цотнасці функцыі $y = \quad x$, знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos \quad \frac{}{4}$; б) $\cos \quad 9 \quad$.

Рашэнне. Паколькі функцыя $y = \quad x$ цотная, то $\cos \quad \cos \quad$. Тады:

а) $\cos \quad \frac{}{4} \quad \cos\frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos \quad 9 \quad \cos 9 \quad \cos\ 8 \quad \cos \quad 1$.

16. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f \quad x \quad 2\cos 2x \quad 1$; б) $g \quad x \quad 5x \cdot \cos 7x$.

Рашэнне. а) $D(f) = \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля; $f \quad x \quad 2\cos \quad 2x \quad 1 \quad 2\cos 2x \quad 1 \quad f \quad x$, значыць, функцыя з'яўляецца цотнай.

б) $D(g) = \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля;
$g(-x) = 5(-x) \cdot \cos(-7x) = -5x \cdot \cos 7x = -g(x)$, значыць, функцыя з'яўляецца няцотнай.

17. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \cos\frac{x}{2}$; б) $y \quad \cos\ 3x \quad \frac{}{5}$.

Рашэнне. а) Няхай $\frac{x}{2} = t$. Нулямі функцыі $y = \quad t$ з'яўляюцца лікі $t \quad \frac{}{2} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$. Тады $\frac{x}{2} \quad \frac{}{2} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$, значыць, $x \quad 2 \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$. Такім чынам, лікі $x \quad 2 \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$, з'яўляюцца нулямі функцыі $y = \cos\frac{x}{2}$.

б) Няхай $3x \quad \frac{}{5} \quad t$. Нулямі функцыі $y = \quad t$ з'яўляюцца лікі $t \quad \frac{}{2} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$. Тады $3x \quad \frac{}{5} \quad \frac{}{2} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$, значыць, $3x \quad \frac{}{5} \quad \frac{}{2} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$; $3x \quad \frac{3}{10} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$; $x \quad \frac{}{10} \quad \frac{n}{3}, n \quad \boldsymbol{Z}$.

Такім чынам, лікі $x \quad \frac{\ }{10} \quad \frac{n}{3}, n \quad \boldsymbol{Z}$, з’яўляюцца нулямі функцыі $y \quad \cos\, 3x \quad \frac{\ }{5}$.

18. Вызначце знак здабытку $\cos 4{,}5 \cdot \cos 2 \cdot \cos 7$.

Рашэнне. Паколькі $\quad 3{,}14$, то $\frac{\pi}{\ } < \quad < \pi$ і $\pi < 4{,}5 < \frac{3\pi}{2}$, г. зн. вуглы 4,5 радыяна і 2 радыяны належаць прамежку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, на якім функцыя $y = \quad x$ прымае адмоўныя значэнні, значыць, $\cos 4{,}5 < 0$ і $\cos 2 < 0$.
Вугал 7 радыян належыць прамежку, на якім функцыя $y = \quad x$ прымае дадатныя значэнні, г. зн. $\cos 7 > 0$. Значыць, $\cos 4{,}5 \quad \cos 2 \quad \cos 7 \quad 0$.

19. Што больш: $\cos 137°$ ці $\cos 167°$?

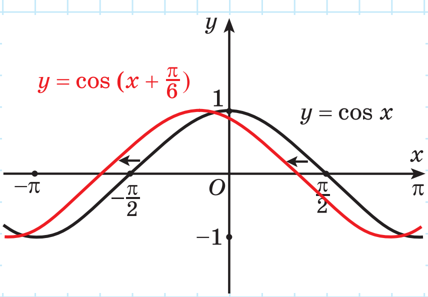
Рашэнне. Паколькі функцыя $y = \quad x$ спадае на прамежку $[0°; 180°]$ і $137 \quad 0\ ; 180 \quad , \ 167 \quad 0\ ; 180 \quad$, то з таго, што $137° < 167°$, вынікае, што $\cos 137° > \cos 167°$.

20. Пабудуйце графік функцыі:

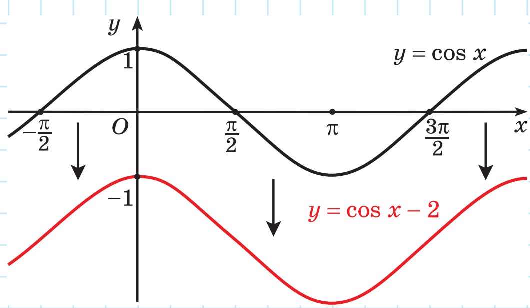
а) $y \quad \cos\ x \quad \frac{\ }{6}$; б) $y = \cos x - 2$.

Рашэнне. а) Графік функцыі $y \quad \cos\ x \quad \frac{\ }{6}$ атрымліваем з графіка функцыі $y = \quad x$ зрухам яго ўздоўж восі абсцыс на $\frac{\pi}{\ }$ улева (рыс. 86).

б) Графік функцыі $y = \quad x - 2$ атрымліваем з графіка функцыі $y = \quad x$ зрухам яго ўздоўж восі ардынат на 2 адзінкі ўніз (рыс. 87).



Рыс. 86



Рыс. 87

1. Ці магчыма роўнасць:

а) $\sin x = 2$; б) $\sin x = -\sqrt{5}$; в) $\sin x = \frac{1}{2}$; г) $\sin x = -\frac{1}{3}$?

2. Ці магчыма роўнасць:

а) $\cos x = -1{,}2$; б) $\cos x = \sqrt{7}$; в) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x = 0{,}4$?

1.154. З дадзеных пунктаў выберыце тыя, што належаць графіку функцыі $y = \quad x$:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $B \quad \frac{}{3}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad$; в) $C(-\pi; 0)$; г) $D \quad \frac{}{2}; \quad 1$.

1.155. З дапамогай графіка функцыі $y = \quad x$ вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным $\frac{\pi}{6}$, значэнне функцыі роўна $\frac{1}{2}$;

б) лікі π; 2π з'яўляюцца нулямі функцыі;

в) $\sin \quad \frac{3}{2} \quad 1$; г) $\sin \frac{5}{6} \quad \frac{1}{2}$.

1.156. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \quad x$ прымае значэнне, роўнае:

а) 0; б) –1; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$.

1.157. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \quad x - 6$; б) $y = \quad x + 2$; в) $y = \quad - \quad x$.

1.158. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $f \ x \quad 3\sin 2x$; б) $g \ x \quad \sin \frac{x}{2} \quad 5$;

в) $h \ x \quad \sin 9x \quad 5$; г) $p \ x \quad 2\sin 7x \quad 6$.

1.159. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad 1{,}5\sin \ x \quad \frac{}{6}$;

в) $y = \quad x + 8$; г) $y \quad 0{,}5\sin \ x \quad \frac{}{8} \quad 1{,}2$.

1.160. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\sin \frac{13\pi}{6}$; б) $\sin \frac{19\pi}{3}$; в) $\sin \frac{17\pi}{4}$; г) $\sin \frac{13\pi}{2}$.

Ці праўда, што лікі -10π; $- \ \pi$; $- \ \pi$; 2π; 16π; 100π з'яўляюцца перыядамі дадзенай функцыі?

1.161. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, дакажыце, што $\sin(-20°) = \sin 340°$.

1.162. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\sin 765°$; б) $\sin(- \quad °)$; в) $\sin(1080°)$; г) $\sin(-810°)$.

1.163. Выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\sin \quad \frac{}{4}$; б) $\sin \quad \frac{}{2}$; в) $\sin \quad 2$; г) $\sin \quad \frac{9}{2}$.

1.164. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = - \quad x$; б) $g \; x \quad 5x \cdot \sin 2x$;

в) $h \; x \quad 8x \quad \sin x$; г) $p \; x \quad 5\sin 7x \quad 1$.

1.165. Выкарыстаўшы ўласцівасці няцотнасці і перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $f \; \frac{13}{2}$; б) $f \; \frac{47}{2}$; в) $f \; \frac{13}{6}$; г) $f(- \; \pi)$.

1.166. З лікаў 10; $\frac{7}{2}$; 3; $\frac{}{2}$; $\frac{}{4}$; 0; $\frac{5}{2}$; 6 выберыце:

а) нулі функцыі $f(x) = \quad x$; б) значэнні аргумента, пры якіх функцыя $f(x) = \quad x$ прымае найбольшае значэнне.

1.167. Знайдзіце значэнне выразу $\sin 7 \quad \sin\frac{11}{2} \quad \sin \quad \frac{9}{2}$.

1.168. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad \sin \; x \quad \frac{}{4}$;

в) $y \quad \sin \; x \quad \frac{}{5}$; г) $y \quad \sin \; 3x \quad \frac{}{3}$.

1.169. З лікаў $\frac{10}{3}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{}{4}$; 0; $\frac{7}{8}$; $\frac{13}{12}$; $\frac{5}{2}$ выберыце значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = \quad x$ прымае адмоўныя значэнні.

1.170. Ці праўда, што $\sin x > 0$, калі:

а) $x \quad 0; \frac{}{2}$; б) $x \quad \frac{5}{2}; \; 2$;

в) $x \quad \frac{5}{2}; 3$; г) $x \quad \frac{3}{2};$?

1.171. Вызначце знак выразу $\sin\frac{8\pi}{7} \cdot \sin\frac{13\pi}{6} \cdot \sin\frac{3\pi}{5}$.

1.172. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \quad x$, дакажыце, што:

а) $\sin 15° < \quad °$; б) $\sin 100° < \sin 140°$.

1.173. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $\sin\frac{7\pi}{6}$ і $\sin\frac{5\pi}{6}$; б) $\sin \quad \frac{11}{6}$ і $\sin \quad \frac{3}{2}$.

1.174. Размясціце ў парадку нарастання лікі $\sin(-3)$, $\sin(-3{,}2)$ і $\sin(-1{,}6)$.

1.175. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y \quad \sin\ x \quad \frac{}{6}$; б) $y \quad \sin x \quad 2$; в) $y \quad \sin\ x \quad \frac{2}{3}$;

г) $y = \quad x - 1$; д) $y \quad \sin\ x \quad \frac{}{6} \quad 3$; е) $y \quad \sin\ x \quad \frac{}{3} \quad 1$.

1.176. Вызначце, якія з дадзеных пунктаў належаць графіку функцыі $y = \quad x$:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $B\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; в) $C \quad \frac{}{6}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $D \quad ; \quad 1$.

1.177. З дапамогай графіка функцыі $y = \quad x$ вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным π, значэнне функцыі роўна -1;

б) лік $\frac{5\pi}{2}$ з'яўляецца нулём функцыі;

в) $\cos \quad \frac{}{3} \quad \frac{1}{2}$; г) $\cos\frac{3}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.178. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \quad x + 2$; б) $y = 3{,}5\cos x - 4$; в) $y = \quad - \quad x$.

1.179. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $f \ x \quad 2\cos 3x$; б) $g \ x \quad \cos\frac{x}{3} \quad 4$;

в) $h \ x \quad \cos 2x \quad 7$; г) $p \ x \quad 3\cos 5x \quad 2$.

1.180. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad 2{,}5\cos\ x \quad \frac{}{6}$;

в) $y = \cos 7x - 3$; г) $y \quad 1{,}5\cos\ x \quad \frac{}{10} \quad 1{,}3$.

1.181. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \quad x$ прымае значэнне, роўнае:

а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) 1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.182. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\cos\frac{7\pi}{3}$; б) $\cos\frac{25\pi}{6}$; в) $\cos\frac{17\pi}{4}$; г) $\cos 19\pi$.

Ці праўда, што лік 8π з'яўляецца перыядам дадзенай функцыі?

1.183. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, дакажыце, што $\cos \quad \frac{3}{2} \quad \cos\frac{5}{2}$.

1.184. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\cos 420°$; б) $\cos(-405°)$; в) $\cos 720°$; г) $\cos(-1170°)$.

1.185. Выкарыстаўшы ўласцівасць цотнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\cos \quad \frac{}{3}$; б) $\cos \quad \frac{}{2}$; в) $\cos \quad$; г) $\cos \quad 20 \quad$.

1.186. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = \quad x$; б) $g \; x \quad x \cdot \cos 2x$;

в) $h \; x \quad x^2 \quad \cos x$; г) $p \; x \quad \cos\frac{x}{5} \quad x$.

1.187. Выкарыстаўшы ўласцівасці цотнасці і перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $f \quad 63 \quad$; б) $f \quad \frac{25}{4}$; в) $f \quad \frac{7}{3}$.

1.188. Ці праўда, што нулямі функцыі $f(x) = \quad x$ з'яўляюцца лікі:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) π; в) $\frac{9\pi}{2}$; г) $- \quad \pi$; д) $- \quad \pi$; е) $\frac{11}{2}$?

З дадзеных лікаў выберыце значэнні аргумента, пры якіх функцыя $f(x) = \quad x$ прымае найменшае значэнне.

1.189. Знайдзіце значэнне выразу $\cos\frac{7}{2} \quad \cos 11 \quad \cos \quad 13 \quad$.

1.190. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad \cos \; x \quad \frac{}{6}$;

в) $y \quad \cos\frac{x}{3} \quad \frac{}{4}$; г) $y \quad \cos \; 2x \quad \frac{}{5}$.

1.191. З лікаў $\frac{10}{3}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{}{4}$; 0; $\frac{7}{8}$; ; $\frac{13}{12}$ выберыце значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = \quad x$ прымае дадатныя значэнні.

1.192. Ці праўда, што $\cos x < 0$, калі:

а) $x \quad 0; \frac{}{2}$; б) $x \quad ; \frac{}{2}$; в) $x \quad ; \frac{3}{2}$; г) $x \quad \frac{5}{2}; \; 2 \quad$?

1.193. Вызначце знак выразу $\cos(-3) \cdot \cos(-2) \cdot \cos(-1)$.

1.194. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \quad x$, дакажыце, што:

а) $\cos\frac{\pi}{8} > \cos\frac{7\pi}{8}$; б) $\cos \quad \frac{5}{7} < \cos \quad \frac{2}{7}$.

1.195. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $\cos 20°$ і $\cos 70°$; б) $\cos 183°$ і $\cos 243°$.

1.196. Размясціце ў парадку спадання лікі $\cos 1{,}8$, $\cos 2{,}3$ і $\cos 2$.

1.197. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y \quad \cos x \quad \frac{}{6}$;   б) $y \quad \cos x \quad \frac{2}{3}$;   в) $y = \quad x - 1$;

г) $y = \quad x + 3$;   д) $y \quad \cos x \quad \frac{}{3} \quad 2$.

1.198. Не выконваючы пабудову, знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $y \quad 7\sin x \quad \frac{}{6} \quad 2$;   б) $y \quad \frac{1}{3}\cos x \quad \frac{}{4} \quad \frac{2}{3}$.

1.199. Не выконваючы пабудову, знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца:

а) $y = \frac{1}{2}\sin x$;   б) $y = - \quad x$;   в) $y = 0{,}2\cos x$;   г) $y = - \quad x$.

1.200. Пабудуйце графік функцыі $y \quad \sin x \quad \frac{}{3}$. Выкарыстаўшы графік, вызначце: а) нулі функцыі; б) прамежкі спадання і нарастання функцыі; в) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца; г) прамежкі знакапастаянства функцыі.

1.201. Пабудуйце графік функцыі $y = \quad x + 2{,}5$. Выкарыстаўшы графік, вызначце: а) прамежкі спадання і нарастання функцыі; б) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца; в) нулі функцыі; г) мноства значэнняў функцыі.

1.202*. Знайдзіце найменшае і найбольшае цэлыя значэнні функцыі:

а) $y \quad 1{,}2\cos\frac{x}{5} \quad 3$;   б) $y \quad 3{,}28\sin 9x \quad \frac{}{12} \quad 1$.

1.203. Ці праўда, што пункты $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B(-\pi; 0)$ і $C\left(\frac{3\pi}{2}; 1\right)$ належаць графіку функцыі $y = \quad x$?

1.204. З дапамогай графіка функцыі $y = \quad x$ вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным $\frac{\pi}{2}$, значэнне функцыі роўна 1;

б) лікі $-\pi$; π з'яўляюцца нулямі функцыі;

в) $\sin \quad \frac{}{6} \quad \frac{1}{2}$.

1.205. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \quad x$ прымае значэнне, роўнае:

а) 1;   б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.206. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \quad x - 5$; б) $y = \quad x + 3$; в) $y = \quad x - 7$;
г) $y = \quad - \quad x$; д) $y = 1{,}5\sin x - 2$; е) $y = \quad - 3{,}2\sin x$.

1.207. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = 4\sin 7x$; б) $g \;\; x \quad \sin\frac{x}{5} \quad 3$; в) $h(x) = - \quad x + 7$.

1.208. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad 2\sin \;\; x \quad \frac{}{3}$; в) $y = - \quad x + 5$.

1.209. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\sin\frac{7\pi}{3}$; б) $\sin\frac{17\pi}{4}$; в) $\sin\frac{25\pi}{6}$; г) $\sin\frac{7\pi}{2}$.

1.210. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, дакажыце, што $\sin 75° = \sin(- \quad °)$.

1.211. Выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\sin \quad \frac{}{3}$; б) $\sin \quad \frac{3}{2}$; в) $\sin \quad \frac{}{4}$; г) $\sin \quad 2$.

1.212. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = \quad x$; б) $g \;\; x \quad x \cdot \sin x$;

в) $h \;\; x \quad 2x \quad \sin 3x$; г) $p \;\; x \quad \sin x \quad 9$.

1.213. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $f \quad \frac{19}{2}$; б) $f \quad \frac{37}{2}$; в) $f \quad \frac{9}{4}$; г) $f(- \quad \pi)$.

1.214. Ці праўда, што нулямі функцыі $f(x) = \quad x$ з'яўляюцца лікі:

а) 2π; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) $- \quad \pi$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{9}{2}$; е) 11π?

З дадзеных лікаў выберыце значэнні аргумента, пры якіх функцыя $f(x) = \quad x$ прымае найменшае значэнне.

1.215. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad \sin \;\; x - \frac{}{6}$.

1.216. Параўнайце з нулём значэнне выразу:

а) $\sin \quad \frac{}{8}$; б) $\sin\frac{7\pi}{6}$; в) $\sin \quad \frac{3}{2}$; г) $\sin\frac{11\pi}{5}$.

1.217. Вызначце знак здабытку $\sin 2 \cdot \quad \cdot \sin 4$.

1.218. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \quad x$, параўнайце значэнні выразаў:

а) $\sin \quad \frac{\ }{7}$ і $\sin\frac{2\pi}{7}$; б) $\sin\frac{3\pi}{5}$ і $\sin\frac{9\pi}{10}$.

1.219. Размясціце ў парадку спадання лікі sin(– °), sin(–100°) і sin(– °).

1.220. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y \quad \sin\ x \quad \frac{\ }{3}$; б) $y = \quad x - 3$; в) $y \quad \sin\ x \quad \frac{\ }{6} \quad 2$.

1.221. Ці праўда, што пункты $A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ і $C(2\pi; -1)$ належаць графіку функцыі $y = \quad x$?

1.222. З дапамогай графіка функцыі $y = \quad x$ вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным 0, значэнне функцыі роўна 1;

б) лікі $\frac{3}{2}$; $\frac{\ }{2}$ з'яўляюцца нулямі функцыі;

в) $\cos \quad \frac{\ }{3} \quad \frac{1}{2}$.

1.223. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \quad x$ прымае значэнне, роўнае:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) –1.

1.224. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \quad x - 5$; б) $y \quad \frac{1}{2}\cos x \quad 3$;

в) $y = \quad x - 3{,}2$; г) $y = \quad - \quad x$.

1.225. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = \quad x$; б) $g \ x \quad \cos\frac{x}{7} \quad 5$; в) $h \ x \quad 5\cos 8x \quad 3$.

1.226. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad 3\cos\ x \quad \frac{\ }{3}$; в) $y = - \quad x - 1$.

1.227. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\cos\frac{13\pi}{6}$; б) $\cos\frac{19\pi}{3}$; в) $\cos\frac{33\pi}{4}$; г) $\cos 11\pi$.

1.228. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \quad x$, дакажыце, што cos(– °) = cos 237°.

1.229. Выкарыстаўшы ўласцівасць цотнасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $\cos \quad \frac{\ }{6}$; б) $\cos \quad \frac{3}{2}$.

1.230. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = \quad x$; б) $g \; x \quad x \cdot \cos 7x$;

в) $h \; x \quad 3x^2 \quad \cos x$; г) $p \; x \quad \cos \frac{x}{6} \quad 4x$.

1.231. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \quad x$, знайдзіце:

а) $f(-47\pi)$; б) $f \; \frac{37}{6}$; в) $f \; \frac{9}{4}$.

1.232. З лікаў $\frac{11}{2}$; 4 ; $\frac{3}{2}$; ; $\frac{}{3}$; 0; 3 ; $\frac{9}{2}$ выберыце:

а) нулі функцыі $f(x) = \quad x$; б) значэнні аргумента, пры якіх функцыя $f(x) = \quad x$ прымае найбольшае значэнне.

1.233. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y \quad \cos \; x \quad \frac{}{3}$.

1.234. Параўнайце з нулём значэнне выразу:

а) $\cos \quad \frac{}{5}$; б) $\cos \frac{5\pi}{6}$; в) $\cos \quad \frac{7}{8}$; г) $\cos \frac{15\pi}{7}$.

1.235. Вызначце знак здабытку $\cos \quad \frac{9}{8} \cdot \cos \quad \frac{}{5} \cdot \cos \frac{4}{5}$.

1.236. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \quad x$, параўнайце значэнні выразаў: а) $\cos 0{,}5$ і $\cos 1$; б) $\cos(-2)$ і $\cos(-1)$.

1.237. Размясціце ў парадку нарастання лікі $\cos 20°$, $\cos 57°$ і $\cos 32°$.

1.238. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y \quad \cos \; x \quad \frac{}{3}$; б) $y \quad \cos \; x \quad \frac{5}{6}$; в) $y = \quad x - 2$;

г) $y = \quad x + 1$; д) $y \quad \cos \; x \quad \frac{2}{3} \quad 3$.

1.239. Не выконваючы пабудову, знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $y \quad 4\cos \; x \quad \frac{}{6} \quad 3$; б) $y \quad \frac{1}{2}\sin \; x - \frac{}{4} \quad 1{,}5$.

1.240. Не выконваючы пабудову, знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца:

а) $y = \quad x$; б) $y = - \quad x$; в) $y = 8{,}7\cos x$; г) $y = -\frac{1}{5}\cos x$.

1.241. Пабудуйце графік функцыі $y \quad \cos \; x \quad \frac{}{6}$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі спадання і нарастання функцыі;

в) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

г) прамежкі знакапастаянства функцыі.

1.242. Пабудуйце графік функцыі $y = \quad x - 1{,}5$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) прамежкі спадання і нарастання функцыі;

б) найбольшае і найменшае значэнні функцыі і значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

в) нулі функцыі;

г) мноства значэнняў функцыі.

1.243. Рашыце няроўнасць $\frac{x \quad 3}{4} \quad \frac{x}{2} \leqslant 3$. Ці праўда, што няроўнасць $x + \quad \leqslant 0$ раўназначна дадзенай няроўнасці?

1.244. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{3^{11} \cdot 9^3}{27^5}$.

1.245. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $f \; x \quad \frac{4}{x^2 \quad 7x \quad 6}$.

1.246. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{matrix} 2x^2 \quad 3xy \quad y^2 \quad 12, \\ y \quad 2x \quad 4. \end{matrix}$

§ 6. Функцыі $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$. Іх уласцівасці і графікі

1.247. З лікаў $\frac{13}{2}$; 6 ; $\frac{5}{2}$; ; $\frac{}{3}$; 0; 2 ; $\frac{7}{2}$ выберыце нулі функцыі:

а) $y = \quad x$; б) $y = \quad x$.

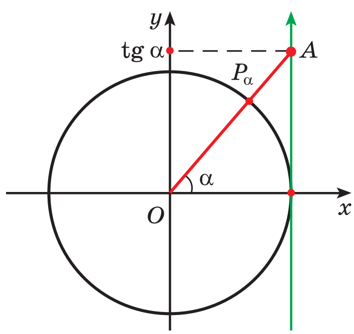
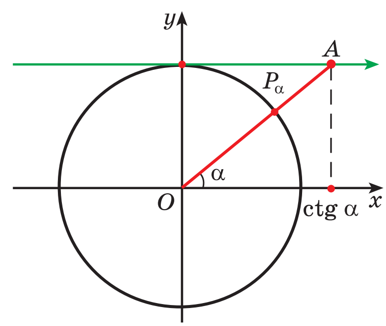
1.248. Даследуйце на цотнасць (няцотнасць) функцыю $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.

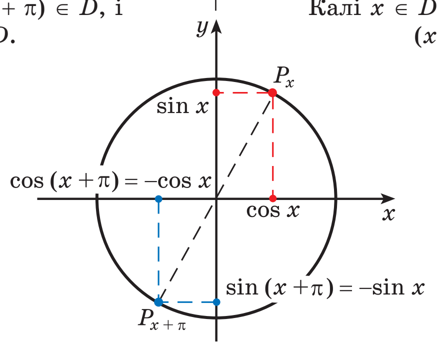
1.249. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y = \frac{2}{x^2 - 9}$.

Азначэнне. Залежнасць, пры якой кожнаму рэчаіснаму ліку $x \quad \frac{}{2} \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, адпавядае значэнне $\operatorname{tg} x$, называецца функцыяй $y = \operatorname{tg} x$.

Азначэнне. Залежнасць, пры якой кожнаму рэчаіснаму ліку $x \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, адпавядае значэнне $\operatorname{ctg} x$, называецца функцыяй $y = \operatorname{ctg} x$.

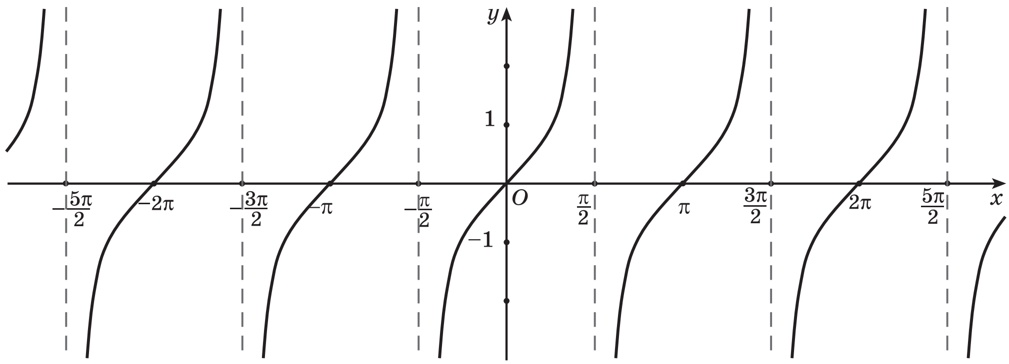
Разгледзім уласцівасці гэтых функцый.

Функцыя $y = \operatorname{tg} x$	Функцыя $y = \operatorname{ctg} x$
1. Абсяг вызначэння функцыі	
Усе рэчаісныя лікі, акрамя $x \quad \frac{\quad}{2} \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Паколькі $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то $\cos x \neq 0$, г. зн. $x \quad \frac{\quad}{2} \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.	Усе рэчаісныя лікі, акрамя $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Паколькі $x = \frac{x}{x}$, то $\sin x \neq 0$, г. зн. $x \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
2. Мноства значэнняў функцыі	
tg ∞; ∞ tg α — гэта ардыната пункта A на восі тангенсаў. Пры руху пункта P_α па адзінкавай акружнасці ардыната адпаведнага пункта A змяняецца ад $-\infty$ да $+\infty$. 	ctg ∞; ∞ ctg α — гэта абсцыса пункта A на восі катангенсаў. Пры руху пункта P_α па адзінкавай акружнасці абсцыса адпаведнага пункта A змяняецца ад $-\infty$ да $+\infty$. 
3. Перыядычнасць функцыі	
Найменшы дадатны перыяд $T = \pi$. Калі $x \in D$, то і $(x + \pi) \in D$, і $(x - \pi) \in D$. $\operatorname{tg} x \quad \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$	Найменшы дадатны перыяд $T = \pi$. Калі $x \in D$, то і $(x + \pi) \in D$, і $(x - \pi) \in D$. $x \quad \frac{x}{x}$ $= \frac{-\quad x}{-\quad x} = \quad x$



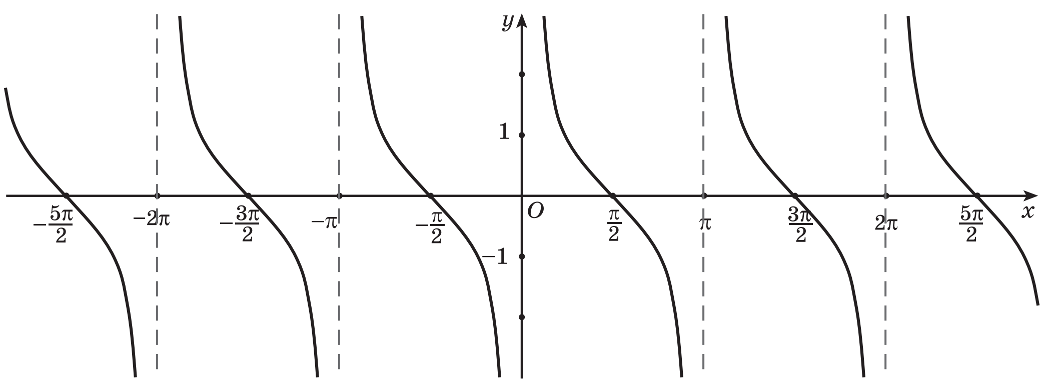
4. Цотнасць (няцотнасць) функцыі	
Няцотная ① Абсяг вызначэння — усе рэчаісныя лікі, акрамя $x \quad \frac{}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$. ② $\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\mathrm{tg}\, x$.	Няцотная ① Абсяг вызначэння — усе рэчаісныя лікі, акрамя $x \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$. ② $(-x) = \frac{(-x)}{(-x)} = \frac{x}{- \quad x} = - \quad x$
5. Нулі функцыі	
$x \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$ $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\quad x = 0$ пры $x \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$.	$x \quad \frac{}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$ $x = \frac{x}{x}$ $\quad x = 0$ пры $x \quad \frac{}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$.
6. Прамежкі знакапастаянства функцыі	
$y > 0$ пры $x \quad n; \frac{}{2} \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$ $y < 0$ пры $x \quad \frac{}{2} \quad n; \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$ Пры $x \quad n; \frac{}{2} \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$, (першая і трэцяя чвэрці) значэнні $\sin x$ і $\cos x$ маюць аднолькавыя знакі, значыць, $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} > 0$. Пры $x \quad \frac{}{2} \quad n; \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$, (другая і чацвёртая чвэрці) значэнні $\sin x$ і $\cos x$ маюць розныя знакі, значыць, $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} < 0$.	$y > 0$ пры $x \quad n; \frac{}{2} \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$ $y < 0$ пры $x \quad \frac{}{2} \quad n; \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$ Пры $x \quad n; \frac{}{2} \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$, (першая і трэцяя чвэрці) значэнні $\sin x$ і $\cos x$ маюць аднолькавыя знакі, значыць, $x = \frac{x}{x} >$ Пры $x \quad \frac{}{2} \quad n; \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$, (другая і чацвёртая чвэрці) значэнні $\sin x$ і $\cos x$ маюць розныя знакі, значыць, $x = \frac{x}{x} <$
7. Манатоннасць функцыі	
Функцыя нарастае на кожным з прамежкаў $\frac{}{2} \quad n; \frac{}{2} \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$.	Функцыя спадае на кожным з прамежкаў $x \quad n; \quad n\ , n \quad \boldsymbol{Z}$.
Функцыя не мае найбольшага і найменшага значэнняў.	Функцыя не мае найбольшага і найменшага значэнняў.

Графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$ паказаны на рысунку 88. Ён называецца *тангенсоідай*.



Рыс. 88

Графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ паказаны на рысунку 89. Гэты графік можа быць атрыманы пераўтварэннем графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$.



Рыс. 89

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Вызначце, ці належыць графіку функцыі $y = \operatorname{tg} x$ пункт:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B\ \frac{}{4};\ 1$; в) $C\left(\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$.

Рашэнне. а) Падставім у формулу $y = \mathrm{tg}\,x$ значэнне аргумента $x = 0$ і знойдзем адпаведнае значэнне функцыі $y = \mathrm{tg}\,0 = 0$. Атрыманае значэнне функцыі роўна ардынаце пункта $A(0;\ 0)$, значыць, пункт $A(0;\ 0)$ належыць графіку функцыі $y = \mathrm{tg}\,x$.

б) Пры x — атрымаем y $\mathrm{tg}\frac{}{4}$ 1 1. Пункт $B\ \frac{}{4};\ 1$ не належыць графіку функцыі $y = \mathrm{tg}\,x$.

в) Пры x $\frac{3}{2}$ атрымаем y $\mathrm{tg}\frac{3}{2}$ — не існуе. Пункт $C\left(\frac{3\pi}{2};\ 0\right)$ не належыць графіку функцыі $y = \mathrm{tg}\,x$.

2. Ці праўда, што графік функцыі $y = \mathrm{ctg}\,x$ праходзіць праз пункт:

а) $A\ \frac{}{2};\ 0$; б) $B\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $C(-\pi;\ 0)$?

Рашэнне. а) Падставім у формулу $y = \mathrm{ctg}\,x$ значэнне аргумента x — і знойдзем адпаведнае значэнне функцыі y —

Атрыманае значэнне функцыі роўна ардынаце пункта $A\ \frac{}{2};\ 0$, значыць, графік функцыі $y = \mathrm{ctg}\,x$ праходзіць праз пункт $A\ \frac{}{2};\ 0$.

Праўда.

б) Пры x — атрымаем y — $\sqrt{}$ $\frac{\sqrt{}}{}$ Графік функцыі $y = \mathrm{ctg}\,x$ не праходзіць праз пункт $B\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Няпраўда.

в) Пры $x = -\pi$ атрымаем $y = \mathrm{ctg}\,(-\pi)$ — не існуе. Графік функцыі $y = \mathrm{ctg}\,x$ не праходзіць праз пункт $C(-\pi;\ 0)$. Няпраўда.

3. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \mathrm{ctg}\,3x$; б) $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{5}$.

Рашэнне. а) Паколькі абсяг вызначэння функцыі $y = \mathrm{ctg}\,t$ гэта ўсе рэчаісныя лікі, акрамя лікаў выгляду t n, n $\mathbf{Z}$, то $3x$ n, n $\mathbf{Z}$, значыць, x $\frac{n}{3}$, n $\mathbf{Z}$. Такім чынам, абсяг вызначэння дадзенай функцыі — гэта ўсе рэчаісныя лікі, акрамя лікаў выгляду $\frac{n}{3}$, n $\mathbf{Z}$.

б) Абсягам вызначэння функцыі $y = \operatorname{tg} t$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў выгляду $t \quad \frac{}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$. Значыць, $\frac{x}{5} \quad \frac{}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$; $x \quad \frac{5}{2} \quad 5\ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$. Абсяг вызначэння дадзенай функцыі — гэта ўсе рэчаісныя лікі, акрамя лікаў выгляду $\frac{5}{2} \quad 5\ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

4. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \operatorname{tg}\frac{2x}{7}$; б) $y = \operatorname{ctg} 8x$.

Рашэнне. а) Паколькі мноства значэнняў функцыі $y = \operatorname{tg} t$ — гэта мноства ўсіх рэчаісных лікаў, то і $\operatorname{tg}\frac{2}{7} \quad \infty;\ \infty$.

б) Паколькі мноства значэнняў функцыі $y = \operatorname{ctg} t$ — гэта мноства ўсіх рэчаісных лікаў, то і $E(\operatorname{ctg} 8x) = \boldsymbol{R}$.

5. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцый $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$, знайдзіце:

а) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{}$ в) $\operatorname{tg}\frac{31\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{}$

Рашэнне. Паколькі лік π з'яўляецца найменшым дадатным перыядам функцый $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$, то $\operatorname{tg}(\pi n + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і $\operatorname{ctg}(\pi n + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тады:

а) $\operatorname{tg}\frac{4}{3} \quad \operatorname{tg}\frac{3}{3} \quad \operatorname{tg} \quad \frac{}{3} \quad \operatorname{tg}\frac{}{3} \quad \sqrt{3}$;

б)

в) $\operatorname{tg}\frac{31}{6} \quad \operatorname{tg}\frac{30}{6} \quad \operatorname{tg}\ 5 \quad \frac{}{6} \quad \operatorname{tg}\frac{}{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$;

г)

6. Выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцый $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$, знайдзіце:

а) $\operatorname{tg} \quad \frac{}{3}$; б) в) $\operatorname{tg}(- \ \pi)$; г)

Рашэнне. Паколькі функцыі $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ з'яўляюцца няцотнымі, то $\operatorname{tg} \quad \operatorname{tg}$ і Тады:

а) $\operatorname{tg} \quad \frac{}{3} \quad \operatorname{tg}\frac{}{3} \quad \sqrt{3}$; б) в) tg 2 tg 2 0;

г)

7. Вызначце знак здабытку · ·

Рашэнне. Паколькі $\pi \approx 3{,}14$, то $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, г. зн. вугал 2 радыяны належыць прамежку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, на якім функцыя $y = \operatorname{tg} x$ прымае адмоўныя значэнні, значыць, $\operatorname{tg} 2 < 0$.

Вугал 4,5 радыяна належыць прамежку $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, на якім функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ прымае дадатныя значэнні, значыць, $\operatorname{ctg} 4{,}5 > 0$.

Вугал 7 радыян належыць прамежку $\left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right)$, на якім функцыя $y = \operatorname{tg} x$ прымае дадатныя значэнні, г. зн. $\operatorname{tg} 7 > 0$. Значыць, $\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{ctg} 4{,}5 \cdot \operatorname{tg} 7 < 0$.

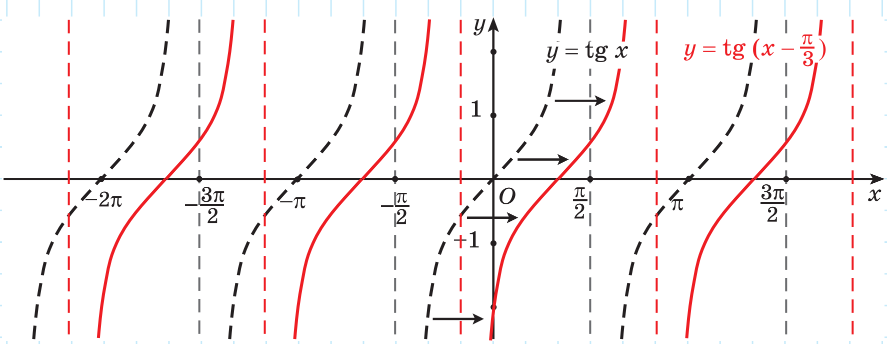
8. Што больш: $\operatorname{ctg} 151°$ ці $\operatorname{ctg} 178°$?

Рашэнне. Паколькі вуглы 151° і 178° належаць прамежку (0°; 180°), на якім функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ спадае, і $151° < 178°$, то $\operatorname{ctg} 151° > \operatorname{ctg} 178°$.

9. Пабудуйце графік функцыі:

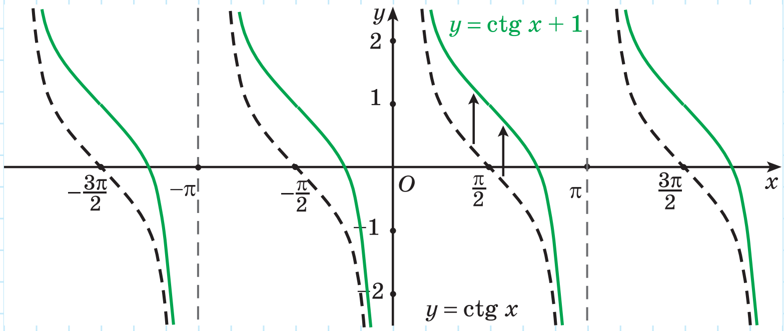
а) y tg x $\frac{}{3}$;   б) $y = \operatorname{ctg} x + 1$.

Рашэнне. а) Графік функцыі y tg x $\frac{}{3}$ атрымліваем зрухам графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ уздоўж восі абсцыс на $\frac{\pi}{}$ управа (рыс. 90).



Рыс. 90

б) Графік функцыі $y = \text{ctg}\, x + 1$ атрымліваем зрухам графіка функцыі $y = \text{ctg}\, x$ уздоўж восі ардынат на 1 адзінку ўверх (рыс. 91).



Рыс. 91

Якія з лікаў $\frac{9}{2}$; 3 ; $\frac{5}{2}$; ; $\frac{}{2}$; 0; $\frac{3}{2}$; 4 не належаць абсягу вызначэння функцыі: а) $y = \text{tg}\, x$; б) $y = \text{ctg}\, x$?

1.250. Вызначце, якія з дадзеных пунктаў належаць графіку функцыі $y = \text{tg}\, x$:

а) $A(\pi;\ 0)$; б) B $\frac{}{4}$; 1 ; в) C $\frac{}{3}$; $\sqrt{3}$; г) D $\frac{}{2}$; 1 .

1.251. З дапамогай графіка функцыі $y = \text{tg}\, x$ вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным $\frac{\pi}{4}$, значэнне функцыі роўна 1;

б) лікі π; 2π з'яўляюцца нулямі функцыі; в) $\text{tg}\,\frac{5}{6}$ $\sqrt{3}$.

1.252. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \text{tg}\, x$ прымае значэнне, роўнае –1.

1.253. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \text{tg}\, 3x$; б) $y = \text{tg}\,\frac{x}{4}$.

1.254. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \text{tg}\, x$, знайдзіце:

а) $\text{tg}\,\frac{13\pi}{6}$; б) $\text{tg}\,\frac{16\pi}{3}$; в) $\text{tg}\,\frac{9\pi}{4}$; г) $\text{tg}\, 19\pi$.

Ці праўда, што лікі 9 ; 4 ; ; 2 ; 15 ; 100 з'яўляюцца перыядамі дадзенай функцыі?

1.255. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$, знайдзіце:

а) $\operatorname{tg} 405°$; б) $\operatorname{tg} 240°$; в) $\operatorname{tg} 720°$; г) $\operatorname{tg} 1110°$.

1.256. Выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$, знайдзіце:

а) $\operatorname{tg} \ \frac{}{4}$; б) $\operatorname{tg} \ \frac{}{6}$; в) tg ; г) $\operatorname{tg} \ 5$.

1.257. Выкарыстаўшы ўласцівасці перыядычнасці і няцотнасці функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$, знайдзіце:

а) $f \ \frac{7}{3}$; б) $f \ \frac{33}{4}$; в) $f \ \frac{67}{6}$; г) $f \ 57$.

1.258. З лікаў 12 ; $\frac{7}{2}$; 2 ; $\frac{}{2}$; $\frac{}{4}$; 0; $\frac{9}{2}$; 5 выберыце нулі функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$.

1.259. З лікаў $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{}{6}$; 0; $\frac{}{8}$; $\frac{5}{6}$; 2 выберыце значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = \operatorname{tg} x$ прымае адмоўныя значэнні.

1.260. Ці праўда, што $\operatorname{tg} x > 0$, калі:

а) $x \quad 0; \frac{}{2}$; б) $x \quad \frac{5}{2}; \ 2$;

в) $x \quad \frac{5}{2}; \ 3$; г) $x \quad ; \frac{}{2}$?

1.261. Вызначце знак выразу $\operatorname{tg}(- \quad °) \cdot \operatorname{tg}(- \quad °) \cdot \operatorname{tg} 197°$.

1.262. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $y = \operatorname{tg} x$, параўнайце лікі:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$ і $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$; б) $\operatorname{tg} \ \frac{5}{6}$ і $\operatorname{tg} \ \frac{7}{6}$.

1.263. Размясціце ў парадку нарастання лікі $\operatorname{tg}(-0{,}5)$, $\operatorname{tg} 1{,}4$ і $\operatorname{tg} 0{,}3$.

1.264. З дапамогай графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ пабудуйце графік функцыі:

а) $y \quad \operatorname{tg} \ x \quad \frac{}{3}$; б) $y = \operatorname{tg} x - 1$.

1.265. Ці праўда, што графік функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ праходзіць праз пункт:

а) $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; б) $B\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $C \quad \frac{}{4}; 1$; г) $D \quad ; \ 1$?

1.266. З дапамогай графіка функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ вызначце, ці праўда, што: а) пры значэнні аргумента, роўным $\frac{3\pi}{2}$, значэнне функцыі роўна 0; б) лікі $-\ \pi$; π з'яўляюцца нулямі функцыі; в) $\quad - \quad \sqrt{\ }$

1.267. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ прымае значэнне, роўнае $\sqrt{3}$.

1.268. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \operatorname{ctg} 5x$; б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

1.269. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \operatorname{ctg} x$, знайдзіце:

а) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4}$; в) $\operatorname{ctg} \frac{28\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{2}$.

1.270. Выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцыі $f(x) = \operatorname{ctg} x$, знайдзіце:

а) $\operatorname{ctg} \ \frac{\ }{6}$; б) $\operatorname{ctg} \ \frac{3}{2}$.

1.271. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \operatorname{ctg} x$, знайдзіце:

а) $f \ \frac{49}{2}$; б) $f \ \frac{37}{6}$; в) $f \ \frac{9}{4}$.

1.272. З лікаў $\frac{11}{2}$; 5 ; $\frac{3}{2}$; ; $\frac{\ }{3}$; 0; 3 ; $\frac{9}{2}$ выберыце нулі функцыі $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

1.273. Сярод лікаў $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{\ }{3}$; $\frac{\ }{8}$; $\frac{\ }{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$ выберыце значэнні аргумента, пры якіх функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ прымае дадатныя значэнні.

1.274. Ці праўда, што $\operatorname{ctg} x < 0$, калі:

а) x 0; $\frac{\ }{2}$; б) x $\frac{5}{2}$; 2 ;

в) x $\frac{5}{2}$; 3 ; г) x ; $\frac{\ }{2}$?

1.275. Вызначце знак выразу $\operatorname{ctg} \ \frac{5}{7} \cdot \operatorname{ctg} \frac{13}{7}$.

1.276. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $y = \operatorname{ctg} x$, параўнайце лікі:
а) $\operatorname{ctg} 20°$ і $\operatorname{ctg} 130°$; б) $\operatorname{ctg}(-\ \ °)$ і $\operatorname{ctg}(-100°)$.

1.277. Размясціце ў парадку спадання лікі $\operatorname{ctg} 1$, $\operatorname{ctg} 3$ і $\operatorname{ctg} 2$.

1.278. Пабудуйце графік функцыі y x — Выкарыстаўшы графік, вызначце: а) нулі функцыі; б) прамежкі спадання і нарастання функцыі; в) прамежкі знакапастаянства функцыі.

1.279. Ці праўда, што графік функцыі $y = \operatorname{tg} x$ праходзіць праз пункт:
а) $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; б) $B(2\pi; 0)$; в) C $\frac{\ }{2}$; 1 ?

1.280. З дапамогай графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ вызначце, ці праўда, што:

а) пры значэнні аргумента, роўным $-\pi$, значэнне функцыі роўна 0; б) лік $\frac{\pi}{\ }$ з'яўляецца нулём функцыі; в) tg $\frac{\ }{4}$ 1.

1.281. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \operatorname{tg} x$ прымае значэнне, роўнае $\sqrt{3}$.

1.282. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{8}$.

1.283. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$, знайдзіце:

а) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$; б) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}\frac{19\pi}{6}$; г) $\operatorname{tg} 7\pi$.

1.284. Выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$, знайдзіце:

а) tg $\frac{\ }{6}$; б) $\operatorname{tg}(-\ \pi)$.

1.285. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$, знайдзіце:

а) $f(-\ \pi)$; б) f $\frac{21}{4}$; в) f $\frac{19}{3}$.

1.286. Ці праўда, што нулямі функцыі $f(x) = \operatorname{tg} x$ з'яўляюцца лікі:

а) 2π; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) $-\ \pi$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{9}{2}$; е) 11π?

1.287. Вызначце знак выразу $\operatorname{tg}(-1) \cdot \operatorname{tg} 0{,}5 \cdot \operatorname{tg} 1$.

1.288. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $y = \operatorname{tg} x$, параўнайце лікі $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ і $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}$.

1.289. Размясціце ў парадку спадання лікі $\operatorname{tg}(-37°)$, $\operatorname{tg} 67°$ і $\operatorname{tg} 23°$.

1.290. З дапамогай графіка функцыі $y = \operatorname{tg} x$ пабудуйце графік функцыі:

а) y tg x $\frac{\ }{6}$; б) $y = \operatorname{tg} x + 2$.

1.291. Вызначце, ці належыць графіку функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ пункт:

а) A $\frac{\ }{4}$; 1 ; б) $B\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$; в) $C(2\pi; 0)$.

1.292. З дапамогай графіка функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ вызначце, ці праўда, што: а) пры значэнні аргумента, роўным π, значэнне функцыі роўна 0; б) лік $\frac{5\pi}{2}$ з'яўляецца нулём функцыі; в) ctg $\frac{3}{4}$ 1.

1.293. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = \operatorname{ctg} x$ прымае значэнне, роўнае 1.

1.294. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \operatorname{ctg} 8x$; б) $y =$ $\frac{x}{\ }$

1.295. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцыі $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, знайдзіце:

а) $\mathrm{ctg}\,\frac{7\pi}{3}$; б) $\mathrm{ctg}\,\frac{31\pi}{6}$; в) $\mathrm{ctg}\,\frac{13\pi}{4}$; г) $\mathrm{ctg}\,\frac{19\pi}{2}$.

Ці праўда, што лік 7π з'яўляецца перыядам дадзенай функцыі?

1.296. Выкарыстаўшы ўласцівасць няцотнасці функцыі $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, знайдзіце:

а) — б) — в) — г) —

1.297. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$, знайдзіце:

а) $f(-7{,}5\pi)$; б) $f\ \ \frac{19}{3}$; в) $f\ \ \frac{25}{4}$.

1.298. Ці праўда, што нулямі функцыі $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ з'яўляюцца лікі:

а) $\frac{\pi}{2}$; б) 5π; в) $\frac{9}{2}$; г) π; д) -7π; е) $\frac{11\pi}{2}$?

1.299. Вызначце знак выразу —— · — · —

1.300. Выкарыстаўшы ўласцівасці функцыі $y = \mathrm{ctg}\, x$, параўнайце лікі $\mathrm{ctg}\,(-100°)$ і $\mathrm{ctg}\,(-30°)$.

1.301. Размясціце ў парадку нарастання лікі $\mathrm{ctg}\,1$, $\mathrm{ctg}\,0{,}5$ і $\mathrm{ctg}\,2$.

1.302. З дапамогай графіка функцыі $y = \mathrm{ctg}\, x$ пабудуйце графік функцыі:

а) $y\ \ \mathrm{ctg}\ x\ \ \frac{}{6}$; б) $y = \mathrm{ctg}\, x - 1$.

1.303. Пабудуйце графік функцыі $y\ \ \mathrm{tg}\ x\ \ \frac{2}{3}$. Выкарыстаўшы графік, вызначце: а) нулі функцыі; б) прамежкі спадання і нарастання функцыі; в) прамежкі знакапастаянства функцыі.

1.304. Не вылічваючы каранёў x і x ураўнення $x\ +\ \ x\ -\ \ = 0$, знайдзіце значэнне выразу $\frac{x_1 + x_2}{4x_1x_2}$.

1.305. Спрасціце выраз:

а) $6\sqrt{7} - \sqrt{28}$; б) $\left(\sqrt{20} - \sqrt{5}\right)^2$;

в) $-\sqrt{2} \cdot \left(5\sqrt{2} + \sqrt{18}\right)$; г) $\left(\sqrt{27} - \sqrt{75}\right) : \left(2\sqrt{3}\right)$.

1.306. Рашыце сістэму няроўнасцей

$$x\quad \frac{x}{4}\quad 2,$$
$$\frac{x\quad 1}{2}\quad \frac{x\quad 2}{3}\quad 1.$$

1.307. У геаметрычнай прагрэсіі $b\ = 0{,}125$, $q = 2$. Знайдзіце b_{10} і S_{10}.

§ 7. Арксінус, арккосінус, арктангенс і арккатангенс ліку

1.308. Пры якім значэнні аргумента значэнне функцыі $y = \ \ x$ – роўна:

а) 0; б) 6; в) –3; г) 1,5?

1.309. Ці існуе значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі $y = \ \ x$ роўна:

а) 8; б) –8; в) 32; г) 0?

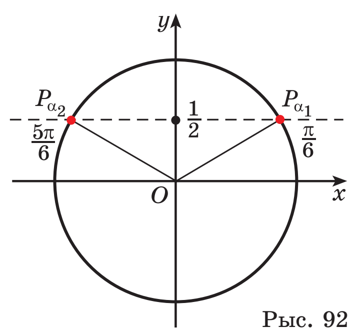
1.310. Колькі значэнняў аргумента адпавядаюць значэнню функцыі $y = |x|$, роўнаму:

а) 2,5; б) $\frac{3}{7}$; в) –10; г) 0?

Пры вывучэнні трыганаметрычных функцый часта паўстае пытанне аб знаходжанні значэння аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна зададзенаму ліку.

Напрыклад, знойдзем усе значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі $y = \ \ x$ роўна $\frac{1}{2}$, г. зн. выконваецца роўнасць $\sin x = \frac{1}{2}$.

Паколькі $y_\alpha = \ \ \alpha$, то на восі ардынат адзначым $\frac{1}{2}$ і праз пункт $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ правядзём прамую, паралельную восі абсцыс (рыс. 92).

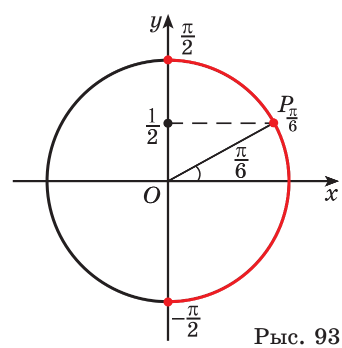


Рыс. 92

На адзінкавай акружнасці знойдзем пункты P_{α} і P_{α_2}, ардынаты якіх роўны $\frac{1}{2}$. Гэтым пунктам адпавядаюць вуглы $\frac{}{6}\ \ 2\ n$, $n \in \mathbf{Z}$, і $\frac{5}{6}\ \ 2\ n$, $n \in \mathbf{Z}$, і такіх вуглоў бясконца многа.

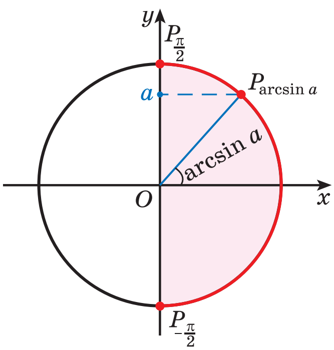
Аднак, калі разгледзець прамежак $\frac{}{2}; \frac{}{2}$, то на ім функцыя $y = \ \ x$ нарастае і прымае ўсе значэнні ад –1 да 1. Таму для любога ліку α з прамежку [–1; 1] існуе адзіны лік x $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ такі, што $\sin x = a$.

Так, на прамежку $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ існуе адзінае значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі $y = \ \ x$ роўна $\frac{1}{2}$, — гэта вугал, роўны $\frac{\pi}{}$ (рыс. 93).



Рыс. 93

Азначэнне. Арксінусам ліку *a* называецца вугал, які належыць прамежку $\frac{}{2}; \frac{}{2}$, сінус якога роўны *a* (рыс. 94).



Рыс. 94

Гэты вугал абазначаюць $\arcsin a$.

Так, $\arcsin\frac{1}{2} \quad \frac{}{6}$, паколькі $\frac{}{6} \quad \frac{}{2}; \frac{}{2}$ і $\sin\frac{}{6} \quad \frac{1}{2}$.

Прыклад 1.

Вылічыце:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;

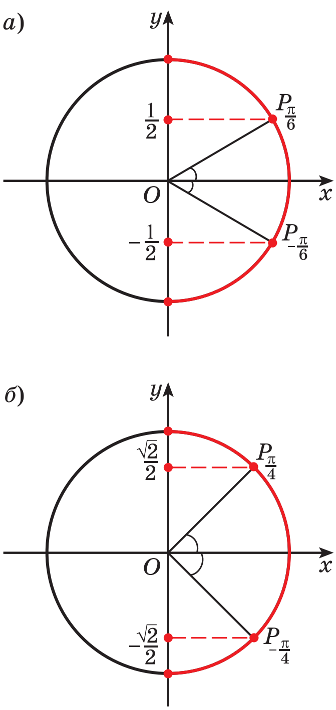
б) $\arcsin 1$.

$\arcsin a = \alpha$, калі $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і $\sin\alpha = a$

Рашэнне. а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{}{4}$, паколькі

$\frac{}{4} \quad \frac{}{2}; \frac{}{2}$ і $\sin\frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\arcsin 1 \quad \frac{}{2}$, бо $\frac{}{2} \quad \frac{}{2}; \frac{}{2}$ і $\sin\frac{}{2} \quad 1$.



Рыс. 95

Прыклад 2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Рашэнне. а) $\arcsin \quad \frac{1}{2} \quad \frac{}{6}$, паколькі

$\frac{}{6} \quad \frac{}{2}; \frac{}{2}$ і $\sin \quad \frac{}{6} \quad \frac{1}{2}$ (рыс. 95, *а*);

б) $\arcsin \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{}{4}$, паколькі $\frac{}{4} \quad \frac{}{2}; \frac{}{2}$

і $\sin \quad \frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ (рыс. 95, *б*).

Заўважым, што $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2}$,

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ (гл. рыс. 95).

Паколькі вуглы, што адпавядаюць пунктам P_α і $P_{-\alpha}$, дзе $\frac{}{2}; \frac{}{2}$, з ардынатамі *a* і $-a$

адрозніваюцца толькі знакам, то $\arcsin(-a) =$ $= -\arcsin a$, для любога ліку $a \in [-1;\ 1]$ (рыс. 96).

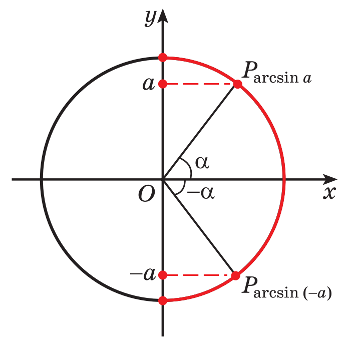
$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

Няхай $\alpha = \arcsin a$, тады $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і $\sin\alpha = a$.

Паколькі пункты P_α і $P_{-\alpha}$ маюць процілеглыя ардынаты, то $\sin(-\alpha) = -a$.

Паколькі $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і $\sin(-\alpha) = -a$, то па азначэнні арксінуса $\arcsin(-a) = -\alpha$.

Паколькі $\alpha = \arcsin a$, то $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ для любога ліку a $1; 1$.



Рыс. 96

Выкарыстаем атрыманую роўнасць і знойдзем значэнне выразу

$$\arcsin(-1) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Паколькі arcsin 1 $\arcsin 1$ $\frac{}{2}$ і arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{}{3}$,

то arcsin 1 arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{}{2}$ $\frac{}{3}$ $\frac{}{2}$ $\frac{}{3}$ $\frac{}{6}$.

Падкрэслім, што абсягам вызначэння выразу $\arcsin a$ з'яўляецца адрэзак $[-1;\ 1]$. Калі $|a| > 1$, то выраз $\arcsin a$ не мае сэнсу.

Напрыклад, выразы $\arcsin 3$, $\arcsin(-5)$, $\arcsin\pi$ не маюць сэнсу, паколькі 3 $1; 1$, 5 $1; 1$, $1; 1$.

Выраз $\arcsin(-1{,}7)$ **не мае сэнсу,** паколькі 1,7 $1; 1$

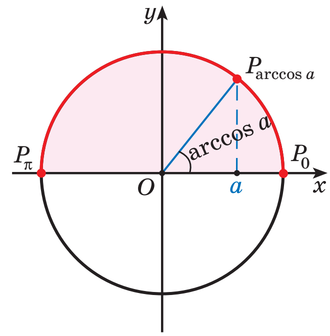
З азначэння арксінуса ліку вынікае, што $\sin(\arcsin a) = a$, калі a $1; 1$, і $\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$ пры $\frac{}{2}; \frac{}{2}$.

Напрыклад, sin arcsin $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$, $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}$,

а arcsin sin $\frac{}{4}$ $\frac{}{4}$, arcsin sin $\frac{}{5}$ $\frac{}{5}$.

Разгледзім прамежак $[0;\ \pi]$, на якім функцыя $y =$ x нарастае і прымае ўсе значэнні ад -1 да 1. Для любога ліку a з прамежку $[-1;\ 1]$ існуе адзіны лік $x \in [0;\ \pi]$ такі, што $\cos x = a$.

Азначэнне. Арккосінусам ліку a называецца вугал, які належыць прамежку $[0; \pi]$, косінус якога роўны a (рыс. 97).



Рыс. 97

Гэты вугал абазначаюць $\arccos a$.

Напрыклад, $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{}{4}$, паколькі $\frac{}{4}\quad 0;$ і $\cos\frac{}{4}\quad\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos a = \alpha$, калі $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha = a$

Прыклад 3. Вылічыце:

а) $\arccos\frac{1}{2}$;

б) $\arccos 0$.

Рашэнне. а) $\arccos\frac{1}{2}\quad\frac{}{3}$, паколькі $\frac{}{3}\quad 0;$ і $\cos\frac{}{3}\quad\frac{1}{2}$;

б) $\arccos 0\quad\frac{}{2}$, бо $\frac{}{2}\quad 0;$ і $\cos\frac{}{2}\quad 0$.

Прыклад 4. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

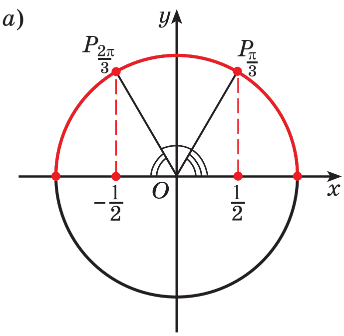
б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Рашэнне. а) $\arccos\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}$, паколькі $\frac{2}{3}\quad 0;$ і $\cos\frac{2}{3}\quad\frac{1}{2}$ (рыс. 98, *а*);

б) $\arccos\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\frac{3}{4}$, паколькі $\frac{3}{4}\quad 0;$ і $\cos\frac{3}{4}\quad\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рыс. 98, *б*).

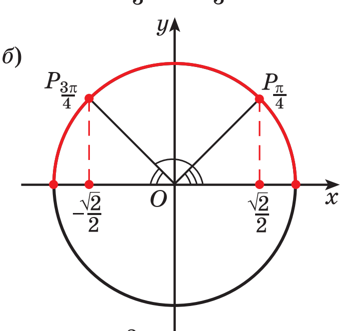
Заўважым, што $\arccos\quad\frac{1}{2}\qquad\arccos\frac{1}{2}$, $\arccos\quad\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ (гл. рыс. 98).

а)



$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$

б)



$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$

Рыс. 98

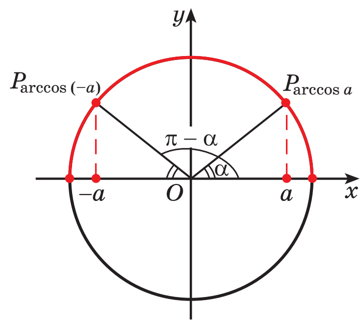
$\arccos(\ \ a) \qquad \arccos a$

Няхай $\alpha = \arccos a$, тады $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha = a$.

Паколькі пункты P_α і $P_{\pi-\alpha}$ маюць процілеглыя абсцысы, то $\cos(\pi - \alpha) = -a$.

Паколькі $\pi - \alpha \in [0; \pi]$ і $\cos(\pi - \alpha) = -a$, то па азначэнні арккосінуса $\arccos \quad a \qquad .$

Паколькі $\alpha = \arccos a$, то $\arccos(\ \ a) \qquad \arccos a$ для любога ліку $a \in [-1; 1]$ (рыс. 99).



Рыс. 99

Выкарыстаем атрыманую роўнасць і знойдзем значэнне выразу

$$\arccos(-1) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Паколькі $\arccos \quad 1 \qquad \arccos 1 \qquad 0$

$$\text{і} \ \arccos \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{}{6} \quad \frac{5}{6},$$

$$\text{то} \ \arccos \quad 1 \quad 2\arccos \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2 \cdot \frac{5}{6} \qquad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{3}.$$

Абсягам вызначэння выразу $\arccos a$ з'яўляецца адрэзак $[-1; 1]$. Калі $|a| > 1$, то выраз $\arccos a$ не мае сэнсу.

Напрыклад, выразы $\arccos 1{,}5$, $\arccos(-8)$, $\arccos\frac{\pi}{2}$ не маюць сэнсу, паколькі

$$1{,}5 \qquad 1; 1\ , \quad 8 \qquad 1; 1\ , \ \frac{}{2} \qquad 1; 1\ .$$

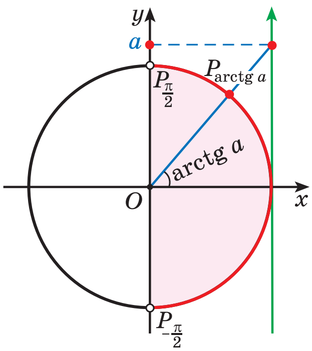
Выраз $\arccos\left(-\sqrt{3}\right)$ **не мае сэнсу**, паколькі $\sqrt{3} \qquad 1; 1$

З азначэння арккосінуса ліку вынікае, што $\cos(\arccos a) = a$, калі $a \in [-1; 1]$, і $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ пры $\alpha \in [0; \pi]$.

Напрыклад, $\cos \ \arccos\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$, $\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{3}$, а $\arccos \ \cos\frac{}{4} \qquad \frac{}{4}$, $\arccos \ \cos\frac{7}{8} \qquad \frac{7}{8}$.

На прамежку манатоннасці $\quad \frac{}{2}; \frac{}{2}$ функцыі $y = \operatorname{tg} x$ існуе адзіны вугал, тангенс якога роўны некатораму дадзенаму ліку a.

Азначэнне. Арктангенсам ліку a называецца вугал, які належыць прамежку $\frac{}{2}; \frac{}{2}$, тангенс якога роўны a (рыс. 100).



Рыс. 100

Гэты вугал абазначаюць arctg a.

Так, arctg 1 $\frac{}{4}$, паколькі $\frac{}{4}$ $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і tg $\frac{}{4}$ 1.

arctg a = α, калі $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і tg α = a

Прыклад 5. Вылічыце:

а) arctg $\sqrt{3}$;

б) arctg 0;

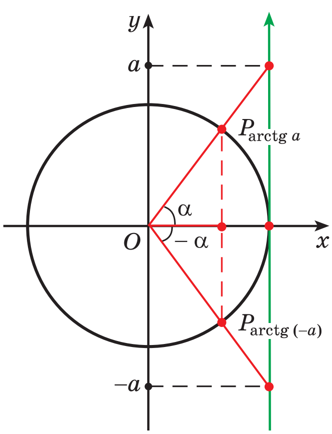
в) arctg (–1).

Рашэнне. а) arctg $\sqrt{3}$ $\frac{}{3}$, паколькі $\frac{}{3}$ $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і tg $\frac{}{3}$ $\sqrt{3}$;

б) arctg 0 = 0, паколькі 0 $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і tg 0 = 0;

в) arctg 1 $\frac{}{4}$, паколькі $\frac{}{4}$ $\frac{}{2}; \frac{}{2}$ і tg $\frac{}{4}$ 1.

arctg (–a) = –arctg a



Рыс. 101

Для любога ліку $a \in \boldsymbol{R}$ правільная роўнасць arctg (–a) = –arctg a (рыс. 101).

Прыклад 6. Знайдзіце значэнне выразу $5\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Рашэнне. Паколькі arctg $\sqrt{3}$ arctg $\sqrt{3}$ $\frac{}{3}$ і arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$ arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{}{6}$, то

5arctg $\sqrt{3}$ $\frac{1}{2}$arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 5 · $\frac{}{3}$ $\frac{1}{2}$ · $\frac{}{6}$

$\frac{5}{3}$ $\frac{}{12}$ $\frac{21}{12}$ $\frac{7}{4}$.

З азначэння арктангенса ліку вынікае, што tg (arctg a) = a пры $a \in \boldsymbol{R}$ і arctg (tg α) = α пры $\frac{}{2}; \frac{}{2}$.

Напрыклад, $\operatorname{tg}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=-\frac{1}{3}$, а $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{}{4}\quad\frac{}{4}$,

$\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\quad\frac{}{5}\quad\quad\frac{}{5}$.

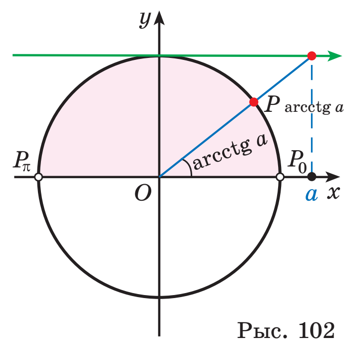
На прамежку манатоннасці $(0;\ \pi)$ функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ існуе адзіны вугал, катангенс якога роўны некатораму дадзенаму ліку a.

Азначэнне. Арккатангенсам ліку a называецца вугал, які належыць прамежку $(0;\ \pi)$, катангенс якога роўны a (рыс. 102).

Гэты вугал абазначаюць $\operatorname{arcctg} a$.

Напрыклад, $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\quad\frac{}{6}$, паколькі

$\frac{}{6}\quad 0;\quad$ і $\quad\frac{}{}\quad\sqrt{\ }$



Рыс. 102

Прыклад 7. Вылічыце:

а) $\operatorname{arcctg} 1$;

б) $\operatorname{arcctg} 0$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Рашэнне. а) $\operatorname{arcctg} 1\quad\frac{}{4}$, паколькі

$\frac{}{4}\quad 0;\quad$ і $\quad\frac{}{}$

б) $\operatorname{arcctg} 0\quad\frac{}{2}$, паколькі $\frac{}{2}\quad 0;$

і $\quad\frac{}{}$

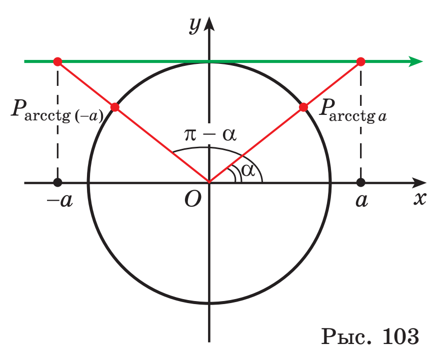
в) $\operatorname{arcctg}\quad\frac{\sqrt{3}}{3}\quad\frac{2}{3}$, паколькі

$\frac{2}{3}\quad 0;\quad$ і $\quad\frac{}{}\quad\frac{\sqrt{\ }}{}$

$\operatorname{arcctg} a = \alpha$, калі
$\alpha \in (0;\ \pi)$ і $\operatorname{ctg}\alpha = a$

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$

Для любога ліку $a \in \boldsymbol{R}$ правільная роўнасць $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ (рыс. 103).



Рыс. 103

Прыклад 8. Знайдзіце значэнне выразу $3\operatorname{arcctg}(-1) - \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Рашэнне. Паколькі $\operatorname{arcctg}\ \ 1\ \ \ \ \operatorname{arcctg}1\ \ \ \ \frac{}{4}\ \ \frac{3}{4}$ і $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) =$ $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\ \ \ \ \frac{}{6}\ \ \frac{5}{6}$, то $3\operatorname{arcctg}\ \ 1\ \ \operatorname{arcctg}\ \ \sqrt{3}\ \ \ 3\cdot\frac{3}{4}\ \ \frac{5}{6}$ $\frac{9}{4}\ \ \frac{5}{6}\ \ \frac{17}{12}$.

З азначэння арккатангенса ліку вынікае, што $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$, калі $a \in \boldsymbol{R}$, і $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha$ пры $\ \ 0;\ \ $.

Напрыклад, $\sqrt{\ }\ \ \sqrt{\ }\ \ (\ \ \ (-\ ))= -$ а $\ \ -\ \ -$

$—\ \ —$

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Ці праўда, што:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \ \frac{}{3}$; б) $\arccos 1 = 0$;

в) $\operatorname{arctg}\ \ 1\ \ \frac{3}{4}$; г) $\operatorname{arcctg}\ \ \sqrt{3}\ \ \ \frac{}{3}$?

Рашэнне. а) Праўда, паколькі $\frac{}{3}\ \ \ \frac{}{2};\frac{}{2}$ і $\sin\frac{}{3}\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) праўда, паколькі $0 \in [0;\ \pi]$ і $\cos 0 = 1$;

в) няпраўда, паколькі $\frac{3}{4}\ \ \ \frac{}{2};\frac{}{2}$;

г) няпраўда, паколькі $\frac{}{3}\ \ \ 0;\ \ $.

2. Вылічыце:

а) $\arcsin(-1)$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\operatorname{arctg}(-1)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Рашэнне. а) $\arcsin\ \ 1\ \ \ \arcsin 1\ \ \ \frac{}{2}$;

б) $\arccos\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \ \ \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \ \ \frac{}{4}\ \ \frac{3}{4}$;

в) $\operatorname{arctg}\ \ 1\ \ \ \operatorname{arctg}1\ \ \ \frac{}{4}$;

г) arcctg $\sqrt{3}$ arcctg$\sqrt{3}$ $\frac{\ }{6}$ $\frac{5}{6}$.

3. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arccos(-1) + \arcsin(-1) + \mathrm{arctg}(-1)$;

б) $\arccos 0$ $\arcsin$ $\frac{1}{2}$ $\mathrm{arctg}\,0$.

Рашэнне. а) $\arccos(-1) + \arcsin(-1) + \mathrm{arctg}(-1) =$ $\frac{\ }{2}$ $\frac{\ }{4}$ $\frac{\ }{4}$;

б) $\arccos 0$ $\arcsin$ $\frac{1}{2}$ $\mathrm{arctg}\,0$ $\frac{\ }{2}$ $\frac{\ }{6}$ 0 $\frac{\ }{3}$.

4. Ацаніце значэнне выразу $\mathrm{arctg}\,x$ $\frac{3}{4}$.

Рашэнне. Па азначэнні арктангенса ліку $\frac{\ }{2} < \mathrm{arctg}\,x < \frac{\ }{2}$.

Выкарыстаем уласцівасці лікавых няроўнасцей і атрымаем:

$\frac{\ }{2}$ $\frac{3}{4} < \mathrm{arctg}\,x$ $\frac{3}{4} < \frac{\ }{2}$ $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{4} < \mathrm{arctg}\,x$ $\frac{3}{4} <$ $\frac{\ }{4}$.

5. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\arcsin(x - 1)$; б) $\arccos(2x + 5)$.

Рашэнне. а) Па азначэнні арксінуса ліку $\arcsin(x - 1)$ — гэта вугал, сінус якога роўны $(x - 1)$, г. зн. $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, x $0;\ 2$.

б) Па азначэнні арккосінуса ліку $\arccos(2x + 5)$ — гэта вугал, косінус якога роўны $(2x + 5)$, г. зн. $-1 \leqslant 2x + 5 \leqslant 1$, $-6 \leqslant 2x \leqslant -4$, $-3 \leqslant x \leqslant -2$, x $3;$ 2 .

6. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arccos(\sin 2\pi)$; б) $\sqrt{\ }$ —

Рашэнне. а) $\arccos$ $\sin 2$ $\arccos 0$ $\frac{\ }{2}$;

б) $\sqrt{\ }$ — $\sqrt{\ }$. $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ —

7. Вылічыце $\sin$ $3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\ }{4}$.

Рашэнне. $\sin$ $3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\ }{4}$ $\sin$ $3 \cdot \frac{\ }{4}$ $\frac{\ }{4}$ $\sin$ $\frac{3}{4}$ $\frac{\ }{4}$ $\sin\frac{\ }{2}$ 1.

8*. Знайдзіце значэнне выразу $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{5}\right)$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулу $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ пры $\alpha \in [0;\ \pi]$. Паколькі $\frac{11}{5}$ 0; , то гэтай формулай адразу карыстацца нельга.

Паколькі $\cos\frac{11}{5}$ $\cos\ 2$ $\frac{}{5}$ $\cos\frac{}{5}$ і $\frac{}{5}$ 0; , то $\arccos\ \cos\frac{11}{5}$

$\arccos\ \cos\frac{}{5}$ $\frac{}{5}$.

9*. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\quad\left(-\frac{}{}\right)\right)+\left(\quad\frac{}{}\right)$

Рашэнне. Паколькі $\sin(\arcsin a) = a$ пры $a \in [-1;\ 1]$ і $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$ пры $a \in \boldsymbol{R}$, то $\left(\quad\left(-\frac{}{}\right)\right)+\left(\quad\frac{}{}\right) = -\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$.

?

1. З лікаў $\frac{}{2}$; 0 і π выберыце лік, які не можа быць значэннем выразу $\arcsin b$.
2. З лікаў $\frac{\pi}{7}$; $\frac{3}{8}$ і $\frac{5\pi}{9}$ выберыце лік, які можа быць значэннем выразу $\operatorname{arcctg}\alpha$.

1.311. Ці праўда, што:

а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{}{4}$; б) $\arcsin 1$ $\frac{}{2}$;

в) $\operatorname{arctg}\ \sqrt{3}$ $\frac{}{3}$; г) $\operatorname{arcctg}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{}{3}$?

1.312. Выкарыстайце азначэнне $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$ або $\operatorname{arcctg} a$ і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\arcsin 0$; г) $\arcsin(-1)$;

д) $\arccos\frac{1}{2}$; е) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ж) $\arccos 1$; з) $\arccos 0$;

і) $\operatorname{arctg} 1$; к) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; л) $\operatorname{arctg} 0$; м) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

н) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; о) $\operatorname{arcctg} 0$; п) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$; р) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

1.313. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{2}{3}$; б) $\arccos \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{}{4}$;

в) $\mathrm{arctg} \quad 1 \quad \frac{3}{4}$; г) $\mathrm{arcctg} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 2$.

1.314. Выкарыстайце азначэнні $\arcsin a$, $\arccos a$, $\mathrm{arctg}\, a$, $\mathrm{arcctg}\, a$ і вылічыце:

а) $\mathrm{arctg}\, 1 + 3\arccos 1$; б) $2\mathrm{arctg}\,(-1) - \arcsin(-1)$;

в) $4\arccos(-0{,}5) + \arcsin(-0{,}5)$; г) $2\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1.315. Ацаніце значэнне выразу:

а) $\mathrm{arctg}\, b \quad \frac{}{8}$; б) $2\arccos b \quad \frac{4}{15}$.

1.316. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\arcsin(2x - 3)$; б) $\arccos(5 - \quad x)$.

1.317. Вызначце паслядоўнасць дзеянняў для вылічэння значэння выразу і вылічыце:

а) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\mathrm{arctg}\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\arccos \ \sin \quad \frac{}{3}$;

г) $\arcsin\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right)$; д) $\arccos(3\sin\pi)$; е) $\mathrm{arcctg}\left(\sqrt{3}\cos 4\pi\right)$.

1.318. Вызначце паслядоўнасць дзеянняў і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\mathrm{tg}\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; б) $\cos \ 8\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $\sin\left(11\mathrm{arcctg}\,(-1)\right)$; г) $\mathrm{tg} \ 2\mathrm{arctg} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{}{6}$;

д) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}\right)$; е) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.319. Выкарыстайце азначэнні $\arcsin a$, $\arccos a$, $\mathrm{arctg}\, a$ і знайдзіце значэнне выразу $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \arccos \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 3\mathrm{arctg} \quad \sqrt{3} \quad \arccos 0$.

1.320. Вылічыце: $\mathrm{ctg} \ 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ + \sin \ 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.321. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin 0 + \arccos 0 + \mathrm{arctg}\, 0 + \mathrm{arcctg}\, 0 - \pi$;

б) $\arcsin(-1) + 2\arccos(-1) + 4\mathrm{arctg}\,(-1) + 2\mathrm{arcctg}\,(-1) + \quad \pi$.

1.322. Выкарыстайце азначэнне $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$ або $\operatorname{arcctg} a$ і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin \frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\operatorname{arctg}\ -\sqrt{3}\ $;

г) $\operatorname{arcctg} 1$; д) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

ж) $\arcsin 1$; з) $\arccos(-1)$; і) $\operatorname{arctg} 0$.

1.323. Выкарыстайце азначэнні $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ і вылічыце:

а) $\arccos \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3}{4}$; б) $\operatorname{arcctg} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 2$.

1.324. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arcctg}(-1)$; б) $\arccos 0 - \arcsin 0$;

в) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + 2\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; г) $2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.325. Ацаніце значэнне выразу:

а) $\operatorname{arcctg} b - \quad \pi$; б) $3\arcsin b \quad \frac{}{6}$.

1.326. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\arccos(8x + 1)$; б) $\arcsin\left(7 - \frac{x}{2}\right)$.

1.327. Выберыце паслядоўнасць дзеянняў і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\arcsin \ \frac{1}{2}\operatorname{tg} \quad \frac{}{3}$; г) $\operatorname{arctg}(2\sin 3\pi)$.

1.328. Вылічыце значэнне трыганаметрычнай функцыі, выкарыстаўшы значэнні $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$:

а) $\sin\ \arccos\frac{1}{2}$; б) $\cos(2\operatorname{arctg} 1)$;

в) $\sqrt{}$ г) $\cos\ \arccos \quad \frac{1}{2} \quad \frac{}{3}$;

д) $\operatorname{tg}\ 2\operatorname{arctg} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{}{6}$; е) $\sin\left(\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

1.329. Знайдзіце значэнне выразу

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 5\operatorname{arcctg}(-1) - \arccos 1.$$

1.330. Вылічыце:

а) $5\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \arcsin 0;$

б) $\left(\qquad \frac{\quad}{\sqrt{\ }}\right) + \quad \left(- \qquad \frac{\sqrt{\ }}{\quad}\right)$

1.331. Перавядзіце 1 234 500 км у метры і запішыце вынік у стандартным выглядзе.

1.332. Знайдзіце карані ўраўнення $\frac{x^2 \quad 49}{x \quad 7} \quad 0.$

1.333. Раскладзіце на множнікі:

а) $7a \quad - a;$ б) $4m \quad - \quad n \ ;$ в) $b \quad - b \quad + b - 1;$ г) $x \quad - \quad x + 8.$

1.334. Знайдзіце нуль функцыі $y = -\frac{3}{4}x - 12.$ Прывядзіце прыклад лінейнай функцыі, якая не мае нулёў.

1.335. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 \quad 0, \\ 7x - 14 \quad 0. \end{array}\right.$

1.336. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{9}{\sqrt{13} - 2} + \frac{3}{4 + \sqrt{13}}.$

1.337. Знайдзіце каардынаты пункта, сіметрычнага пункту $A(8;\ -5)$ адносна восі сіметрыі парабалы $y = \quad x \quad + \quad x + 3.$

§ 8. Трыганаметрычныя ўраўненні

1.338. Колькі каранёў мае ўраўненне:

а) $(x - 1)(x + 2{,}1)(x + 1{,}5) = 0;$ б) $x \quad = -3?$

1.339. З лікаў $-3;\ -\sqrt{3};\ -1;\ 0;\ 1;\ \sqrt{3};\ 3$ выберыце карані ўраўнення $x^4 - 4x^2 + 3 = 0.$

1.340. Ці праўда, што ўраўненні $2x \quad 12 \quad 0$ і $\frac{x^2 \quad 36}{x \quad 6} \quad 0$ раўназначныя?

Пры вывучэнні фізічных працэсаў, звязаных з гарманічнымі ваганнямі, разглядаюць функцыю $f(t) \quad A\cos(\quad t \quad)$, дзе A — амплітуда вагання, ω — частата вагання, φ — пачатковая фаза вагання.

Напрыклад, $f \; t \quad 3\cos \; 2t \quad \frac{}{6}$, $A \quad 3$, $\quad 2$, $\quad \frac{}{6}$.

Адна з задач, якую рашаюць пры вывучэнні працэсу вагання, заключаецца ў тым, каб знайсці моманты часу t, у якія амплітуда вагання дасягае некаторага значэння, напрыклад роўнага 2. Для рашэння гэтай задачы трэба рашыць ураўненне: $3\cos \; 2t \quad \frac{}{6} \quad 2$. Гэта ўраўненне адносіцца да трыганаметрычных.

Разгледзім метады рашэння трыганаметрычных ураўненняў.

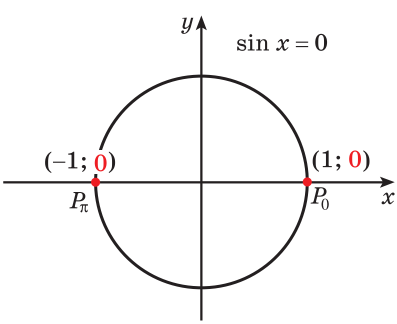
Найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні

Найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні — гэта ўраўненні выгляду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$ і $\mathrm{ctg}\, x = a$.

Напрыклад, ураўненні $\quad x = \frac{}{} \quad x = -\frac{}{} \quad x = \frac{\sqrt{}}{} \quad x =$ з’яўляюцца найпрасцейшымі трыганаметрычнымі ўраўненнямі.

Ураўненне $\sin x = a$

1. Пры $|a| > 1$, г. зн. $a < -\;$ або $a > 1$, ураўненне $\sin x = a$ не мае каранёў, паколькі мноствам значэнняў функцыі $y = \quad x$ з’яўляецца прамежак $[-1;\ 1]$. Напрыклад, ураўненні $\sin x = \sqrt{5}$, $\quad x = -2$, $\sin x = 1{,}2$ не маюць каранёў.



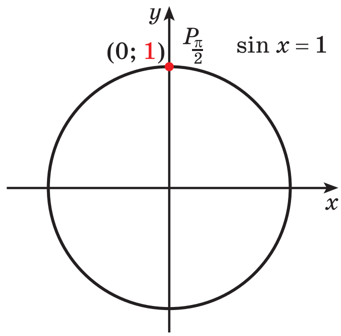
Рыс. 104

$$x = 0$$
$$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

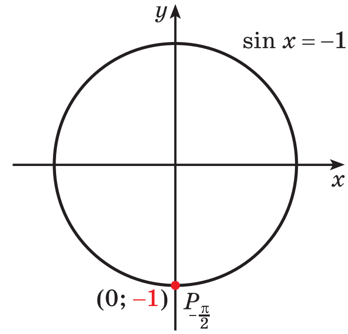
2. Разгледзім прыватныя выпадкі рашэння ўраўнення $\sin x = a$ для $a = 0$, $a = 1$ і $a = -1$.

а) Рэшым ураўненне $\sin x = 0$. Сінус ліку роўны нулю (г. зн. ардыната пункта, які адпавядае ліку, роўна нулю) толькі ў двух пунктах адзінкавай акружнасці (рыс. 104). Гэтыя пункты атрыманы з пункта $P_0(1;\ 0)$ у выніку паваротаў на вуглы $0;\ \pi;\ 2\pi;\ 3\pi;\ \ldots$ або $-\pi;\ -\ \pi;\ -\ \pi;\ \ldots$.

Такім чынам, атрымаем, што $\sin x = 0$ пры $x = \pi n$, дзе $n \in \boldsymbol{Z}$.



Рыс. 105



Рыс. 106

$x =$
$x \quad \frac{\;}{2} \quad 2\ n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

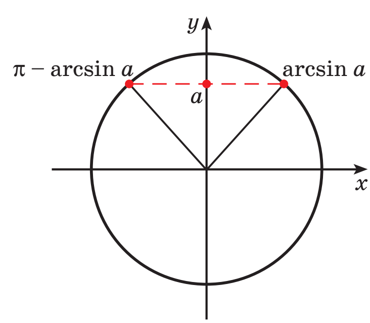
$x = -$
$x \quad \frac{\;}{2} \quad 2\ n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

б) Рэшым ураўненне $\sin x = 1$. Сінус ліку роўны 1 для $x \quad \frac{\;}{2}$, паколькі ардыната пункта $P_{\frac{\pi}{}}$ роўна 1 (рыс. 105). Улічыўшы перыядычнасць функцыі $y = \quad x$, атрымаем, што $\sin x = 1$ пры $x \quad \frac{\;}{2} \quad 2\ n$, дзе $n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Рэшым ураўненне $\sin x = -1$. Сінус ліку роўны –1 для $x \quad \frac{\;}{2}$, паколькі ардыната пункта P_{-} роўна –1 (рыс. 106). У адпаведнасці з уласцівасцю перыядычнасці функцыі сінус атрымаем, што ўсе рашэнні ўраўнення $\sin x = -1$ — гэта лікі выгляду $x \quad \frac{\;}{2} \quad 2\ n$, дзе $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Рэшым ураўненне $\sin x = a$ для $0 < |a| < 1$, г. зн. для $-1 < a < 0$ або $0 < a < 1$.

Разгледзім рашэнне ўраўнення $\sin x = a$ на прамежку $[-\pi;\ \pi]$, роўным перыяду функцыі $y = \quad x$.



Рыс. 107

На прамежку нарастання функцыі $y = \quad x$, які належыць гэтаму перыяду, існуе адзінае значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна a, гэта $x = \arcsin a$ (рыс. 107). На прамежку спадання функцыі $y = \quad x$ з гэтага перыяду існуе адзінае значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна a, гэта

$x = \pi - \arcsin a$ (гл. рыс. 107). Улічыўшы перыядычнасць функцыі $y = \quad x$, атрымаем усе рашэнні гэтага ўраўнення:

$$x \quad \arcsin a \quad 2 \ k,$$

$$x \qquad \arcsin a \quad 2 \ k, k \quad \boldsymbol{Z}.$$

$$x = a,$$
$$0 < |a| < 1,$$
$$x \qquad 1^{\ n} \arcsin a \qquad n,$$
$$n \in \boldsymbol{Z}$$

Запішам атрыманыя рашэнні ў выглядзе

$$x \quad \arcsin a \qquad \cdot 2k, \qquad (1)$$

$$x \qquad \arcsin a \qquad \cdot \ 2k \quad 1 \ , k \quad \boldsymbol{Z}, \qquad (2)$$

і аб’ядноем гэтыя дзве формулы ў адну: $x \qquad 1^{\ n} \arcsin a \qquad n, n \quad \boldsymbol{Z}$. З яе пры цотным n атрымаем формулу (1), а пры няцотным — формулу (2).

Такім чынам, атрыманы ўсе рашэнні ўраўнення $\sin x = a$ пры любых значэннях a:

Рашэнні ўраўнення $\sin x = a$	
$\|a\| >$	Няма каранёў
$a = 0$	$x \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$
$a =$	$x \quad \frac{}{2} \quad 2 \ n, n \quad \boldsymbol{Z}$
$a = -$	$x \quad \frac{}{2} \quad 2 \ n, n \quad \boldsymbol{Z}$
$\|a\| \quad 1, a \quad 0$	$x \quad 1^{\ n} \arcsin a \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin x = 2{,}4$; б) $\sin \frac{x}{5} = 0$; в) $\sin 3x = -1$;

г) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sin x = \frac{2}{7}$.

Рашэнне. а) Паколькі $2{,}4 > 1$, то ўраўненне $\sin x = 2{,}4$ не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.

б) $\sin \frac{x}{5} = 0$; $\frac{x}{5} \qquad n, n \quad \boldsymbol{Z}$. Памножым абедзве часткі гэтага ўраўнення на 5 і атрымаем: $x \quad 5 \ n, n \quad \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $5 \ n, n \quad \boldsymbol{Z}$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x \qquad 1^{\ n} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$$
$$x \qquad 1^{\ n} \frac{}{4} \qquad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$$

в) $\sin 3x = -1;\ 3x \quad \frac{\;}{2} \quad 2\ n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Падзелім абедзве часткі гэтага ўраўнення на 3 і атрымаем:

$$x \quad \frac{\;}{6} \quad \frac{2\ n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{\;}{6} \quad \frac{2\ n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \quad 1^{\ n} \arcsin \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad 1^{\ n} \quad \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad 1^{\ n} \quad \frac{\;}{4} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad 1^{\ n} \cdot \quad 1 \cdot \frac{\;}{4} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad 1^{\ n\ \ 1} \frac{\;}{4} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$$

г) Паколькі $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, то для рашэння ўраўнення $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ выкарыстаем формулу каранёў трыганаметрычнага ўраўнення

$$x \quad 1^{\ n} \arcsin a \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$$

Тады $2x \quad 1^{\ n} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z},\ 2x \quad 1^{\ n} \frac{\;}{3} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$. Падзелім абедзве часткі гэтага ўраўнення на 2 і атрымаем: $x \quad 1^{\ n} \frac{\;}{6} \quad \frac{n}{2},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $1^{\ n} \frac{\;}{6} \quad \frac{n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

д) Паколькі $0 < \frac{2}{7} < 1$, то па формуле каранёў трыганаметрычнага ўраўнення $x \quad 1^{\ n} \arcsin a \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$, атрымаем: $x \quad 1^{\ n} \arcsin \frac{2}{7} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

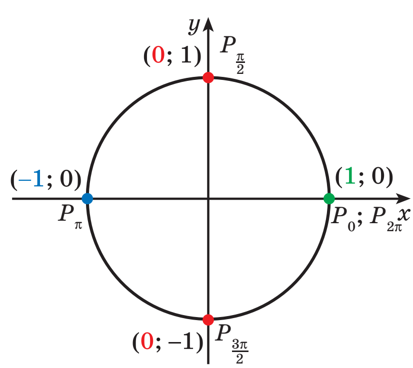
Адказ: $1^{\ n} \arcsin \frac{2}{7} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Ураўненне $\cos x = a$

1. Пры $|a| > 1$, г. зн. $a < -$ або $a > 1$, ураўненне $\cos x = a$ не мае каранёў, паколькі мноствам значэнняў функцыі $y = \quad x$ з'яўляецца прамежак [–1; 1].

Напрыклад, ураўненні $\cos x = 7$, $\cos x = \sqrt{6}$, $\quad x = -\pi$ не маюць каранёў.

2. Прыватныя выпадкі рашэння ўраўнення $\cos x = a$ для $a = 0$, $a = 1$ і $a = -$ адзначаны на адзінкавай акружнасці (рыс. 108) і прыведзены ў табліцы.



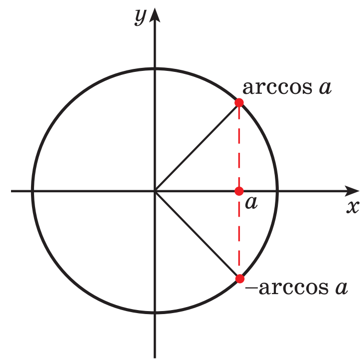
Рыс. 108

а) $\cos x = 0$	$x \quad \frac{\ }{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$
б) $\cos x =$	$x \quad 2 \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$
в) $\cos x = -$	$x \quad\quad 2 \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$

3. Рэшым ураўненне $\cos x = a$ для $0 < |a| < 1$, г. зн. для $-1 < a < 0$ або $0 < a < 1$.

Разгледзім рашэнне ўраўнення $\cos x = a$ на прамежку $[-\pi; \pi]$.

Для $x \in [0; \pi]$ існуе адзінае значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі $y = \quad x$ роўна a, гэта $x = \arccos a$, яно з'яўляецца адзіным рашэннем ураўнення $\cos x = a$ на гэтым прамежку (рыс. 109).



Рыс. 109

Паколькі функцыя $y = \quad x$ цотная, то $x = -\arccos a$ таксама з'яўляецца рашэннем гэтага ўраўнення.

Улічыўшы перыядычнасць функцыі $y = \quad x$, атрымаем усе рашэнні гэтага ўраўнення:

$x = \pm\arccos a + \quad \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$$x = a,\ 0 < |a| < 1,$$
$$x = \pm\arccos a + \quad \pi n,$$
$$n \in \boldsymbol{Z}$$

Такім чынам, атрыманы ўсе рашэнні ўраўнення $\quad x = a$ пры любых значэннях a. Запішам іх у табліцу.

Рашэнні ўраўнення $\cos x = a$	
$\lvert a\rvert >$	Няма каранёў
$a = 0$	$x \quad \frac{\ }{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$
$a =$	$x \quad 2 \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$
$a = -$	$x \quad\quad 2 \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$
$\lvert a\rvert < 1,\ a \neq 0$	$x \quad \arccos a \quad 2 \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos x = -\sqrt{2}$; б) $\cos 7x = 0$; в) $\cos\frac{2x}{9} = 1$;

г) $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\cos\frac{x}{8} = 0{,}9$.

Рашэнне. а) Паколькі $-\sqrt{2} < -1$, то ўраўненне $\cos x = -\sqrt{2}$ не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x \quad \arccos\frac{1}{2} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad \frac{}{3} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$$

б) $\cos 7x = 0;\ 7x \quad \frac{}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$;

$x \quad \frac{}{14} \quad \frac{n}{7},\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $\frac{}{14} \quad \frac{n}{7},\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

в) $\cos\frac{2x}{9} = 1;\ \frac{2x}{9} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\ \frac{x}{9} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\ x \quad 9 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $9 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

г) Для рашэння ўраўнення $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ улічым цотнасць функцыі косінус і атрымаем ураўненне $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x \quad \arccos \quad \frac{1}{2} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad \arccos\frac{1}{2} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad \frac{}{3} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$$

$$x \quad \frac{2}{3} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$$

Паколькі $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, то для рашэння ўраўнення $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ выкарыстаем формулу каранёў трыганаметрычнага ўраўнення $x \quad \arccos a \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$, і атрымаем: $3x \quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\quad x =$ $\frac{}{4} \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\ x \quad \frac{}{12} \quad \frac{2 \ n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $\frac{}{12} \quad \frac{2 \ n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

д) Паколькі $0 < 0{,}9 < 1$, то па формуле каранёў трыганаметрычнага ўраўнення $x \quad \arccos a \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$, атрымаем: $\frac{x}{8} \quad \arccos 0{,}9 \quad 2 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\ x \quad 8\arccos 0{,}9 \quad 16 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $8\arccos 0{,}9 \quad 16 \ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}$.

Ураўненне $\operatorname{tg} x = a$

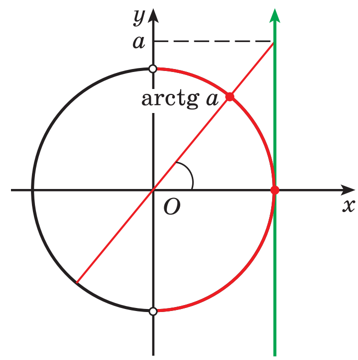
Мноствам значэнняў функцыі $y = \operatorname{tg} x$ з'яўляецца прамежак $(-\infty;\ +\infty)$.

Разгледзім рашэнне ўраўнення $\operatorname{tg} x = a$ на прамежку $\frac{}{2};\ \frac{}{2}$.

Пры любым $a \in \boldsymbol{R}$ на прамежку $\frac{}{2};\ \frac{}{2}$ існуе адзінае значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі $y = \operatorname{tg} x$ роўна a, гэта $x = \operatorname{arctg} a$, яно з'яўляецца адзіным рашэннем ураўнення $\operatorname{tg} x = a$ на гэтым прамежку (рыс. 110).

Улічыўшы перыядычнасць функцыі $y = \operatorname{tg} x$, атрымаем усе рашэнні гэтага ўраўнення:

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$



Рыс. 110

$\operatorname{tg} x = a$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне:

а) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\operatorname{tg} 2x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\operatorname{tg}(-x) = 5$; г) $\operatorname{tg}\frac{x}{4} = 0$.

Рашэнне. а) Па формуле $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, атрымаем: $x \quad \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$x \quad \overline{\ 6\ } \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\overline{\ 6\ } \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

б) $2x \quad \operatorname{arctg} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$2x \quad \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ 2x \quad \overline{\ 6\ } \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x \quad \overline{\ 12\ } \quad \frac{n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\overline{\ 12\ } \quad \frac{n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

в) Для рашэння ўраўнення $\operatorname{tg}(-x) = 5$ улічым няцотнасць функцыі тангенс і атрымаем: $\operatorname{tg} x \quad 5;\ \operatorname{tg} x \quad 5$. Тады $x \quad \operatorname{arctg} \quad 5 \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

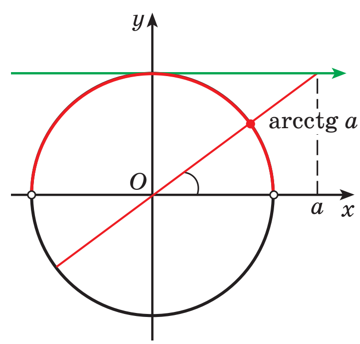
$x \quad \operatorname{arctg} 5 \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\operatorname{arctg} 5 \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

г) $\frac{x}{4} \quad \operatorname{arctg} 0 \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \frac{x}{4} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = \quad \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$



Рыс. 111

$\operatorname{ctg} x = a$
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Ураўненне $\operatorname{ctg} x = a$

Мноствам значэнняў функцыі $y = \operatorname{ctg} x$ з'яўляецца прамежак $(-\infty; +\infty)$.

Усе рашэнні ўраўнення $\operatorname{ctg} x = a$ можна знайсці па формуле $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 111).

Прыклад 4. Рашыце ўраўненне:

а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = -1$; в) $\frac{x}{} =$

Рашэнне. а) Па формуле $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, атрымаем:

$x = \operatorname{arcctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x \quad \frac{}{4} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\frac{}{4} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

б) $x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x = \pi - \operatorname{arcctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x \quad \frac{}{4} \quad n,$ $n \in \boldsymbol{Z};\ x \quad \frac{3}{4} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\frac{3}{4} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

в) $\frac{3x}{7} \quad \operatorname{arcctg} 0 \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\ \frac{3x}{7} \quad \frac{}{2} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\ 3x \quad \frac{7}{2} \quad 7\ n,\ n \quad \boldsymbol{Z};$ $x \quad \frac{7}{6} \quad \frac{7\ n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\frac{7}{6} \quad \frac{7\ n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Трыганаметрычныя ўраўненні пры рашэнні, як правіла, зводзяцца да больш простых.

Некаторыя віды трыганаметрычных ураўненняў

1. Ураўненні, у якіх можна выканаць замену зменнай

Разгледзім ураўненні выгляду

$$af\ (x) + bf(x) + c = 0,$$

дзе a, b, c — некаторыя рэчаісныя лікі, $a \neq 0$, $f(x)$ — адна з трыганаметрычных функцый.

Напрыклад, рэшым ураўненне $4\sin^2 x \quad 5\sin x \quad 1 \quad 0.$

Увядзём новую зменную $t = \quad x$, тады дадзенае ўраўненне можна запісаць у выглядзе $4t^2 \quad 5t \quad 1 \quad 0.$ Рэшым атрыманае квадратнае ўраўненне: $D \quad 9,\ \begin{matrix} t & 1, \\ t & \frac{1}{4}. \end{matrix}$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $t = \quad x$ і атрымаем найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні: $\begin{matrix} \sin x & 1, \\ \sin x & \frac{1}{4}. \end{matrix}$

Рашэнні першага ўраўнення сукупнасці: $x \quad \frac{}{2} \quad 2\ n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Рашэнні другога ўраўнення: $x \quad 1^{k \quad 1} \arcsin\frac{1}{4} \quad k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\frac{}{2} \quad 2\ n,\ n \in \boldsymbol{Z};\quad 1^{k \quad 1} \arcsin\frac{1}{4} \quad k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

2. Аднародныя трыганаметрычныя ўраўненні

Аднародныя трыганаметрычныя ўраўненні другой ступені — гэта ўраўненні, якія можна прывесці да выгляду $a\sin^2 x \quad b\sin x\cos x \quad k\cos^2 x \quad 0,$ дзе a, b, k — некаторыя рэчаісныя лікі, $a \neq 0$, $k \neq 0$.

Заўважым, што ў аднародным ураўненні $\cos x \neq 0$. У адваротным выпадку, калі $\cos x = 0$, то ўраўненне прымае выгляд $a \qquad x = 0$, а значыць, $x = 0$, але роўнасці $\cos x = 0$ і $\sin x = 0$ адначасова выконвацца не могуць.

Рэшым ураўненне $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos^2 x \quad \cos^2 x \quad 0$:

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$ і атрымаем ураўненне $\mathrm{tg}^2 x - 3\mathrm{tg}x + 2 = 0$.

Выканаўшы замену зменнай $\mathrm{tg}\,x = t$, атрымаем квадратнае ўраўненне $t^2 - 3t + 2 = 0$, каранямі якога з'яўляюцца лікі $t \;= 1$ і $t \;= 2$.

Значыць, $\mathrm{tg}\,x = 1$ або $\mathrm{tg}\,x = 2$.

Рэшым ураўненне $\mathrm{tg}\,x = 1$ і атрымаем $x \quad \frac{}{4} \quad n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Каранямі ўраўнення $\mathrm{tg}\,x = 2$ з'яўляюцца лікі $x \quad \mathrm{arctg}\,2 \quad k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Адказ: $\frac{}{4} \quad n,\ n \in \mathbf{Z}$; $\mathrm{arctg}\,2 \quad k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin 4x = 0{,}5$;

б) $\sin \quad \frac{}{3} \quad x \quad \frac{1}{2}$;

в) $\cos \quad \frac{x}{2} \quad \frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos \quad \frac{}{4} \quad 10x \quad 0$;

д) $\mathrm{tg} \quad x \quad \frac{5}{6} \quad \sqrt{3} \quad 0$;

е) $\quad — \quad x \quad \frac{\sqrt{\ }}{}$

Рашэнне. а) Паколькі $0 < \frac{1}{2} < 1$, то па формуле $x \quad 1^n \arcsin a \quad n$, $n \in \mathbf{Z}$, маем: $4x \quad 1^n \arcsin 0{,}5 \quad n,\ n \in \mathbf{Z}$, г. зн. $4x \quad 1^n \frac{}{6} \quad n$, $n \in \mathbf{Z}$. Падзелім абедзве часткі гэтага ўраўнення на 4 і атрымаем:

$x \quad 1^n \frac{}{24} \quad \frac{n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$.

б) Паколькі функцыя сінус з'яўляецца няцотнай функцыяй, то дадзенае ўраўненне раўназначна ўраўненню $\sin x \quad \frac{}{3} \quad \frac{1}{2}$. Памножым абедзве часткі гэтага ўраўнення на (–1) і атрымаем ураўненне

$\sin x \quad \frac{}{3} \quad \frac{1}{2}$. Тады $x \quad \frac{}{3} \quad 1^{n} \arcsin \frac{1}{2} \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$;

$x \quad \frac{}{3} \quad 1^{n} \cdot \quad \frac{}{6} \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; $x \quad \frac{}{3} \quad 1^{n} \cdot \quad 1 \cdot \frac{}{6} \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$;

$x \quad \frac{}{3} \quad 1^{n \;\; 1} \frac{}{6} \quad n, \; n \in \boldsymbol{Z}$; $x \quad \frac{}{3} \quad 1^{n \;\; 1} \frac{}{6} \quad n, \; n \in \boldsymbol{Z}$.

в) Паколькі $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, то для рашэння дадзенага ўраўнення выкарыстаем формулу $x \quad \arccos a \quad 2 \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$, і атрымаем:

$\frac{x}{2} \quad \frac{}{4} \quad \arccos \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2 \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$. Тады $\frac{x}{2} \quad \frac{}{4} \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

$+ \quad \pi n, \; n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{2} \quad \frac{}{4} \quad \frac{}{6} \quad 2 \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{x}{2} \quad \frac{}{4} \quad \frac{5}{6} \quad 2 \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$;

$\frac{x}{2} \quad \frac{}{4} \quad \frac{5}{6} \quad 2 \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$. Памножым абедзве часткі гэтага ўраўнення на 2 і атрымаем: $x \quad \frac{}{2} \quad \frac{5}{3} \quad 4 \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$.

г) Улічым цотнасць функцыі косінус і атрымаем ураўненне $\cos 10x \quad \frac{}{4} \quad 0$, раўназначнае дадзенаму. Тады $10x \quad \frac{}{4} \quad \frac{}{2} \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $10x \quad \frac{}{4} \quad \frac{}{2} \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; $10x \quad \frac{3}{4} \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$. Падзелім абедзве часткі ўраўнення на 10 і атрымаем: $x \quad \frac{3}{40} \quad \frac{n}{10}, \quad n \in \boldsymbol{Z}$.

д) Запішам ураўненне $\operatorname{tg} \quad x \quad \frac{5}{6} \quad \sqrt{3} \quad 0$ у выглядзе $\operatorname{tg} \quad x \quad \frac{5}{6} \quad \sqrt{3}$ і па формуле $x \quad \operatorname{arctg} a \quad n, n \in \boldsymbol{Z}$, атрымаем: $x \quad \frac{5}{6} \quad \operatorname{arctg} \quad \sqrt{3} \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x \quad \frac{5}{6} \quad \operatorname{arctg}\sqrt{3} \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$; $x \quad \frac{5}{6} \quad \frac{}{3} \quad n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$;

$x \quad \frac{5}{6} \quad \frac{}{3} \quad n, \; n \in \boldsymbol{Z}$; $x \quad \frac{7}{6} \quad n, \; n \in \boldsymbol{Z}$.

е) Улічым няцотнасць функцыі катангенс і атрымаем ураўненне x — $\sqrt{}$ тады x — $\sqrt{}$ Па формуле

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, маем: $3x \quad \frac{2}{3} \quad \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$3x \quad \frac{2}{3} \quad \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ 3x \quad \frac{2}{3} \quad \frac{}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$3x \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ 3x \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ 3x \quad \frac{4}{3} \quad n,$

$n \in \boldsymbol{Z};\ x \quad \frac{4}{9} \quad \frac{n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Адказ: а) $1^{n} \frac{}{24} \quad \frac{n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{3} \quad 1^{n}\ {}^{1} \frac{}{6} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\frac{}{2} \quad \frac{5}{3} \quad 4\ n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{3}{40} \quad \frac{n}{10},\ n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{7}{6} \quad n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

е) $\frac{4}{9} \quad \frac{n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$

2. Рашыце ўраўненне:

а) $6\cos^2 x \quad 5\sin x \quad 7$;   б) $2\operatorname{tg} x \quad \operatorname{ctg} x \quad 3.$

Рашэнне. а) Выкарыстаем асноўную трыганаметрычную тоеснасць і заменім $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. Тады ўраўненне прыме выгляд: $6(1 - \quad x) + \quad x = 7$; $6\sin \ x - \quad x + \quad = 0$. Няхай $\sin x = t$,

тады $6t \ - \ t + \ = 0$; $\begin{matrix} t & \frac{1}{3}, \\ t & \frac{1}{2}. \end{matrix}$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $\sin x = t$, атрымаем і рэшым найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні:

$$\sin x \quad \frac{1}{3}, \quad x \quad 1^{n} \arcsin\frac{1}{3} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z},$$

$$\sin x \quad \frac{1}{2}; \quad x \quad 1^{k} \frac{}{6} \quad k,\ k \quad \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $1^{n} \arcsin\frac{1}{3} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z};\ 1^{k} \frac{}{6} \quad k,\ k \quad \boldsymbol{Z}.$

б) Паколькі $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то ўраўненне можна запісаць у выглядзе $2\operatorname{tg} x \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad 3$. Няхай $\operatorname{tg} x = t$, тады

$$2t \quad \frac{1}{t} \quad 3; \quad \begin{matrix} 2t^2 \quad 3t \quad 1 \quad 0, \\ t \quad 0; \end{matrix} \quad \begin{matrix} t & 1, \\ t & \frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $\mathrm{tg}\,x = t$, атрымаем і рэшым сукупнасць найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў:

$$\mathrm{tg}\,x \quad 1, \qquad x \quad \frac{}{4} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z},$$
$$\mathrm{tg}\,x \quad \frac{1}{2}; \qquad x \quad \mathrm{arctg}\frac{1}{2} \quad k, k \quad \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{}{4} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}$; $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} \quad k, k \quad \boldsymbol{Z}$.

3. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos x \quad x = 0$; б) $\sqrt{3}\sin x = \cos^2 x \sin x$.

Рашэнне. а) $\cos x \quad x = 0$;

$$\sin 3x \quad 0, \quad 3x \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}, \quad x \quad \frac{n}{3}, n \quad \boldsymbol{Z},$$
$$\cos x \quad 0; \quad x \quad \frac{}{2} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}; \quad x \quad \frac{}{2} \quad k, k \quad \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{n}{3}, n \quad ; \frac{}{2} \quad k, k$

б) $\sqrt{3}\sin x \quad \cos^2 x \sin x \quad 0;$ $\sin x \sqrt{3} \quad \cos^2 x \quad 0;$ $\sin x \quad 0,$ $\cos^2 x \quad \sqrt{3}.$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў, паколькі $\sqrt{3} > 1$. Тады $x = 0$; $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{3}\sin 2x \quad \cos 2x \quad 0$; б) $8\sin^2 x \quad \sin x \cos x \quad \cos^2 x \quad 3$.

Рашэнне. а) Ураўненне $\sqrt{3}\sin 2x \quad \cos 2x \quad 0$ з'яўляецца аднародным ураўненнем першай ступені. Паколькі значэнні зменнай, пры якіх $x = 0$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення, то падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos 2x$ і атрымаем:

$$\sqrt{3}\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \quad \frac{\cos 2x}{\cos 2x} \quad 0; \quad \sqrt{3}\mathrm{tg}2x \quad 1 \quad 0; \quad \mathrm{tg}2x \quad \frac{\sqrt{3}}{3};$$
$$2x \quad \frac{}{6} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}; \quad x \quad \frac{}{12} \quad \frac{n}{2}, n \quad \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{}{12} \quad \frac{n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Выкарыстаем асноўную трыганаметрычную тоеснасць і атрымаем:

$$8\sin^2 x \quad \sin x \cos x \quad \cos^2 x \quad 3 \cdot \sin^2 x \quad \cos^2 x \;;$$

$5\sin^2 x \quad \sin x\cos x \quad 4\cos^2 x \quad 0$. Падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos^2 x \neq 0$. Тады $5\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} \quad 4\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \quad 0$; $5\mathrm{tg}^2 x \quad \mathrm{tg}x \quad 4 \quad 0$.

Няхай $\mathrm{tg}\,x = t$, тады $5t \quad - t - \quad = 0$; $\begin{array}{l} t \quad 1, \\ t \quad \frac{4}{5}. \end{array}$ Такім чынам,

$\begin{array}{lll} \mathrm{tg}x \quad 1, & x \quad \frac{}{4} \quad n, n \quad \boldsymbol{Z}, \\ \mathrm{tg}x \quad \frac{4}{5}; & x \quad \mathrm{arctg}\frac{4}{5} \quad k, k \quad \boldsymbol{Z}. \end{array}$

Адказ: $\frac{}{4} \quad n, \ n \quad \boldsymbol{Z}$; $\mathrm{arctg}\frac{4}{5} \quad k, \ k \quad \boldsymbol{Z}$.

5*. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення $\cos\ 2x \quad 12 \quad 0$.

Рашэнне. $\cos\ 2x \quad 12 \quad 0$; $2x \quad 12 \quad 90 \quad 180\ n, \ n \quad \boldsymbol{Z}$;

$2x \quad 102 \quad 180\ n, \ n \quad \boldsymbol{Z}$; $x \quad 51 \quad 90\ n, \ n \quad \boldsymbol{Z}$. Найменшы дадатны корань ураўнення роўны $51°$.

Адказ: $51°$.

1. З дадзеных ураўненняў выберыце ўраўненні, якія не маюць каранёў:
а) $\sin x = 2$; б) $\cos x = 2$; в) $\mathrm{tg}\,x = 2$; г) $\mathrm{ctg}x = 2$.

2. Мноства лікаў $x \quad \frac{}{2} \quad k, \ k \quad \boldsymbol{Z}$, з'яўляецца рашэннем ураўнення:
а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = 0$; в) $\mathrm{tg}\,x = 0$; г) $\mathrm{ctg}x = 0$.
Выберыце правільны адказ.

1.341. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы формулы рашэння найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў:

а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = 1$;
г) $\sin x = 1{,}5$; д) $\sin 2x = 0$; е) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
ж) $\cos x = -\frac{1}{2}$; з) $\cos x = -1$; і) $\cos x = \frac{1}{3}$;
к) $\cos 4x = 0$; л) $\sin\frac{x}{4} = 1$; м) $\cos\frac{2x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
н) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; о) $\cos 5x = \sqrt{2}$; п) $\sin 8x = -2{,}3$.

1.342. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sin\ x \quad \frac{\ }{3} \qquad 1$;   б) $\cos\ x \quad \frac{\ }{9} \qquad 1$;

в) $\sin\ x \quad \frac{\ }{10} \qquad \frac{2}{7}$;   г) $\cos\ \frac{x}{5} \quad \frac{\ }{8} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\sin\ 2x \quad \frac{\ }{4} \qquad \frac{1}{2}$;   е) $\cos\ 4x \quad \frac{2}{3} \qquad 0{,}5 \quad 0$.

1.343. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы формулы рашэння найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў:

а) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;   б) $\operatorname{ctg} x = 1$;   в) $\operatorname{tg} 5x = 0$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 0$;   д) $\operatorname{tg}\ 2x \quad \frac{\ }{9} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}$;   е) $\operatorname{tg}\ \frac{x}{5} \quad \frac{\ }{4} \qquad 1$;

ж) $\operatorname{ctg}\ 4x \quad \frac{\ }{8} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}$;   з) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\ 3x \quad \frac{\ }{12} \qquad 1 \quad 0$.

1.344. Выкарыстайце ўласцівасць цотнасці (няцотнасці) трыганаметрычных функцый і рашыце ўраўненне:

а) $\sin(-2x) = \frac{1}{2}$;   б) $\cos\left(-\frac{x}{5}\right) = -1$;

в) $\operatorname{tg}(-7x) = -\sqrt{3}$;   г) $\sin\ \frac{\ }{5} \quad \frac{x}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.345. Знайдзіце нулі функцыі $f\ x \quad 2\cos\ \frac{\ }{12} \quad 5x \quad 1$.

1.346. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin\ \ x + \qquad x - \quad = 0$;   б) $2\cos\ \ x + \qquad x + \quad = 0$;

в) $2\sin\ \ x - 7\cos x - \quad = 0$;   г) $2\cos\ \ x - \qquad x + \quad = 0$;

д) $\operatorname{tg}\ \ x - 2\operatorname{tg} x - \quad = 0$;   е) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x \quad 3 \quad \frac{3}{\cos^2 x}$.

1.347. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы спосаб раскладання выразу на множнікі:

а) $(\sin x - 0{,}5)(\sin x + 1) = 0$;   б) $3\cos\frac{x}{3} \quad 4\cos^2\frac{x}{3} \quad 0$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x \quad \operatorname{tg} x \quad 0$;   г) $3 - \qquad x = 0$;

д) $4\sin x = \qquad x \qquad x$;   е) $\sqrt{3}\sin 3x = 2\cos x \sin 3x$.

1.348. Вызначце, ці можна прывесці ўраўненне да аднароднага, і рашыце ўраўненне:

а) $\sin x + \qquad x = 0$;   б) $\sqrt{3}\sin x \quad \cos x \quad 0$;

в) $3\sin\ \ x + \qquad x \qquad x = \qquad x$;   г) $6\cos\ x + \qquad x \qquad x = 1$;

д) $\sin\ \ x + \qquad x \qquad x - \qquad x = 0$;

е) $2\sin\ \ x + \qquad x + \qquad x \qquad x = 3$.

1.349*. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны і найбольшы адмоўны карані ўраўнення:

а) $\sin(60° + x) = -1$; б) $\cos\ 30\quad 5x\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}\quad 45\quad \sqrt{3}$.

1.350*. Знайдзіце (у градусах) карані ўраўнення $\cos^2 x\quad \sqrt{3}\sin x\cos x\quad 0$, што належаць прамежку [–180°; 60°].

1.351. Рашыце найпрасцейшае трыганаметрычнае ўраўненне:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\sin\ x\quad \overline{\ \ 9}\quad \frac{1}{2}$; е) $\cos\ x\quad \overline{\ \ 10}\quad \sqrt{3}$;

ж) $\sin x = \frac{5}{6}$; з) $\cos\ x\quad \overline{\ \ 4}\quad 1$; і) $\sin\ 3x\quad \overline{\ \ 3}\quad 0$.

1.352. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\mathrm{tg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\mathrm{ctg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\mathrm{tg}\ \frac{x}{8}\quad \overline{\ \ 3}\quad 1$;

г) $\mathrm{tg}\frac{x}{3} = 7$; д) $\mathrm{ctg}\,5x = 2$; е) $\mathrm{tg}\ x\quad \overline{\ \ 10}\quad 0$.

1.353. Выкарыстайце ўласцівасць цотнасці (няцотнасці) трыганаметрычных функцый і рашыце ўраўненне:

а) $\sin(-\ \ x) = -1$; б) $\mathrm{tg}\ \frac{2}{3}\quad 3x\quad \sqrt{3}\quad 0$; в) $\cos\ \overline{\ \ 8}\quad \frac{x}{4}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.354. Знайдзіце нулі функцыі $f\ x\quad 2\cos\ \overline{\ \ 4}\quad 3x\quad \sqrt{3}$.

1.355. Рашыце ўраўненне, выканаўшы замену зменнай:

а) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$; б) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

в) $\sin^2 x\quad 4\sin x\quad 5\quad 0$; г) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;

д) $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$; е) $3\cos x = \quad x$;

ж) $\mathrm{tg}\ \ x + 2\mathrm{tg}\,x - \quad = 0$; з) $\mathrm{tg}\,x\quad \frac{1}{\cos^2 x}\quad 3$.

1.356. Выкарыстайце спосаб раскладання на множнікі і рашыце ўраўненне:

а) $(\cos x + 0{,}5)(\cos x - 1) = 0$; б) $2\sin\frac{x}{2} = 3\sin^2\frac{x}{2}$;

в) $3\mathrm{tg}^2\frac{x}{4}\quad 9\quad 0$; г) $1 - \qquad x = 0$;

д) $9\cos x = \qquad x\qquad x$; е) $\sin x = \qquad x\qquad x$.

1.357. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад рашэння аднародных ураўненняў:

а) $\sin x - \quad x = 0$;

б) $3\sin x \quad \sqrt{3}\cos x \quad 0$;

в) $\sin \quad x - \quad x \quad x = \quad x$;

г) $3\cos \quad x + \quad x \quad x + \quad x = 2$.

1.358*. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны і найбольшы адмоўны карані ўраўнення:

а) $\sin 30 \quad x \quad \frac{1}{2}$; б) $\cos(45^\circ - \quad x) = 0$; в) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{3} \quad 60 \quad 1$.

1.359. Знайдзіце 25 % ад ліку $7 \cdot 10$.

1.360. Рашыце двайную няроўнасць $7x \leqslant x^2 - 8 \leqslant 3x - 4$.

1.361. Размясціце ў парадку нарастання лікі $-2\sqrt{50}$, $-4\sqrt{18}$ і $-\sqrt{162}$.

1.362. Выкарыстайце метад замены зменнай і рашыце ўраўненне $(x \quad + \quad x + 1)(x \quad + \quad x + 3) + \quad = 0$.

1.363. Плошча прамавугольнай пляцоўкі, адна са старон якой на 3 м большая за другую, роўна 54 м . Знайдзіце (у метрах) даўжыню агароджы, якая спатрэбіцца для абгароджвання ўсёй пляцоўкі па перыметры.

1.364. Выканайце складанне рацыянальных дробаў: $\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 7x + 5} + \frac{1}{x + 1}$.

§ 9. Формулы прывядзення

1.365. Якой каардынатнай чвэрці належыць вугал α, калі:

а) $< \quad < \frac{3}{2}$; б) $\frac{\ }{2} < \quad < \quad$; в) $\quad < \quad < \frac{\ }{2}$; г) $\frac{3}{2} < \quad < 2$?

1.366. Вызначце знак $\sin\alpha$, калі:

а) $< \quad < \frac{3}{2}$; б) $\quad < \quad < \frac{\ }{2}$;

в) $\frac{3}{2} < \quad < \quad$; г) $\frac{3}{2} < \quad < 2$.

1.367. Вызначце знак $\mathrm{ctg}\,\alpha$, калі:

а) $< \quad < \frac{3}{2}$; б) $\quad < \quad < \frac{\ }{2}$;

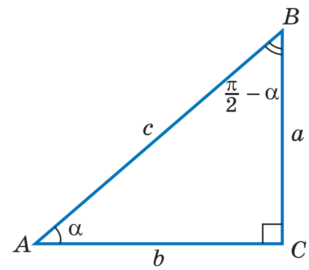
в) $\frac{3}{2} < \quad < \quad$; г) $\frac{3}{2} < \quad < 2$.

Пры вывучэнні геаметрыі вы ўстанавілі, што

sin $\frac{\ }{2}$ cos , cos $\frac{\ }{2}$ sin

і — —

калі α — востры вугал (рыс. 112).



— $\frac{b}{c}$

— $\frac{a}{c}$

— $\frac{b}{a}$

— $\frac{a}{b}$

Рыс. 112

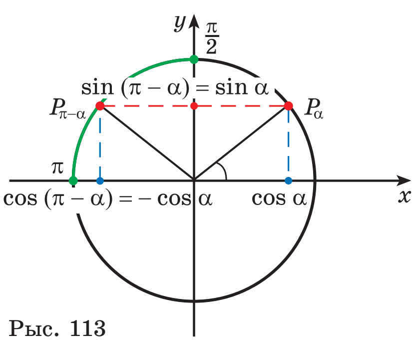
Уласцівасць перыядычнасці трыганаметрычных функцый дазваляе звесці вылічэнне значэнняў сінуса, косінуса, тангенса і катангенса адвольнага вугла да вылічэння значэнняў гэтых функцый пры значэннях аргумента, што належаць прамежку [0; 2π]. Напрыклад,

sin 390 sin 360 30 sin 30 $\frac{1}{2}$,

—— — —

На практыцы прынята зводзіць значэнні трыганаметрычных функцый адвольнага вугла да вылічэння значэнняў гэтых функцый для вугла, што належыць прамежку 0; $\frac{\ }{2}$.

Гэта можна рабіць з дапамогай ***формул прывядзення***.



Рыс. 113

Разгледзім прамежак $\frac{\ }{2}$; . Любы лік φ з гэтага прамежку можна запісаць у выглядзе φ = π − α, дзе 0; $\frac{\ }{2}$. Напрыклад, $\frac{5}{6}$ $\frac{\ }{6}$, $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{8}$.

Паколькі ардынаты пунктаў P_α і $P_{\pi-\alpha}$ роўныя, а абсцысы адрозніваюцца толькі знакам, то: sin sin , а cos = − α (рыс. 113).

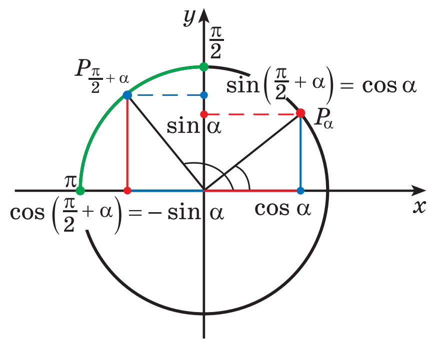
Тады для — атрымаем, што

tg $\frac{\sin}{\cos}$ $\frac{\sin}{\cos}$ $\frac{\sin}{\cos}$ tg , г. зн. tg tg .

І для α ≠ 0 маем:

—— —— —— г. зн.

Разам з тым любы лік φ з прамежку $\frac{}{2}$; можна таксама запісаць у выглядзе $\frac{}{2}$, дзе 0; $\frac{}{2}$. Напрыклад, $\frac{5}{6}$ $\frac{}{2}$ $\frac{}{3}$, $\frac{5}{8}$ $\frac{}{2}$ $\frac{}{8}$.



Рыс. 114

Паколькі ардыната пункта $P_{}$ роўна абсцысе пункта P_α, а абсцыса пункта $P_{}$ адрозніваецца ад ардынаты пункта P_α толькі знакам (рыс. 114), то:

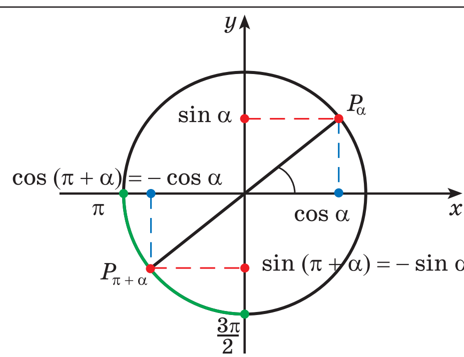
sin $\frac{}{2}$ cos , a cos $\frac{}{2}$ sin .

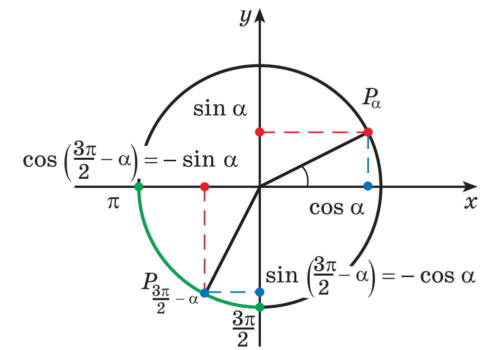
Для α ≠ 0 і — атрымаем:

— г. зн. —

— г. зн. —

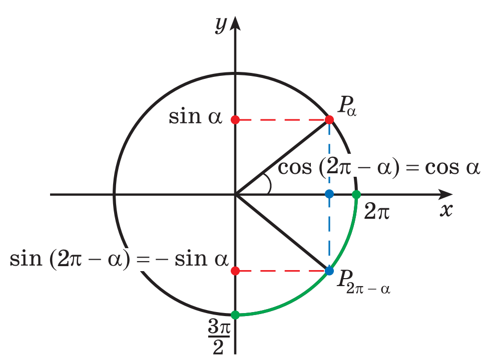
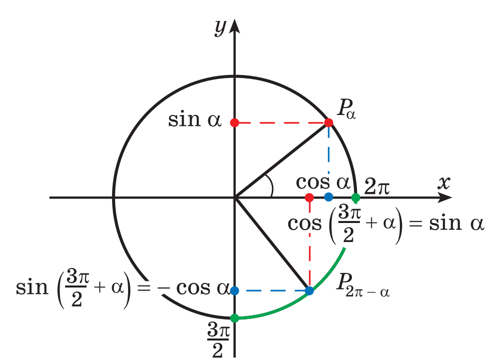
Паколькі любы лік φ з прамежку ; $\frac{3}{2}$ можна запісаць у выглядзе φ = π + α або $\frac{3}{2}$, дзе 0; $\frac{}{2}$, то, разважаючы аналагічна, атрымаем формулы прывядзення:

sin sin cos cos tg tg	

sin $\frac{3}{2}$ cos cos $\frac{3}{2}$ sin $\overline{}$ $\overline{}$	

Паколькі любы лік φ з прамежку $\frac{3}{2}$; 2 можна запісаць у выглядзе

або $\frac{3}{2}$, дзе 0; $\frac{}{2}$, то атрымаем:

sin 2 sin cos 2 cos tg 2 tg	
sin $\frac{3}{2}$ cos cos $\frac{3}{2}$ sin $\overline{}$ $\overline{}$	

Прааналізаваўшы атрыманыя формулы, можна заўважыць заканамернасці, што даюць магчымасць сфармуляваць **правіла**, якое дазваляе карыстацца формуламі прывядзення, не запамінаючы іх:

① У правай частцы формулы прывядзення ставіцца той знак, які мае ў адпаведнай чвэрці зыходная функцыя, калі лічыць, што вугал α — востры.

② Калі ў формуле прывядзення аргумент мае выгляд:

- або 2 , то назва функцыі не мяняецца;
- – або $\frac{3}{2}$, то назва функцыі мяняецца (сінус на косінус, косінус на сінус, тангенс на катангенс, катангенс на тангенс).

Напрыклад, прыменім атрыманае правіла да выразу cos $\frac{3}{2}$.

① Калі лічыць, што вугал α — востры, то $\frac{3}{2}$ — вугал трэцяй чвэрці. У трэцяй чвэрці косінус (зыходная функцыя) адмоўны, значыць, у правай частцы роўнасці трэба паставіць знак «мінус».

$$\cos\Big(\underbrace{\frac{3\pi}{2}-\alpha}_{\text{III}}\Big) = -\sin\alpha$$

② Паколькі аргумент мае выгляд $\frac{3}{2}$, то назву функцыі «косінус» трэба памяняць на «сінус». Такім чынам, атрымаем: cos $\frac{3}{2}$ sin .

Прыклад 1. Прывядзіце выраз да трыганаметрычнай функцыі вугла α, прымяніўшы формулы прывядзення:

а) cos 2 ; б) tg $\frac{3}{2}$; в) sin .

Рашэнне. Прыменім правіла:

а) ① Паколькі $2\pi - \alpha$ — вугал чацвёртай чвэрці, у якой косінус дадатны, то ў правай частцы роўнасці не трэба ставіць знак «мінус».

$$\cos\big(\underbrace{2\pi-\alpha}_{\text{IV}}\big) = \cos\alpha$$

② Паколькі аргумент мае выгляд $\pi - \alpha$, то назва функцыі «косінус» не мяняецца. Значыць, cos 2 cos .

б) ① Паколькі $\frac{3}{2}$ — вугал чацвёртай чвэрці, у якой тангенс адмоўны, то ў правай частцы роўнасці трэба паставіць знак «мінус».

$$\operatorname{tg}\Big(\underbrace{\frac{3\pi}{2}+\alpha}_{\text{IV}}\Big) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

② Паколькі аргумент мае выгляд $\frac{3}{2}$, назву функцыі «тангенс» трэба памяняць на «катангенс». Тады $\frac{}{}$

в) ① Паколькі π – α — вугал другой чвэрці, у якой сінус дадатны, то ў правай частцы роўнасці не трэба ставіць знак «мінус».

② Паколькі аргумент мае выгляд π – α, то назва функцыі «сінус» не мяняецца. Значыць, sin sin .

$$\sin(\overbrace{\pi}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\parallel$$

Прыклад 2. Выкарыстайце формулы прывядзення і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin\frac{3\pi}{4}$; б) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$; в) $\cos 240°$; г) $\operatorname{ctg} 300°$.

Рашэнне. а) $\sin\frac{3}{4}$ $\sin$ $\frac{}{4}$ або $\sin\frac{3}{4}$ $\sin$ $\frac{}{2}$ $\frac{}{4}$.

Першы спосаб.

① Паколькі $\frac{}{}$ — вугал другой чвэрці, у якой сінус дадатны, то ў правай частцы роўнасці не трэба ставіць знак «мінус».

② Паколькі аргумент мае выгляд $\frac{}{4}$, то назва функцыі «сінус» не мяняецца. Значыць, $\sin\frac{3}{4}$ $\sin$ $\frac{}{4}$ $\sin\frac{}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Другі спосаб.

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\Big(\underbrace{\overbrace{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{4}}_{\parallel}\Big)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

б) $\operatorname{tg}\frac{7}{6}$ tg $\frac{}{6}$ $\operatorname{tg}\frac{}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (у трэцяй чвэрці тангенс дадатны, назва функцыі не мяняецца).

в) $\cos 240$ $\cos 180$ 60 $\cos 60$ $\frac{1}{2}$ (у трэцяй чвэрці косінус адмоўны, назва функцыі не мяняецца).

г) $\sqrt{\ }$ (у чацвёртай чвэрці катангенс адмоўны, назва функцыі не мяняецца).

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Вылічыце, выкарыстаўшы формулы прывядзення:

а) $\cos 315°$; б) $\sin 120°$; в) $\operatorname{ctg} 210°$; г) $\operatorname{tg} 330°$.

Рашэнне. а) $\cos 315 \quad \cos\ 360 \quad 45 \quad \cos 45 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$ (у чацвёртай чвэрці косінус дадатны, назва функцыі не мяняецца);

б) $\sin 120 \quad \sin\ 180 \quad 60 \quad \sin 60 \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ (у другой чвэрці сінус дадатны, назва функцыі не мяняецца);

в) $\sqrt{\ }$ (у трэцяй чвэрці катангенс дадатны, назва функцыі мяняецца);

г) $\operatorname{tg} 330 \quad \operatorname{tg}\ 360 \quad 30 \quad \operatorname{tg} 30 \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$ (у чацвёртай чвэрці тангенс адмоўны, назва функцыі не мяняецца).

2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin \quad \frac{4}{3}$; б) $\cos \quad \frac{11}{6}$; в) $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{3}$; г) $\frac{\ }{\ }$

Рашэнне. а) Паколькі сінус — няцотная функцыя, то

$$\sin \quad \frac{4}{3} \qquad \sin \frac{4}{3}.$$

Прыменім формулы прывядзення:

$$\sin \frac{4}{3} \qquad \sin \qquad \frac{\ }{3} \qquad \sin \frac{\ }{3} \qquad \sin \frac{\ }{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Выкарыстаем уласцівасць цотнасці косінуса і атрымаем:

$$\cos \quad \frac{11}{6} \qquad \cos \frac{11}{6}.$$

Па формулах прывядзення: $\cos \frac{11}{6} \quad \cos\ 2 \quad \frac{\ }{6} \quad \cos \frac{\ }{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) Выкарыстаем уласцівасць перыядычнасці тангенса і атрымаем:

$$\operatorname{tg} \frac{8}{3} \quad \operatorname{tg}\ 2 \quad \frac{2}{3} \quad \operatorname{tg} \frac{2}{3}.$$

Прыменім формулы прывядзення: $\operatorname{tg} \frac{2}{3} \quad \operatorname{tg} \quad \frac{\ }{3} \quad \operatorname{tg} \frac{\ }{3} \quad \sqrt{3}$.

г) Паколькі катангенс — няцотная функцыя, то $\frac{\ }{\ } \qquad \frac{\ }{\ }$

Выкарыстаем уласцівасць перыядычнасці катангенса і атрымаем:

Па формулах прывядзення:

3. Прывядзіце да трыганаметрычнай функцыі вугла α:

а) $\cos 7$; б)

в) $\operatorname{tg} \frac{}{2}$; г) $\sin \frac{11}{2}$.

Рашэнне. а) Выкарыстаем уласцівасць перыядычнасці косінуса і атрымаем: $\cos 7$ $\cos 6$ $\cos$.

Па формулах прывядзення: $\cos$ $\cos$.

б) Выкарыстаем уласцівасць перыядычнасці катангенса:

Прыменім формулы прывядзення:

в) Паколькі тангенс — няцотная функцыя, то $\operatorname{tg} \frac{}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{}{2}$.

Па формулах прывядзення:

г) Паколькі сінус — няцотная функцыя, то

$\sin \frac{11}{2}$ $\sin \frac{11}{2}$.

Выкарыстаем уласцівасць перыядычнасці сінуса і атрымаем:

$\sin \frac{11}{2}$ $\sin 4 \frac{3}{2}$ $\sin \frac{3}{2}$.

Па формулах прывядзення: $\sin \frac{3}{2}$ $\cos$ $\cos$.

4. Прывядзіце да трыганаметрычнай функцыі вугла α:

а) $\cos^2 \frac{3}{2}$; б) $\operatorname{tg}^2 \frac{17}{2}$.

Рашэнне. а) $\cos^2 \frac{3}{2}$ $\cos \frac{3}{2}$ ^{2} $\sin$ ^{2} $\sin^2$;

б) $\mathrm{tg}^2 \quad \frac{17}{2} \quad \mathrm{tg} \quad \frac{17}{2} \quad ^2 = \mathrm{tg} \ \frac{17}{2} \quad ^2 = \mathrm{tg} \ \frac{17}{2} \quad ^2 =$

$\mathrm{tg} \ 8 \quad \frac{}{2} \quad ^2 = \mathrm{tg} \ \frac{}{2} \quad ^2 =$

5. Вылічыце:

а) $\sin \quad °$; б) $\mathrm{ctg} \ 210°$.

Рашэнне. а) $\sin^2 225 \quad \sin 225 \quad ^2 \quad \sin \ 180 \quad 45 \quad ^2 \quad \sin 45 \quad ^2$

$= \sin 45 \quad ^2 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \ ^2 \quad \frac{1}{2}$;

б) $\sqrt{}$

6. Спрасціце выраз:

а) $\sin \ \frac{}{2} \quad \cos \quad$; б) $\cos^2 \ 3 \quad \cos^2 \ \frac{7}{2} \quad$;

в) $\frac{\sin \ 270}{\cos \ 90} \cdot \mathrm{tg} \ 180 \quad$; г)

Рашэнне. а) Прыменім формулы прывядзення:

$\sin \ \frac{}{2} \quad \cos \quad \cos \quad \cos \quad 0.$

б) Улічым перыядычнасць косінуса, выкарыстаем формулы прывядзення і атрымаем:

$\cos^2 \ 3 \quad \cos^2 \ \frac{7}{2} \quad \cos^2 \quad \cos^2 \ \frac{}{2} \quad \cos^2 \quad \sin^2 \quad 1.$

в) Прыменім формулы прывядзення:

$\frac{\sin \ 270}{\cos \ 90} \cdot \mathrm{tg} \ 180 \quad \frac{\cos}{\sin} \cdot \ \mathrm{tg} \quad \frac{\cos}{\sin} \cdot \mathrm{tg}$

.

г) Улічым перыядычнасць тангенса, няцотнасць катангенса і формулы прывядзення:

7. Рашыце ўраўненне $\cos \ \frac{3}{2} \quad x \quad \sqrt{2} \sin \ x \quad \cos x$.

Рашэнне. Прыменім формулы прывядзення і атрымаем:

$$\cos\frac{3}{2}\quad x\quad \sqrt{2}\sin\ x\quad \cos x\quad \sin x\quad \sqrt{2}\sin x\cos x$$

$$\sin x\quad 1\quad \sqrt{2}\cos x\quad 0$$

$$\sin x\quad 0,\qquad \sin x\quad 0,\quad x\quad n,\ n\quad ,$$

$$1\quad \sqrt{2}\cos x\quad 0\qquad \cos x\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\quad x\quad \frac{}{4}\quad 2\ k,\ k$$

Адказ: $n,\ n\quad \boldsymbol{Z};\ \frac{}{4}\quad 2\ k,\ k\quad \boldsymbol{Z}.$

1. У якіх выразах $\sin$, $\cos$, $\sin\frac{}{2}$, $\sin\frac{3}{2}$, $\cos 2$ назва функцыі пасля прымянення формул прывядзення будзе «косінус»?

2. У якіх выразах $\sin$, $\cos$, $\sin\frac{}{2}$, $\sin\frac{3}{2}$, $\cos 2$ пасля прымянення формул прывядзення ў правай частцы роўнасці будзе пастаўлены знак «мінус»?

1.368. Выкарыстайце формулы прывядзення і прывядзіце да трыганаметрычнай функцыі вугла α:

а) $\sin\frac{}{2}$; б) $\cos\frac{}{2}$; в) $\mathrm{tg}(\pi+\alpha)$;
г) $\sin(\pi+\alpha)$; д) $\cos(2\pi+\alpha)$; е) $\mathrm{ctg}\frac{3}{2}$.

1.369. Прывядзіце да трыганаметрычнай функцыі вугла α:

а) $\cos(270°-\alpha)$; б) $\mathrm{tg}(180°-\alpha)$; в) $\sin(\alpha-90°)$;
г) $\cos(\alpha-180°)$; д) $\mathrm{ctg}(\alpha-360°)$; е) $\mathrm{tg}(\alpha-270°)$.

1.370. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы формулы прывядзення:

а) $\mathrm{tg}\,240°$; б) $\sin 210°$; в) $\mathrm{ctg}(-300°)$;
г) $\cos(-120°)$; д) $\sin(-840°)$; е) $\mathrm{tg}(-570°)$.

1.371. Выкарыстайце формулы прывядзення і пераўтварыце выраз:

а) $\cos\ (\pi+\alpha)$; б) $\sin\ (90°-\alpha)$; в) $\mathrm{ctg}^2\frac{5}{2}$.

1.372. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы перыядычнасць трыганаметрычных функцый і формулы прывядзення:

а) $\sin\frac{7\pi}{6}$; б) $\cos\frac{5\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}$;

г) $\cos\quad\frac{61}{4}$; д) $\sin^2\frac{29\pi}{4}$; е) $\operatorname{ctg}^2\quad\frac{40}{3}$.

1.373. Спрасціце выраз:

а) $\cos(\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)$; б) $\dfrac{\cos\frac{3}{2}}{\sin}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{3}{2}\quad\cdot\sin\quad\cos\quad 2$; г) $\cos^2\quad\cos^2\ \frac{\ }{2}$.

1.374. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $\sin 32°$ і $\cos 58°$; б) $\sin 28°$ і $\cos 42°$; в) $\operatorname{tg} 44°$ і $\operatorname{ctg} 46°$.

1.375. Выкарыстайце формулы прывядзення і рашыце ўраўненне:

а) $\operatorname{tg}(\pi+x)=1$; б) $\cos\ \frac{\ }{2}\quad x\quad\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $2\sin\ x\quad\frac{\ }{2}\quad\sqrt{2}\quad 0$; г) $3\operatorname{ctg}\ 2x\ \ \frac{3}{2}\quad\sqrt{3}\quad 0$.

1.376. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin(-300°)\cdot\operatorname{tg}(-210°)$; б) $2\sin 870\quad 2\sqrt{3}\cos 570\quad\operatorname{tg}^2 420$.

1.377. Спрасціце выраз:

а) $\operatorname{tg}(360°-\alpha)-\operatorname{ctg}(270°-\alpha)$;

б) $\operatorname{ctg}(180°-\alpha)\cdot\cos(90°-\alpha)-\sin(270°+\alpha)$;

в) $\operatorname{ctg}(90°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(270°+\alpha)+\quad\alpha$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}180\qquad\cdot\sin 90}{\cos 270}$.

1.378. Вядома, што $\cos\frac{3}{2}\qquad\frac{4}{5}$ і $\frac{\ }{2}<\quad<$. Знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$.

1.379. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\sin\frac{\ }{2}\qquad\operatorname{tg}}{\cos\ \frac{\ }{2}}$; б) $1\quad\operatorname{ctg}\qquad\operatorname{tg}\frac{3}{2}$;

в) $\dfrac{\cos\frac{\ }{2}\qquad\operatorname{tg}}{1\quad\sin\frac{\ }{2}}$; г) $\dfrac{1}{\cos^2}\quad\operatorname{ctg}\ \frac{\ }{2}\qquad\operatorname{tg}\ \frac{3}{2}$;

д) $\dfrac{\cos\frac{\ }{2}\qquad\sin}{\cos\ \frac{3}{2}}$; е) $\dfrac{\operatorname{ctg}\qquad\sin}{\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\qquad\sin\frac{3}{2}}$.

1.380. Для функцыі $f(x) = \quad x + 1$ знайдзіце:

а) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; б) $f \quad \frac{5}{16}$.

1.381. Рашыце ўраўненне:

а) $2\sin(2\pi - x) - \quad x = -3$; б) $\cos x \quad \sqrt{3}\cos \frac{}{2} \quad x \quad 0$;

в) $\sin^2 x \quad 5\cos \frac{}{2} \quad x \quad 6 \quad 0$; г) $4\sin^2 x \quad 4\sin \frac{}{2} \quad x \quad 1 \quad 0$.

1.382. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\sin \ 2 \quad x \quad \cos \frac{3}{2} \quad x \quad 1 \quad 0$; б) $\sin \ 2 \quad x \quad \sin \frac{}{2} \quad x \quad \sqrt{2}$.

1.383. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f \ x \quad \sin \frac{3}{2} \quad x \quad 1$; б) $f \ x \quad \cos \frac{}{2} \quad x \quad 1$.

1.384*. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\mathrm{tg} \frac{3}{2} \quad \mathrm{arcctg}\, 7$; б) $\cos \quad \arccos \frac{2}{3}$.

1.385*. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{2\sin \qquad \sin \frac{3}{2}}{\cos \qquad 4\cos \frac{}{2}}$, калі $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$.

1.386. Прывядзіце да трыганаметрычнай функцыі вугла α выраз:

а) $\cos \frac{}{2}$; б) $\sin \frac{}{2}$; в) $\mathrm{ctg}(\pi + \alpha)$;

г) $\cos(\pi + \alpha)$; д) $\sin(2\pi + \alpha)$; е) $\mathrm{tg} \frac{3}{2}$.

1.387. Выкарыстайце формулы прывядзення і запішыце трыганаметрычную функцыю вугла α:

а) $\sin(270° - \alpha)$; б) $\mathrm{ctg}(180° - \alpha)$; в) $\cos(\alpha - 90°)$;
г) $\sin(\alpha - 180°)$; д) $\mathrm{tg}(\alpha - 360°)$; е) $\mathrm{ctg}(\alpha - 270°)$.

1.388. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы перыядычнасць трыганаметрычных функцый і формулы прывядзення:

а) $\sin 315°$; б) $\mathrm{ctg}\, 300°$; в) $\mathrm{tg}(-240°)$; г) $\cos 480°$;
д) $\mathrm{tg}(-570°)$; е) $\mathrm{ctg}(- \quad °)$; ж) $\mathrm{tg}\, 1050°$; з) $\sin(-690°)$.

1.389. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$; б) $\sin\frac{17\pi}{6}$; в) $\cos \quad \frac{7}{4}$; г) $\sin \quad \frac{5}{3}$;

д) $\operatorname{ctg}\ \frac{11}{6}$; е) $\sin\frac{19\pi}{6}$; ж) $\cos^2\ \frac{13}{4}$; з) $\operatorname{ctg}\ \frac{29}{4}$.

1.390. Пераўтварыце выраз:

а) $\operatorname{tg}^2\ \frac{3}{2}$; б) $\sin\ (5\pi - \alpha)$; в) $\cos\ (630° + \alpha)$.

1.391. Спрасціце выраз:

а) $\sin(270° - \alpha) - \cos(180° + \alpha)$;
б) $\operatorname{tg}(270° - \alpha)\sin(180° - \alpha) + \cos(180° + \alpha)$.

1.392. Спрасціце выраз:

а) $\sin(\pi + \alpha) - \sin(-\alpha)$; б) $\dfrac{\sin\ 2}{\cos\ \frac{}{2}}$;

в) $\operatorname{tg}(-\alpha) \cdot \quad \alpha - \sin(2\pi - \alpha)$; г) $\sin^2\ \frac{}{2} \qquad \sin^2$.

1.393. Выкарыстайце формулы прывядзення і рашыце ўраўненне:

а) $2\cos \quad x \quad \sqrt{3}$; б) $2\sin\ \frac{3}{2} \quad x \quad 1 \quad 0$;

в) $3\operatorname{tg}\ 4x \quad \frac{}{2} \quad \sqrt{3} \quad 0$; г) $5\operatorname{ctg} \quad x \quad 3 \quad 0$.

1.394. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos(- \quad °) \cdot \operatorname{ctg}(-120°)$; б) $4\cos 840 \quad 4\sqrt{3}\sin 660 \quad \operatorname{ctg}^2 30$.

1.395. Спрасціце выраз:

а) $\operatorname{tg}(180° + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(360° - \alpha) + \quad \alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\ 90 \qquad \sin\ 180}{\cos\ 180}$.

1.396. Вядома, што $\sin\ \frac{3}{2} \qquad \frac{5}{13}$ і $\quad < \quad < \frac{3}{2}$. Знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$.

1.397. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\cos\ \frac{}{2} \qquad \operatorname{ctg}}{\sin\ \frac{}{2}}$; б) $1 \quad \operatorname{tg} \qquad \operatorname{ctg}\ \frac{3}{2}$;

в) $\dfrac{\sin\ \frac{}{2} \qquad \operatorname{ctg}}{1 \quad \cos\ \frac{3}{2}}$; г) $\dfrac{1}{\sin^2} \quad \operatorname{tg} \qquad \operatorname{ctg}\ 2$;

д) $\dfrac{\sin\ \frac{3}{2} \qquad \cos}{\sin\ \frac{}{2}}$; е) $\dfrac{\operatorname{tg} \qquad \cos}{\operatorname{tg}\ \frac{3}{2} \qquad \cos\ \frac{3}{2}}$.

1.398. Рашыце ўраўненне:

а) $4\sin\ 2\quad x\quad \cos\ \frac{3}{2}\quad x\quad 5$; б) $\sqrt{3}\sin x\quad \sin\ \frac{3}{2}\quad x\quad 0$.

1.399. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\cos\ 2\quad x\quad \sin\ \frac{}{2}\quad x\quad \sqrt{3}$; б) $\cos\ 2\quad x\quad \sin\ \frac{3}{2}\quad x\quad 1$;

в) $2\cos^2 x\quad \sqrt{3}\sin\ 1{,}5\quad x$.

1.400*. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{3\sin\ \frac{}{2}\qquad 2\cos}{2\sin\qquad 3\cos\ \frac{3}{2}}$, калі $\mathrm{ctg}\,\alpha = 5$.

1.401. З дробаў $\frac{3}{7}$; $\frac{13}{13}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{2}{17}$; $\frac{19}{3}$ выберыце ўсе няправільныя дробы.

1.402. Знайдзіце НАК (48, 30).

1.403. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{5^{13}\cdot 5^{10}\ ^{2}}{5^{31}}$; б) $\dfrac{12^8}{27^2\cdot 2^{15}}$.

1.404. Рашыце няроўнасць $\dfrac{x^2\quad 5x}{3\quad 6x} < 0$ і выберыце яе найменшае цэлае адмоўнае рашэнне.

1.405. Знайдзіце нулі функцыі $f(x) = x\quad - 10x\quad + 9$.

1.406. Раскладзіце на множнікі квадратны трохчлен:

а) $-x\quad -\quad x - 10$; б) $8a\quad +\quad a - 1$.

1.407. Знайдзіце значэнне выразу $\left(1-\sqrt{2}\right)^2 - \left(1-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+3\right)$.

§ 10. Сінус, косінус, тангенс сумы і рознасці

1.408. Знайдзіце вышыню трохвугольніка, калі яна ў два разы большая за старану, да якой праведзена, а плошча трохвугольніка роўна 32 см .

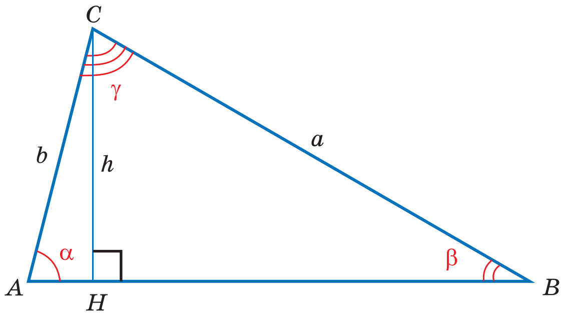
1.409. У прамавугольным трохвугольніку адносіна аднаго з катэтаў да гіпатэнузы роўна 0,6. Знайдзіце адносіну другога катэта да гіпатэнузы.

Вядомыя значэнні сінуса, косінуса, тангенса вуглоў можна выкарыстоўваць для вылічэння значэнняў сінуса, косінуса, тангенса іншых вуглоў.

Вугал 75° можна запісаць у выглядзе $75° = \quad° + 30°$, але $\sin 75° =$ $\sin(45\quad 30\ )\quad \sin 45\quad \sin 30$, паколькі $\sin 45\quad \sin 30\quad \frac{\sqrt{2}\quad 1}{2} > 1$.

Выведзем формулу $\sin(\alpha + \beta)$ — сінуса сумы двух вуглоў.

Разгледзім выпадак, калі α і β — вострыя вуглы ў трохвугольніку ABC (рыс. 115).



Рыс. 115

Выразім плошчу трохвугольніка ABC двойчы:

$$S_{ABC} \quad \frac{1}{2}ab\sin \quad \frac{1}{2}ab\sin \qquad\qquad \frac{1}{2}ab\sin \qquad , \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad \cdot \quad \frac{1}{2} \quad \cdot \quad .$$

Трохвугольнік BCH — прамавугольны, тады $\quad \sin \quad$ і $\quad \cos \quad$. З прамавугольнага трохвугольніка ACH маем: $\quad \sin \quad$ і $\quad \cos \quad$. Тады

$$S_{ABC} \quad \frac{1}{2}a\sin \ \cdot b\cos \quad \frac{1}{2}b\sin \ \cdot a\cos \quad \frac{1}{2}ab(\sin \ \cdot \cos \quad \sin \ \cdot \cos \ ). \qquad (2)$$

Прыраўнуем правыя часткі роўнасцей (1) і (2):

$$\frac{1}{2}ab\sin \qquad = \frac{1}{2}ab \ \sin \ \cdot \cos \quad \sin \ \cdot \cos \ .$$

Падзелім абедзве часткі роўнасці на $\frac{1}{2}ab$ і атрымаем формулу сінуса сумы двух вуглоў:

$$\sin \qquad \sin \ \cos \quad \cos \ \sin \ .$$

Калі вуглы α і β не з'яўляюцца вострымі, то можна карыстацца ўласцівасцю перыядычнасці сінуса і формуламі прывядзення.

Напрыклад, калі α і β з'яўляюцца вугламі другой чвэрці, то $\pi - \alpha$ і $\pi - \beta$ — вострыя вуглы.

Прыменім да іх выведзеную для вострых вуглоў формулу сінуса сумы:

$$\sin \qquad\qquad \sin \qquad \cdot \cos \qquad \sin \qquad \cdot \cos \qquad . \qquad (3)$$

Выкарыстаем формулы прывядзення ў левай частцы роўнасці (3) і атрымаем:

$$\sin \qquad\qquad \sin\ 2 \qquad\qquad \sin \qquad .$$

Прыменім формулы прывядзення да правай часткі роўнасці (3):

$$\sin(\quad) \cdot \cos(\quad) \quad \sin(\quad) \cdot \cos(\quad)$$

$$\sin \ \cdot \ \cos \quad \sin \ \cdot \ \cos \qquad \sin \ \cos \quad \sin \ \cos \ .$$

Такім чынам,

sin sin cos sin cos або sin( ) sin cos cos sin — формула **сінуса сумы двух вуглоў.**

Астатнія выпадкі прыналежнасці вуглоў розным чвэрцям разглядаюцца аналагічна папярэдняму.

Выкарыстаем атрыманую формулу і вылічым $\sin 75°$.

$\sin 75 \quad \sin\ 45 \quad 30$

$\sin 45\ \cos 30 \quad \cos 45\ \sin 30$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{6}\quad\sqrt{2}}{4}.$

Сінус сумы

sin sin cos cos sin

Выведзем формулу сінуса рознасці двух вуглоў.

Для гэтага $\sin(\alpha - \beta)$ запішам у выглядзе $\sin(\alpha + (-\beta))$ і прыменім формулу сінуса сумы двух вуглоў:

sin sin cos cos sin sin cos cos sin .

Атрымалі формулу **сінуса рознасці двух вуглоў:**

sin sin cos cos sin .

Вылічым, напрыклад, $\sin 15°$.

$\sin 15 \quad \sin\ 45 \quad 30$

$\sin 45\ \cos 30 \quad \cos 45\ \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

Сінус рознасці

sin sin cos cos sin

Для вываду формулы косінуса сумы двух вуглоў выкарыстаем формулы прывядзення і атрымаем: cos sin $\frac{}{2}$ sin $\frac{}{2}$.

Тады па формуле сінуса рознасці двух вуглоў маем:

sin $\frac{}{2}$ sin $\frac{}{2}$ cos cos $\frac{}{2}$ sin cos cos sin sin .

Атрымалі формулу **косінуса сумы двух вуглоў:**

cos cos cos sin sin .

Прыменім атрыманую формулу і вылічым, напрыклад, $\cos 105°$.

$\cos 105 \quad \cos\ 60 \quad 45$

$\cos 60\ \cos 45 \quad \sin 60\ \sin 45$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$

Косінус сумы

cos cos cos sin sin

Запісаўшы рознасць $\alpha - \beta$ у выглядзе сумы $\alpha + (-\beta)$, можна атрымаць формулу **косінуса рознасці двух вуглоў:**

$$\cos \qquad \cos \quad \cos \quad \sin \quad \sin \; .$$

Знойдзем, напрыклад, $\cos 15°$.

$$\cos 15 \quad \cos\ 45 \quad 30$$

$$\cos 45 \ \cos 30 \quad \sin 45 \ \sin 30$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{6} \quad \sqrt{2}}{4}.$$

Косінус рознасці

$$\cos \qquad \cos \quad \cos \quad \sin \quad \sin$$

Прыклад 1. Вылічыце:

а) $\sin\frac{5}{12}\cos\frac{}{12} \quad \cos\frac{5}{12}\sin\frac{}{12}$; б) $\sin\frac{5}{18}\cos\frac{}{36} \quad \cos\frac{5}{18}\sin\frac{}{36}$;

в) $\cos\frac{7}{9}\cos\frac{2}{9} \quad \sin\frac{7}{9}\sin\frac{2}{9}$; г) $\cos\frac{}{30}\cos\frac{}{5} \quad \sin\frac{}{30}\sin\frac{}{5}$.

Рашэнне. Выкарыстаем атрыманыя формулы «справа налева»:

а) $\sin\frac{5}{12}\cos\frac{}{12} \quad \cos\frac{5}{12}\sin\frac{}{12} \quad \sin\ \frac{5}{12} \quad \frac{}{12} \quad \sin\frac{6}{12} \quad \sin\frac{}{2} \quad 1;$

б) $\sin\frac{5}{18}\cos\frac{}{36} \quad \cos\frac{5}{18}\sin\frac{}{36} \quad \sin\ \frac{5}{18} \quad \frac{}{36} \quad \sin\frac{9}{36} \quad \sin\frac{}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\cos\frac{7}{9}\cos\frac{2}{9} \quad \sin\frac{7}{9}\sin\frac{2}{9} \quad \cos\ \frac{7}{9} \quad \frac{2}{9} \quad \cos \qquad 1;$

г) $\cos\frac{}{30}\cos\frac{}{5} \quad \sin\frac{}{30}\sin\frac{}{5} \quad \cos\ \frac{}{30} \quad \frac{}{5} \quad \cos\ \frac{5}{30} \quad \cos\ \ \frac{}{6} \quad \cos\frac{}{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Выведзем формулы тангенса сумы і тангенса рознасці двух вуглоў.

$$\mathrm{tg} \qquad \frac{\sin}{\cos} \quad \frac{\sin \ \cos \quad \cos \ \sin}{\cos \ \cos \quad \sin \ \sin}.$$

Падзелім лічнік і назоўнік дробу на $\cos\alpha \qquad \beta$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$, тады:

$$\frac{\sin \ \cos \quad \cos \ \sin}{\cos \ \cos \quad \sin \ \sin} \quad \frac{\frac{\sin \ \cos}{\cos \ \cos} \quad \frac{\cos \ \sin}{\cos \ \cos}}{\frac{\cos \ \cos}{\cos \ \cos} \quad \frac{\sin \ \sin}{\cos \ \cos}} \quad \frac{\mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}.$$

Такім чынам, атрымалі формулу **тангенса сумы двух вуглоў:**

$$\mathrm{tg} \qquad \frac{\mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}.$$

Выкарыстаем формулу тангенса сумы і вылічым, напрыклад, tg 105°.

Тангенс сумы

$$\mathrm{tg} \qquad \frac{\mathrm{tg} \qquad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}$$

$$\mathrm{tg}105 \qquad \mathrm{tg}\ 60 \qquad 45 \qquad \frac{\mathrm{tg}\,60 \qquad \mathrm{tg}\,45}{1 \quad \mathrm{tg}\,60\ \ \mathrm{tg}\,45}$$

$$\frac{\sqrt{3} \quad 1}{1 \quad \sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{3} \quad 1^{\ 2}}{1 \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{3} \quad 1} \qquad \frac{4 \quad 2\sqrt{3}}{2} \qquad 2 \quad \sqrt{3}.$$

Запісаўшы рознасць α − β у выглядзе сумы α + (−β), можна атрымаць формулу **тангенса рознасці двух вуглоў:**

$$\mathrm{tg} \qquad \frac{\mathrm{tg} \qquad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}.$$

Знойдзем, напрыклад, tg 15°.

$$\mathrm{tg}15 \qquad \mathrm{tg}\ 60 \qquad 45 \qquad \frac{\mathrm{tg}\,60 \qquad \mathrm{tg}\,45}{1 \quad \mathrm{tg}\,60\ \ \mathrm{tg}\,45} \qquad \frac{\sqrt{3} \quad 1}{1 \quad \sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{3} \quad 1^{\ 2}}{\sqrt{3} \quad 1 \quad \sqrt{3} \quad 1} \qquad 2 \quad \sqrt{3}.$$

Прыклад 2. Вылічыце:

Тангенс рознасці

$$\mathrm{tg} \qquad \frac{\mathrm{tg} \qquad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}$$

а) $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{2}{15} \quad \mathrm{tg}\dfrac{}{5}}{1 \quad \mathrm{tg}\dfrac{2}{15}\mathrm{tg}\dfrac{}{5}}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{7}{16} \quad \mathrm{tg}\dfrac{3}{16}}{1 \quad \mathrm{tg}\dfrac{7}{16}\mathrm{tg}\dfrac{3}{16}}$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулы тангенса сумы і тангенса рознасці «справа налева»:

а) $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{2}{15} \quad \mathrm{tg}\dfrac{}{5}}{1 \quad \mathrm{tg}\dfrac{2}{15}\mathrm{tg}\dfrac{}{5}} \qquad \mathrm{tg}\ \dfrac{2}{15} \quad \dfrac{}{5} \qquad \mathrm{tg}\dfrac{5}{15} \qquad \mathrm{tg}\dfrac{}{3} \qquad \sqrt{3};$

б) $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{7}{16} \quad \mathrm{tg}\dfrac{3}{16}}{1 \quad \mathrm{tg}\dfrac{7}{16}\mathrm{tg}\dfrac{3}{16}} \qquad \mathrm{tg}\ \dfrac{7}{16} \quad \dfrac{3}{16} \qquad \mathrm{tg}\dfrac{4}{16} \qquad \mathrm{tg}\dfrac{}{4} \qquad 1.$

Атрыманыя формулы сінуса сумы, сінуса рознасці, косінуса сумы, косінуса рознасці, тангенса сумы, тангенса рознасці двух вуглоў называюць **формуламі складання.**

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. З дапамогай формул складання пераўтварыце выраз:

а) sin $\dfrac{}{6}$; б) tg 45 .

Рашэнне. а) Па формуле сінуса рознасці атрымаем:

$$\sin \quad \frac{}{6} \quad \sin \quad \cos\frac{}{6} \quad \cos \quad \sin\frac{}{6}$$

$$\sin \quad \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos \quad \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \quad \frac{1}{2}\cos \quad .$$

б) Прыменім формулу тангенса сумы:

$$\mathrm{tg}\ 45 \qquad \frac{\mathrm{tg}\,45 \quad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}\,45\ \mathrm{tg}} \quad \frac{1 \quad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}}.$$

2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 56\ \cos 34 \quad \cos 56\ \sin 34$; б) $\cos 28\ \cos 88 \quad \sin 88\ \sin 208$;

в) ________

Рашэнне. а) Па формуле сінуса сумы атрымаем:

$$\sin 56\ \cos 34 \quad \cos 56\ \sin 34 \quad \sin\ 56 \quad 34 \quad \sin 90 \quad 1.$$

б) Па формулах прывядзення атрымаем, што

$$\sin 208 \quad \sin\ 180 \quad 28 \quad \sin 28\ .$$

Тады $\cos 28\ \cos 88 \quad \sin 88\ \sin 208$

$$\cos 28\ \cos 88 \quad \sin 88 \quad \sin 28 \quad \cos 28\ \cos 88 \quad \sin 88\ \sin 28\ .$$

Выкарыстаем формулу косінуса рознасці і атрымаем:

$$\cos 28\ \cos 88 \quad \sin 88\ \sin 28 \quad \cos\ 28 \quad 88 \quad \cos \quad 60 \quad \cos 60 \quad \frac{1}{2}.$$

в) Па формулах прывядзення

Тады ________ ________

Па формуле тангенса рознасці:

$$\frac{\mathrm{tg}\,20 \quad \mathrm{tg}\,65}{1 \quad \mathrm{tg}\,20\ \mathrm{tg}\,65} \quad \mathrm{tg}\ 20 \quad 65 \quad \mathrm{tg} \quad 45 \quad \mathrm{tg}\,45 \quad 1.$$

3. Вылічыце:

а) $\sin\frac{7\pi}{12}$; б) $\mathrm{tg}\,\frac{23\pi}{12}$.

Рашэнне. а) $\sin\frac{7}{12} \quad \sin \quad \frac{}{3} \quad \frac{}{4} \quad \sin\frac{}{3}\cos\frac{}{4} \quad \cos\frac{}{3}\sin\frac{}{4}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{6} \quad \sqrt{2}}{4}.$$

б) Па формулах прывядзення: $\mathrm{tg}\frac{23}{12} \quad \mathrm{tg}\ 2 \quad \frac{}{12} \quad \mathrm{tg}\frac{}{12}$.

Па формуле тангенса рознасці атрымаем:

$$\mathrm{tg}\frac{}{12} \quad \mathrm{tg}\ \frac{}{3} \quad \frac{}{4} \quad \frac{\mathrm{tg}\frac{}{3} \quad \mathrm{tg}\frac{}{4}}{1 \quad \mathrm{tg}\frac{}{3}\mathrm{tg}\frac{}{4}} \quad \frac{\sqrt{3} \quad 1}{1 \quad \sqrt{3}} \quad \frac{\sqrt{3} \quad 1^{\ 2}}{1 \quad \sqrt{3}\ \sqrt{3} \quad 1}$$

$$= -\frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}-2.$$

Такім чынам, $\mathrm{tg}\frac{23}{12} \quad \sqrt{3} \quad 2.$

4. Спрасціце выраз:

а) $\sin \quad \sin \quad \cos \quad ;$ б) $\cos \quad \sqrt{2}\cos\frac{}{4} \quad .$

Рашэнне. а) Выкарыстаем няцотнасць сінуса і формулу косінуса рознасці:

$$\sin \quad \sin \quad \cos \quad \sin \ \sin \quad \cos \ \cos \quad \sin \ \sin$$

$$\sin \ \sin \quad \cos \ \cos \quad \sin \ \sin \quad \cos \ \cos \ .$$

б) Прыменім формулу косінуса рознасці і атрымаем:

$$\cos \quad \sqrt{2}\cos\frac{}{4} \quad \cos \quad \sqrt{2} \ \cos\frac{}{4}\cos \quad \sin\frac{}{4}\sin$$

$$= \cos \quad \sqrt{2} \ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin \quad \cos \quad \cos \quad \sin \quad = - \quad \alpha.$$

5. Рашыце ўраўненне $\cos 5x \sin 8x = \cos 8x \sin 5x$.

Рашэнне. Запішам ураўненне ў выглядзе $\sin 8x \cos 5x \quad \cos 8x \sin 5x \quad 0$ і па формуле сінуса рознасці атрымаем: $\sin(8x-5x) = 0; \quad x = 0;$

$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ x \quad \frac{n}{3},\ n$

Адказ: $\frac{n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

6. Вылічыце $\cos\frac{}{4} \quad$, калі $\sin \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{}{2}; \quad .$

Рашэнне. Прыменім формулу косінуса рознасці:

$$\cos\frac{}{4} \quad \cos\frac{}{4}\cos \quad \sin\frac{}{4}\sin \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \ \cos \quad \sin \quad .$$

З асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці выразім $\cos\ \alpha \quad 1 \quad \sin^2$ і знойдзем $\cos\alpha$. Паколькі $\sin \quad \frac{4}{5}$, то $\cos\ \alpha \quad 1 \quad \frac{4}{5}^2 \quad \frac{9}{25}$. Значыць, $\cos \quad \frac{3}{5}$ або $\cos \quad \frac{3}{5}$. Паколькі $\quad \frac{}{2}; \quad$, г. зн. α — вугал другой чвэрці, то $\cos \quad \frac{3}{5}$. Тады $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \quad \sin \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{\sqrt{2}}{10}$.

7. Дакажыце тоеснасць $\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}$

Рашэнне. Выкарыстаем формулы складання і атрымаем:

$$\frac{\sqrt{3}\sin \quad 2\cos\ 60}{2\sin\ 60 \quad \sqrt{3}\cos} = \frac{\sqrt{3}\sin \quad 2\ \cos 60\ \cos \quad \sin 60\ \sin}{2\ \sin 60\ \cos \quad \cos 60\ \sin \quad \sqrt{3}\cos} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin \quad 2\ \frac{1}{2}\cos \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin}{2\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \quad \frac{1}{2}\sin \quad \sqrt{3}\cos} = \frac{\sqrt{3}\sin \quad \cos \quad \sqrt{3}\sin}{\sqrt{3}\cos \quad \sin \quad \sqrt{3}\cos} = \frac{\quad}{\quad}$$

8. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{\cos 310\ \cos 50 \quad \sin 310\ \sin 50}{\sin 390\ \cos 20 \quad \cos 390\ \sin 20}$;

б) $\frac{\cos 67 \cdot \cos 7 \quad \cos 83\ \cos 23}{\cos 128\ \sin 68 \quad \cos 38\ \sin 22}$.

Рашэнне. а) $\frac{\cos 310\ \cos 50 \quad \sin 310\ \sin 50}{\sin 390\ \cos 20 \quad \cos 390\ \sin 20} \quad \frac{\cos\ 310 \quad 50}{\sin\ 390 \quad 20} \quad \frac{\cos 260}{\sin 370}$

$\frac{\cos\ 270 \quad 10}{\sin\ 360 \quad 10} \quad \frac{\sin 10}{\sin 10} \quad 1;$

б) $\frac{\cos 67\ \cos 7 \quad \cos 83\ \cos 23}{\cos 128\ \sin 68 \quad \cos 38\ \sin 22} \quad \frac{\cos\ 90 \quad 23\ \cos 7 \quad \cos\ 90 \quad 7\ \cos 23}{\cos\ 90 \quad 38\ \sin\ 90 \quad 22 \quad \cos 38\ \sin 22} =$

$= \frac{\sin 23\ \cos 7 \quad \sin 7\ \cos 23}{\sin 38\ \cos 22 \quad \cos 38\ \sin 22} = \frac{\sin\ 23 \quad 7}{\sin\ 22 \quad 38} = \frac{\sin 16}{\sin \quad 16} \quad \frac{\sin 16}{\sin 16} \quad 1.$

9. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі

$$f\ x \quad \sin 7x \cos 5x \quad \cos 7x \sin 5x \quad 5.$$

Рашэнне. Прыменім формулу сінуса рознасці і запішам функцыю ў выглядзе $f \quad x \qquad \sin \; 7x \quad 5x \qquad 5$, або $f \quad x \qquad \sin 2x \quad 5$.

Паколькі $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, то $-1 + 5 \leqslant \sin 2x + 5 \leqslant 1 + 5$. Такім чынам, маем: $4 \leqslant \sin 2x + 5 \leqslant 6$, г. зн. $E \; f \qquad 4;\; 6$.

Выберыце роўнасць, правільную для любых вуглоў α і β:

а) $\sin(\alpha - \beta) = \quad \alpha - \quad \beta$;
б) $\sin(\alpha - \beta) = \quad \alpha - \quad \beta$;
в) $\sin(\alpha - \beta) = \quad \alpha \quad \beta - \quad \alpha \quad \beta$;
г) $\sin(\alpha - \beta) = \quad \alpha \quad \beta - \quad \alpha \quad \beta$.

1.410. З дапамогай формул складання пераўтварыце выраз:

а) $\sin \; \frac{}{3} \qquad$; б) $\cos(30° + \alpha)$; в) $\operatorname{tg} \; \frac{}{4} \qquad$.

1.411. Вылічыце, выкарыстаўшы формулы складання:

а) $\sin 46° \qquad ° + \qquad ° \qquad °$; б) $\cos 17° \qquad ° - \sin 17° \qquad °$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 26 \quad \operatorname{tg} 19}{1 \quad \operatorname{tg} 19 \; \operatorname{tg} 26}$.

1.412. Спрасціце выраз:

а) $\sin(\alpha - \beta) - \cos(-\alpha)\sin(-\beta)$; б) $\cos \qquad \sin \qquad \cos \; \frac{}{2} \qquad$.

1.413. Вылічыце значэнне выразу, прывёўшы яго да сінуса (косінуса) сумы (рознасці):

а) $\sin 97° \; \sin 37° + \cos 37° \; \cos 97°$; б) $\sin 53° \; \cos 7 - \qquad ° \; \sin(-7°)$;
в) $\sin(-75°) \; \cos 15° + \cos 75° \qquad °$.

1.414. Вылічыце:

а) $\sin 75°$; б) $\cos 105°$; в) $\operatorname{tg} 15°$.

1.415. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin x \qquad x = \qquad x \qquad x$; б) $\sin x \cos \frac{5x}{2} = \cos x \sin \frac{5x}{2}$;

в) $\sin 2x \cos 3x \quad \cos 2x \sin 3x \quad \frac{1}{2}$; г) $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1.416. Вылічыце $\sin(60° + \alpha)$, выкарыстаўшы формулу сінуса сумы, калі $\cos \quad \frac{5}{13}$ і $630° < \alpha < 720°$.

1.417. Вылічыце, пераўтварыўшы выраз з дапамогай формул складання:

а) $\cos\frac{}{14}\cos\frac{5}{28}\quad \sin\frac{}{14}\sin\frac{5}{28}$; б) $\sin\frac{14}{9}\cos\frac{2}{9}\quad \cos\frac{14}{9}\sin\quad\frac{2}{9}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{}{18}\quad \operatorname{tg}\frac{5}{18}}{\operatorname{tg}\frac{}{18}\operatorname{tg}\frac{5}{18}\quad 1}$.

1.418. Спрасціце выраз, выкарыстаўшы формулы складання і значэнні трыганаметрычных функцый:

а) $\frac{1}{2}\cos\quad \sin\ \frac{}{6}$; б) $2\cos\ 60\qquad \sqrt{3}\sin\quad \cos$.

1.419. Спрасціце выраз $\cos(120° + \alpha) + \cos(\alpha - 60°)$.

1.420. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі

$f\ x\quad \cos x\cos 4x\quad \sin x\sin 4x\quad 5.$

1.421. Рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\dfrac{\sin 40\ \sin 5\qquad \cos 40\ \cos 5}{\sin 20\ \cos 40\qquad \sin 40\ \cos 20}$; б) $\dfrac{\cos 120\ \cos 50\qquad \sin 120\ \sin 50}{\cos 25\ \cos 45\qquad \sin 25\ \sin 45}$?

1.422. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos(\alpha + \beta)$, калі $\cos\qquad \frac{3}{5}$, $\sin\qquad -\frac{5}{13}$, прычым $\frac{}{2} < \quad < \quad ,\quad < \quad < \frac{3}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha$, калі вядома, што $\operatorname{tg}\ \frac{}{4}\qquad 2.$

1.423. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin 5x\sin\ \frac{}{2}\quad 4x\quad \cos 5x\sin 4x\quad 1$;

б) $\cos\ 2x\quad \frac{}{4}\ \cos x\quad \sin\ 2x\quad \frac{}{4}\ \sin x\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin 6x\cos x\quad \sin\ \frac{}{2}\quad 6x\ \sin x\quad 1$;

г) $\cos\frac{7x}{9}\cos\frac{10x}{9}\quad \cos\ \frac{3}{2}\quad \frac{7x}{9}\ \sin\frac{10x}{9}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.424. Дакажыце тоеснасць:

а) $\sin\quad \cos 4\quad \cos\quad \sin 4\quad \cos\ \frac{3}{2}\quad 3$;

б) $\sin\ \frac{}{6}\quad \cos\quad \cos\ \frac{}{6}\quad \sin\quad \frac{1}{2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}\sin\quad 45\quad \cos}{\sqrt{2}\cos\quad 45\quad \sin}\quad \operatorname{tg}$.

1.425. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \quad x \quad x + \quad x \quad x + 1$;

б) $y \quad \sin \frac{}{2} \quad 2x \ \cos x \quad \sin 2x \sin \quad x \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.426. Пабудуйце графік функцыі

$$y \quad \cos 2x \cos \ x \quad \frac{}{3} \quad \sin \ x \quad \frac{}{3} \sin 2x.$$

1.427. Вылічыце:

а) $\cos 57 \ 30 \cos 27 \ 30 \quad \sin 57 \ 30 \sin 27 \ 30$;

б) $\sin 200° \ \sin 310° + \cos 340° \ \cos 50°$;

в) $\overline{}$

1.428. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\sin \qquad \sin}{\cos \ \ \cos}$; б) $\dfrac{\cos \ \ \cos \qquad \cos}{\cos \qquad \sin \ \ \sin}$.

1.429. Вылічыце значэнне трыганаметрычнай функцыі, выкарыстаўшы формулы прывядзення і формулы складання:

а) $\sin 195°$; б) $\operatorname{tg} 285°$.

1.430. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\cos\frac{7}{24} \cos\frac{}{8} \quad \sin\frac{}{8} \sin\frac{7}{24}}{\sin\frac{}{5} \cos\frac{3}{10} \quad \cos\frac{}{5} \sin\frac{3}{10}}$.

1.431. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\sqrt{2}\cos \qquad 2\cos \ \frac{}{4}}{2\sin \ \frac{}{6} \qquad \sqrt{3}\sin} \qquad \sqrt{2}\operatorname{tg} \ $.

1.432. Вылічыце $\dfrac{\sin 56 \ \ \sin 124 \qquad \sin 34 \ \cos 236}{\cos 28 \ \ \cos 88 \qquad \cos 178 \ \ \sin 208}$.

1.433. Спрасціце выраз:

а) $\cos \frac{2}{3} \qquad \cos \qquad \frac{}{3}$; б) $\operatorname{tg} \qquad \frac{}{4} \quad \operatorname{tg} \qquad \frac{}{4}$.

1.434. Вядома, што α і β — вуглы другой чвэрці і $\cos \qquad \frac{12}{13}$, $\cos \qquad \frac{4}{5}$. Знайдзіце $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

1.435*. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sin 3x \qquad x = \qquad x \qquad x$, што належаць прамежку $[-\pi; \pi]$.

1.436*. Знайдзіце $\operatorname{tg} \ \frac{}{4} \qquad$, калі вядома, што $\sin \qquad \frac{2}{\sqrt{5}}$ і $\frac{}{2} < \quad < \quad$.

1.437. Вылічыце, выкарыстаўшы формулы складання:

а) $\sin 61^\circ \quad ^\circ - \quad ^\circ \quad ^\circ$; б) $\cos 29^\circ \cos 74^\circ + \quad ^\circ \sin 74^\circ$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 1 \quad \operatorname{tg} 46}{1 \quad \operatorname{tg} 1 \ \operatorname{tg} 46}$.

1.438. Спрасціце выраз:

а) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\sin(-\beta)$; б) $\sin \dfrac{}{2} \quad \sin \dfrac{}{2} \quad \cos$.

1.439. Вылічыце, запісаўшы вугал у выглядзе сумы або рознасці:

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 15^\circ$; в) $\operatorname{tg} 75^\circ$.

1.440. Складзіце план і рашыце ўраўненне:

а) $\sin x \cos \dfrac{x}{2} = -\sin \dfrac{x}{2} \cos x$; б) $\sin 5x \cos x \quad \cos 5x \sin x \quad \dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg} 2x} = 1$.

1.441. Вылічыце, выкарыстаўшы формулы складання:

а) $\cos \quad \dfrac{}{6}$, калі $\cos\alpha = 0{,}6$ і $\dfrac{3}{2} < \quad < 2$;

б) $\sin \dfrac{}{3}$, калі $\sin \quad \dfrac{8}{17}$ і $\dfrac{}{2} < \quad <$.

1.442. Рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\sin \dfrac{}{5} \cos \dfrac{3}{10} \quad \sin \dfrac{3}{10} \cos \dfrac{}{5}$; б) $\sin \dfrac{8}{9} \cos \dfrac{2}{9} \quad \cos \dfrac{8}{9} \sin \quad \dfrac{2}{9}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{}{14} \quad \operatorname{tg} \dfrac{9}{28}}{1 \quad \operatorname{tg} \dfrac{}{14} \operatorname{tg} \dfrac{9}{28}}$?

1.443. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{1}{2} \sin \quad \cos \dfrac{}{6}$; б) $\sin \quad \cos \quad \sqrt{2} \sin \ 45$.

1.444. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі

$f \ x \quad \sin 7x \cos 2x \quad \cos 7x \sin 2x \quad 8$.

1.445. Вылічыце:

а) $\dfrac{\sin 17 \ \cos 13 \quad \sin 13 \ \cos 17}{\cos 20 \ \cos 25 \quad \sin 20 \ \sin 25}$; б) $\dfrac{\sin 5 \ \cos 15 \quad \cos 5 \ \cos 15}{\cos 80 \ \cos 150 \quad \sin 80 \ \sin 150}$.

1.446. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin(\alpha - \beta)$, калі $\cos \quad \frac{4}{5}$, $\sin \quad -\frac{5}{13}$, прычым α і β — вуглы адной чвэрці;

б) $\operatorname{tg}\beta$, калі вядома, што $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.447. Рашыце ўраўненне, прывёўшы яго з дапамогай формул складання да найпрасцейшага:

а) $\cos 4x \quad x + \quad x \quad x = 1$;

б) $\sin\ 2x \quad \overline{3} \cos x \quad \cos\ 2x \quad \overline{3} \sin x \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.448. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення

$\cos 5x \sin \overline{2} \quad 2x \quad \sin 5x \sin 2x \quad \frac{1}{2}$.

1.449. Дакажыце тоеснасць:

а) $\sin 6 \quad \sin \quad \cos 6 \quad \cos \quad \sin \frac{3}{2} \quad 7 \quad$;

б) $\cos \overline{3} \quad \cos \quad \sin \overline{3} \quad \sin \quad \frac{1}{2}$;

в) $\dfrac{2\sin \quad 30 \quad \cos}{2\cos \quad 30 \quad \sqrt{3}\cos} \quad \sqrt{3}$.

1.450. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \quad x \quad x - \quad x \quad x + 1$;

б) $y \quad \cos \frac{3}{2} \quad 4x \ \cos 3x \quad \cos 4x \sin 3x$.

1.451. Пабудуйце графік функцыі

$y \quad \sin 3x \cos\ 2x \quad \overline{6} \quad \sin\ 2x \quad \overline{6} \cos 3x$.

1.452. Вылічыце:

а) $\cos 19\ 30 \cos 25\ 30 \quad \sin 19\ 30 \sin 25\ 30$;

б) $\sin 113^\circ \quad ^\circ + \cos 247^\circ \cos 307^\circ$;

в) $\overline{\qquad\qquad}$

1.453. Спрасціце выраз $\dfrac{2\cos \quad \sin \quad \sin}{2\cos \quad \cos \quad \cos}$.

1.454. Вылічыце $\cos 255^\circ$.

1.455. Вылічыце $\dfrac{\sin\frac{7}{24}\cos\overline{24} \quad \cos\frac{7}{24}\sin\overline{24}}{\cos\overline{7}\cos\frac{4}{21} \quad \sin\overline{7}\sin\frac{4}{21}}$.

1.456. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\cos \quad \sqrt{2}\cos \overline{4}}{2\sin \quad \overline{6} \quad \sqrt{3}\sin} \quad \operatorname{tg}$.

1.457. Вылічыце: $\dfrac{\sin 22 \ \cos 8 \qquad \cos 158 \ \cos 98}{\sin 23 \ \cos 7 \qquad \cos 157 \ \cos 97}$.

1.458. Спрасціце выраз $\sin \qquad \dfrac{2}{3} \qquad \sin \ \dfrac{}{3} \qquad$.

1.459*. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sin 5x \qquad x = \qquad x \qquad x$, што належаць прамежку $(0; \pi)$.

1.460*. Знайдзіце $\mathrm{tg} \qquad \dfrac{}{4}$, калі вядома, што $\cos \qquad \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ і $0 < \quad < \dfrac{}{2}$.

1.461. Запішыце трохчлен $49a \ - \quad ab + b$ у выглядзе квадрата двухчлена.

1.462. Рашыце ўраўненне $\dfrac{3x-2}{5} = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{3-7x}{10}$.

1.463. Спрасціце выраз $\dfrac{a^{3} \quad ^{2} \quad a \ ^{7} \quad ^{1}}{a \ ^{2} \quad ^{2} \quad a \ ^{1} \ ^{4}}$.

1.464. Знайдзіце значэнне выразу $\sin\alpha - \qquad \alpha$ пры $\qquad \dfrac{}{2}$.

1.465. Метадам інтэрвалаў рашыце няроўнасць $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+3)^2} \geqslant 0$.

1.466. Знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі $5;\ 1;\ \dfrac{1}{5};\ \ldots$.

1.467. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = x \ - \quad x + 25$ і $y = x - 5$.

1.468. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $\dfrac{2}{3}\sqrt{18}$; б) $\dfrac{1}{b}\sqrt{b}$; в) $x\sqrt{a^2}$, калі $x < 0$;

г) $(7-a)\sqrt{\dfrac{1}{a-7}}$; д) $x\sqrt{-x^3}$.

§ 11. Формулы двайнога аргумента

1.469. Параўнайце значэнні выразаў $\sin 30°$ і $\sin 60°$.

1.470. Ці праўда, што $\cos 120° > \cos 60°$?

1.471. Знайдзіце значэнне выразу $\mathrm{tg}\dfrac{}{3} \quad \mathrm{tg}\dfrac{2}{3}$.

Пераўтварэнні трыганаметрычных выразаў можна спрасціць, калі разгледзець прыватныя выпадкі агульных формул.

Разгледзім формулу сінуса сумы $\sin(\alpha + \beta) = \quad \alpha \quad \beta + \quad \alpha \quad \beta$ для выпадку $\alpha = \beta$. Тады:

$$\sin 2 \quad \sin \qquad \sin \ \cos \quad \cos \ \sin \quad 2\sin \ \cos \ .$$

Атрымалі формулу **сінуса двайнога аргумента:** $\sin 2 \quad 2\sin \ \cos \ .$

Выведзем формулу косінуса двайнога аргумента. Выкарыстаем формулу косінуса сумы $\cos \qquad \cos \ \cos \quad \sin \ \sin$ для выпадку $\alpha = \beta$ і атрымаем:

$$\cos 2 \quad \cos \qquad \cos \ \cos \quad \sin \ \sin \quad \cos^2 \quad \sin^2 \ .$$

Формула **косінуса двайнога аргумента:** $\cos 2 \quad \cos^2 \quad \sin^2 \ .$

Для вываду формулы тангенса двайнога аргумента разгледзім формулу тангенса сумы $\mathrm{tg} \qquad \dfrac{\mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg} \ \mathrm{tg}}$ пры $\alpha = \beta$. У гэтым выпадку маем:

$$\mathrm{tg}\, 2 \quad \mathrm{tg} \qquad \frac{\mathrm{tg} \quad \mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg} \ \mathrm{tg}} \quad \frac{2\,\mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}^2}.$$

Атрымалі формулу **тангенса двайнога аргумента:** $\mathrm{tg}\, 2 \quad \dfrac{2\,\mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}^2}.$

Прыклад 1. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$; б) $\sin^2 \quad \cos 2 \ ;$ в) $\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\, 2 \ \cdot \ \mathrm{tg}^2 \quad 1 \ .$

Рашэнне. Прыменім формулы двайнога аргумента:

а) $\dfrac{\sin 2}{\sin} \quad \dfrac{2\sin \ \cos}{\sin} \quad 2\cos \ ;$

б) $\sin^2 \quad \cos 2 \quad \sin^2 \quad \cos^2 \quad \sin^2 \quad \cos^2 \ ;$

в) $\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\, 2 \ \cdot \ \mathrm{tg}^2 \quad 1 \quad \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\,\mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}^2} \cdot \ \mathrm{tg}^2 \quad 1$

$\dfrac{\mathrm{tg}}{\mathrm{tg}^2 \quad 1} \cdot \ \mathrm{tg}^2 \quad 1 \quad \mathrm{tg} \ .$

Формулы двайнога аргумента

$\sin 2 \quad 2\sin \ \cos$

$\cos 2 \quad \cos^2 \quad \sin^2$

$\mathrm{tg}\, 2 \quad \dfrac{2\,\mathrm{tg}}{1 \quad \mathrm{tg}^2}$

Прыклад 2. Вылічыце:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$; б) $\cos^2 \dfrac{}{8} \quad \sin^2 \dfrac{}{8}$; в) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\, 75}{1 \quad \mathrm{tg}^2\, 75}.$

Рашэнне. Прыменім формулы двайнога аргумента «справа налева»:

а) $2\sin 15 \ \cos 15 \quad \sin \ 2 \cdot 15 \quad \sin 30 \quad \dfrac{1}{2}$;

б) $\cos^2 \dfrac{}{8} \quad \sin^2 \dfrac{}{8} \quad \cos \ 2 \cdot \dfrac{}{8} \quad \cos \dfrac{}{4} \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\, 75}{1 \quad \mathrm{tg}^2\, 75} \quad \mathrm{tg} \ 2 \cdot 75 \quad \mathrm{tg}\, 150 \quad \mathrm{tg} \ 180 \quad 30 \quad \mathrm{tg}\, 30 \quad \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Прыклад 3. Знайдзіце значэнне выразу $\sin 120°$ двума спосабамі.

Рашэнне. Першы спосаб. Прыменім формулы прывядзення:

$$\sin 120 \qquad \sin(180 \qquad 60\ ) \qquad \sin 60 \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Другі спосаб. Прыменім формулу сінуса двайнога аргумента:

$$\sin 120 \qquad \sin\ 2 \cdot 60 \qquad 2\sin 60\ \cos 60 \quad = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Запішыце дадзены вугал у выглядзе $2t$:

а) $30°$; б) $45°$; в) β; г) 3β; д) π; е) $\frac{\pi}{16}$.

Рашэнне.

а) $30° = \quad \cdot \quad °$; б) $45° = \quad \cdot 22{,}5°$; в) $\quad 2 \cdot \frac{}{2}$;

г) $3 \quad 2 \cdot \frac{3}{2}$; д) $\quad 2 \cdot \frac{}{2}$; е) $\frac{}{16} \quad 2 \cdot \frac{}{32}$.

2. Пераўтварыце кожны з выразаў з дапамогай формул двайнога вугла:

а) $\sin 10\alpha$; б) $\sin 7\alpha$; в) $\cos 6\alpha$;

г) $\cos\frac{\alpha}{2}$; д) $\operatorname{tg} 3\alpha$; е) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

Рашэнне. Запішам вугал у кожным з выразаў у выглядзе $2t$ і прыменім формулу двайнога аргумента:

а) $\sin 10 \qquad \sin\ 2 \cdot 5 \qquad 2\sin 5\ \ \cos 5\ \ ;$

б) $\sin 7 \qquad \sin\ 2 \cdot \frac{7}{2} \qquad 2\sin\frac{7}{2}\cos\frac{7}{2};$

в) $\cos 6 \qquad \cos\ 2 \cdot 3 \qquad \cos^2 3 \qquad \sin^2 3\ \ ;$

г) $\cos\frac{}{2} \qquad \cos\ 2 \cdot \frac{}{4} \qquad \cos^2\frac{}{4} \qquad \sin^2\frac{}{4};$

д) $\operatorname{tg} 3 \qquad \operatorname{tg}\ 2 \cdot 1{,}5 \qquad \frac{2\operatorname{tg} 1{,}5}{1 \quad \operatorname{tg}^2 1{,}5};$

е) $\operatorname{tg}\frac{}{4} \qquad \operatorname{tg}\ 2 \cdot \frac{}{8} \qquad \frac{2\operatorname{tg}\frac{}{8}}{1 \quad \operatorname{tg}^2\frac{}{8}}.$

3. Спрацціце выраз:

а) $2\sin\ \ \cos\ \ \ \sin 2\ \ ;$ б) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha};$ в) $\cos 6\ \ \ \cos^2 3\ \ \ \sin^2 3\ \ ;$

г) $\cos 8\ \ \ 2\sin^2 4\ \ ;$ д) $\frac{\operatorname{tg} 5}{1\ \ \operatorname{tg}^2 5};$ е) $\frac{6\operatorname{tg}\frac{3}{4}}{1\ \ \operatorname{tg}^2\frac{3}{4}}.$

Рашэнне. Прыменім формулы двайнога аргумента і атрымаем:

а) $2\sin\ \ \cos\ \ \ \sin 2\ \ \ \sin 2\ \ \ \sin 2\ \ \ 0;$

б) ______ __________ ______

в) $\cos 6\ \ \ \cos^2 3\ \ \ \sin^2 3\ \ \ \cos 6\ \ \ \cos^2 3\ \ \ \sin^2 3$

$\cos 6\ \ \ \cos\ \ 2\cdot 3\ \ \ \cos 6\ \ \ \cos 6\ \ \ 0;$

г) $\cos 8\ \ \ 2\sin^2 4\ \ \ \cos^2 4\ \ \ \sin^2 4\ \ \ 2\sin^2 4\ \ \ \cos^2 4\ \ \ \sin^2 4\ \ \ 1;$

д) $\frac{\operatorname{tg} 5}{1\ \ \operatorname{tg}^2 5}\ \ \ \frac{1}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg} 5}{1\ \ \operatorname{tg}^2 5}\ \ \ \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}\ \ 2\cdot 5\ \ \ \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} 10\ \ ;$

е) $\frac{6\operatorname{tg}\frac{3}{4}}{1\ \ \operatorname{tg}^2\frac{3}{4}}\ \ \ 3\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{3}{4}}{1\ \ \operatorname{tg}^2\frac{3}{4}}\ \ \ 3\cdot\operatorname{tg}\ \ 2\cdot\frac{3}{4}$

$\cdot\ \ \ \ \_\_\_$

4. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 15^\circ\ \ \ \ \ \ \ ^\circ;$ б) $1\ \ \ 2\sin^2\frac{}{12};$

в) $10\sin 75^\circ\cos 75^\circ;$ г) $\frac{8\operatorname{tg}\frac{}{8}}{\operatorname{tg}^2\frac{}{8}\ \ \ 1}.$

Рашэнне. а) $\sin 15\ \ \cos 15\ \ \ \frac{1}{2}\cdot 2\sin 15\ \ \cos 15\ \ \ \frac{1}{2}\cdot\sin\ \ 2\cdot 15$

$\frac{1}{2}\cdot\sin 30\ \ \ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ \ \ \frac{1}{4};$

б) $1\ \ \ 2\sin^2\frac{}{12}\ \ \ \sin^2\frac{}{12}\ \ \ \cos^2\frac{}{12}\ \ \ 2\sin^2\frac{}{12}\ \ \ \cos^2\frac{}{12}\ \ \ \sin^2\frac{}{12}$

$\cos\ \ 2\cdot\frac{}{12}\ \ \ \cos\frac{}{6}\ \ \ \frac{\sqrt{3}}{2};$

в) $10\sin 75\ \cos 75 \qquad 5\cdot 2\sin 75\ \cos 75 \qquad 5\cdot \sin\ \ 2\cdot 75 \qquad 5\cdot \sin 150$

$5\cdot \sin\ 180 \quad 30 \qquad 5\sin 30 \qquad 5\cdot \frac{1}{2} \quad 2{,}5;$

г) $\dfrac{8\,\mathrm{tg}\frac{}{8}}{\mathrm{tg}^2\frac{}{8}\quad 1} \qquad 4\cdot \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{}{8}}{1\quad \mathrm{tg}^2\frac{}{8}} \qquad 4\cdot \dfrac{2\mathrm{tg}\frac{}{8}}{1\quad \mathrm{tg}^2\frac{}{8}} \qquad 4\cdot \mathrm{tg}\ \ 2\cdot \frac{}{8}$

$4\cdot \mathrm{tg}\frac{}{4} \qquad 4\cdot 1 \qquad 4.$

5. Вылічыце $\mathrm{tg}\,2\alpha$, калі $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

Рашэнне. Прыменім формулу тангенса двайнога аргумента і атрымаем: $\mathrm{tg}\,2 \qquad \dfrac{2\mathrm{tg}}{1\quad \mathrm{tg}^2} \qquad \dfrac{2\cdot 2}{1\quad 4} \qquad \dfrac{4}{3} \qquad 1\frac{1}{3}.$

6. Вылічыце:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{}{8} \quad \sin\frac{}{8}\ \ ^2;$ б) $1 \quad 8\sin^2\frac{17}{16}\cos^2\frac{15}{16}.$

Рашэнне.

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{}{8} \quad \sin\frac{}{8}\ \ ^2 \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos^2\frac{}{8} \quad 2\cos\frac{}{8}\sin\frac{}{8} \quad \sin^2\frac{}{8}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad 2\cos\frac{}{8}\sin\frac{}{8} \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad \sin\frac{}{4} \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad 1.$

б) Па формулах прывядзення $\sin^2\frac{17}{16} \quad \sin^2 \quad \frac{}{16} \quad \sin^2\frac{}{16}$ і $\cos^2\frac{15}{16} \quad \cos^2 \quad \frac{}{16} \quad \cos^2\frac{}{16}.$

Тады $1 \quad 8\sin^2\frac{}{16}\cos^2\frac{}{16} \quad 1 \quad 2\cdot \ 2\sin\frac{}{16}\cos\frac{}{16}\ \ ^2 \quad 1 \quad 2\cdot \ \sin\frac{}{8}\ \ ^2$

$1 \quad 2\cdot \sin^2\frac{}{8} \quad \sin^2\frac{}{8} \quad \cos^2\frac{}{8} \quad 2\sin^2\frac{}{8} \quad \cos^2\frac{}{8} \quad \sin^2\frac{}{8} \quad \cos\frac{}{4} \quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

7. Вылічыце $\mathrm{tg}\,2\alpha$, калі $\cos \quad \frac{3}{5}$ і $\frac{}{2} < \quad < \quad .$

Рашэнне. 1) $\sin^2 \quad \cos^2 \quad 1;\ \sin^2 \quad 1 \quad \cos^2 \quad .$

Паколькі $\cos \quad \frac{3}{5}$, то $\sin^2 \quad 1 \quad \frac{3}{5}\ ^2 \quad \frac{16}{25};\ \sin \quad \frac{4}{5}$ або

$\sin \quad \frac{4}{5}$. Паколькі $\frac{}{2} < \quad <$, то $\sin \quad \frac{4}{5}.$

2) $\mathrm{tg} \quad \dfrac{\sin}{\cos};\ \mathrm{tg} \quad \frac{4}{5} : \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{3}.$

3) $\mathrm{tg}\,2\quad \frac{2\mathrm{tg}}{1\quad \mathrm{tg}^2}$; $\mathrm{tg}\,2\quad \frac{2\cdot\ \frac{4}{3}}{1\quad \frac{4}{3}^{\ 2}}\quad \frac{\frac{8}{3}}{1\quad \frac{16}{9}}\quad \frac{8}{3}\cdot\ \frac{9}{7}\quad \frac{24}{7}\quad 3\frac{3}{7}$.

Адказ: $3\frac{3}{7}$.

8. Рашыце ўраўненне $\sin 2x \quad \sin x \quad 2\cos x \quad 1$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулу сінуса двайнога аргумента:

$\sin 2x \quad \sin x \quad 2\cos x \quad 1$

$2\sin x\cos x \quad \sin x \quad 2\cos x \quad 1 \quad 0$

$2\sin x\cos x \quad 2\cos x \quad \sin x \quad 1 \quad 0$

$2\cos x \ \sin x \quad 1 \quad \sin x \quad 1 \quad 0 \qquad 2\cos x \quad 1 \ \sin x \quad 1 \quad 0$

$2\cos x \quad 1 \quad 0, \qquad \cos x \quad \frac{1}{2}, \qquad x \quad \frac{}{3} \quad 2\ k,\ k \quad \boldsymbol{Z},$

$\sin x \quad 1 \quad 0 \qquad \sin x \quad 1 \qquad x \quad \frac{}{2} \quad 2\ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\frac{}{3} \quad 2\ k,\ k \quad \boldsymbol{Z};\ \frac{}{2} \quad 2\ n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

9. Рашыце ўраўненне $\cos^2 x \quad 7\sin^2 x \quad 3\sin 2x$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулу сінуса двайнога вугла і атрымаем $\cos^2 x \quad 7\sin^2 x \quad 6\sin x\cos x$, або $7\sin^2 x + 6\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Паколькі значэнні зменнай, пры якіх $\cos x = 0$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення, то падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos\ x$ і атрымаем $7\mathrm{tg}\ x + 6\mathrm{tg}\,x - \quad = 0$.
Няхай $t = \mathrm{tg}\,x$, тады ўраўненне прыме выгляд $7t \ + \ t - \ = 0$;
$D = \quad - \quad \cdot 7 \cdot (-1) = 64$;

$t \quad \frac{1}{7},$ адкуль $\mathrm{tg}x \quad \frac{1}{7}, \qquad x \quad \mathrm{arctg}\frac{1}{7} \quad k,\ k \quad \boldsymbol{Z},$

$t \quad 1, \qquad \mathrm{tg}x \quad 1; \qquad x \quad \frac{}{4} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Адказ: $\mathrm{arctg}\frac{1}{7} \quad k,\ k \quad \boldsymbol{Z};\ \frac{}{4} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

10*. Дакажыце тоеснасць $\cos\frac{}{7}\cos\frac{2}{7}\cos\frac{4}{7} \quad \frac{1}{8}$.

Рашэнне. Памножым і падзелім выраз $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ на $2\sin\frac{\pi}{7}$ і прыменім формулу сінуса двайнога аргумента:

$$\cos\frac{}{7}\cos\frac{2}{7}\cos\frac{4}{7} \quad \frac{2\sin\frac{}{7}\cos\frac{}{7}\quad\cos\frac{2}{7}\cos\frac{4}{7}}{2\sin\frac{}{7}} \quad \frac{2\sin\frac{2}{7}\cos\frac{2}{7}\cos\frac{4}{7}}{2\cdot 2\sin\frac{}{7}}$$

$$\frac{2\sin\frac{4}{7}\cos\frac{4}{7}}{2\cdot 2\cdot 2\sin\frac{}{7}} \quad \frac{\sin \qquad \frac{}{7}}{8\sin\frac{}{7}} \quad \frac{1}{8}.$$

Выберыце роўнасць, правільную для любога вугла β:
а) $\sin 2\beta = \quad \beta$; б) $\sin 2\beta = \quad \beta$; в) $\sin 2\beta = \quad \beta \quad \beta$; г) $\sin 2\beta = \quad \beta$.

1.472. З дапамогай формулы сінуса двайнога вугла спрасціце выраз:

а) $2\sin 3\alpha \quad \alpha$; б) $\sin\alpha \quad \alpha$; в) $2\sin\frac{}{4} \quad \cos\frac{}{4} \quad$;

г) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; д) $\frac{\sin 2 \quad 2\sin}{\cos \quad 1}$; е) $\frac{\sin 2}{\sin} \quad \sin\frac{}{2} \quad$.

1.473. З дапамогай формулы косінуса двайнога вугла спрасціце выраз:

а) $\cos^2\frac{}{2} \quad \sin^2\frac{}{2}$; б) $\sin \quad \alpha - \quad \alpha$;

в) $\cos^2 \qquad \cos\frac{}{2} \quad$; г) $\frac{\cos 2}{\sin \quad \cos}$;

д) $\frac{\cos 2 \quad 1}{2\cos}$; е) $\frac{\cos 2 \quad \sin^2}{2\sin^2 \quad \cos^2}$.

1.474. З дапамогай формулы тангенса двайнога вугла спрасціце выраз:

а) $\frac{2\operatorname{tg}7}{1 \quad \operatorname{tg}^2 7}$; б) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{}{4}}{1 \quad \operatorname{tg}^2\frac{}{4}}$;

в) $\operatorname{tg}2\alpha(\operatorname{tg} \quad \alpha - 1)$; г) $\operatorname{tg}4\alpha \operatorname{ctg}2\alpha$.

1.475. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы формулы двайных вуглоў:

а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; б) $6\sin 15° \quad °$; в) $\cos \quad ° - \quad °$;

г) $\sin^2\frac{}{8} \quad \cos^2\frac{}{8}$; д) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{}{12}}{\operatorname{tg}^2\frac{}{12} \quad 1}$; е) $\frac{2\operatorname{tg}165}{1 \quad \operatorname{tg}^2 165}$.

1.476. Знайдзіце:

а) $\sin 2\alpha$, калі $\sin\alpha = -0{,}6$ і $\quad < \quad < \frac{3}{2}$;

б) $\cos 2\alpha$, калі $\cos \qquad \frac{2}{9}$.

1.477. Выкарыстайце формулы двайных вуглоў і рашыце ўраўненне:

а) $4\sin x\cos x = -\sqrt{3}$; б) $\sin^2 x \quad \cos^2 x \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1{,}5$; г) $\cos^2 \frac{}{2} \quad x \quad \cos^2 \; x \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\sin 2x = \qquad x$; е) $\sqrt{2}\sin^2 x \quad 1 \quad \sqrt{2}\cos^2 x$.

1.478. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2\sin 67{,}5° \cos 67{,}5°$; б) $8\cos 165° \qquad °$; в) $\cos 15° \cos 75°$;

г) $\cos \; 210° - \qquad 210°$; д) $2\cos \qquad ° - 1$; е) $1 \quad 2\sin^2 \frac{}{8}$;

ж) $\frac{6\,\mathrm{tg}\,15}{1 \quad \mathrm{tg}^2 15}$; з) $\frac{\mathrm{tg}\,22\;30}{1 \quad \mathrm{tg}^2 22\;30}$; і) $\frac{1 \quad \mathrm{tg}^2 \frac{}{12}}{\mathrm{tg}\frac{}{12}}$.

1.479. Дакажыце тоеснасць:

а) $1 - (\sin\alpha - \qquad \alpha) = \qquad \alpha$; б) $2\sin \quad \alpha + \qquad \alpha = 1$;

в) $\frac{2\sin^2 \quad \mathrm{ctg}}{\cos^2 \qquad \sin^2} \qquad \mathrm{tg}\,2 \quad$.

1.480. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin^2 x \quad \frac{1}{2}\sin 2x \quad 0$; б) $\sin 2x = 2\sqrt{3}\sin^2 x$;

в) $2\sin x + \qquad x = \qquad x + 1$; г) $\cos 2x + \qquad x = \qquad x$;

д) $\cos 2x = \qquad x$; е) $1 + \qquad x = \qquad x$.

1.481. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\sin 8}{\sin 4} \quad 2\cos^2 2 \quad$; б) $\frac{\mathrm{tg}\,2}{\mathrm{tg}} \quad \mathrm{tg}\,2 \quad \mathrm{tg} \quad$;

в) $\cos \quad \alpha + \qquad \alpha \qquad \alpha$; г) $\cos \quad (5\pi - \alpha) + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \qquad \alpha$;

д) $\cos \qquad 2 \qquad \sin \qquad 2 \quad \mathrm{tg}\frac{}{2} \qquad$; е) $\frac{\cos^2 \; 2 \qquad \sin^2}{2\cos \qquad 2 \quad \cos\frac{}{2}}$.

1.482. Пабудуйце графік функцыі $y \quad 2\sin \; x \quad \frac{}{6} \cos \; x \quad \frac{}{6}$.

1.483. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $\sin^4 \frac{x}{2} \quad \cos^4 \frac{x}{2} \quad \frac{1}{2}$.

1.484. Спрасціце выраз:

а) $(\sin\alpha - \quad \alpha) - \quad + \quad \alpha$; б) $\sin\frac{}{4} \quad \cos\frac{}{4} \quad \sin\frac{}{4} \quad \cos\frac{}{4}$;

в) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$; г) $\frac{1 \quad \operatorname{ctg}2 \quad \operatorname{tg}}{\operatorname{tg} \quad \operatorname{ctg}}$.

1.485. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $(\sin 75° - \cos 75°)$; б) $\frac{\sin 15}{\sin 5} \quad \frac{\cos 15}{\cos 5}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{}{8} \quad \operatorname{ctg}\frac{}{8}$; г) $\sin 75° \quad °$.

1.486. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y = \quad x$ і $y = \quad x$; б) $y = \quad x$ і $y = \quad x$.

1.487. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{2\sin 2 \quad 3\cos 2}{4\sin 2 \quad 5\cos 2}$, калі вядома, што $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.488. Знайдзіце $\sin 2\alpha$, калі вядома, што $\sin \quad \cos \quad \frac{1}{2}$.

1.489. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos x \sin(-x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $\cos 2x = \quad x - 1{,}5$;

в) $\cos \ x + \quad x = \quad x$; г) $(\sin x + \quad x) = \quad x$.

1.490. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\cos 6}{\cos 2} \quad \frac{\sin 6}{\sin 2} \quad 2$; б) $\cos \ \alpha \quad \alpha - \quad \alpha \quad \alpha$;

в) $\sin^2 \quad \cos^2 \quad \frac{1}{4}\sin^2 \ 2 \quad \frac{3}{2}$.

1.491. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $(\sin 15° + \quad °)$; б) $\sin^3\frac{}{12}\cos\frac{}{12} \quad \cos^3\frac{}{12}\sin\frac{}{12}$.

1.492. Дакажыце, што значэнне выразу $\frac{2\sin\frac{}{2} \quad \sin \quad \cos 2 \quad 1}{\cos 2 \quad \sin \quad \cos \quad \cos^2}$ не залежыць ад α.

1.493. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin x \cos x \cos 2x = -\frac{1}{8}$; б) $3\sin \ x - \quad x + \quad x = 2$.

1.494. Дакажыце тоеснасць $\frac{1 \quad \cos 2 \quad \sin 2}{1 \quad \cos 2 \quad \sin 2} \quad \operatorname{tg}$.

1.495. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{4\sin 25°\sin 65°}{\cos 40°}$; б) $\frac{10\cos 10°}{\sin 40°\sin 230°}$; в)* $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

1.496. Спрасціце выраз, выкарыстаўшы формулы двайных вуглоў:

а) $2\sin 6\alpha \quad \alpha$; б) $2\sin \frac{}{4} \quad \cos \frac{}{4}$; в) $\frac{2\cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$;

г) $\frac{\sin 2}{1 \quad \cos^2}$; д) $\cos \quad \alpha - \quad \alpha$; е) $\sin^2 \frac{}{2} \quad \cos^2 \frac{}{2}$;

ж) $2\cos \quad \alpha - \quad \alpha$; з) $(1 + \quad \alpha)\operatorname{tg}\alpha$; і) $\frac{2\operatorname{tg} 4}{1 \quad \operatorname{tg}^2 4}$;

к) $\frac{2\operatorname{tg} \frac{}{4}}{1 \quad \operatorname{tg}^2 \frac{}{4}}$; л) $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

1.497. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2\sin 22{,}5° \cos 22{,}5°$; б) $\cos \quad 75° - \quad 75°$; в) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{}{8}}{1 \quad \operatorname{tg}^2\frac{}{8}}$.

1.498. Знайдзіце:

а) $\sin 2\alpha$, калі $\cos\alpha = -0{,}6$ і $\quad < \quad < \frac{3}{2}$; б) $\cos 2\alpha$, калі $\cos \quad \frac{1}{7}$.

1.499. Выкарыстайце формулы двайных вуглоў і рашыце ўраўненне:

а) $\sin x \quad x = 0{,}25$; б) $\sin^2 \frac{x}{2} \quad \cos^2 \frac{x}{2} \quad \frac{1}{2}$;

в) $7\cos x + \quad x = 0$; г) $\sin^2 \frac{}{2} \quad x \quad \sin^2 \quad x \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $(\sin x + \quad x) \quad = 1$; е) $2\sin^2 x \quad 2\cos^2 x \quad \sqrt{3}$.

1.500. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $4\sin 75° \cos 75°$; б) $2\cos \quad ° \operatorname{tg} 15°$; в) $2\cos \quad 75° - 1$;

г) $1 \quad 2\sin^2 \frac{}{12}$; д) $\frac{2\operatorname{tg} 105}{\operatorname{tg}^2 105 \quad 1}$; е) $\frac{1 \quad \operatorname{tg}^2\frac{}{8}}{\operatorname{tg}\frac{}{8}}$.

1.501. Дакажыце тоеснасць:

а) $(\sin\alpha + \quad \alpha) \quad - \quad \alpha = 1$; б) $2\cos \quad \alpha - \quad \alpha = 1$;

в) $\frac{2\cos^2 \quad \operatorname{tg}}{\sin^2 \quad \cos^2} \quad \operatorname{tg} 2$.

1.502. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos^2 x \quad \frac{1}{2}\sin 2x \quad 0$; б) $\sqrt{3}\sin 2x = 2\sin^2 x$;

в) $2\sin x - \quad x = \quad x - 1$; г) $\sin^4 x \quad \cos^4 x \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\cos 2x = \quad x$; е) $1 - \quad x = \quad x$.

1.503. Спрасціце выраз:

а) $\frac{1 \quad \sin}{2\cos \quad \sin 2}$; б) $\cos 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \qquad \alpha$;

в) $2\sin \frac{}{2} \qquad \cos \frac{3}{2} \qquad$; г) $\frac{2\sin \qquad \sin \frac{}{2}}{\sin^2 \qquad \frac{}{2} \qquad \sin^2}$.

1.504. Пабудуйце графік функцыі $y = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$.

1.505. Спрасціце выраз:

а) $(\sin\alpha + \qquad \alpha) \; + \; - \qquad \alpha$; б) $\frac{1 \quad \cos 2}{1 \quad \cos 2}$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha \qquad \alpha - \qquad \alpha$.

1.506. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15°$; б) $\sin \qquad ° - \qquad °$.

1.507. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = \qquad x$ і $y = \qquad x$.

1.508. Знайдзіце $\frac{3\sin 2 \qquad 4\cos 2}{5\cos 2 \qquad \sin 2}$, калі вядома, што $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

1.509. Знайдзіце $\sin 2\alpha$, калі вядома, што $\sin \qquad \cos \qquad \frac{1}{3}$.

1.510. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin x \cos(-x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $1 + \qquad x + \qquad x = 0$;

в) $\sin \; x - \qquad x = \qquad x$; г) $(\sin x - \qquad x) \; = \qquad x$.

1.511. Спрасціце выраз:

а) $\frac{\sin 9}{\sin 3} \quad \frac{\cos 9}{\cos 3} \quad 2$; б) $\frac{\sin \qquad \sin 2}{1 \quad \cos \qquad \cos 2}$;

в) $8\sin^2 \qquad \sin^2 \frac{3}{2} \qquad 1$.

1.512. Рашыце ўраўненне $\sin \quad x + \qquad x = 0$.

1.513. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу a , a і $3a\sqrt{2}$ пры $a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1.514. Вылічыце: $5^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 1^8$.

1.515. Рашыце квадратную няроўнасць:

а) $x \quad - \quad x - \quad > 0$; б) $x \quad + 7x \leqslant 0$;

в) $x \quad - \quad \geqslant 0$; г) $x \quad - \quad x + \quad < 0$.

1.516. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2y - x = 5, \\ x^2 - xy - y^2 = -29. \end{cases}$

1.517. Выберыце функцыі, графікі якіх паралельныя:

а) $y = \quad x + 1$; б) $y = - \quad + \quad x$; в) $y = \quad + x$; г) $y = \frac{6x - 5}{3}$.

§ 12. Формулы пераўтварэння сумы і рознасці сінусаў (косінусаў) у здабытак

1.518. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{matrix} 2x & 7y & 3, \\ 3x & 5y & 1 \end{matrix}$ спосабам складання.

1.519. Параўнайце значэнні выразаў $\sin 30° + \sin 60°$ і $\sin 90°$.

1.520. Ці праўда, што $\cos 90° - \cos 30° > \cos 60°$?

Формулы сінуса сумы і сінуса рознасці двух вуглоў можна выкарыстаць для атрымання новых формул, неабходных для рашэння ўраўненняў, вывучэння ўласцівасцей функцый і да т. п.

Напрыклад, рэшым ураўненне $\sin x + \quad x = 0$.

Для рашэння дадзенага ўраўнення суму $\sin x + \quad x$ зручна запісаць у выглядзе здабытку і затым выкарыстаць умову роўнасці нулю здабытку.

Выведзем формулу пераўтварэння сумы сінусаў у здабытак.

Складзём пачлена дзве роўнасці:

$$\begin{array}{l} \sin \quad\quad \sin \quad \cos \quad\quad \cos \quad \sin \\ + \\ \sin \quad\quad \sin \quad \cos \quad\quad \cos \quad \sin \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \quad\quad \alpha \quad\quad \beta \end{array}$$

Абазначым $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$ і рэшым сістэму ўраўненняў $\begin{matrix} x, \\ y: \end{matrix}$

$$\begin{matrix} x, \\ y \end{matrix} \quad 2 \quad \begin{matrix} x, \\ x \quad y \end{matrix} \quad \begin{matrix} x, \\ \frac{x \quad y}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \quad \frac{x \quad y}{2}, \\ \frac{x \quad y}{2} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{x \quad y}{2}, \\ \frac{x \quad y}{2}. \end{matrix}$$

Падставім выразы для α і β у роўнасць $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=$ $=\quad \alpha \quad \beta$ і атрымаем **формулу сумы сінусаў двух вуглоў:** $\sin x + \quad y =$ $2\sin\frac{x \quad y}{2}\cos\frac{x \quad y}{2}$.

Вернемся да рашэння ўраўнення $\sin x + \quad x = 0$ і прыменім формулу сумы сінусаў: $\sin x + \quad x = 0 \quad 2\sin\frac{x \quad 5x}{2}\cos\frac{x \quad 5x}{2} \quad 0$

$$\Leftrightarrow \quad x\cos(- \ x) = 0 \Leftrightarrow \quad x \quad x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \sin 3x \quad 0, & 3x \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}, & x \quad \frac{n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z}, \\ \cos 2x \quad 0 & 2x \quad \frac{}{2} \quad k,\ k \quad \boldsymbol{Z} & x \quad \frac{}{4} \quad \frac{k}{2},\ k \quad \boldsymbol{Z}. \end{matrix}$$

Адказ: $\frac{n}{3},\ n \quad \boldsymbol{Z};\ \frac{}{4} \quad \frac{k}{2},\ k \quad \boldsymbol{Z}$.

Адняўшы ад роўнасці $\sin(\alpha+\beta)= \quad \alpha \quad \beta + \quad \alpha \quad \beta$ роўнасць $\sin(\alpha-\beta)= \quad \alpha \quad \beta - \quad \alpha \quad \beta$, можна атрымаць **формулу рознасці сінусаў двух вуглоў:** $\sin x - \quad y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$.

Аналагічна, з дапамогай роўнасцей $\cos(\alpha+\beta)= \quad \alpha \quad \beta - \quad \alpha \quad \beta$ і $\cos(\alpha-\beta)= \quad \alpha \quad \beta + \quad \alpha \quad \beta$ можна атрымаць **формулы**

- **сумы косінусаў двух вуглоў:** $\quad x + \quad y \quad 2\cos\frac{x \quad y}{2}\cos\frac{x \quad y}{2}$;
- **рознасці косінусаў двух вуглоў:** $\quad x - \quad y \quad 2\sin\frac{x \quad y}{2}\sin\frac{x \quad y}{2}$.

$$x + \quad y \quad 2\sin\frac{x \quad y}{2}\cos\frac{x \quad y}{2}$$
$$x - \quad y \quad 2\sin\frac{x \quad y}{2}\cos\frac{x \quad y}{2}$$
$$x + \quad y \quad 2\cos\frac{x \quad y}{2}\cos\frac{x \quad y}{2}$$
$$x - \quad y \quad 2\sin\frac{x \quad y}{2}\sin\frac{x \quad y}{2}$$

Прыклад 1. Запішыце ў выглядзе здабытку:

а) $\sin 7x + \quad x$;
б) $\sin 7x - \quad x$;
в) $\cos 7x + \quad x$;
г) $\cos 7x - \quad x$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулы пераўтварэння сумы і рознасці ў здабытак і атрымаем:

а) $\sin 7x + \quad x \quad 2\sin\frac{7x \quad 3x}{2}\cos\frac{7x \quad 3x}{2} \quad 2\sin 5x\cos 2x$;

б) $\sin 7x - \quad x \quad 2\sin\frac{7x \quad 3x}{2}\cos\frac{7x \quad 3x}{2} \quad 2\sin 2x\cos 5x$;

в) $\cos 7x + \quad x \quad 2\cos\frac{7x \quad 3x}{2}\cos\frac{7x \quad 3x}{2} \quad 2\cos 5x\cos 2x$;

г) $\cos 7x - \quad x = -2\sin\frac{7x-3x}{2}\sin\frac{7x+3x}{2} = -2\sin 2x\sin 5x$.

Прыклад 2. Скараціце дроб $\frac{\sin 6x \quad \sin 8x}{\sin 6x \quad \sin 8x}$.

Рашэнне. Прыменім формулы сумы і рознасці сінусаў двух вуглоў:

$$\frac{\sin 6x \quad \sin 8x}{\sin 6x \quad \sin 8x} \quad \frac{2\sin 7x\cos \quad x}{2\sin \quad x\cos 7x} \quad \frac{\sin 7x\cos x}{\sin x\cos 7x} \quad \operatorname{tg} 7x \operatorname{ctg} x.$$

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Знайдзіце значэнне выразу $\cos 75^\circ + \qquad ^\circ$.

Рашэнне. Прыменім формулу сумы косінусаў:

$$\cos 75^\circ + \qquad ^\circ \quad 2\cos\frac{75 \quad 15}{2}\cos\frac{75 \quad 15}{2} \quad 2\cos 45 \ \cos 30$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2. Дакажыце тоеснасць $\frac{\sin 3 \qquad \sin 5}{\cos 3 \qquad \cos 5} \qquad \operatorname{tg} 4 \quad .$

Рашэнне. Выкарыстаем формулы сумы сінусаў і сумы косінусаў двух вуглоў:

$$\frac{\sin 3 \qquad \sin 5}{\cos 3 \qquad \cos 5} \quad \frac{2\sin\frac{3 \quad 5}{2}\cos\frac{3 \quad 5}{2}}{2\cos\frac{3 \quad 5}{2}\cos\frac{3 \quad 5}{2}} = \frac{2\sin 4 \quad \cos}{2\cos 4 \quad \cos} \quad \frac{\sin 4}{\cos 4} \quad \operatorname{tg} 4 \quad .$$

3. Вылічыце:

а) $\frac{\sin 32 \quad \sin 58}{\sin 13}$; б) $\frac{\cos 74 \quad \cos 14}{\sin 74 \quad \sin 14}$.

Рашэнне. а) $\frac{\sin 32 \quad \sin 58}{\sin 13} \quad \frac{2\sin\frac{32 \quad 58}{2}\cos\frac{32 \quad 58}{2}}{\sin 13} \quad \frac{2\sin \quad 13 \quad \cos 45}{\sin 13}$

$$\frac{2\sin 13 \ \cos 45}{\sin 13} \quad 2\cos 45 \quad 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sqrt{2};$$

б) $\frac{\cos 74 \quad \cos 14}{\sin 74 \quad \sin 14} \quad \frac{2\sin\frac{74 \quad 14}{2}\sin\frac{74 \quad 14}{2}}{2\sin\frac{74 \quad 14}{2}\cos\frac{74 \quad 14}{2}} = \frac{2\sin 30 \ \sin 44}{2\sin 44 \ \cos 30} \quad \frac{\sin 30}{\cos 30} =$

$$= \quad \operatorname{tg} 30 \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin 3x + \qquad x = \qquad x$; б) $\sqrt{2}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

Рашэнне. а) Запішам ураўненне ў выглядзе $\sin 3x - \quad x + \quad x = 0$ і прыменім формулу рознасці сінусаў:

$(\sin 3x - \quad x) + \quad x = 0;\ 2\sin x \quad x + \quad x = 0;$

$$x\,(2\sin x + 1) = 0; \quad \begin{matrix} \cos 2x \quad 0, \\ 2\sin x \quad 1 \quad 0; \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cos 2x \quad 0, \\ \sin x \quad \frac{1}{2}; \end{matrix}$$

$$2x \quad \frac{}{2} \quad k,\ k \quad \boldsymbol{Z}, \qquad x \quad \frac{}{4} \quad \frac{k}{2},\ k \quad \boldsymbol{Z},$$

$$x \quad 1^{n \quad 1} \frac{}{6} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}; \qquad x \quad 1^{n \quad 1} \frac{}{6} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{}{4} \quad \frac{k}{2},\ k \quad \boldsymbol{Z};\quad 1^{n \quad 1} \frac{}{6} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

б) Выкарыстаем формулу рознасці косінусаў і атрымаем:

$\sqrt{2}\sin 2x \quad \cos 5x \quad \cos 9x \quad 0;\ \sqrt{2}\sin 2x - 2\sin 7x \sin(-2x) = 0;$

$\sqrt{2}\sin 2x \quad 2\sin 7x \sin 2x \quad 0;\ \sin 2x \ \sqrt{2} \quad 2\sin 7x \quad 0;$

$$\begin{matrix} \sin 2x \quad 0, \\ \sqrt{2} \quad 2\sin 7x \quad 0; \end{matrix} \quad \begin{matrix} \sin 2x \quad 0, \\ \sin 7x \quad \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{matrix}$$

$$2x \quad k,\ k \quad \boldsymbol{Z}, \qquad x \quad \frac{k}{2},\ k \quad \boldsymbol{Z},$$

$$7x \quad 1^{n \quad 1} \frac{}{4} \quad n,\ n \quad \boldsymbol{Z}; \qquad x \quad 1^{n \quad 1} \frac{}{28} \quad \frac{n}{7},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{k}{2},\ k \quad \boldsymbol{Z};\quad 1^{n \quad 1} \frac{}{28} \quad \frac{n}{7},\ n \quad \boldsymbol{Z}.$

Выберыце роўнасць, правільную для любых вуглоў α і β:

а) $\cos\alpha - \quad \beta = \cos(\alpha - \beta)$; б) $\cos\alpha - \quad \beta = \sin(\alpha - \beta)$;

в) $\cos\alpha - \quad \beta = \quad 2\sin\frac{}{2}\sin\frac{}{2}$; г) $\cos\alpha - \quad \beta = \quad 2\cos\frac{}{2}\cos\frac{}{2}$.

1.521. Пераўтварыце ў здабытак:

а) $\cos 5\alpha + \quad \alpha$; б) $\sin 4\alpha - \sin 10\alpha$;

в) $\cos\alpha - \quad \alpha$; г) $\sin 0{,}5\alpha + \sin 1{,}5\alpha$.

1.522. Вылічыце:

а) $\sin 15^\circ + \sin 105^\circ$; б) $\cos\frac{}{12} \quad \cos\frac{7}{12}$.

1.523. Дакажыце тоеснасць:

а) $\dfrac{\sin \quad \sin 5}{\cos \quad \cos 5} \quad \operatorname{tg} 2 \quad$;   б) $\dfrac{\sin \quad \sin}{\cos \quad \cos} \quad \operatorname{tg} \dfrac{}{2}$.

1.524. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin 4x = \sin 10x$;   б) $\cos \ 2x \quad \dfrac{}{4} \quad \cos 4x$;

в) $\sin \dfrac{}{4} \quad x \quad \sin \dfrac{}{12} \quad x \quad 1.$

1.525. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20°$;   б) $\cos \dfrac{17}{36} \quad \cos \dfrac{7}{36} \quad \cos \dfrac{5}{36}$;

в) $\dfrac{\sin 35 \quad \sin 85}{\cos 25}$;   г) $\dfrac{\cos 59 \quad \cos 1}{\sin 59 \quad \sin 1}$.

1.526. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\sin 4}{\sin \quad \sin 3}$;   б) $\dfrac{\sin \quad 2\sin 2 \quad \sin 3}{\cos \quad 2\cos 2 \quad \cos 3}$.

1.527. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\sin \dfrac{}{4} \quad \sin \dfrac{}{4}}{\sin \dfrac{}{4} \quad \sin \dfrac{}{4}} \quad \operatorname{ctg} \quad$.

1.528. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 58 \quad \cos 28 \quad \sqrt{3}\cos 2 \quad$;   б) $\dfrac{\sin \dfrac{7}{18} \quad \sin \dfrac{}{9}}{\cos \dfrac{7}{18} \quad \cos \dfrac{}{9}}$;

в) $\dfrac{\sin \dfrac{5}{12} \quad \sin \dfrac{}{12}}{\cos \dfrac{}{6} \cos \dfrac{}{12} \quad \sin \dfrac{}{6} \sin \dfrac{}{12}}$.

1.529. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos x - \quad x = \quad x$;   б) $5\sin 2x = \quad x - \quad x$;

в) $\sin x \quad x - \quad x \quad x = \quad x$;   г) $\sin 3x + \quad x = \quad x$.

1.530. Пераўтварыце ў здабытак:

а) $\cos \ \alpha - \quad \alpha + \quad \alpha$;   б) $2\cos \alpha \quad \alpha + \quad \alpha$.

1.531. Вылічыце:

а) $\sin 75° + \cos 75°$;   б) $\sin 15° + \quad °$;   в) $\sin \dfrac{5}{12} \quad \cos \dfrac{5}{12}$.

1.532. Спрасціце выраз $\dfrac{\sin}{\cos 2} \quad \dfrac{\cos}{\sin 2} \quad \dfrac{\sin 7 \quad \sin}{\cos}$.

1.533. Пераўтварыце ў здабытак:

а) $\cos 8\alpha + \quad \alpha$; б) $\sin 2\alpha - \quad \alpha$;
в) $\cos\alpha - \quad \alpha$; г) $\sin\alpha + \sin 10\alpha$.

1.534. Вылічыце:

а) $\sin 105° - \sin 75°$; б) $\sin 75° + \quad °$.

1.535. Дакажыце тоеснасць:

а) $\dfrac{\sin \quad \sin 3}{\cos \quad \cos 3} \quad \operatorname{tg} 2 \quad$; б) $\dfrac{\cos\frac{}{4} \quad \cos\frac{}{4}}{\cos\frac{}{4} \quad \cos\frac{}{4}} \quad \operatorname{ctg} \quad$.

1.536. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos 5x = \cos 7x$; б) $\sin\ 6x \quad \frac{}{3} \quad \sin\ 2x \quad \frac{}{4}$;

в) $\cos(40° - x) + \cos(80° + x) = 1$.

1.537. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 85° + \quad ° - \quad °$; б) $\sin\frac{}{18} \quad \sin\frac{5}{18} \quad \cos\frac{}{9}$;

в) $\dfrac{\cos 24 \quad \cos 84}{\sin 54}$; г) $\dfrac{\cos 89 \quad \cos 1}{\sin 89 \quad \sin 1}$.

1.538. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{\sin \quad \sin}{\cos \quad \cos}$; б) $\dfrac{\sin 4}{\cos 3 \quad \cos}$; в) $\dfrac{\sin \quad \sin 3 \quad \sin 5}{\cos \quad \cos 3 \quad \cos 5}$.

1.539. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 80 \quad \cos 40 \quad \cos 20$; б) $\cos 47 \quad \sin 77 \quad \sqrt{3}\cos 17$;

в) $\dfrac{\cos 29 \quad \cos 91}{\sin 31}$; г) $\dfrac{\sin\frac{5}{18} \quad \sin\frac{2}{9}}{\cos\frac{5}{18} \quad \cos\frac{2}{9}}$;

д) $\dfrac{\cos 25\ \cos 15 \quad \sin 25\ \sin 15}{\cos 100 \quad \cos 20}$; е) $\dfrac{\cos\frac{5}{12} \quad \cos\frac{}{12}}{\cos\frac{}{3}\cos\frac{}{12} \quad \sin\frac{}{3}\sin\frac{}{12}}$.

1.540. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos x - \cos 7x = \quad x$; б) $7\sin 2x = \sin 7x - \quad x$;
в) $\cos x \quad x + \quad x \quad x = \quad x$; г) $\cos x + \quad x + \quad x = 0$.

1.541. Спрасціце выраз $\dfrac{\sin}{\sin 2} \quad \dfrac{\cos}{\cos 2} \quad \dfrac{\cos \quad \cos 7}{\sin}$.

1.542. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 70° + \sin 140° - \cos 10°$; б) $\dfrac{\sin^2 49 \quad \cos^2 49}{\cos 53 \quad \cos 37}$.

1.543. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{45} - 11\sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{61\frac{1}{4}}$.

1.544. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\dfrac{x}{x^2 - 25} + \dfrac{x + 4}{x + 5} = 0$.

1.545. Кошт тавару спачатку павялічылі на 10 %, а затым паменшылі на 25 % у параўнанні з павялічаным коштам. У выніку тавар стаў таннейшым на 7 р. Знайдзіце, колькі каштаваў тавар першапачаткова.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць азначэнні сінуса, косінуса, тангенса, катангенса вугла;
- ведаць уласцівасці трыганаметрычных функцый;
- ведаць формулы трыганаметрыі;
- умець тлумачыць азначэнне і ўласцівасці сінуса, косінуса, тангенса, катангенса з дапамогай трыганаметрычнай акружнасці;
- умець карыстацца формуламі для рашэння найпрасцейшых трыганаметрычных ураўненняў;
- умець карыстацца алгарытмамі рашэння трыганаметрычных ураўненняў асноўных тыпаў;
- умець выконваць пабудову графікаў трыганаметрычных функцый і пераўтвараць графікі трыганаметрычных функцый;
- умець выконваць пераўтварэнні трыганаметрычных выразаў з дапамогай формул прывядзення, складання, сумы і рознасці, двайнога аргумента, аднаго аргумента;
- умець выконваць заданні на прымяненне формул трыганаметрыі для рашэння ўраўненняў, вылічэння значэнняў выразаў;
- умець прымяняць правілы і алгарытмы пераўтварэння трыганаметрычных выразаў для вывучэння ўласцівасцей функцый.

Я правяраю свае веды

1. Пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты $P \quad \frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Выберыце правільныя роўнасці:

а) $\sin \quad \frac{1}{3}$; б) $\sin \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $\cos \quad \frac{1}{3}$; г) $\cos \quad \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. а) Выразіце ў градусах вугал $\frac{7\pi}{18}$ рад; б) выразіце ў градусах вугал –2,8 рад; в) выразіце ў радыянах вугал –240°.

3. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $8\sin\quad\frac{}{3}\quad\cos\quad\frac{}{6}$;   б) $\text{tg}\frac{}{4}\text{ctg}\frac{}{3}\quad 2\sin^2\quad\frac{}{6}$;

в) $\cos 180\quad \sin 270$.

4. Спрасціце выраз:

а) $\cos\qquad\cos$;   б) $\sin\qquad\cos\quad\frac{}{2}$;

в) $\text{tg}^2\qquad\sin^2\qquad\sin^2\frac{3}{2}$.

5. Знайдзіце значэнне выразу:

а) · ;   б) $\sqrt{3}\sin\frac{4}{3}\quad\text{tg}^2\frac{5}{4}$;

в) $\cos 139\ \cos 19\quad \sin 139\ \sin 19$;   г) $\frac{1\quad \text{tg}12\ \text{tg}48}{\text{tg}12\quad \text{tg}48}$;

д) $2\cos 105°\sin 105°$;   е) $\cos^2 112{,}5\quad \sin^2 112{,}5$.

6. Вядома, што α і β — вуглы трэцяй чвэрці і $\cos\quad\frac{12}{13}$, $\sin\quad\frac{4}{5}$. Знайдзіце $\sin(\alpha-\beta)$.

7. Рашыце ўраўненне:

а) $2\cos^2 x\quad 5\cos x\quad 3\quad 0$;   б) $5\cos^2 x\quad 2\sin^2 x\quad 0{,}5\sin 2x\quad 3$;

в) $\cos 10x = \cos x$;   г) $\sin 9x\cos x\quad \cos 9x\sin x\quad 0{,}5$;

д) $\sqrt{2}\sin x = \sin 2x$;   е) $\sin\quad\frac{}{12}\quad x\quad \sin x\quad 0$;

ж) $\cos\ 2x\quad\frac{}{4}\ \cos x\quad \sin\ 2x\quad\frac{}{4}\ \sin x\quad\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Спрасціце выраз $\frac{\cos\qquad\cos 2\qquad\cos 4\qquad\cos 5}{\sin\qquad\sin 2\qquad\sin 4\qquad\sin 5}$ і знайдзіце яго значэнне пры $\quad\frac{}{18}$.

9. Пабудуйце графік функцыі $y\quad\sin\ x\quad\frac{}{6}\quad 1$ і запішыце яе ўласцівасці.

10. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння прамой $y = -$ і графіка функцыі $y = \quad x + \quad x$.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 10» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 10 клас».

Раздзел 2

КОРАНЬ -й СТУПЕНІ З ЛІКУ

§ 13. Корань n-й ступені з ліку a ($n \geqslant 2$, $n \in N$)

2.1. Колькі каранёў мае ўраўненне:
а) $x^2 = 0{,}81$; б) $x^2 = -0{,}01$; в) $x^2 = 0$?

2.2. Знайдзіце значэнне выразу $0{,}02 \cdot \sqrt{90\,000} - \frac{17}{\sqrt{2{,}89}} - 0{,}5 \cdot \sqrt{144}$.

2.3. Выкарыстаўшы ўласцівасці ступені, вылічыце:

а) $3^8 : \; 3^5 \;\; ^2$; б) $\frac{1}{2} \;\; ^9 \;\; 0{,}5 \;\; ^7 \;\; 4 \;\; ^1$; в) $1{,}2^{19} \;\; 1{,}2^{-18} \;\; 12^0$.

Разгледзім некалькі задач. *Задача* 1. Кубічны экалагічны рэзервуар для захоўвання вады мае аб’ём $3\frac{3}{8}$ м . Знайдзіце даўжыню канта куба.

Рашэнне. Абазначым даўжыню канта куба праз x м, тады аб’ём куба роўны x м . Атрымаем ураўненне $x^3 = 3\frac{3}{8}$. Для яго рашэння трэба знайсці такі лік, куб якога роўны $3\frac{3}{8}$. Паколькі $\frac{3}{2} \;\; ^3 \quad \frac{27}{8} \quad 3\frac{3}{8}$, то гэта ўраўненне мае корань $x = \frac{3}{2}$, які задавальняе ўмову задачы.

Адказ: даўжыня канта куба роўна 1,5 м.

Задача 2. Укладчык паклаў m рублёў на банкаўскі рахунак, па якім сума ўкладу павялічваецца штогод на p %. Праз 4 гады сума на рахунку склала k рублёў. Вызначце працэнт p, пад які зроблены ўклад, калі вядомы першапачатковы ўклад m і сума на рахунку k праз 4 гады.

Рашэнне. Грашовы ўклад штогод павялічваецца на p %, г. зн. у $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раза. Праз 4 гады ён будзе роўны $m\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$. Па ўмове задачы $m \;\; 1 \quad \frac{p}{100} \;\; ^4 \quad k$, адкуль $1 \quad \frac{p}{100} \;\; ^4 \quad \frac{k}{m}$. Для вызначэння p спачатку трэба знайсці такі лік, чацвёртая ступень якога роўна $\frac{k}{m}$.

Многія задачы, як і разгледжаныя вышэй, прыводзяць да неабходнасці здабывання кораня n-й ступені з рэчаіснага ліку.

> **Азначэнне.** Няхай $n \in$, $n > 1$, $a \in$. Коранем n-й ступені з ліку a называецца лік, n-я ступень якога роўна a.

Напрыклад:

- коранем трэцяй ступені з ліку 125 з'яўляецца лік 5, паколькі 5 = 125;
- коранем пятай ступені з ліку −32 з'яўляецца лік −2, паколькі −2)^5 = −32;
- каранямі чацвёртай ступені з ліку 81 з'яўляюцца лікі 3 і −3, паколькі $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З азначэння вынікае, што для знаходжання кораня n-й ступені з рэчаіснага ліку a трэба рашыць ураўненне $x^n = a$.

Высветлім, колькі каранёў можа мець гэта ўраўненне ў залежнасці ад n і ад a.

1. Корань цотнай ступені з рэчаіснага ліку

Разгледзім ураўненне $x^{2k} = a$, дзе k — натуральны лік.

а) Калі $a < 0$, то ўраўненне не мае каранёў, паколькі $x^{2k} \quad x^{k} \; ^{2} \geqslant 0$.

Такім чынам, **не існуе кораня цотнай ступені з адмоўнага ліку.**

б) Калі $a = 0$, то ўраўненне $x^{2k} = 0$ мае адзіны корань, роўны нулю.

Значыць, **існуе адзіны корань цотнай ступені з ліку нуль.**

в) Калі $a > 0$, то ўраўненне $x^{2k} = a$ мае два сапраўдныя карані: адзін дадатны, а другі — процілеглы яму — адмоўны.

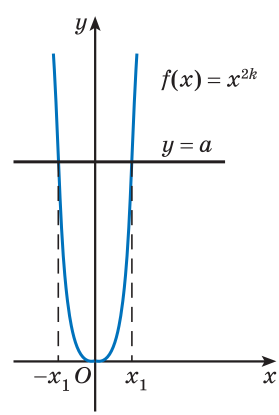
Разгледзім функцыю $f(x) = x^{2k}$, дзе $k \in N$.

Мы разглядалі прыватны выпадак гэтай функцыі — $y = x^2$.

Уласцівасці і графік функцыі $f(x) = x^{2k}$ аналагічныя ўласцівасцям і графіку функцыі $y = x^2$.

Паколькі функцыя $f(x) = x^{2k}$ нарастае на мностве неадмоўных лікаў і a — значэнне, якое прымае гэта функцыя $a \quad 0; \; \infty$, то ўраўненне $x^{2k} = a$ мае адзіны сапраўдны корань пры любым $a \quad 0; \; \infty$.

Няхай x_1 — дадатны корань ураўнення $x^{2k} = a$ (рыс. 116), значыць, лікавая роўнасць $x_1^{2k} = a$ з'яўляецца правільнай. Паколькі $x_1^{2k} \quad x_1 \; ^{2k}$, то правільнай з'яўляецца і лікавая роўнасць $(-x_1)^{2k} = a$, а значыць, лік $-x_1$ таксама з'яўляецца коранем ураўнення $x^{2k} = a$.



Рыс. 116

Такім чынам, існуюць роўна два карані цотнай ступені з дадатнага ліку. Адзін з каранёў з'яўляецца дадатным лікам, а другі — процілеглым яму лікам.

Азначэнне. Арыфметычным коранем n-й ступені з ліку a называецца неадмоўны лік, n-я ступень якога роўна a.

$$\sqrt[n]{a} = b$$
$$b \geqslant 0,\ b^n = a$$

Напрыклад, 2 — арыфметычны корань чацвёртай ступені з ліку 16, паколькі $>$ $=$

Арыфметычны корань n-й ступені з ліку a абазначаецца $\sqrt[n]{a}$ і чытаецца: «арыфметычны корань n-й ступені з ліку a». Лік n называецца паказчыкам кораня, лік a — падкарэнным выразам.

Можна, выкарыстоўваючы абазначэнні, запісаць $\sqrt[4]{16} = 2$. Чытаецца: «арыфметычны корань чацвёртай ступені з ліку 16 роўны 2». Слова «арыфметычны», як правіла, прапускаюць.

Корань другой ступені з ліку прынята называць квадратным коранем (яго ўласцівасці вывучаліся ў 8-м класе). Паказчык кораня другой ступені не пазначаюць. Напрыклад, корань другой ступені з 13 запісваюць $\sqrt{13}$ і вымаўляюць: «квадратны корань з 13».

Дзеянне знаходжання арыфметычнага кораня n-й ступені з ліку a называецца **здабываннем кораня з ліку.**

Прыклад. Выканайце дзеянне здабывання кораня:

а) шостай ступені з ліку 64;

б) восьмай ступені з ліку 0,00000001.

Рашэнне: а) $\sqrt[6]{64} = 2$;

б) $\sqrt[8]{0{,}00000001} = 0{,}1$.

$$\sqrt[4]{81} = 3;\ \sqrt[8]{256} = 2;$$
$$\sqrt[12]{0} = 0;\ \sqrt[10]{1} = 1;$$
$$\sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3};\ \sqrt[4]{0{,}0625} = 0{,}5$$

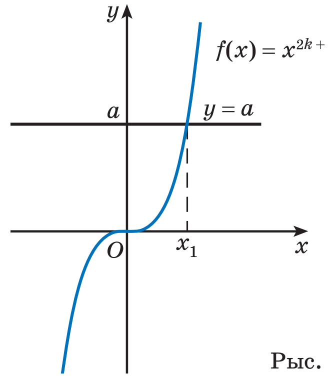
Такія лікі, як $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[8]{100}$ і да т. п., з'яўляюцца ірацыянальнымі. З дапамогай дзесятковых набліжэнняў можна знайсці іх значэнні з любой зададзенай ступенню дакладнасці.

2. Корань няцотнай ступені з рэчаіснага ліку

Разгледзім ураўненне $x^{2k\quad 1}\quad a$, дзе k — натуральны лік. Гэта ўраўненне мае адзіны корань.

Разгледзім функцыю $f(x)\quad x^{2k\quad 1}$, дзе $k \in N$. Гэта функцыя з'яўляецца нарастальнай на мностве ўсіх рэчаісных лікаў і прымае ўсе значэнні з прамежку $a\quad \infty;\ \infty$.

Паколькі функцыя $f(x)\quad x^{2k\quad 1}$ нарастае на R і a — значэнне, якое прымае гэта функцыя $a\quad \infty;\ \infty$, то ўраўненне $x^{2k\quad 1}\quad a$ мае адзіны сапраўдны корань пры любым a (рыс. 117).



Рыс. 117

Існуе адзіны сапраўдны корань няцотнай ступені з любога рэчаіснага ліку.

Гэты корань для неадмоўнага ліку a называецца **арыфметычным** і абазначаецца гэтаксама, як корань цотнай ступені.

Напрыклад, $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[5]{243} = 3$.

$$\sqrt[3]{27} = 3;\ \sqrt[5]{32} = 2;$$
$$\sqrt[7]{0} = 0;\ \sqrt[9]{1} = 1;$$
$$\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5};$$
$$\sqrt[7]{0{,}0000001} = 0{,}1$$

Такія лікі, як $\sqrt[5]{25}$; $\sqrt[7]{19}$ і да т. п., з'яўляюцца ірацыянальнымі лікамі.

Корань трэцяй ступені з ліку называюць кубічным коранем. Напрыклад, $\sqrt[3]{15}$ — кубічны корань з 15.

Корань няцотнай ступені з адмоўнага ліку прынята запісваць у выглядзе $\sqrt[5]{-243}$, не называючы яго арыфметычным коранем (чытаецца: «корань пятай ступені з ліку –243»). А выражаюць яго праз арыфметычны корань з процілеглага яму дадатнага ліку. Напрыклад, $\sqrt[5]{\quad 243}\qquad \sqrt[5]{243}\qquad 3$; $\sqrt[7]{\quad 128}\qquad \sqrt[7]{128}\qquad 2$.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Вызначце, колькі існуе караняў:

а) чацвёртай ступені з ліку 25; б) пятай ступені з ліку 46;
в) восьмай ступені з ліку –256; г) сёмай ступені з ліку –1.

Рашэнне. а) Паколькі 25 — дадатны лік, то існуюць два карані чацвёртай (цотнай) ступені з ліку 25;

б) паколькі існуе толькі адзін корань няцотнай ступені з рэчаіснага ліку, то існуе толькі адзін корань пятай ступені з ліку 46;

в) паколькі лік –256 — адмоўны, то не існуе кораня восьмай ступені з ліку –256, бо не існуе кораня цотнай ступені з адмоўнага ліку;

г) паколькі існуе толькі адзін корань няцотнай ступені з рэчаіснага ліку, то існуе толькі адзін корань сёмай ступені з ліку –1.

2. Назавіце паказчык кораня, падкарэнны выраз, прачытайце дадзены выраз:

а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[6]{4x^2-1}$; в) $\sqrt[8]{a^4b^3}$.

Рашэнне. а) Паказчык кораня роўны 3, падкарэнны выраз 2, дадзены выраз: «кубічны корань з двух»;

б) паказчык кораня роўны 6, падкарэнны выраз $4x^2-1$, дадзены выраз: «корань шостай ступені з рознасці $4x^2$ і 1»;

в) паказчык кораня роўны 8, падкарэнны выраз a^4b^3, дадзены выраз: «корань восьмай ступені са здабытку ступеней a^4 і b ».

3. Якія з наступных роўнасцей:

а) $\sqrt[4]{81}=3$; б) $\sqrt[3]{125}=5$; в) $\sqrt[3]{\ 125}$ 5; г) $\sqrt[6]{729}=-3$

— з'яўляюцца правільнымі?

Рашэнне. а) $\sqrt[4]{81}=3$, паколькі $3>0$ і $3^4=81$, то па азначэнні арыфметычнага кораня n-й ступені з ліку роўнасць правільная;

б) $\sqrt[3]{125}=5$, паколькі $5>0$ і $5^3=125$, то па азначэнні арыфметычнага кораня n-й ступені з ліку роўнасць правільная;

в) $\sqrt[3]{\ 125}$ 5, паколькі $\sqrt[3]{\ 125}$ $\sqrt[3]{125}$ 5, то роўнасць правільная;

г) $\sqrt[6]{729}=-3$, паколькі па азначэнні арыфметычны корань цотнай ступені з ліку роўны неадмоўнаму ліку, то роўнасць няправільная.

4. Якія з дадзеных выразаў:

а) $\sqrt[10]{10}$; б) $\sqrt[7]{128}$; в) $\sqrt[4]{-81}$; г) $\sqrt[7]{-128}$ — не маюць сэнсу?

Рашэнне. а) Выраз $\sqrt[10]{10}$ ёсць арыфметычны корань дзясятай ступені з дадатнага ліку 10, ён мае сэнс;

б) выраз $\sqrt[7]{128}$ ёсць арыфметычны корань сёмай ступені з дадатнага ліку 128, ён мае сэнс;

в) падкарэнны выраз арыфметычнага кораня чацвёртай ступені роўны адмоўнаму ліку –81, дадзены выраз не мае сэнсу, паколькі не існуе кораня цотнай ступені з адмоўнага ліку;

г) выраз $\sqrt[7]{-128}$ мае сэнс, паколькі існуе корань няцотнай ступені з адмоўнага ліку.

5. Колькі каранёў мае ўраўненне:

а) $x^4 = 6$; б) $x^3 = 6$; в) $x^4 = -6$; г) $x^3 = -6$?

Рашэнне. а) Ураўненне мае два карані $x_1 = \sqrt[4]{6}$ і $x_2 = -\sqrt[4]{6}$;

б) ураўненне мае адзін корань $x = \sqrt[3]{6}$;

в) ураўненне не мае каранёў;

г) ураўненне мае адзін корань $x = -\sqrt[3]{6}$.

6. Рашыце ўраўненне:

а) $x^4 \quad 625 \quad 0$; б) $x^6 \quad 245 \quad 0$;

в) $x^3 \quad 216 \quad 0$; г) $x^3 \quad 27 \quad 0$.

Рашэнне. а) $x^4 \quad 625 \quad 0$; $x^4 \quad 625$; $\begin{array}{ll} x \quad \sqrt[4]{625}, & x \quad 5, \\ x \quad\quad \sqrt[4]{625}; & x \quad\quad 5. \end{array}$

Адказ: –5; 5.

б) $x^6 \quad 245 \quad 0$; $x^6 \quad 245$; $\begin{array}{l} x \quad \sqrt[6]{245}, \\ x \quad\quad \sqrt[6]{245}. \end{array}$

Адказ: $-\sqrt[6]{245}$; $\sqrt[6]{245}$.

в) $x^3 \quad 216 \quad 0$; $x^3 = 216$; $x = \sqrt[3]{216}$; $x = 6$.

Адказ: 6.

г) $x^3 \quad 27 \quad 0$; $x^3 = -27$; $x = \sqrt[3]{-27}$; $x = -\sqrt[3]{27}$; $x = -3$.

Адказ: –3.

? Вызначце, цотным ці няцотным з'яўляецца лік n, калі вядома, што ўраўненне $x^n = a$ мае:

а) два розныя карані; б) толькі адзін корань.

2.4. Выберыце правільныя сцверджанні:

а) лік –5 з'яўляецца коранем трэцяй ступені з ліку –125;
б) лік 0 з'яўляецца коранем пятай ступені з ліку 0;
в) лік –2 з'яўляецца коранем чацвёртай ступені з ліку –16;
г) лік 7 з'яўляецца коранем трэцяй ступені з ліку 343.

2.5. Прачытайце выраз:

а) $\sqrt[5]{8}$; б) $\sqrt[3]{12}$; в) $\sqrt[4]{x^9}$; г) $\sqrt[10]{a-b}$.

Назавіце паказчык кораня, падкарэнны выраз.

2.6. З дапамогай азначэння арыфметычнага кораня n-й ступені дакажыце, што:

а) $\sqrt[6]{64}=2$; б) $\sqrt[3]{125}=5$; в) $\sqrt[4]{0{,}0081}=0{,}3$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}}=\dfrac{2}{3}$.

2.7. Ці правільная роўнасць:

а) $\sqrt[4]{\quad 81} \qquad 3$; б) $\sqrt[3]{0{,}027}=0{,}3$; в) $\sqrt[8]{1}=1$; г) $\sqrt[7]{\quad \dfrac{1}{128}} \qquad \dfrac{1}{2}$?

Адказ абгрунтуйце.

2.8. Ці мае сэнс выраз:

а) $\sqrt[5]{3}$; б) $\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[7]{-3}$; г) $\sqrt[6]{-3}$?

2.9. Выберыце ўраўненні, якія маюць два карані:

а) $x^4=81$; б) $x^5=32$; в) $x^6=10$;
г) $x^8=0$; д) $x^{10}=-1$; е) $x^7=-5$.

Знайдзіце карані гэтых ураўненняў.

2.10. Рашыце ўраўненне:

а) $x^8 \quad 12 \quad 0$; б) $x^4 \quad 16 \quad 0$;
в) $x^5 \quad 29 \quad 0$; г) $x^9 \quad 13 \quad 0$.

Карані якіх з дадзеных ураўненняў з'яўляюцца рацыянальнымі лікамі?

2.11. Выканайце дзеянне здабывання кораня:

а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$; в) $\sqrt[4]{10\,000}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{625}}$;
д) $\sqrt[6]{64}$; е) $\sqrt[10]{1}$; ж) $\sqrt[5]{32}$; з) $\sqrt[3]{0{,}001}$;
і) $\sqrt[3]{125}$; к) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{128}}$; л) $\sqrt[9]{0}$; м) $\sqrt[3]{216}$.

2.12. Знайдзіце значэнне кораня:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}$; б) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$; в) $\sqrt[3]{1\dfrac{91}{125}}$; г) $\sqrt[3]{-3\dfrac{3}{8}}$;

д) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; ж) $\sqrt[3]{-5\frac{23}{64}}$; з) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$.

2.13. Знайдзіце значэнні выразаў $\sqrt[3]{m}$, $\sqrt[3]{8m}$, $\sqrt[3]{-0{,}008m}$, калі:

а) $m = 1$; б) $m = -1$; в) $m = 125$; г) $m = -1000$.

2.14. Выканайце дзеянні:

а) $\sqrt[4]{81} - 6$; б) $19 - \sqrt[3]{8}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - 1\frac{2}{3}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}125} - 3{,}5$; д) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{125}$; е) $\sqrt[3]{0{,}008} + \sqrt[5]{32}$;

ж) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; з) $\sqrt[7]{\frac{1}{128}} - \sqrt[9]{1}$; і) $\sqrt[7]{0} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.

2.15. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt[6]{a} + \sqrt[3]{a}$, калі:

а) $a = 1$; б) $a = 0$; в) $a = 64$; г) $a = 0{,}000001$.

2.16. Вылічыце:

а) $\sqrt[5]{100\,000} - \sqrt[4]{0{,}0625}$; б) $-\sqrt[3]{0{,}001} + \sqrt[6]{1}$;

в) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} - \sqrt[5]{0{,}00001}$; г) $-\sqrt[4]{0{,}0016} \cdot \sqrt[3]{8000}$;

д) $-\sqrt[3]{-343} \cdot \sqrt[5]{-1024}$; е) $6 : \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$;

ж) $\sqrt[6]{0{,}000064} : \sqrt[3]{-0{,}064}$; з) $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} : \sqrt[3]{0{,}216}$.

2.17. Знайдзіце значэнне выразу $-3\sqrt[6]{m} + 0{,}5\sqrt[5]{n}$ пры:

а) $m = 64$, $n = 243$; б) $m = 0$, $n = -1$; в) $m = 0{,}000001$, $n = 0{,}00032$.

2.18. Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{6\cos\frac{\pi}{6}}$; б) $\sqrt[5]{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}}$.

2.19. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[4]{6}\;\;^{4}$; б) $\sqrt[5]{13}\;\;^{5}$; в) $\left(-\sqrt[8]{6}\right)^{8}$; г) $\left(\sqrt[7]{-2}\right)^{7}$;

д) $2\sqrt[4]{11}\;\;^{4}$; е) $\left(-\sqrt[5]{3}\right)^{5}$; ж) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{5}\;\;^{6}$; з) $3\sqrt[4]{0{,}2}\;\;^{4}$.

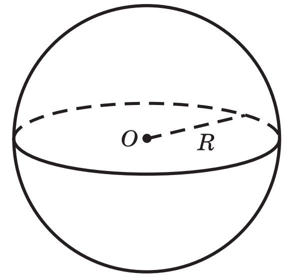
2.20. Вылічыце:

а) $2\sqrt[4]{0{,}0625} - \sqrt[5]{-243}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{1296} - \sqrt[3]{-0{,}064}$;

в) $10\sqrt[4]{0{,}0081} - 0{,}2\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$; г) $\sqrt{\frac{1}{9}}\quad 3\sqrt[3]{\;2\frac{10}{27}}\quad \frac{1}{8}\sqrt[4]{256}$;

д) $\sqrt{0{,}64}\quad 8\sqrt[3]{\;15\frac{5}{8}}\quad \frac{2}{3}\sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}\quad 45\sqrt[3]{\;0{,}001}\quad 5\sqrt[4]{0{,}0016}$.

2.21. Аб’ём шара вылічваецца па формуле $V \quad \frac{4}{3} \quad R^3$ (рыс. 118). Выразіце з гэтай формулы R — радыус шара.



Рыс. 118

2.22. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $0{,}6\sqrt[4]{10\,000} - 3\sqrt[7]{-128} + 4 \cdot \left(-\sqrt[8]{6}\right)^8$;

б) $\left(-2\sqrt[3]{-5}\right)^3 - \sqrt[12]{10^{12}} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}\right)^3$.

2.23*. Вылічыце:

а) $\sqrt[4]{10 + 3\sqrt[3]{8}}$; б) $\sqrt[10]{0{,}7 + 3\sqrt[5]{0{,}00001}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{0{,}125} \qquad \sqrt[3]{\frac{27}{512}}}$.

2.24. З дапамогай азначэння арыфметычнага квадратнага кораня n-й ступені выберыце ўсе правільныя роўнасці:

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{27} = 3$; в) $\sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$;

г) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = -\frac{2}{5}$; д) $\sqrt[4]{1} = 1$; е) $\sqrt[10]{0} = 0$.

2.25. Выберыце выразы, якія маюць сэнс:

а) $\sqrt[6]{12}$; б) $\sqrt[8]{-1}$; в) $\sqrt[5]{6}$; г) $\sqrt[7]{-11}$; д) $\sqrt[4]{0}$.

2.26. Рашыце ўраўненне:

а) $x^4 = 7$; б) $x^6 = 0$; в) $x^7 \quad 4 \quad 0$; г) $x^{10} \quad 1 \quad 0$.

2.27. Знайдзіце значэнне кораня:

а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$; г) $\sqrt[5]{32}$;

д) $\sqrt[3]{64}$; е) $\sqrt[3]{-27}$; ж) $\sqrt[5]{-1}$; з) $\sqrt[3]{0{,}008}$;

і) $\sqrt[3]{-0{,}125}$; к) $\sqrt[7]{0}$; л) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; м) $\sqrt[3]{-27\,000}$;

н) $\sqrt[8]{256}$; о) $\sqrt[3]{-0{,}216}$.

2.28. Знайдзіце значэнне выразу $x + \sqrt[3]{x}$, калі:

а) $x = 0$; б) $x = -1$; в) $x = 8$;

г) $x = -27$; д) $x = 0{,}001$; е) $x = \frac{64}{125}$.

2.29. Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$; б) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; в) $\sqrt[3]{-15\frac{5}{8}}$.

2.30. Знайдзіце значэнні выразаў $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{1000a}$, $\sqrt[3]{-0{,}001a}$, калі:
а) $a = 8$; б) $a = -0{,}125$.

2.31. Выканайце дзеянні:

а) $\sqrt[3]{27} - 2$; б) $10 + \sqrt[4]{16}$; в) $0{,}5 + \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;

г) $\sqrt[3]{-125} + 15$; д) $\sqrt[4]{1} - \sqrt[3]{216}$; е) $\sqrt[3]{0{,}064} - \sqrt[5]{243}$;

ж) $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} - \sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; з) $\sqrt[5]{\frac{1}{100\,000}} - \sqrt[7]{0}$; і) $\sqrt[4]{10\,000} : \sqrt[3]{0{,}125}$;

к) $-\sqrt[5]{0{,}00001} : \sqrt[3]{-8}$; л) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} \cdot \sqrt[5]{0{,}00032}$; м) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}} \cdot \sqrt[3]{27\,000}$.

2.32. Знайдзіце значэнне выразу $2\sqrt[4]{x} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$ пры:

а) $x = 16$, $y = 343$; б) $x = 0$, $y = -1$; в) $x = 0{,}0081$, $y = -0{,}125$.

2.33. Вылічыце:

а) $\sqrt[4]{32\sin\frac{\pi}{6}}$; б) $\sqrt[3]{8\cos\pi}$.

2.34. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[6]{7}^{\;6}$; б) $\sqrt[3]{10}^{\;3}$; в) $\left(-\sqrt[4]{5}\right)^4$;

г) $\left(\sqrt[3]{-7}\right)^3$; д) $2\sqrt[6]{3}^{\;6}$; е) $\left(-\frac{1}{3}\sqrt[4]{6}\right)^4$.

2.35. Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{-0{,}125} - \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; б) $\sqrt[5]{32} \quad 0{,}25\sqrt[3]{\quad 0{,}216}$;

в) $-3\sqrt[4]{\frac{1}{81}} + \sqrt[4]{0{,}0625}$; г) $\sqrt[5]{-100\,000} - 4\sqrt[4]{0{,}0256}$.

2.36. Аб'ём куба вылічваецца па формуле $V = a^3$. Выразіце з гэтай формулы a — даўжыню канта куба.

2.37. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $400\sqrt[3]{-0{,}001} - 0{,}5\sqrt[5]{-0{,}00032} - 3 \cdot \left(-2\sqrt[4]{5}\right)^4$;

б) $4 \cdot \sqrt[4]{7\frac{58}{81}} - \left(2\sqrt[5]{-0{,}1}\right)^5 + \left(-\sqrt[7]{-10^7}\right)$.

2.38. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt{3}\;{}^{2}\quad 5\sqrt{2}\;{}^{2}$; б) $\sqrt{16,9}\cdot\sqrt{10}$;

в) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{54}}$; г) $\sqrt{24}\quad\sqrt{6}+\sqrt{\frac{7}{9}}\quad\sqrt{7}$.

2.39. Знайдзіце значэнне выразу $\sin\frac{3}{2}\quad 4\cos\quad 5\qquad \sin\quad 8\quad .$

2.40. Рашыце няроўнасць $4-x>\frac{1}{x-1}$.

§ 14. Уласцівасці каранёў *n*-й ступені ($n>1$, $n\in N$)

2.41. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$; б) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$.

2.42. Вылічыце:

а) $\sqrt{(-4)^2}$; б) $\sqrt{173^2-52^2}$.

2.43. Пры якіх значэннях t правільная роўнасць:

а) $\sqrt{t^2}=t$; б) $\sqrt{(t\quad 1)^2}\quad 1\quad t$?

Разгледзім дзве ўласцівасці каранёў *n*-й ступені, аналагічныя ўласцівасцям квадратных каранёў.

Уласцівасць 1. Корань *n*-й ступені **са здабытку** неадмоўных множнікаў **роўны здабытку каранёў** *n*-й ступені з гэтых множнікаў:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},\ \text{дзе}\ a\quad 0,\ b\quad 0,\ n\in N,\ n\quad 1.$$

Уласцівасць 2. Корань *n*-й ступені **з дзелі роўны дзелі каранёў** *n*-й ступені дзялімага і дзельніка, калі дзялімае — неадмоўны лік, а дзельнік — дадатны лік:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \text{дзе}\ a\quad 0,\ b\quad 0,\ n\in N,\ n\quad 1.$$

Дакажам уласцівасць 1 для каранёў *n*-й ступені са здабытку двух множнікаў: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, дзе $a\quad 0$, $b\quad 0$, $n\in N$, $n\quad 1$.

Доказ. Пры доказе будзем карыстацца азначэннем арыфметычнага кораня *n*-й ступені з ліку і ўласцівасцямі ступені з цэлым паказчыкам.

Абазначым $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=t$ і пакажам, што $t\geqslant 0$ і $t^n=ab$.

1) Па азначэнні арыфметычнага кораня n-й ступені з ліку маем: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, а паколькі здабытак двух неадмоўных множнікаў ёсць неадмоўны лік, то $\sqrt[n]{a} \quad \sqrt[n]{b} \quad 0$, значыць, $t \geqslant 0$.

2) Па ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам атрымаем:

$t^n \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad ^n \quad \sqrt[n]{a} \quad ^n \cdot \sqrt[n]{b} \quad ^n$, а па азначэнні кораня n-й ступені з ліку $\sqrt[n]{a} \quad ^n \cdot \sqrt[n]{b} \quad ^n \quad ab$, г. зн. $t^n = ab$. Такім чынам, уласцівасць даказана.

Уласцівасць 2 дакажыце самастойна.

Прыклад 1. Вылічыце:

а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32}$; б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{4}{9}}$; в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48}$.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Рашэнне. а) $\sqrt[5]{243 \cdot 32} = \sqrt[5]{243} \cdot \sqrt[5]{32} = 3 \cdot 2 = 6$;

б) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{4}{9}} = \sqrt[4]{36 \cdot \dfrac{4}{9}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

в) $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{36 \cdot 48} = \sqrt[3]{216 \cdot 8} = \sqrt[3]{216} \cdot \sqrt[3]{8} = 6 \cdot 2 = 12$.

Прыклад 2. Вылічыце:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

а) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}} = \dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{256}} = \dfrac{3}{4}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{64}{2}} = \sqrt[5]{32} = 2$.

Уласцівасць 3. Значэнне кораня са ступені не зменіцца, калі і паказчык кораня, і паказчык падкарэннага выразу памножыць на адзін і той жа натуральны лік або падзяліць на іх агульны дзельнік:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}; \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : r]{a^{m : r}},$$

дзе $a \geqslant 0$, $n \in \quad$, $m \in \quad$, $k \in \quad$, r — агульны натуральны дзельнік лікаў m і n, $n > 1$, $k > 1$ і $r > 1$.

Дакажам, што $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ або $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. Доказ правядзём на падставе азначэння кораня ступені nk з ліку a^{mk}.

Абазначым $\sqrt[n]{a^m} = t$, пакажам, што $t \geqslant 0$ і $t^{nk} = a^{mk}$.

Відавочна, што $t \geqslant 0$ па азначэнні арыфметычнага кораня.

Пакажам, што $t^{nk} \quad \sqrt[n]{a^m} \quad ^{nk} \quad a^{mk}$. Па ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам і азначэнні кораня справядлівыя роўнасці: $\sqrt[n]{a^m} \quad ^{nk} \quad \sqrt[n]{a^m} \quad ^n \quad ^k \quad a^m \quad ^k \quad a^{mk}$.

Прыклад 3. Спрасціце выраз $\sqrt[21]{128}$.

Рашэнне:
$\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3\cdot 7]{2^7} = \sqrt[3]{2}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$$

Уласцівасць 4. Каб здабыць корань k-й ступені з кораня n-й ступені з неадмоўнага ліку, дастаткова здабыць корань ступені nk з гэтага ліку:

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

для любых натуральных $n > 1$ і $k > 1$, $a \geqslant 0$.

Для доказу дастаткова паказаць, што $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}^{\;nk}$ a.

Па ўласцівасці ступені з натуральным паказчыкам маем: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}^{\;nk}$ $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}^{\;k\;\;n}$.

Па азначэнні кораня атрымаем: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}^{\;k\;\;n}$ $\sqrt[n]{a}^{\;n}$ a. Уласцівасць даказана.

Прыклад 4. Спрасціце выраз $\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$.

Рашэнне:
$\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}} = \sqrt[3\cdot 4]{15} = \sqrt[12]{15}$.

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

Уласцівасць 5. Для любога рэчаіснага a і натуральнага $n > 1$ справядлівая роўнасць $\sqrt{}$ $|\;\;|$

Сапраўды, калі n — цотны лік, то $|a|^n = a^n$. Калі n — няцотны лік, то $a^n = a^n$. Такім чынам, на падставе азначэння кораня n-й ступені ўласцівасць даказана.

Прыклад 5. Вылічыце:

а) $\sqrt[8]{(-3)^8}$; б) $\sqrt[5]{(-3)^5}$.

Рашэнне.

а) $\sqrt[8]{(\;3)^8}$ $|\;3|$ 3; б) $\sqrt[5]{(\;3)^5}$ 3.

$\sqrt{}$ $|\;\;|$

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625}$; б) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 3125}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[4]{81 \cdot 625} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 3 \cdot 5 = 15$;

б) $\sqrt[5]{0{,}00032 \cdot 3125} = \sqrt[5]{0{,}00032} \cdot \sqrt[5]{3125} = 0{,}2 \cdot 5 = 1$.

2. Вылічыце:

а) $\sqrt[6]{0{,}000243} \cdot \sqrt[6]{19{,}2}$; б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[6]{0{,}000243} \cdot \sqrt[6]{19{,}2} = \sqrt[6]{0{,}000243 \cdot 19{,}2} =$

$= \sqrt[6]{0{,}000243 \cdot 0{,}3 \cdot 64} = \sqrt[6]{0{,}3^5 \cdot 0{,}3 \cdot 64} = 0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6$;

б) $\sqrt[3]{144} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{12^2 \cdot 12} = \sqrt[3]{12^3} = 12$.

3. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}0625}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0{,}001}}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[4]{\dfrac{0{,}0625}{810\,000}} = \dfrac{\sqrt[4]{0{,}0625}}{\sqrt[4]{810\,000}} = \dfrac{0{,}5}{30} = \dfrac{1}{60}$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{216\,000}{0{,}001}} = \dfrac{\sqrt[3]{216\,000}}{\sqrt[3]{0{,}001}} = \dfrac{60}{0{,}1} = 600$.

4. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}000064}}{\sqrt[5]{0{,}2}}$.

Рашэнне. а) $\dfrac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\dfrac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$;

б) $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}000064}}{\sqrt[5]{0{,}2}} = \sqrt[5]{\dfrac{0{,}000064}{0{,}2}} = \sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$.

5. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[6]{16}$; б) $\sqrt[4]{25^2}$; в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[4]{25^2} = \sqrt{25} = 5$;

в) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{4^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$;

г) $\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[12]{6^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^3 \cdot 3^3}{2^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{27}{2}} = \sqrt[12]{13{,}5}.$

6. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}}$; в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$; б) $\sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[2\cdot 8]{a} = \sqrt[16]{a}$;

в) $\sqrt[9]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[18]{a^3} = \sqrt[6]{a}$.

7. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[6]{(-5)^6}$; б) $\sqrt[13]{(-7)^{13}}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[6]{(\ \ 5)^6}$ $|\ \ 5|$ 5; б) $\sqrt[13]{(\ \ 7)^{13}}$ 7.

8. Замяніце выраз на тоесна роўны яму:

а) $\sqrt{k\quad}$ $k \geqslant$ б) $\sqrt{p\quad}$ $p \leqslant$

Рашэнне. а) $\sqrt{k\quad} = |k| = k$ $k \geqslant$

б) $\sqrt{p\quad} = |p| = -p$ $p \leqslant$

1. Пры якіх значэннях a і b правільная роўнасць $\sqrt[6]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{b}}$?

2. Пры якіх значэннях m правільная роўнасць $\sqrt[8]{m^8} = -m$?

2.44. Вылічыце з дапамогай уласцівасці кораня n-й ступені са здабытку:

а) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$; б) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$; в) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 81}$;

г) $\sqrt[5]{32 \cdot 0{,}00243}$; д) $\sqrt[3]{0{,}027 \cdot 15^3}$; е) $\sqrt[4]{625 \cdot 3^8}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}001 \cdot 64 \cdot 343}$; з) $\sqrt[4]{0{,}0016 \cdot 625 \cdot 7^4}$.

2.45. Знайдзіце значэнне здабытку:

а) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{500}$; в) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$;

г) $\sqrt[3]{2{,}7} \cdot \sqrt[3]{10}$; д) $\sqrt[5]{0{,}32} \cdot \sqrt[5]{100}$; е) $\sqrt[4]{0{,}8} \cdot \sqrt[4]{20}$;

ж) $\sqrt[3]{0{,}1} \cdot \sqrt[3]{0{,}08}$; з) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{-2}$.

2.46. Знайдзіце значэнне выразу з дапамогай уласцівасці кораня n-й ступені з дзелі:

а) $\sqrt[4]{\frac{81}{0{,}0625}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{0{,}064}{1000}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{3\,200\,000}{0{,}00243}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{0{,}343}{125}}$.

2.47. Знайдзіце значэнне дзелі:

а) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{400}}{\sqrt[3]{50}}$;

г) $\frac{\sqrt[4]{4{,}8}}{\sqrt[4]{0{,}3}}$; д) $\sqrt[3]{\frac{5}{36}} : \sqrt[3]{\frac{6}{25}}$; е) $\sqrt[3]{7\frac{1}{5}} : \sqrt[3]{-\frac{1}{30}}$.

2.48. Параўнайце значэнні выразаў $\sqrt[4]{ab}$ і $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, калі:

а) $a = 16$, $b = 625$; б) $a = -256$, $b = -0{,}0081$; в) $a = 7^4$, $b = 3^8$.

Ці можна знайсці значэнні дадзеных выразаў, калі лікі a і b розных знакаў?

2.49. Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125} - \sqrt[4]{16 \cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{8}{343}} + \sqrt[4]{\frac{0{,}0625}{256}}$.

2.50. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[4]{\frac{0{,}0016 \cdot 256}{810\,000}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{0{,}008}{27 \cdot 0{,}125}}$.

2.51. Знайдзіце значэнне здабытку:

а) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$; б) $\sqrt[4]{72} \cdot \sqrt[4]{18}$; в) $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$;

г) $\sqrt[5]{160} \cdot \sqrt[5]{625}$; д) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-6} \cdot \sqrt[3]{9}$; е) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{12}$.

2.52. Знайдзіце значэнне дзелі:

а) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{250}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{96}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{3125}}{\sqrt[3]{5400}}$; г) $\frac{\sqrt[5]{6{,}4}}{\sqrt[5]{48{,}6}}$.

2.53. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$, выкарыстаўшы ўласцівасці кораня.

2.54. Знайдзіце, у колькі разоў лік:

а) $\sqrt[6]{128}$ большы за лік $\sqrt[6]{2}$; б) лік $\sqrt[3]{4}$ меншы за лік $\sqrt[3]{108}$.

2.55. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $5\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $-6\sqrt[5]{4} \cdot 3\sqrt[5]{8}$;

в) $3\sqrt[3]{7} \cdot \left(\sqrt[3]{-49}\right)$; г) $5\sqrt[4]{10} \cdot 0{,}3\sqrt[4]{1000}$.

2.56. Вызначце, ці з'яўляюцца ўзаемна адваротнымі лікі:

а) $\sqrt[3]{5}$ і $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$; б) $2\sqrt[4]{2}$ і $\frac{1}{\sqrt[4]{32}}$; в) $\sqrt[5]{64}$ і $-\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$.

2.57. Знайдзіце значэнне выразу на падставе ўласцівасцей кораня n-й ступені:

а) $\sqrt[4]{1780^2 - 780^2}$; б) $\sqrt[3]{0{,}69^2 - 0{,}51^2}$;

в) $\sqrt[4]{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{34} + 3\sqrt{2}}$; г) $\sqrt[3]{5\sqrt{3} \quad \sqrt{11}} \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{3} \quad \sqrt{11}}$.

2.58. Запішыце выраз $\sqrt[3]{2}$ у выглядзе кораня:

а) шостай ступені; б) дзявятай ступені;

в) дванаццатай ступені; г) васямнаццатай ступені.

2.59. Запішыце выраз $\sqrt{a}$ у выглядзе кораня:

а) чацвёртай ступені; б) шостай ступені;

в) дзясятай ступені; г) шаснаццатай ступені.

2.60. Запішыце ў выглядзе каранёў адной і той жа ступені лікі:

а) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}$ і $\sqrt[6]{3}$; б) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{3}$ і $\sqrt[12]{7}$.

2.61. Запішыце выраз у выглядзе кораня з меншым паказчыкам:

а) $\sqrt[6]{2^4}$; б) $\sqrt[15]{7^9}$; в) $\sqrt[8]{3^4}$; г) $\sqrt[24]{12^8}$;

д) $\sqrt[4]{25}$; е) $\sqrt[6]{81}$; ж) $\sqrt[6]{125}$; з) $\sqrt[12]{27}$.

2.62. Вылічыце:

а) $\sqrt[6]{49^3}$; б) $\sqrt[6]{125^2}$; в) $\sqrt[100]{9^{50}}$; г) $\sqrt[24]{7^{48}}$.

2.63. Запішыце ў выглядзе кораня:

а) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{0{,}5}$; б) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{50}}{\sqrt{5}}$;

г) $\frac{\sqrt[10]{80}}{\sqrt[5]{4}}$; д) $\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[12]{3}$; е) $\sqrt[6]{5} : \sqrt[4]{2}$.

2.64. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4}$; б) $\sqrt[7]{-5} \cdot \sqrt[14]{25}$; в) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{8}$;

г) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[12]{3}$; д) $\frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{343}}{\sqrt[12]{7}}$; е) $\frac{\sqrt[8]{8^3} \cdot \sqrt[40]{8}}{\sqrt[5]{8^4}}$.

2.65. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}$;

г) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{a^{10}}}$; д) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{a}}$; е) $\sqrt[4]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[4]{a}}$.

2.66 Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[9]{3^7}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}} \cdot \sqrt[6]{5^5}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{\sqrt[15]{2}}{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}}$.

2.67. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[4]{(-17)^4}$; б) $\sqrt[5]{(-10)^5}$; в) $\sqrt[6]{(-7)^6}$; г) $\sqrt[7]{(-13)^7}$.

2.68. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[4]{a^4}$, калі $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{b^6}$, калі $b < 0$;

в) $\sqrt[4]{81m^4}$, калі $m \geqslant 0$; г) $\sqrt[8]{\dfrac{c^8}{256}}$, калі $c < 0$;

д) $-3\sqrt[4]{16b^4}$, калі $b < 0$; е) $-2a\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{625}}$, калі $a \geqslant 0$.

2.69. Запішыце выраз у выглядзе адначлена:

а) $\sqrt[7]{a^7}$; б) $-4\sqrt[3]{8a^3}$; в) $12a\sqrt[9]{-a^9}$; г) $5a^2\sqrt[5]{-32a^5}$.

2.70. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[4]{x^4} - x$, калі $x \geqslant 0$; б) $\sqrt[6]{x^6} - \sqrt[3]{x^3}$, калі $x \leqslant 0$.

2.71. Спрасціце выраз $\sqrt[3]{343x^3}$ $\sqrt[4]{81x^4}$ $\sqrt{64x^2}$ і знайдзіце яго значэнне пры $x = -0{,}5$.

2.72. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[4]{a^{12}}$, калі $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{8b^9}$; в) $\sqrt[4]{16m^8}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{c^{16}}{81}}$;

д) $-6\sqrt[4]{625b^{20}}$, калі $b < 0$; е) $-8a\sqrt[6]{\dfrac{a^{18}}{64}}$, калі $a \geqslant 0$.

2.73. Спрасціце выраз $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}a^4b^{12}}$, калі a і b:

а) лікі аднаго знака; б) лікі розных знакаў.

2.74. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[4]{(a-7)^4}$ пры $a \geqslant 7$; б) $\sqrt[6]{(a+8)^6}$ пры $a < -8$;

в) $\sqrt[8]{(y-3)^8} + \sqrt[4]{(y-5)^4}$ пры $3 \leqslant y \leqslant 5$.

2.75*. Вылічыце:

а) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{120} - 11\right)^4} + \sqrt[4]{\left(\sqrt{120} + 11\right)^4}$;

б) $\sqrt[6]{\left(4\sqrt{6} + 10\right)^6} - \sqrt[6]{\left(4\sqrt{6} - 10\right)^6} - 20$.

2.76. Вылічыце з дапамогай уласцівасці кораня n-й ступені са здабытку:

а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{81 \cdot 256}$; в) $\sqrt[5]{243 \cdot 0{,}00001}$;

г) $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 343}$; д) $\sqrt[5]{32 \cdot 6^5}$; е) $\sqrt[3]{0{,}008 \cdot 27 \cdot 9^6}$.

2.77. Знайдзіце значэнне здабытку:

а) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{3{,}2} \cdot \sqrt[3]{20}$; в) $\sqrt[4]{6{,}25} \cdot \sqrt[4]{100}$;

г) $\sqrt[5]{24{,}3} \cdot \sqrt[5]{10}$; д) $\sqrt[4]{0{,}5} \cdot \sqrt[4]{0{,}125}$; е) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{-9}$.

2.78. Знайдзіце значэнне выразу з дапамогай уласцівасці кораня n-й ступені з дзелі:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{0{,}0081}}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{27\,000}{0{,}008}}$; в) $\sqrt[5]{\dfrac{0{,}00001}{32}}$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{625}{0{,}0016}}$.

2.79. Знайдзіце значэнне дзелі:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt[7]{256}}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{1250}}{\sqrt[4]{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{-128}}{\sqrt[3]{2000}}$.

2.80. Знайдзіце значэнні выразаў $\sqrt{mn}$ і $\sqrt[3]{\dfrac{m}{n}}$, калі:

а) $m = 125$, $n = 0{,}027$; б) $m = 10^6$, $n = 2^3$.

2.81. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{\dfrac{125 \cdot 343}{0{,}027}}$; б) $\sqrt[4]{\dfrac{160\,000}{81 \cdot 625}}$.

2.82. Знайдзіце значэнне выразу, выкарыстаўшы ўласцівасці кораня n-й ступені:

а) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt[4]{27}$; в) $\sqrt[3]{-15} \cdot \sqrt[3]{225}$;

г) $\sqrt[5]{48} \cdot \sqrt[5]{162}$; д) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{40}}$; е) $\dfrac{\sqrt[4]{648}}{\sqrt[4]{128}}$.

2.83. Вылічыце:

а) $7\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $-2\sqrt[5]{9} \cdot 5\sqrt[5]{27}$;

в) $8\sqrt[3]{10} \cdot \left(\sqrt[3]{-100}\right)$; г) $0{,}4\sqrt[4]{5} \cdot 7\sqrt[4]{125}$.

2.84. Знайдзіце значэнне выразу на падставе ўласцівасцей кораня n-й ступені:

а) $\sqrt[4]{175^2 - 168^2}$; б) $\sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}$.

2.85. Запішыце выраз $\sqrt[4]{3}$ у выглядзе кораня:

а) восьмай ступені;
б) дванаццатай ступені;
в) шаснаццатай ступені.

2.86. Запішыце ў выглядзе каранёў адной і той жа ступені лікі:

а) $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt{2}$ і $\sqrt[10]{3}$; б) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$ і $\sqrt[8]{7}$.

2.87. Запішыце выраз у выглядзе кораня з меншым паказчыкам:

а) $\sqrt[12]{3^3}$; б) $\sqrt[8]{5^6}$; в) $\sqrt[4]{7^2}$; г) $\sqrt[12]{3^6}$; д) $\sqrt[6]{27}$; е) $\sqrt[15]{32}$.

2.88. Вылічыце:

а) $\sqrt[8]{25^4}$; б) $\sqrt[12]{27^4}$; в) $\sqrt[30]{81^{15}}$; г) $\sqrt[16]{10^{32}}$.

2.89. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[6]{36}$; б) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[10]{4}$; в) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[12]{5}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$.

2.90. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[4]{b}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{b}}$; в) $\sqrt{\sqrt[7]{b^2}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^6}}$.

2.91. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}\cdot\sqrt[9]{2^5}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}\cdot\sqrt[6]{3^5}$; в) $\dfrac{\sqrt[21]{5}}{\sqrt[7]{\sqrt[3]{5}}}+\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{9}}$.

2.92. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[8]{(-19)^8}$; б) $\sqrt[3]{(-5)^3}$; в) $\sqrt[4]{(-2)^4}$; г) $\sqrt[5]{(-11)^5}$.

2.93. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[8]{m^8}$, калі $m \geqslant 0$; б) $\sqrt[4]{c^4}$, калі $c < 0$;

в) $\sqrt[6]{64x^6}$, калі $x \geqslant 0$; г) $\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{81}}$, калі $a < 0$;

д) $-2\sqrt[4]{625y^4}$, калі $y < 0$; е) $-3b\sqrt[8]{\dfrac{b^8}{256}}$, калі $b \geqslant 0$.

2.94. Запішыце выраз у выглядзе адначлена:

а) $\sqrt[3]{x^3}$; б) $-2\sqrt[5]{32b^5}$; в) $10c\sqrt[11]{-c^{11}}$; г) $3y^5\sqrt[7]{-128y^7}$.

2.95. Спрасціце выраз $\sqrt[4]{625c^4}-\sqrt[5]{32c^5}+\sqrt{36c^2}$ і знайдзіце яго значэнне пры $c=-\dfrac{1}{13}$.

2.96. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[6]{a^{18}}$, калі $a \geqslant 0$; б) $\sqrt[3]{27m^6}$; в) $\sqrt[6]{64a^{12}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{a^{48}}{16}}$;

д) $-2\sqrt[4]{81b^{12}}$, калі $b < 0$; е) $-8n\sqrt[8]{\frac{n^{24}}{256}}$, калі $n \geqslant 0$.

2.97. Спрасціце выраз $\sqrt[4]{\frac{16}{81}m^8n^{20}}$, калі:

а) $n \geqslant 0$; б) $n < 0$.

Растлумачце, чаму знак значэння дадзенага выразу не залежыць ад знака зменнай m.

2.98*. Запішыце ў выглядзе мнагачлена выраз:

а) $\sqrt[4]{(a-4)^4}$ пры $a > 4$; б) $\sqrt[6]{(b+2)^6}$ пры $b < -2$;

в) $\sqrt[8]{(3b+10{,}2)^8} - 10{,}2$ пры $-3 \leqslant b \leqslant 3$.

2.99. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\frac{3}{x \quad 5} \quad 1 \quad \frac{4}{x^2 \quad 10x \quad 25}$.

2.100. Параўнайце значэнні выразаў $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{10}}$ і $\frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}$.

2.101. Ведаючы, што $a \quad 0$, $b \quad 0$, вынесіце множнік за знак кораня ў выразе:

а) $\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt{7b^2}$; в) $\sqrt{50a^6b^4}$; г) $\sqrt{\frac{49}{64}a^5b^2}$.

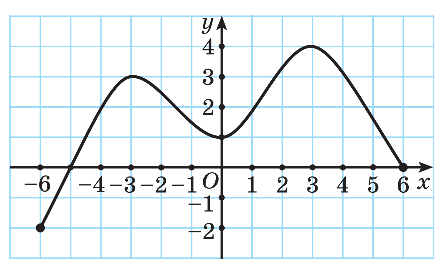
2.102. У выразе $a\sqrt{5}$ унясіце множнік пад знак кораня, калі:

а) $a \geqslant 0$; б) $a < 0$.

2.103. Скараціце дроб $\frac{5a \quad 2 \quad 5ab \quad 2b}{2b \quad 2 \quad 5ab \quad 5a}$.

2.104. На рысунку 119 паказаны графік функцыі $y = f(x)$, зададзенай на адрэзку $[-6; 6]$. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = f(x-2)$; б) $y = f(x+1)$;
в) $y = f(x) - 3$; г) $y = f(x) + 4$.



Рыс. 119

2.105. Вылічыце:

а) $\mathrm{tg}\ \ 2\arccos\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ $;

б) $\mathrm{ctg}\ \ 2\arcsin\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ $.

§ 15. Прымяненне ўласцівасцей каранёў n-й ступені для пераўтварэння выразаў

2.106. Не здабываючы каранёў, вызначце, які з лікаў большы: $2\sqrt{3}$ ці $3\sqrt{2}$?

2.107. Спрасціце выраз $\sqrt{50} - 5\sqrt{8} + \sqrt{18} + 3\sqrt{2}$.

2.108. Дакажыце, што значэнне выразу $\frac{1}{2 \quad \sqrt{3}} \quad \frac{2}{\sqrt{3} \quad 1}$ з'яўляецца рацыянальным лікам.

Вынясенне множніка за знак кораня

Пры выкананні пераўтварэнняў ірацыянальных выразаў, якія змяшчаюць карані n-й ступені, падкарэнныя выразы раскладаюць на множнікі, некаторыя з якіх уяўляюць сабой ступень з паказчыкам, роўным паказчыку кораня. Тады можна выканаць дзеянне, якое называецца **вынясеннем множніка за знак кораня.**

Вынесем множнік за знак кораня ў выразе $\sqrt[3]{54}$. Для гэтага лік 54 запішам у выглядзе здабытку двух множнікаў, адзін з якіх з'яўляецца кубам некаторага выразу. Тады $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$.

У гэтым выпадку гавораць, што множнік 3 вынеслі за знак кораня.

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3};$$

$$\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 3\sqrt[4]{2};$$

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$$

Каб вынесці множнік за знак кораня, трэба:

① Запісаць падкарэнны выраз у выглядзе здабытку, які змяшчае ступені выразаў з паказчыкам, роўным паказчыку кораня. ② Прымяніць уласцівасць кораня са здабытку. ③ Знайсці корань n-й ступені з выразу ў ступені n. ④ Запісаць здабытак атрыманага множніка і кораня.	Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе $\sqrt[5]{160}$. ① $\sqrt[5]{160} = \sqrt[5]{32 \cdot 5} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 5}$. ② $\sqrt[5]{2^5 \cdot 5} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{5}$. ③ $\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{5} = 2 \cdot \sqrt[5]{5}$. ④ $\sqrt[5]{160} = 2\sqrt[5]{5}$.

Унясенне множніка пад знак кораня

Пры выкананні вылічэнняў і пераўтварэнняў, параўнанні значэнняў выразаў часам трэба выконваць дзеянне, адваротнае дзеянню вынясення множніка за знак кораня. Яно называецца **ўнясеннем множніка пад знак кораня.**

Унясём множнік 2 пад знак кораня ў выразе $2\sqrt[3]{7}$.

$2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{8 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$.

У выразе $a\sqrt[4]{b}$, дзе $b > 0$, $a \neq 0$, унясём множнік a пад знак кораня. Калі $a > 0$, то

$$a\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^4 \cdot b}.$$

Калі $a < 0$, то

$$a\sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{(-a)^4} \cdot \sqrt[4]{b} = -\sqrt[4]{a^4 \cdot b}.$$

$$4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{64 \cdot 3} = \sqrt[3]{192};$$

$$3\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{81 \cdot 5} = \sqrt[4]{405}$$

Каб унесці множнік пад знак кораня, трэба:

① Запісаць неадмоўны множнік у выглядзе кораня n-й ступені з n-й ступені гэтага множніка. ② Здабытак каранёў замяніць коранем са здабытку. ③ Запісаць корань са здабытку.	Унясіце множнік пад знак кораня ў выразе $5\sqrt[4]{2}$. ① $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2}$; ② $\sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{625 \cdot 2}$; ③ $\sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{1250}$. $5\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1250}$.

Пераўтварэнне выразаў, якія змяшчаюць карані *n*-й ступені

Прыклад 1. Знайдзіце суму $\sqrt[6]{4}\quad \sqrt[3]{250}\quad 2\sqrt[3]{686}\quad \sqrt[3]{128}$.

Рашэнне. $\sqrt[6]{4}\quad \sqrt[3]{250}\quad 2\sqrt[3]{686}\quad \sqrt[3]{128} =$

$$= \sqrt[6]{2^2}\quad \sqrt[3]{125 \cdot 2}\quad 2\sqrt[3]{2 \cdot 343}\quad \sqrt[3]{2 \cdot 64} = \sqrt[3]{2}\quad 5\sqrt[3]{2}\quad 14\sqrt[3]{2}\quad 4\sqrt[3]{2} = -12\sqrt[3]{2}.$$

Прыклад 2. Спрасціце выраз $\left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$.

Рашэнне. $\left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \quad \sqrt[4]{3}\;^{2}\quad \sqrt[4]{2}\;^{2}\quad \sqrt{3}\quad \sqrt{2} =$

$$= \left(\sqrt[4]{3^2} - \sqrt[4]{2^2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \quad \sqrt{3}\;^{2}\quad \sqrt{2}\;^{2}\quad 3\quad 2\quad 1.$$

Прыклад 3. Раскладзіце на множнікі $2\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{500}$.

Рашэнне. $2\sqrt[3]{16} + \sqrt[6]{500} = 2\sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[6]{125 \cdot 4} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} \quad 4\sqrt[3]{2}$
$\sqrt{5}\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{2}\ 4 \quad \sqrt{5}$.

Прыклад 4 . Скараціце дроб $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}}$.

Рашэнне. $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}} \quad \dfrac{b\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}} \quad \dfrac{b\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}}{a\ \sqrt[3]{a}\ ^{2}} \quad \dfrac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a}}$.

Пазбаўленне ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу

Калі ў назоўніку дробу ёсць выразы з каранямі, выконваюць пераўтварэнні, якія прыводзяць да дробаў без выразаў з каранямі ў назоўніку. Традыцыя такога пераўтварэння каранёў, з аднаго боку, звязана з набліжанымі вылічэннямі, а з другога — з больш зручным (рацыянальным) спрашчэннем выразаў.

Прыклад 5. Пазбаўцеся ад кораня ў назоўніку дробу $\dfrac{3}{\sqrt[4]{8}}$.

Рашэнне. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{8}} = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}} = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{2}$.

Прыклад 6.* Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу
$\dfrac{2}{\left(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)}$.

Рашэнне. $\dfrac{2}{\left(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}\right)}{\left(\sqrt[4]{6} - \sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}\right)}{\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)} =$
$= 2\left(\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{5}\right)$.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[5]{a^5b^2}$; б) $\sqrt[4]{a^4b^3}$ пры $a < 0$.

Рашэнне. а) $\sqrt[5]{a^5b^2} = \sqrt[5]{a^5} \cdot \sqrt[5]{b^2} = a\sqrt[5]{b^2}$;

б) $\sqrt[4]{a^4b^3} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^3} = |a|\sqrt[4]{b^3} = -a\sqrt[4]{b^3}$, паколькі $a < 0$.

2. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $-2\sqrt[3]{2}$; б) $2a\sqrt[4]{-a}$.

Рашэнне. а) $2\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} \quad \sqrt[3]{2^4}$;

б) $2a\sqrt[4]{\ \ a} \quad (\ \ 2a)\sqrt[4]{\ \ a} \quad \sqrt[4]{(\ \ 2a)^4(\ \ a)} \quad \sqrt[4]{16(\ \ a)^5} \quad \sqrt[4]{\ \ 16a^5}$.

3. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{16} \quad \sqrt[3]{54} \quad \sqrt[3]{2}$; б) $\left(2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{27}\right) \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15}$.

Рашэнне. а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} + \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} =$

$2\sqrt[3]{2} \quad 3\sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{2} \quad 4\sqrt[3]{2}$;

б) $\left(2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{27}\right) \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15} = 2\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} - 2\sqrt[4]{15} =$

$= 2\sqrt[4]{15} - \sqrt[4]{81} - 2\sqrt[4]{15} = -\sqrt[4]{81} = -3$.

4. Выканайце дзеянні: $\left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}\right)\left(a + \sqrt{b}\right)$.

Рашэнне. $\left(\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt[4]{b}\right)\left(a + \sqrt{b}\right) = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{b}\right)^2\right)\left(a + \sqrt{b}\right) =$

$a \quad \sqrt{b} \quad a \quad \sqrt{b} \quad a^2 \quad b$.

5. Скараціце дроб $\dfrac{\sqrt[6]{32} + \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}}$.

Рашэнне. $\dfrac{\sqrt[6]{32} \quad \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} \quad \dfrac{\sqrt[6]{8 \cdot 4} \quad \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} \quad \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{2}} \quad \dfrac{\sqrt[3]{2} \quad \sqrt{2} \quad 1}{2\sqrt[3]{2}} \quad \dfrac{\sqrt{2} \quad 1}{2}$.

6. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу $\dfrac{2}{\sqrt[4]{125}}$.

Рашэнне. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{125}} = \dfrac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}} = \dfrac{2\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{625}} = \dfrac{2\sqrt[4]{5}}{5}$.

7. Спрасціце выраз $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}}$.

Рашэнне. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}} = \dfrac{\sqrt[4]{7} \quad \sqrt[4]{3} \quad \sqrt[4]{7} \quad \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{7} \quad \sqrt[4]{3} \quad \sqrt[4]{7} \quad \sqrt[4]{3}} = \dfrac{2\sqrt[4]{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{2\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)} = \dfrac{2\sqrt[4]{7} \quad \sqrt{7} \quad \sqrt{3}}{7 \quad 3} \quad \dfrac{\sqrt[4]{7} \quad \sqrt{7} \quad \sqrt{3}}{2}$.

Ці праўда, што:

а) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^2}$; б) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^6}$; в) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^{12}}$; г) $b\sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{b^7}$?

2.109. Выкарыстаўшы алгарытм, вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[3]{16}$; б) $\sqrt[3]{500}$; в) $\sqrt[4]{80}$; г) $\sqrt[4]{810}$;

д) $\sqrt[4]{162}$; е) $\sqrt[5]{486}$; ж) $\sqrt[5]{700\,000}$; з) $\sqrt[7]{256}$.

2.110. Спрасціце выраз:

а) $16\sqrt[3]{24}$; б) $\frac{5}{6}\sqrt[3]{54}$; в) $-0{,}5\sqrt[4]{48}$;

г) $\frac{\sqrt[5]{200\,000}}{5}$; д) $-\frac{5\sqrt[5]{96}}{6}$; е) $-\frac{\sqrt[7]{640}}{8}$.

2.111. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[4]{7a^4}$; б) $\sqrt[6]{13b^{12}}$; в) $\sqrt[4]{32m^4n^{12}}$; г) $\sqrt[3]{27ck^6d^9}$.

2.112. Запішыце некалькі значэнняў зменнай, для якіх правільная роўнасць:

а) $\sqrt[4]{7k^4} = k\sqrt[4]{7}$; б) $\sqrt[6]{3p^6} = -p\sqrt[6]{3}$;

в) $\sqrt[8]{2m^{16}} = m^2\sqrt[8]{2}$; г) $\sqrt[5]{7a^{15}} = a^3\sqrt[5]{7}$.

2.113. Ведаючы, што $a \quad 0$, $b \quad 0$, вынесіце множнік за знак кораня ў выразе:

а) $\sqrt[4]{2a^4}$; б) $\sqrt[6]{7b^6}$; в) $\sqrt[4]{32a^{12}b^8}$;

г) $\sqrt[8]{256a^{17}b^{16}}$; д) $\sqrt[10]{5a^{20}b^{40}}$; е) $\sqrt[8]{2a^{24}b^{40}}$.

2.114. Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе:

а) $\sqrt[3]{5a^3}$; б) $\sqrt[3]{b^4}$; в) $\sqrt[5]{m^7}$;

г) $\sqrt[5]{x^5y^{16}}$; д) $\sqrt[5]{a^{11}b^6}$; е) $\sqrt[3]{-54m^5n^9}$.

2.115. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[4]{625m^4n}$, калі $m < 0$;

б) $\sqrt[4]{162x^{12}y^5}$, калі $x \leqslant 0$;

в) $\sqrt[6]{128a^{12}b^6}$, калі $a \quad 0$, $b \quad 0$;

г) $\sqrt[6]{1\,000\,000c^7d^{13}}$, калі $c < 0$, $d < 0$.

2.116. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[4]{a^5}$; б) $\sqrt[6]{-b^7}$; в) $\sqrt[4]{x^{13}y^{17}}$; г) $\sqrt[8]{-2m^{25}}$.

2.117. Выкарыстаўшы алгарытм, унясіце множнік пад знак кораня:

а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $2\sqrt[4]{7}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{54}$;

д) $0,25\sqrt[4]{320}$; е) $10\sqrt[5]{0,456}$; ж) $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$; з) $2\sqrt[6]{0,25}$.

2.118. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $3\sqrt[4]{a}$; б) $2\sqrt[4]{5b}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27x}$;

г) $-3\sqrt[4]{m}$; д) $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{160n^5}$; е) $-0,2\sqrt[5]{100c}$.

2.119. У выразе $m\sqrt[4]{2}$ унясіце множнік пад знак кораня, калі:

а) $m \geqslant 0$; б) $m < 0$.

2.120. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $(a+1)\sqrt[4]{3}$, калі $a > -1$; б) $(b-3)\sqrt[6]{5}$, калі $b \leqslant 3$;

в) $a\sqrt[7]{6}$; г) $b\sqrt[5]{b}$;

д) $m\sqrt[8]{m}$; е) $n\sqrt[4]{-n}$;

ж) $(x-1)\sqrt[8]{x-1}$; з) $(y-2)\sqrt[10]{2-y}$.

2.121. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}$.

2.122. Спрасціце выраз:

а) $2\sqrt[3]{3} + 7\sqrt[3]{3}$; б) $4\sqrt[5]{2} - 9\sqrt[5]{2}$; в) $6\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3}$;

г) $3\sqrt[6]{7} - \sqrt[6]{7}$; д) $7\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{6}$; е) $5\sqrt[8]{10} \quad 3\sqrt[8]{10} \quad 8\sqrt[8]{10}$.

2.123. Знайдзіце суму, рознасць, здабытак і дзель лікаў:

а) $7\sqrt[3]{2}$ і $3\sqrt[3]{2}$; б) $-5\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[4]{3}$; в) $-\sqrt[5]{7}$ і $\sqrt[5]{7}$.

2.124. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3}$; б) $5\sqrt[7]{3} + \sqrt[7]{384}$;

в) $3\sqrt[5]{64} - 4\sqrt[5]{486}$; г) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}$;

д) $\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{320} + \sqrt[3]{40}$; е) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} + 0,1\sqrt[3]{2000}$.

2.125. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{32}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{27}\right)^2$;

в) $\left(\sqrt[4]{24}-\sqrt[4]{6}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{45}\right)^2$.

Ці праўда, што значэнне выразу з’яўляецца рацыянальным лікам?

2.126. Спрасціце выраз:

а) $\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}\right)\cdot\sqrt[3]{4}$; б) $3\sqrt[5]{3}\cdot\left(4\sqrt[5]{729}+\sqrt[5]{3}\right)$;

в) $\left(7\sqrt[7]{2}-4\sqrt[7]{256}\right):\sqrt[7]{2}$; г) $\sqrt[3]{135}\quad 2\sqrt[3]{320}\quad \sqrt[3]{40}\ :\ 2\sqrt[3]{5}$.

2.127. Выканайце дзеянні:

а) $\sqrt[3]{24}\quad \sqrt{50}\quad \sqrt[3]{3}\quad \sqrt{72}\quad \sqrt{8}$; б) $6\sqrt[4]{5}\quad \sqrt{20}\quad \sqrt{180}\quad \sqrt[8]{25}\quad 3\sqrt{500}$.

2.128. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з’яўляецца значэнне выразу:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\quad 5\sqrt[3]{32}\quad \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{24}+5\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}}$.

2.129. Перыметр прамавугольніка роўны $12\sqrt[4]{2}$ см, а адна з яго старон роўна $3\sqrt[4]{2}$ см. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

2.130. Плошча поўнай паверхні куба роўна $\sqrt[3]{432}$ см^2. Знайдзіце аб’ём куба.

2.131. Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}+\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[3]{25}}}{\sqrt[6]{25\cdot\sqrt{5}}}$.

2.132. Прымяніце формулу рознасці квадратаў і вылічыце:

а) $\left(1+\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt[4]{7}\right)\left(1-\sqrt[4]{7}\right)$; б) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{17}\right)\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{17}\right)$;

в) $\left(25+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt[4]{3}\right)\left(5-\sqrt[4]{3}\right)$; г) $\left(\sqrt[4]{36}+1\right)\left(\sqrt[8]{36}+1\right)\left(\sqrt[8]{36}-1\right)$.

2.133. Знайдзіце значэнне выразу $\left(1+\sqrt[6]{a}\right)\left(\sqrt[6]{a}-1\right)$ пры $a=27$.

2.134. Выканайце дзеянні:

а) $\left(x^2+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt[4]{y}\right)\left(x+\sqrt[4]{y}\right)$; б) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$.

2.135. Пры $a=\sqrt[4]{5}-1$ знайдзіце значэнне выразу:

а) $(a+1)^2$; б) a^2+2a.

2.136. Знайдзіце значэнне выразу $m^2-10m+9$ пры $m\quad \sqrt[4]{49}\quad 5$.

2.137. Раскладзіце на множнікі выраз:

а) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[3]{3}-3$; в) $\sqrt[4]{5}-15$; г) $\sqrt[4]{45}+\sqrt{3}$.

2.138. Запішыце ў выглядзе здабытку выраз:

а) $\sqrt[4]{2x} - \sqrt[4]{3y} + \sqrt[4]{2y} - \sqrt[4]{3x}$;

б) $\sqrt[3]{a^4} \quad \sqrt[3]{ab^3} \quad \sqrt[3]{a^3b} \quad \sqrt[3]{b^4}$.

2.139. Раскладзіце на множнікі суму:

а) $\sqrt[4]{a} \quad \sqrt[8]{a} \quad 6$; б) $\sqrt[5]{x} + 8\sqrt[10]{x} + 12$;

в) $\sqrt{n} - 4\sqrt[4]{n} + 3$; г) $2\sqrt[3]{m} - 5\sqrt[6]{m} + 2$.

2.140. Скараціце дроб:

а) $\frac{\sqrt[3]{11} - 11}{\sqrt[3]{11}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{48}}{3 + \sqrt[4]{3}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{5} + 1}{\sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{3}}$; г) $\frac{2 - \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162} - 6}$.

2.141. Скараціце дроб:

а) $\frac{\sqrt[3]{10a} - \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{4a} - \sqrt[3]{6}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{14} - \sqrt[4]{21b}}{\sqrt[4]{7b} - \sqrt[4]{14}}$; в) $\frac{\sqrt[5]{a^2} - \sqrt[5]{ab}}{\sqrt[5]{b^2} - \sqrt[5]{ab}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x^2y}}$.

2.142. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{4-3\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)^2}$; б) $\frac{\left(\sqrt[4]{24} + \sqrt[4]{6}\right)^2}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}$.

2.143. Скараціце дроб:

а) $\frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt[4]{a} + 1}$; б) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; в) $\frac{\sqrt[12]{x} \quad 3}{\sqrt[6]{x} \quad 9}$; г) $\frac{m - \sqrt[4]{m^7}}{\sqrt{m} - \sqrt[4]{m}}$.

2.144. Прымяніце формулы скарочанага множання і скараціце дроб:

а) $\frac{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[3]{b}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n}}{4\sqrt[3]{n^2} + 4\sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{m^2}}$.

2.145. Ці праўда, што значэнне выразу з'яўляецца ірацыянальным лікам:

а) $\frac{\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[6]{3} + 1}{\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt{3}\right)^2}$; б) $\frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45}\right)^2}{1 - 2\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}}$?

2.146. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; б) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{12}{\sqrt[4]{8}}$; г) $\frac{30}{\sqrt[3]{15}}$.

2.147. Спрасціце выраз:

а) $\frac{20}{\sqrt[3]{25}} + \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[5]{2} - \frac{24}{\sqrt[5]{16}}$.

2.148. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$; б)* $\dfrac{7}{\sqrt[4]{5}-\sqrt{3}}$.

2.149. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$; б)* $\dfrac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{101}+10\right)^2}}{\sqrt[3]{10-\sqrt{101}}}+10$.

2.150. Выкарыстаўшы алгарытм, вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[3]{432}$; в) $\sqrt[4]{48}$; г) $\sqrt[4]{160}$;

д) $\sqrt[4]{324}$; е) $\sqrt[5]{160}$; ж) $\sqrt[5]{500\,000}$; з) $\sqrt[7]{384}$.

2.151. Спрасціце выраз:

а) $7\sqrt[3]{16}$; б) $0{,}3\sqrt[3]{500}$; в) $-5\sqrt[4]{80}$;

г) $\dfrac{\sqrt[5]{900\,000}}{2}$; д) $-\dfrac{7\sqrt[5]{486}}{3}$; е) $-\dfrac{\sqrt[7]{256}}{4}$.

2.152. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[4]{3b^4}$; б) $\sqrt[6]{17a^{12}}$; в) $\sqrt[4]{162k^8p^4}$; г) $\sqrt[3]{8xy^9z^6}$.

2.153. Ведаючы, што m 0, n 0, вынесіце множнік за знак кораня ў выразе:

а) $\sqrt[4]{5n^4}$; б) $\sqrt[6]{7m^6}$; в) $\sqrt[4]{48m^8n^{12}}$;

г) $\sqrt[6]{3m^6n^{13}}$; д) $\sqrt[8]{2m^{16}n^{32}}$; е) $\sqrt[10]{5m^{30}n^{50}}$.

2.154. Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе:

а) $\sqrt[3]{7b^3}$; б) $\sqrt[3]{a^5}$; в) $\sqrt[5]{n^6}$;

г) $\sqrt[5]{a^5b^{18}}$; д) $\sqrt[5]{m^{12}n^7}$; е) $\sqrt[3]{-108x^7y^{10}}$.

2.155. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[4]{16a^4b}$, калі $a>0$; б) $\sqrt[4]{32m^{12}n^{13}}$, калі $m\leqslant 0$;

в) $\sqrt[6]{729x^{13}y^{19}}$, калі $x<0$, $y<0$.

2.156. Вынесіце множнік за знак кораня:

а) $\sqrt[4]{3x^9}$; б) $\sqrt[6]{-y^{13}}$; в) $\sqrt[8]{a^{25}b^{16}}$.

2.157. Выкарыстаўшы алгарытм, унясіце множнік пад знак кораня:

а) $5\sqrt[3]{2}$; б) $2\sqrt[4]{3}$; в) $3\sqrt[4]{5}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{24}$;

д) $0{,}3\sqrt[4]{100}$; е) $10\sqrt[5]{0{,}0251}$; ж) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{486}$; з) $0{,}1\sqrt[6]{7000000}$.

2.158. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $2\sqrt[4]{x}$; б) $\frac{1}{5}\sqrt[4]{1250y}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54b}$; г) $-\frac{1}{2}\sqrt[6]{128b^5}$.

2.159. У выразе $k\sqrt[6]{3}$ унясіце множнік пад знак кораня, калі:

а) $k > 0$; б) $k \leqslant 0$.

2.160. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $n\sqrt[4]{2}$, калі $n \geqslant 0$; б) $m\sqrt[8]{7}$, калі $m < 0$; в) $c\sqrt[3]{2}$;

г) $k\sqrt[5]{k}$; д) $x\sqrt[6]{x}$; е) $(a-b)\sqrt[4]{b-a}$.

2.161. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt{b\sqrt[5]{b}}$; б) $\sqrt[5]{b\sqrt[4]{b}}$.

2.162. Спрасціце выраз:

а) $5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}$; б) $6\sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{3}$;

в) $8\sqrt[5]{6} - \sqrt[5]{6}$; г) $9\sqrt[6]{5} \quad 4\sqrt[6]{5} \quad 14\sqrt[6]{5}$.

2.163. Знайдзіце суму, рознасць, здабытак і дзель лікаў:

а) $6\sqrt[3]{3}$ і $4\sqrt[3]{3}$; б) $-3\sqrt[4]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$; в) $-2\sqrt[5]{6}$ і $2\sqrt[5]{6}$.

2.164. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}$; б) $4\sqrt[5]{729} - \sqrt[5]{3}$; в) $5\sqrt[7]{2} - 2\sqrt[7]{256}$;

г) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375}$; д) $\sqrt[3]{135} \quad 2\sqrt[3]{320} \quad \sqrt[3]{625}$; е) $\sqrt[3]{128} \quad 5\sqrt[3]{16} \quad \sqrt[3]{54}$.

2.165. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{3}\right)^2$.

2.166. Спрасціце выраз:

а) $\left(\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3}\right) \cdot \sqrt[3]{9}$; б) $4\sqrt[4]{2} \cdot \left(\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}\right)$;

в) $\left(2\sqrt[7]{3} - 3\sqrt[7]{384}\right) : \sqrt[7]{3}$; г) $2\sqrt[3]{54} \quad 3\sqrt[3]{16} \quad \sqrt[3]{128} \; : \; 5\sqrt[3]{2}$.

2.167. Выканайце дзеянні:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{192} - 2\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{81}}$; б) $\dfrac{2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$.

2.168. Перыметр прамавугольніка роўны $16\sqrt[6]{3}$ см, а адна з яго старон роўна $2\sqrt[6]{3}$ см. Знайдзіце плошчу прамавугольніка.

2.169. Аб'ём куба роўны $5\sqrt{5}$ см . Знайдзіце плошчу поўнай паверхні куба.

2.170. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[5]{-3\sqrt{3}} + \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[10]{3}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{49}}}{\sqrt[6]{49 \cdot \sqrt{7}}}$.

2.171. Прымяніце формулу рознасці квадратаў і вылічыце:

а) $\left(4 + \sqrt{5}\right)\left(2 + \sqrt[4]{5}\right)\left(2 - \sqrt[4]{5}\right)$; б) $\left(\sqrt{10} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{10} + \sqrt[4]{3}\right)$.

2.172. Выканайце дзеянні:

а) $\left(1 + \sqrt{a}\right)\left(1 - \sqrt[4]{a}\right)\left(1 + \sqrt[4]{a}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt{m} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}\right)$.

2.173. Раскладзіце на множнікі:

а) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{54}$; б) $\sqrt[3]{2} + 2$; в) $\sqrt[4]{6} - 12$; г) $\sqrt[4]{50} + \sqrt{5}$.

2.174. Запішыце ў выглядзе здабытку:

а) $\sqrt[5]{7a} - \sqrt[5]{2b} + \sqrt[5]{7b} - \sqrt[5]{2a}$; б) $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 4$.

2.175. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{6} - 6}{\sqrt[3]{6}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{2} + 1}{\sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt[5]{64} - 2}{\sqrt[5]{4}}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{3} - 3}{6 - \sqrt[4]{48}}$.

2.176. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{12x} - \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{18x} - \sqrt[3]{6}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{m^3} - \sqrt[4]{m^2 n}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{m}}$.

2.177. Прымяніце формулу рознасці квадратаў і скараціце дроб:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{m} - 1}{\sqrt{m} - 1}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{x^6} - 4}{\sqrt[5]{x^3} - 2}$; в) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}}$; г) $\dfrac{\sqrt{m} - n}{\sqrt{n} - \sqrt[4]{m}}$.

2.178. Прымяніце формулы скарочанага множання і скараціце дроб:

а) $\dfrac{\sqrt{a} + 2\sqrt[4]{ab^2} + b}{\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{b} - 2a\sqrt[4]{a^2 b} + a^3}{a\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}}$.

2.179. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$; в) $\dfrac{16}{\sqrt[4]{2}}$; г) $\dfrac{21}{\sqrt[3]{7}}$.

2.180. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{4}} + 2\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[5]{3} - \dfrac{15}{\sqrt[5]{81}}$.

2.181. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\dfrac{14}{\left(\sqrt[4]{10}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{3}\right)}$; б)* $\dfrac{12}{\sqrt[4]{5}-1}$.

2.182. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{2}}$; б)* $\dfrac{\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{35}-6}}+\sqrt{35}$.

2.183. Знайдзіце значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі $g(x) = 1 - x^2$ роўна:

а) 0; б) 0,19; в) 1.

2.184. Для функцыі $h\ \ x\ \ \ \ \sqrt{9\ \ \ 2x}$ знайдзіце, калі гэта магчыма:

а) $h(0)$; б) $h(2{,}5)$; в) $h(-20)$; г) $h(5)$.

2.185. Знайдзіце, у колькі разоў і на колькі парадкаў лік $1{,}2 \cdot 10^{10}$ большы за лік $3 \cdot 10^7$.

2.186. Рашыце ўраўненне $1\ \ \dfrac{2x^2\ \ \ x\ \ \ 45}{5\ \ \ x}\ \ \ 0$.

2.187. Пункт P_α адзінкавай акружнасці мае каардынаты $P\ \ \dfrac{1}{3};\ \ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Знайдзіце значэнні $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.

2.188. Выкарыстайце метад інтэрвалаў і рашыце няроўнасць:

а) $(x+2)(x+5)^2(2x-7) \leqslant 0$; б) $(x^2-6x+5)(x^2-1) \geqslant 0$.

§ 16. Уласцівасці і графік функцыі

$= \sqrt{\ \ }\ \ \ \ >$

2.189. Выберыце пункт, які належыць графіку функцыі $y = \sqrt{x}$:

а) (3; 9); б) (16; 4); в) (9; –3); г) (16; –4).

2.190. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y\ \ \ \sqrt{\ x\ \ \ 5\ \ \ \ x\ \ \ 3\ }$.

2.191. Мноствам значэнняў функцыі $y\ \ \ 2\sqrt{x}\ \ \ 5$ з'яўляецца прамежак:

а) $(0;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$; в) $[5;\ +\infty)$; г) $(0;\ 5)$; д) $(5;\ +\infty)$.

Выберыце правільны адказ.

Залежнасць, пры якой кожнаму неадмоўнаму ліку ставіцца ў адпаведнасць значэнне кораня зададзенай цотнай ступені, задае функцыю $y = \sqrt[n]{x}$, дзе n — цотны лік.

Сапраўды, па ўласцівасцях арыфметычнага кораня існуе адзіны арыфметычны корань цотнай ступені з неадмоўнага ліку, значыць, кожнаму неадмоўнаму x адпавядае адзінае значэнне $y = \sqrt[n]{x}$.

Пры $n = 2$ функцыя прымае выгляд $y = \sqrt{x}$, уласцівасці якой разглядаліся ў 8-м класе.

Для любога рэчаіснага ліку існуе адзіны корань няцотнай ступені (па ўласцівасцях кораня няцотнай ступені).

Разгледзім уласцівасці функцыі $y = \sqrt[n]{x}$ для цотных і няцотных паказчыкаў кораня.

Функцыя $= \sqrt{\ }$ **дзе** $\in$

1. Абсяг вызначэння функцыі. Па ўласцівасці арыфметычнага кораня $D = [0; +\infty)$.

2. Мноства значэнняў функцыі. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі. Па азначэнні арыфметычнага кораня з ліку $y \geqslant 0$ і $y^{2k} = x$. Па ўласцівасці ступені з натуральным паказчыкам для любога y $0;$ ∞ існуе значэнне $y^{2k} = x$, $x \geqslant 0$, г. зн. мноствам значэнняў функцыі $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in N$, з'яўляецца мноства неадмоўных лікаў: E $y) = [0; +\infty)$.

Пры $x = 0$ функцыя прымае найменшае значэнне $y = 0$. Найбольшага значэння ў функцыі не існуе.

3. Нулі функцыі. Паколькі $y = 0$, г. зн. $\sqrt[2k]{x} = 0$, пры $x = 0$, то значэнне $x = 0$ з'яўляецца адзіным нулём функцыі.

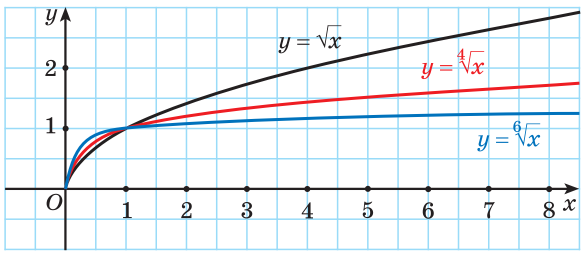
4. Прамежкі знакапастаянства функцыі. $y > 0$ пры ўсіх x $0;$ ∞ .

5. Прамежкі манатоннасці функцыі. Функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

Сапраўды, калі 0 x_1 x_2, то $\sqrt[2k]{x_1} < \sqrt[2k]{x_2}$. У адваротным выпадку $\sqrt[2k]{x_1} \geqslant \sqrt[2k]{x_2}$ або $\sqrt[2k]{x_1}^{\,2k} \geqslant \sqrt[2k]{x_2}^{\,2k}$, г. зн. $x_1 \geqslant x_2$. Супярэчнасць даказвае сцверджанне.

6. Цотнасць (няцотнасць) функцыі. Паколькі абсяг вызначэння функцыі не сіметрычны адносна пачатку каардынат, то функцыя не з'яўляецца цотнай і не з'яўляецца няцотнай.

7. Графік функцыі. Графікі функцый $y = \sqrt[n]{x}$ пры $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$ паказаны на рысунку 120.



Рыс. 120

Функцыя $\sqrt{}$ **дзе** $\in$

1. Абсяг вызначэння функцыі. Па ўласцівасці кораня няцотнай ступені $D = (-\infty; +\infty)$.

2. Мноства значэнняў функцыі. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі. Па азначэнні кораня $y^{2k\ \ 1}$ x. Па ўласцівасці ступені з натуральным паказчыкам для любога y $(\ \infty;\ \ \infty)$ існуе x. Такім чынам, мноствам значэнняў функцыі y $\sqrt[2k\ \ 1]{x}$, дзе $k \in N$, з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў: $E = (-\infty; +\infty)$.

Найбольшага і найменшага значэнняў у функцыі y $\sqrt[2k\ \ 1]{x}$ не існуе.

3. Нулі функцыі. Паколькі $y = 0$, г. зн. $\sqrt[2k\ \ 1]{x}$ 0, пры $x = 0$, то значэнне $x = 0$ з'яўляецца адзіным нулём функцыі.

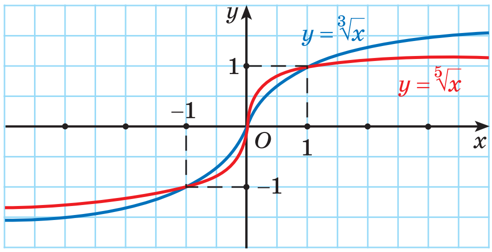
4. Прамежкі знакапастаянства функцыі. $y > 0$, калі x $(0;\ \ \infty)$; $y < 0$, калі $x \in (-\infty; 0)$.

5. Прамежкі манатоннасці функцыі. Функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

Калі $x_1 < x_2$, то $\sqrt[2k+1]{x_1} < \sqrt[2k+1]{x_2}$. У адваротным выпадку $\sqrt[2k+1]{x_1} \geqslant \sqrt[2k+1]{x_2}$ або $\left(\sqrt[2k+1]{x_1}\right)^{2k+1} \geqslant \left(\sqrt[2k+1]{x_2}\right)^{2k+1}$, г. зн. $x_1 \geqslant x_2$. Супярэчнасць даказвае сцверджанне.

6. Цотнасць (няцотнасць) функцыі. Паколькі абсяг вызначэння функцыі y $\sqrt[2k\ \ 1]{x}$ сіметрычны адносна пачатку каардынат і y x $\sqrt[2k\ \ 1]{\ \ x}$ $\sqrt[2k\ \ 1]{x}$ y x, то функцыя з'яўляецца няцотнай. Яе графік сіметрычны адносна пачатку каардынат.

7. Графік функцыі. Графікі функцый $y = \sqrt[n]{x}$ пры $n = 3$, $n = 5$ паказаны на рысунку 121.



Рыс. 121

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt[6]{2x^2 - 3x + 1}$; б) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1}$.

Рашэнне. а) Паколькі абсяг вызначэння кораня цотнай ступені ёсць мноства неадмоўных лікаў, то падкарэнны выраз павінен быць неадмоўным. Рэшым няроўнасць $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$, атрымаем x ; 0,5 1; . D ; 0,5 1; .

б) Паколькі абсяг вызначэння кораня няцотнай ступені ёсць мноства ўсіх рэчаісных лікаў, то падкарэнны выраз можа прымаць любыя значэнні пры x ∞; ∞ . D ∞; ∞ .

2. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $h(x)$ $2\sqrt[8]{x}$ 3; б) $f(x) = \sqrt[5]{x} - 7$.

Рашэнне. а) Мноствам значэнняў функцыі $y = \sqrt[8]{x}$ з'яўляецца прамежак $[0; +\infty)$, г. зн. $\sqrt[8]{x} \geqslant 0$. Па ўласцівасці няроўнасцей: $2\sqrt[8]{x} \geqslant 0$, $2\sqrt[8]{x} + 3 \geqslant 3$, значыць, E h 3; ∞ .

б) Мноствам значэнняў функцыі $y = \sqrt[5]{x}$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў $(-\infty; +\infty)$. Значыць, і мноствам значэнняў функцыі f x $\sqrt[5]{x}$ 7 з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, г. зн. ∞; ∞ .

3. Вызначце найменшае значэнне функцыі $f(x)$ $3\sqrt[6]{x}$ 7.

Рашэнне. Паколькі функцыя $y = \sqrt[n]{x}$ для цотных n мае найменшае значэнне, роўнае нулю, пры $x = 0$, то $3\sqrt[6]{x} \geqslant 0$, а $3\sqrt[6]{x} + 7 \geqslant 7$. Значыць, найменшае значэнне дадзенай функцыі роўна 7 і дасягаецца пры $x = 0$.

4. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \sqrt[6]{2x^2 - 3x + 1}$; б) $y = \sqrt[7]{2 - x^2}$.

Рашэнне. а) Паколькі значэнне кораня n-й ступені роўна нулю, калі яго падкарэнны выраз роўны нулю, то рэшым ураўненне $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Яго карані $x = 1$ і $x = 0{,}5$ з'яўляюцца нулямі функцыі $y = \sqrt[6]{2x^2 - 3x + 1}$.

б) Паколькі значэнне кораня n-й ступені роўна нулю, калі яго падкарэнны выраз роўны нулю, то рэшым ураўненне $2 \quad x^2 \quad 0$. Яго карані $x = \sqrt{2}$ і $x = -\sqrt{2}$ з'яўляюцца нулямі функцыі $y = \sqrt[7]{2 - x^2}$.

5. Якія значэнні прымае функцыя на дадзеных прамежках:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $x \in [1; 32]$; б) $g(x) = \sqrt[12]{x}$, $x \in [-2; 2]$;

в) $h(x) = \sqrt[12]{|x|}$, $x \in [-2; 2]$; г) $p(x) = \sqrt[3]{|x|}$, $x \quad \infty; \quad \infty$?

Рашэнне. а) Паколькі $\sqrt[5]{x} \geqslant 0$ для $\; 0; \quad \infty \;$, то $f(x)$ прымае дадатныя значэнні для $x \in [1; 32]$.

б) Паколькі $D(\sqrt[12]{x}) \quad 0; \quad \infty$, то функцыя $g(x)$ не вызначана для адмоўных значэнняў x з прамежку $[-2; 2]$.

в) Паколькі $|x| \geqslant 0$, то функцыя $h(x) = \sqrt[12]{|x|}$ прымае неадмоўныя значэнні для $x \in [-2; 2]$.

г) Паколькі $|x| \geqslant 0$, то функцыя $p(x) = \sqrt[3]{|x|}$ прымае неадмоўныя значэнні для $x \quad \infty; \quad \infty$.

6. Размясціце лікі $\sqrt{6}$; $2\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{15}$ у парадку нарастання.

Рашэнне. Запішам лікі $\sqrt{6}$; $2\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{15}$ у выглядзе каранёў з аднолькавымі паказчыкамі:

$$\sqrt{6} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216};\quad 2\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3} = \sqrt[6]{192};\quad \sqrt[3]{15} = \sqrt[6]{15^2} = \sqrt[6]{225}.$$

Паколькі функцыя $f(x) = \sqrt[6]{x}$ нарастае на прамежку $[0; +\infty)$, то $\sqrt[6]{192} < \sqrt[6]{216} < \sqrt[6]{225}$, значыць, $2\sqrt[6]{3} < \sqrt{6} < \sqrt[3]{15}$.

7. Якой (цотнай ці няцотнай) з'яўляецца функцыя:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; б) $g(x) = \sqrt[12]{x}$;

в) $h(x) = \sqrt[12]{|x|}$; г) $p(x) = \sqrt[3]{|x|}$?

Рашэнне. а) Функцыя $f(x) = \sqrt[5]{x}$ з'яўляецца няцотнай, паколькі $y = \sqrt[n]{x}$ пры няцотным n ёсць няцотная функцыя.

б) Функцыя $g(x) = \sqrt[12]{x}$ ні цотная, ні няцотная, паколькі $y = \sqrt[n]{x}$ пры цотным n не з'яўляецца цотнай і не з'яўляецца няцотнай функцыяй.

в) Паколькі абсяг вызначэння функцыі $h(x) = \sqrt[12]{|x|}$ ёсць мноства ўсіх рэчаісных лікаў і $h(\ x)\quad h(x)$, то функцыя цотная.

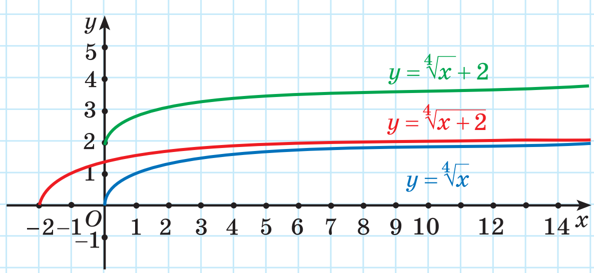
г) Паколькі абсяг вызначэння функцыі $p(x) = \sqrt[3]{|x|}$ ёсць мноства ўсіх рэчаісных лікаў і $p(\ x)\quad p(x)$, то функцыя цотная.

8. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x)\quad \sqrt[4]{x}\quad 2$; б) $f(x)\quad \sqrt[4]{x\quad 2}$.

Рашэнне. а) Графік функцыі $f(x)\quad \sqrt[4]{x}\quad 2$ атрымліваецца з графіка функцыі $y = \sqrt[4]{x}$ зрухам на 2 адзінкі ўверх уздоўж восі ардынат (рыс. 122).

б) Графік функцыі $f(x)\quad \sqrt[4]{x\quad 2}$ атрымліваецца з графіка функцыі $y = \sqrt[4]{x}$ зрухам на 2 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс (гл. рыс. 122).

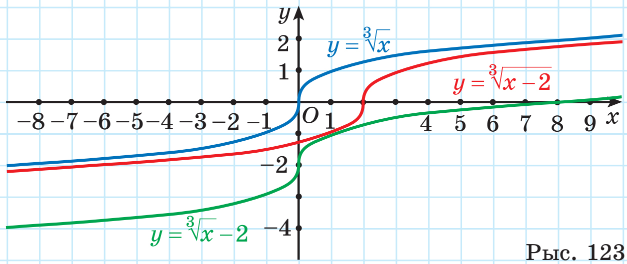


Рыс. 122

9. Пабудуйце графік функцыі:

а) $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$; б) $g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

Рашэнне. а) Графік функцыі $g(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ атрымліваецца з графіка функцыі $y = \sqrt{x}$ зрухам на 2 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат (рыс. 123).



Рыс. 123

б) Графік функцыі $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$ атрымліваецца з графіка функцыі $y = \sqrt{x}$ зрухам на 2 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс (гл. рыс. 123).

Выберыце значэнні зменнай, якія ўваходзяць у абсяг вызначэння функцыі $y\ \ \sqrt[2n]{x},\ n\ \ N$:

а) 7,2; б) –14; в) $1 - \sqrt{2}$; г) $\sqrt{5} - 2$.

2.192. Для функцыі $f\ x\ \ \ \sqrt{x}$ знайдзіце: $f(0)$; $f(1)$; $f(-8)$; $f\ \frac{1}{216}$; $f\ \ 3\sqrt{3}$.

2.193. Знайдзіце значэнне функцыі $g\ x\ \ \ \sqrt[4]{x}\ \ 1$ пры значэнні аргумента, роўным: 1; 2; $1\frac{1}{16}$; 82; 1,0625; 10.

2.194. З лікаў 3; –2; $\sqrt{3} - 2$; $5\sqrt[5]{5}$; $1 - \sqrt{7}$; 0 выберыце тыя, што не належаць абсягу вызначэння функцыі $y = \sqrt[10]{x}$.

2.195. Для функцыі $f\ x\ \ \ \sqrt[6]{x}$ знайдзіце значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна: 0; 1; $\frac{1}{2}$; $\sqrt[6]{7}$; $\sqrt[3]{2}$.

2.196. Ці можа функцыя $y = f(x)$ прымаць значэнне, роўнае –15, калі:

а) $f\ x\ \ \ \sqrt[8]{x}$; б) $f\ x\ \ \ \sqrt[5]{x}$?

2.197. Выберыце пункты, праз якія праходзіць графік функцыі $y = \sqrt[4]{x}$:

а) $A(16;\ 2)$; б) $B\ \frac{1}{81};\ \frac{1}{3}$; в) $C\ -1;\ 1)$;

г) $D(0{,}0001;\ 0{,}1)$; д) $E(625;\ -5)$; е) $F\ \ 3;\ \sqrt[4]{3}\ \ .$

Запішыце яшчэ якія-небудзь два пункты, якія належаць графіку функцыі $y = \sqrt[4]{x}$.

2.198. Дадзена функцыя $y = \sqrt[n]{x}$. Знайдзіце n, калі вядома, што графік дадзенай функцыі праходзіць праз пункт:

а) $A\left(-\frac{1}{32};\ -\frac{1}{2}\right)$; б) $B(0{,}0081;\ 0{,}3)$; в) $C\ \ 7\sqrt{7};\ \sqrt{7}\ \ .$

2.199. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[4]{2\ \ \ 7x}$; б) $f\ \ x\ \ \ \ \frac{3}{\sqrt[5]{5\ \ \ 6x}}$;

в) $f\ \ x\ \ \ \ \frac{8}{\sqrt[6]{2x^2\ \ \ 5x\ \ \ 2}}$; г) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[4]{\frac{x\ \ \ 1}{x\ \ \ 5}}$.

2.200. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \ \frac{\sqrt[4]{x\ \ \ 1}}{\sqrt[4]{x\ \ \ 5}}$; б) $f\ \ x\ \ \ \ \frac{x\ \ \ 2}{\sqrt[7]{10\ \ \ x}}\ \ \ \ \sqrt[6]{x\ \ \ 4}$;

в) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[6]{x^2\ \ \ 3x\ \ \ 2}\ \ \ \ \sqrt[10]{4\ \ \ x^2}$; г) $f\ \ x\ \ \ \ \frac{\sqrt[5]{x\ \ \ 4}}{\sqrt[4]{x^2\ \ \ 49}}$;

д) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[6]{x^2\ \ \ x\ \ \ 1\ \ \ x\ \ \ 2}$; е) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[4]{x^4\ \ \ 25x^2}\ \ \ \ \sqrt{5x\ \ \ x^2}$.

Запішыце найменшае цэлае значэнне аргумента з абсягу вызначэння кожнай функцыі, калі яно існуе.

2.201. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y\ \ \ \ \sqrt[4]{x}\ \ \ \ 5$; б) $y = -\sqrt[8]{x} - 4$; в) $y = \sqrt[5]{x} - 6$; г) $y = -4\sqrt[6]{x} + 5$.

2.202. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[6]{x}\ \ \ \ 4$; б) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[4]{x\ \ \ 7}\ \ \ \ 12$;

в) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[10]{2x\ \ \ 7}\ \ \ \ 3$; г) $f\ \ x\ \ \ \ 3\sqrt[8]{x}\ \ \ \ 5$.

2.203. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[4]{3x\ \ \ 4}$; б) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[7]{8\ \ \ 5x}$;

в) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[6]{x^2\ \ \ 4x\ \ \ 3}$; г) $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[5]{36\ \ \ x^2}$.

2.204. Ці праўда, што:

а) функцыя $f\ \ x\ \ \ \ \sqrt[6]{x}$ на прамежку $[7;\ +\infty)$ прымае дадатныя значэнні;

б) функцыя $f\ \ x\ \ \ \sqrt{x}$ на прамежку [–11; –1] прымае адмоўныя значэнні;

в) функцыя $f\ \ x\ \ \ \sqrt[10]{x}$ на прамежку [0; 7] прымае толькі дадатныя значэнні;

г) функцыя $f\ \ x\ \ \ \sqrt[7]{x}$ прымае адмоўныя значэнні пры любых $x < 0$?

2.205. Дадзена функцыя $f\ \ x\ \ \ \sqrt[n]{x}$. Параўнайце:

а) $f(6)$ і $f(11)$; б) $f(29{,}18)$ і $f(31{,}9)$.

2.206. Выкарыстайце ўласцівасць манатоннасці функцыі $f\ \ x\ \ \ \sqrt[n]{x}$ і параўнайце лікі:

а) $\sqrt[3]{2{,}3}$ і $\sqrt[3]{2{,}9}$; б) $\sqrt[7]{-17}$ і $\sqrt[7]{-13}$; в)   і $\sqrt[4]{79}$;

г) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[6]{28}$; д) $\sqrt[15]{65}$ і $\sqrt[5]{4}$; е) $2\sqrt[3]{3}$ і $3\sqrt[3]{2}$.

2.207. Знайдзіце два паслядоўныя цэлыя лікі, паміж якімі на каардынатнай прамой знаходзіцца лік:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{7}$; в) $\sqrt[4]{19}$;

г) $\sqrt[3]{29}$; д) $-\sqrt[4]{83}$; е) $-\sqrt[3]{123}$.

2.208. Знайдзіце ўсе цэлыя лікі, размешчаныя на каардынатнай прамой паміж лікамі:

а) 2 і $\sqrt[3]{129}$; б) $\sqrt[5]{-37}$ і $\sqrt[6]{71}$.

2.209. Параўнайце лікі:

а) $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[9]{11}$ і $\sqrt[6]{5}$; в) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[6]{2\sqrt{7}}$; г) $\sqrt{\ }$ і $\sqrt[3]{\sqrt{26}}$.

2.210. Размясціце ў парадку нарастання лікі:

а) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ і $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[12]{3}$ і $\sqrt[4]{8}$;

в) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{\sqrt[3]{30}}$; г) $\sqrt[15]{125}$, $\sqrt[5]{6}$ і $\sqrt[6]{4\sqrt[5]{4}}$.

2.211. Вызначце, якія з дадзеных функцый з’яўляюцца цотнымі, а якія — няцотнымі:

а) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[4]{x}$; б) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[15]{x}$; в) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[8]{|x|\ \ \ 1}$; г) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[9]{|x|\ \ \ 2}$.

Якую ўласцівасць мае графік няцотнай функцыі?

2.212. Пабудуйце графік функцыі:

а) $g\ \ x\quad \sqrt[4]{x}$; б) $g\ \ x\quad \sqrt[4]{x}$; в) $g\ \ x\quad \sqrt[4]{x\quad 2}$;

г) $g\ \ x\quad \sqrt[4]{x}\quad 2$; д) $g\ \ x\quad \sqrt[4]{x\quad 1}\quad 3$; е)* $g\ \ x\quad \sqrt[4]{|x|}$.

2.213. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f\ \ x\quad \sqrt[3]{x}$; б) $f\ \ x\quad \sqrt[3]{x}$; в) $f\ \ x\quad \sqrt[3]{x\quad 3}$;

г) $f\ \ x\quad \sqrt[3]{x}\quad 3$; д) $f\ \ x\quad \sqrt[3]{x\quad 2}\quad 1$; е)* $f\ \ x\quad \sqrt[3]{|x|}$.

2.214. Выберыце прамыя, якія перасякае графік функцыі $h\ \ x\quad \sqrt[6]{x}$:

а) $y = 3x$; б) $y = -x + 2$; в) $y = 2x + 5$; г) $y = -4x - 3$.

2.215. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый і знайдзіце каардынаты іх агульных пунктаў:

а) $y = \sqrt[4]{x}$ і $y = \frac{32}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{x}{4}$.

2.216*. Дадзены функцыі $f\ \ x\quad \sqrt{x}$ і $g\ \ x\quad \sqrt{x}$. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $f\ \ g\ \ 64$; б) $g\ \ f\ \ 0{,}000001$.

2.217. Знайдзіце значэнне функцыі $h\ \ x\quad \sqrt[6]{x}$ пры значэнні аргумента, роўным: 0; 1; 27; $\frac{1}{64}$; 0,000001.

2.218. Для функцыі $g\ \ x\quad \sqrt[5]{x}\quad 2$ знайдзіце: $g\ \ 1$; $g\quad 1$; $g\ \ 0{,}00243$; $g\ \ \frac{1}{32}$; $g\quad 25\sqrt{5}$.

2.219. Для функцыі $f\ \ x\quad \sqrt{x}$ знайдзіце значэнне аргумента, пры якім: $f\ \ x\quad 1$; $f\ \ x\quad 2$; $f\ \ x\quad \frac{1}{3}$; $f\ \ x\quad \sqrt[3]{11}$.

2.220. Выберыце пункты, якія належаць графіку функцыі $y = \sqrt[4]{x}$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(16;\ -2)$; в) $C\ -10\ 000;\ 10)$; г) $D(0{,}0625;\ 0{,}5)$.

2.221. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f\ \ x\quad \sqrt[6]{8\quad 3x}$; б) $f\ \ x\quad \frac{2}{\sqrt[7]{2x\quad 3}}$;

в) $f\ \ x\quad \frac{10}{\sqrt[4]{3x^2\quad 10x\quad 3}}$; г) $f\ \ x\quad \sqrt[8]{\frac{x\quad 3}{x\quad 6}}$.

2.222. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \frac{\sqrt[6]{x\ \ \ 8}}{\sqrt[6]{3\ \ \ x}}$; б) $f\ \ x\ \ \ \frac{x\ \ \ 5}{\sqrt[3]{3\ \ \ x}}\ \ \ \sqrt[4]{x\ \ \ 7}$;

в) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[8]{x^2\ \ \ 4x\ \ \ 3}\ \ \ \sqrt[4]{9\ \ \ x^2}$.

2.223. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y\ \ \ \sqrt[6]{x}\ \ \ 7$; б) $y = -\sqrt[4]{x} + 3$;

в) $y\ \ \ \sqrt[3]{x}\ \ \ 2$; г) $y = 3\sqrt[8]{x} - 6$.

Ці існуе найменшае значэнне кожнай з функцый?

2.224. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[8]{x}\ \ \ 2$; б) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[6]{x\ \ \ 7}\ \ \ 10$;

в) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[8]{x\ \ \ 1}\ \ \ 63$; г) $f\ \ x\ \ \ 4\sqrt[10]{x}\ \ \ 7$.

2.225. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[6]{2\ \ \ 7x}$; б) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[3]{7x\ \ \ 1}$;

в) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[4]{2x^2\ \ \ 5x\ \ \ 2}$; г) $f\ \ x\ \ \ \sqrt[7]{3x^2\ \ \ x}$.

2.226. Ці праўда, што:

а) функцыя $f\ \ x\ \ \ \sqrt[8]{x}$ на прамежку [–3; 0] прымае дадатныя значэнні;

б) функцыя $f\ \ x\ \ \ \sqrt[5]{x}$ прымае дадатныя значэнні пры любых $x > 0$?

2.227. Выкарыстаўшы ўласцівасць манатоннасці функцыі $f\ \ x\ \ \ \sqrt[n]{x}$, параўнайце лікі:

а) $\sqrt[5]{1{,}8}$ і $\sqrt[5]{1{,}6}$; б) $\sqrt[3]{-19}$ і $\sqrt[3]{-23}$; в) 2 і $\sqrt[3]{7}$;

г) $\sqrt[4]{15}$ і 2; д) $\sqrt[3]{28}$ і 3; е) $\sqrt[15]{31}$ і $\sqrt[3]{2}$.

2.228. Знайдзіце два паслядоўныя цэлыя лікі, паміж якімі на каардынатнай прамой знаходзіцца лік:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{23}$; в) $\sqrt[4]{629}$; г) $-\sqrt[5]{41}$.

2.229. Знайдзіце ўсе цэлыя лікі, размешчаныя на каардынатнай прамой паміж лікамі:

а) –3 і $\sqrt[4]{89}$; б) $\sqrt[7]{-131}$ і $\sqrt[4]{79}$.

2.230. Параўнайце лікі:

а) $\sqrt{2}$ і $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[12]{12}$ і $\sqrt[8]{5}$;

в) $\sqrt{\ \ }$ і $\sqrt[5]{\sqrt{247}}$; г) $\sqrt[10]{7}$ і $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$.

2.231. Размясціце ў парадку спадання лікі:

а) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ і $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{10}$ і $\sqrt[3]{\sqrt{30}}$.

2.232. Вызначце, якія з дадзеных функцый з'яўляюцца цотнымі, а якія — няцотнымі:

а) $f\ x\quad \sqrt[8]{x}$; б) $f\ x\quad \sqrt[3]{x}$;

в) $f\ x\quad \sqrt[4]{|x|\quad 9}$; г) $f\ x\quad \sqrt[7]{|x|\quad 13}$.

Якую ўласцівасць мае графік цотнай функцыі?

2.233. Пабудуйце графік функцыі:

а) $g\ x\quad \sqrt[4]{x\quad 3}$; б) $g\ x\quad \sqrt[4]{x}\quad 1$; в) $g\ x\quad \sqrt[4]{x\quad 2}\quad 4$.

2.234. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f\ x\quad \sqrt[3]{x\quad 2}$; б) $f\ x\quad \sqrt[3]{x}\quad 2$; в) $f\ x\quad \sqrt[3]{x\quad 1}\quad 3$.

2.235. Вызначце, ці перасякаюцца графік функцыі $y = \sqrt[8]{x}$ і прамая:

а) $y = 1$; б) $y = \frac{1}{2}$; в) $y = -7$; г) $y = \sqrt[8]{13}$.

Калі перасякаюцца, то знайдзіце каардынаты пункта перасячэння.

2.236. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый $y = \sqrt{x}$ і $y = x$, знайдзіце каардынаты іх агульных пунктаў.

2.237. Знайдзіце значэнне выразу $6^{-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} - 5^{-1} \cdot 25$.

2.238. З дадзеных ураўненняў выберыце ўсе ўраўненні, раўназначныя ўраўненню $\frac{x\quad 2}{x^2\quad 4}\quad 0$:

а) $5x - 10 = 0$; б) $x^2 - x + 7 = 0$;

в) $3(x - 1) + 6 = 7x - 4(x + 2)$; г) $\frac{x}{x\quad 1}\quad 0$;

д) $x^2 + 9 = 0$.

2.239. Пры $a = -3$ не мае сэнсу выраз:

а) $\sqrt{a + 3}$; б) $\sqrt{3 - a}$; в) $\sqrt{a - 3}$; г) $\sqrt{-a - 3}$.

Выберыце правільны адказ.

2.240. Знайдзіце найменшы дадатны і найбольшы адмоўны карані ўраўнення:

а) $\sin \frac{}{3}\quad 3x\quad 1$; б) $\cos \frac{3}{4}\quad \frac{x}{2}\quad 1$.

§ 17. Ірацыянальныя ўраўненні

2.241. Рашыце няроўнасць:

а) $-x \leqslant -1$; б) $x^2 \leqslant 1$.

2.242. Выберыце пару раўназначных ураўненняў:

а) $x \quad = x \quad x - \quad =$ б) $x \qquad x$

в) $x \qquad x \qquad x$

Ураўненні, якія змяшчаюць зменную пад знакам кораня, называюцца **ірацыянальнымі.**

Пры рашэнні ірацыянальных ураўненняў не заўсёды атрымліваецца ад дадзенага ўраўнення перайсці да раўназначнага яму ўраўнення.

Напрыклад, рэшым ураўненне $\sqrt{x \quad 2} \qquad x$ ($A = B$).

Першы спосаб. Узвядзём абедзве часткі ўраўнення ў квадрат, атрымаем ураўненне $x + 2 = x^2 \;\; A^2 \quad B^2$. Яно мае карані –1 і 2. Відавочна, што лік 2 не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення, паколькі $\sqrt{2 \quad 2} \qquad 2$, а лік –1 — корань дадзенага ўраўнення, паколькі роўнасць $\sqrt{\quad 1 \quad 2} \qquad 1$ з'яўляецца правільнай.

Пабочны корань ураўнення (лік 2) з'явіўся таму, што ўраўненне $A^2 = B^2$ раўназначна сукупнасці ўраўненняў $\begin{matrix} A \quad B, \\ A \quad\; B, \end{matrix}$ якая можа мець больш рашэнняў, чым дадзенае ўраўненне $A = B$. Таму пасля ўзвядзення абедзвюх частак ураўнення ў цотную ступень без дадатковых умоў трэба выконваць праверку атрыманых каранёў.

Другі спосаб. Ураўненне $\sqrt{x \quad 2} \qquad x$ раўназначна сістэме $\begin{matrix} x \geqslant 0, \\ x \quad 2 \quad x^2. \end{matrix}$ Сапраўды, абедзве часткі ўраўнення неадмоўныя, таму пры ўзвядзенні ў квадрат атрымаем:

$$\sqrt{x \quad 2} \qquad x \qquad \begin{matrix} x \geqslant 0, \\ x \quad 2 \quad x^2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x \leqslant 0, \\ x \quad 2, \\ x \quad\; 1, \end{matrix} \qquad x \qquad 1.$$

Трэці спосаб. Запішам ураўненне $\sqrt{x \quad 2} \qquad x$ у выглядзе $\sqrt{x+2}\, +$ $x \quad 0$. Разгледзім функцыю $f(x) \quad \sqrt{x \quad 2} \quad x$. Гэта функцыя нарастае на абсягу вызначэння, значыць, дадзенае ўраўненне не можа мець больш за адзін корань. Аналізуючы ўмову, заўважым, што корань павінен быць адмоўным і не перавышаць па модулі лік 2. Коранем дадзенага ўраўнення з'яўляецца лік –1.

Разгледзім некаторыя віды ірацыянальных ураўненняў і метады іх рашэння.

1. Ураўненне выгляду $\sqrt{\quad}$

Калі $a \geqslant 0$, то $f\ x \quad a^{2n}$, калі $a < 0$, то каранёў няма.

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[4]{x} = 3$;

б) $\sqrt[16]{x^7 \quad 11} \quad 3$;

в) $\sqrt{x^2 \quad 12} \quad 2$.

$$\sqrt[2n]{f\ x} \quad a,\ n \quad \boldsymbol{N}$$

Калі $a \geqslant 0$, то $f\ x \quad a^{2n}$, калі $a < 0$, то каранёў няма

Рашэнне. а) $\sqrt[4]{x} = 3$; $x = 3^4$; $x = 81$.

б) $\sqrt[16]{x^7 \quad 11} \quad 3$, паколькі $-3 < 0$, то ўраўненне не мае каранёў.

в) $\sqrt{x^2 \quad 12} \quad 2$; $x^2 \quad 12 \quad 4$; $x^2 \quad 16$; $x \quad 4$, $x \quad 4$.

Адказ: а) 81; б) няма каранёў; в) –4; 4.

2. Ураўненне выгляду $\sqrt{\quad}$

Ураўненне $\sqrt[2n\ \ 1]{f(x)} \quad a,\ n \quad \boldsymbol{N}$, раўназначна ўраўненню $f\ x \quad a^{2n\ \ 1}$.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[3]{x} = 5$;

б) $\sqrt[3]{x-7} + 2 = 0$.

$$\sqrt[2n\ \ 1]{f\ x} \quad a,\ n \quad \boldsymbol{N}$$

$$f\ x \quad a^{2n\ \ 1}$$

Рашэнне. а) $\sqrt[3]{x} = 5$; $x = 5^3$; $x = 125$.

б) $\sqrt[3]{x-7} + 2 = 0$; $\sqrt[3]{x-7} = -2$; $x - 7 = -8$; $x = -1$.

Адказ: а) 125; б) –1.

3. Ураўненне выгляду $\sqrt{\quad} = \quad \in \quad >$

Няхай m — цотны лік.

Разгледзім спосабы рашэння ўраўнення выгляду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Першы спосаб. Дадзенае ўраўненне раўназначна сістэме

$$f\ x \quad g\ x^{\ 2n},$$
$$g\ x \geqslant 0.$$

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне $\sqrt{2 \quad x} \quad x$.

Рашэнне. $\sqrt{2 \quad x} \quad x$; $\begin{matrix} 2 \quad x \quad x^2, \\ x \geqslant 0; \end{matrix}$

$\begin{matrix} x^2 \quad x \quad 2 \quad 0, \\ x \geqslant 0; \end{matrix}$ $\begin{matrix} x \quad 2, \\ x \quad 1, \\ x \geqslant 0; \end{matrix}$ $x \quad 1$. *Адказ*: 1.

$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x),\ n \in N$

$f \ x \quad g \ x \ ^{2n},$

$g \ x \geqslant 0$

Другі спосаб. Ураўненне дадзенага выгляду можна рашыць, узвёўшы абедзве часткі ўраўнення ў ступень $2n$ з наступнай праверкай каранёў.

Прыклад 4. Рашыце ўраўненне $\sqrt{x} = x - 2$.

Рашэнне. $\sqrt{x} = x - 2$; $x = (x - 2)^2$; $x = x^2 - 4x + 4$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $\begin{matrix} x \quad 1, \\ x \quad 4. \end{matrix}$

Праверка: пры $x = 1$ роўнасць $\sqrt{1} = 1 - 2$ няправільная; пры $x = 4$ роўнасць $\sqrt{4} = 4 - 2$ правільная. *Адказ*: 4.

Калі m — няцотны лік, то ўраўненне выгляду $^{2n} \ \sqrt[1]{f(x)} \quad g(x),\ x \in N$, раўназначна ўраўненню $f \ x \quad g \ x \ ^{2n \quad 1}$.

Прыклад 5. Рашыце ўраўненне $\sqrt[7]{2x^7 \quad 1} \quad x$.

Рашэнне.

$\sqrt[7]{2x^7 \quad 1} \quad x$; $2x^7 \quad 1 \quad x^7$; $x^7 \quad 1$; $x \quad 1$.

Адказ: 1.

$^{2n} \ \sqrt[1]{f(x)} \quad g(x),\ n \in N$

$f \ x \quad g \ x \ ^{2n \quad 1}$

4. Ураўненне выгляду $\sqrt{\quad} = \sqrt{\quad} \quad \in \quad >$

Няхай m — цотны лік.

Разгледзім спосабы рашэння ўраўнення выгляду $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$.

Першы спосаб. Дадзенае ўраўненне раўназначна адной з сістэм

$\begin{matrix} f(x) \quad g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{matrix}$ або $\begin{matrix} f(x) \quad g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{matrix}$

$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in N$

$\begin{matrix} f(x) \quad g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{matrix}$ або

$\begin{matrix} f(x) \quad g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{matrix}$

Прыклад 6. Рашыце ўраўненне

$\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{x}$.

Рашэнне.

$\sqrt{x^2 \quad x \quad 1} \quad \sqrt{x}$ $\begin{matrix} x^2 \quad x \quad 1 \quad x, \\ x \geqslant 0; \end{matrix}$

$x^2 \quad 1,$ $\quad x \quad 1,$

$x \geqslant 0;$ $\quad x \quad\quad 1,\ x \quad 1.$

$x \geqslant 0;$

Адказ: 1.

Д р у г і с п о с а б. Ураўненне гэтага выгляду можна рашыць, узвёўшы абедзве часткі ўраўнення ў ступень $2n$ з наступнай праверкай каранёў.

Прыклад 7. Рашыце ўраўненне $\sqrt{2x \quad 3} \quad \sqrt{x \quad 2}$.

Рашэнне. $\sqrt{2x \quad 3} \quad \sqrt{x \quad 2};\ 2x - 3 = x - 2;\ x = 1.$

Праверка: пры $x = 1$ выразы ў левай і правай частках роўнасці $\sqrt{2 \cdot 1 \quad 3} \quad \sqrt{1 \quad 2}$ не маюць сэнсу, г. зн. зыходнае ўраўненне не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.

Калі m — няцотны лік, то ўраўненне выгляду $\sqrt[2n \quad 1]{f(x)} \quad \sqrt[2n \quad 1]{g(x)}$, $n \in N$, раўназначна ўраўненню $f(x) = g(x)$.

Прыклад 8. Рашыце ўраўненне $\sqrt[9]{2x^2 \quad 5} \quad \sqrt[9]{x^2 \quad 4}$.

Рашэнне.

$\sqrt[9]{2x^2 \quad 5} \quad \sqrt[9]{x^2 \quad 4} \quad\quad 2x^2 \quad 5 \quad x^2 \quad 4$

$x^2 \quad 1 \quad\quad x \quad 1,$

$x \quad\quad 1.$

Адказ: –1; 1.

$\sqrt[2n \quad 1]{f(x)} \quad \sqrt[2n \quad 1]{g(x)},\ n \in N$

$f(x) = g(x)$

5. Ураўненне выгляду $\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$

П е р ш ы с п о с а б. Ураўненне выгляду $\sqrt{f(x)} \quad \sqrt{g(x)} \quad a$ можна рашыць, узвёўшы абедзве часткі ўраўнення ў квадрат двойчы з наступнай праверкай знойдзеных каранёў.

Прыклад 9. Рашыце ўраўненне $2\sqrt{x + 18} + \sqrt{4x - 3} = 15.$

Рашэнне. Перанясём адно са складаемых у правую частку, для таго каб скараціць пераўтварэнні.

$2\sqrt{x \quad 18} \quad 15 \quad \sqrt{4x \quad 3};$

$4(x \quad 18) \quad 225 \quad 30\sqrt{4x \quad 3} \quad 4x \quad 3;$

$150 \quad\quad 30\sqrt{4x \quad 3};\ 5 = \sqrt{4x - 3};$

$25 = 4x - 3;\ x = 7.$

$\sqrt{f(x)} \quad \sqrt{g(x)} \quad a$

$\sqrt{f \quad x} \quad \sqrt{g \quad x}^{\,2} \quad a^2$

Праверка

Праверка: $2\sqrt{7+18}+\sqrt{4\cdot 7-3}=15;\quad 2\cdot 5\quad 5\quad 15;\ 15\quad 15.$ Значыць, значэнне $x = 7$ з'яўляецца коранем ураўнення.

Адказ: 7.

Другі спосаб. Некаторыя ўраўненні гэтага выгляду можна рашыць, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый.

Прыклад 10. Рашыце ўраўненне $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}=4.$

Рашэнне. Функцыя $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}$ нарастае на ўсім абсягу вызначэння, таму, калі дадзенае ўраўненне мае корань, то толькі адзін.

Пры $x = 4$ дадзенае ўраўненне ператвараецца ў правільную лікавую роўнасць: $\sqrt{4-3}+\sqrt{4+5}=4.$ Значыць, лік 4 з'яўляецца адзіным коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ: 4.

Метад замены зменнай

Прыклад 11. Рашыце ўраўненне $\sqrt[4]{x\quad 1}\quad 20\quad \sqrt{x\quad 1}.$

Рашэнне. Няхай $t\quad \sqrt[4]{x\quad 1}$, тады $t^2\quad \sqrt{x\quad 1}$ і ўраўненне прымае выгляд $t + 20 = t^2$; $t^2 - t - 20 = 0$; $\begin{matrix} t\quad 5, & \sqrt[4]{x\quad 1}\quad 5, \\ t\quad 4; & \sqrt[4]{x\quad 1}\quad 4. \end{matrix}$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў.

Тады $\sqrt[4]{x\quad 1}\quad 5$; $x + 1 = 625$; $x = 624$.

Адказ: 624.

Прыклад 12 . Рашыце ўраўненне $x\quad 4\ \ x\quad 1\quad 3\sqrt{x^2\quad 5x\quad 2}\quad 6.$

Рашэнне. $x\quad 4\quad x\quad 1\quad 3\sqrt{x^2\quad 5x\quad 2}\quad 6;$

$x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

Няхай $\sqrt{x^2\quad 5x\quad 2}\quad t$, тады $t^2 = x^2 + 5x + 2$ і ўраўненне прымае выгляд $t^2 + 2 - 3t = 6$; $t^2-3t\quad 4\quad 0$; $\begin{matrix} t\quad 4, \\ t\quad 1. \end{matrix}$ Паколькі $t \geqslant 0$, то $t = 4$, г. зн. $\sqrt{x^2\quad 5x\quad 2}\quad 4$; $x^2 + 5x + 2 = 16$; $x^2 + 5x - 14 = 0$; $\begin{matrix} x\quad 7, \\ x\quad 2. \end{matrix}$

Адказ: –7; 2.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[6]{x \quad 1} \quad 2$; б) $\sqrt[8]{2x \quad 4} \quad 1 \quad 0$; в) $\sqrt[8]{3x \quad 5} \quad 0$.

Рашэнне. а) $\sqrt[6]{x \quad 1} \quad 2$; $x \quad 1 \quad 2^6$; $x \quad 1 \quad 64$; $x \quad 65$.

Адказ: 65.

б) $\sqrt[8]{2x \quad 4} \quad 1 \quad 0$; $\sqrt[8]{2x \quad 4} \qquad 1$, паколькі $-1 < 0$, то ўраўненне не мае каранёў.

Адказ: няма каранёў.

в) $\sqrt[8]{3x \quad 5} \quad 0$; $3x - 5 = 0$; $x = 1\frac{2}{3}$.

Адказ: $x = 1\frac{2}{3}$.

2. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[3]{x^2 \quad 2} \quad 3$; б) $\sqrt[5]{7x - 3} + 1 = 0$; в) $\sqrt[7]{x^2 \quad 4} \quad 0$.

Рашэнне. а) $\sqrt[3]{x^2 \quad 2} \quad 3$; $x^2 \quad 2 \quad 3^3$; $x^2 \quad 2 \quad 27$; $x^2 \quad 25 \quad 0$; $\begin{matrix} x \quad 5, \\ x \qquad 5. \end{matrix}$

Адказ: -5; 5.

б) $\sqrt[5]{7x \quad 3} \quad 1 \quad 0$; $\sqrt[5]{7x \quad 3} \qquad 1$; $7x \quad 3 \qquad 1^{\ 5}$; $7x \quad 3 \qquad 1$; $x \qquad \frac{2}{7}$.

Адказ: $\frac{2}{7}$.

в) $\sqrt[7]{x^2 \quad 4} \quad 0$; $x^2 - 4 = 0$; $\begin{matrix} x \quad 2, \\ x \qquad 2. \end{matrix}$

Адказ: -2; 2.

3. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x^2 \quad 5x \quad 1} \quad 2x \quad 1$; б) $\sqrt{5 \quad x^2} \quad 1 \quad x$;

в) $\sqrt[5]{x^5 - 2x + 1} - x = 0$.

Рашэнне. а) $\sqrt{x^2 \quad 5x \quad 1} \quad 2x \quad 1$

$$\begin{matrix} x^2 \quad 5x \quad 1 \quad 2x \quad 1^{\ 2}, \\ 2x \quad 1 \geqslant 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x^2 \quad 3x \quad 0, \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x \quad 0, \\ x \quad 3; \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad x \quad 3.$$

Адказ: 3.

б) Узвядзём абедзве часткі ўраўнення ў квадрат і атрымаем:
$5 - x^2 = (1 - x)^2$; $5 - x^2 = 1 - 2x + x^2$; $2x^2 - 2x - 4 = 0$;

$x^2 - x - 2 = 0;$ $\begin{array}{l} x \quad 2, \\ x \quad -1. \end{array}$

Праверка: пры $x = -1$ атрымаем: $\sqrt{5-(-1)^2} = 1-(-1)$; $\sqrt{4} = 2$ — правільная роўнасць, значыць, $x = -1$ — корань дадзенага ўраўнення. Пры $x = 2$ маем: $\sqrt{5 \quad 2^2} \quad 1 \quad 2$; $\sqrt{1} \quad\quad 1$ — няправільная роўнасць, значыць, $x = 2$ не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.
Адказ: -1.

в) $\sqrt[5]{x^5 - 2x + 1} - x = 0$; $\sqrt[5]{x^5 - 2x + 1} = x$; $x^5 - 2x + 1 = x^5$;
$-2x + 1 = 0$; $x = 0{,}5$.
Адказ: 0,5.

4. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x}$;   б) $\sqrt{x^2 + 2x - 2} = \sqrt{x}$;

в) $\sqrt[3]{2x \quad 1} \quad \sqrt[3]{\quad x \quad 2}$.

Рашэнне. а) $\sqrt{x^2 \quad x \quad 3} \quad \sqrt{1 \quad 2x}$

$\begin{array}{l} x^2 \quad x \quad 3 \quad 1 \quad 2x, \\ 1 \quad 2x \quad 0 \end{array}$ $\begin{array}{l} x^2 \quad 3x \quad 4 \quad 0, \\ x \quad \frac{1}{2} \end{array}$ $\begin{array}{l} x \quad\quad 4, \\ x \quad 1, \\ x \leqslant \frac{1}{2} \end{array}$ $x \quad\quad 4.$

Адказ: -4.

б) Узвядзём абедзве часткі ўраўнення ў квадрат і атрымаем:

$x^2 \quad 2x \quad 2 \quad x$; $x^2 \quad x \quad 2 \quad 0$; $\begin{array}{l} x \quad\quad 2, \\ x \quad 1. \end{array}$

Праверка: пры $x = 1$ атрымаем: $\sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 - 2} = \sqrt{1}$, $1 = 1$ — правільна, значыць, $x = 1$ — корань дадзенага ўраўнення. Пры $x = -2$ выраз $\sqrt{-2}$ не мае сэнсу, г. зн. $x = -2$ не з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення.
Адказ: 1.

в) $\sqrt[3]{2x \quad 1} \quad \sqrt[3]{\quad x \quad 2}$; $2x \quad 1 \quad\quad x \quad 2$; $x \quad\quad 1.$
Адказ: -1.

5. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x} \quad \sqrt{x \quad 5} \quad 1$;   б) $\sqrt{5x \quad 21} \quad \sqrt{3x \quad 28} \quad 5.$

Рашэнне. а) Запішам ураўненне ў выглядзе $\sqrt{x} = \sqrt{x-5} + 1$ і ўзвядзём абедзве часткі атрыманага ўраўнення ў квадрат: $x = x - 5 + 1 + 2\sqrt{x-5}$; $2\sqrt{x-5} = 4$; $\sqrt{x-5} = 2$; $x - 5 = 4$; $x = 9$. З дапамогай праверкі пераканаемся, што $x = 9$ з'яўляецца коранем зыходнага ўраўнення.

Адказ: 9.

б) Функцыя $y = \sqrt{5x+21} + \sqrt{3x+28}$ нарастае на ўсім абсягу вызначэння, таму калі дадзенае ўраўненне мае корань, то толькі адзін. Пры $x = -4$ дадзенае ўраўненне пераўтвараецца ў правільную лікавую роўнасць: $\sqrt{-20+21} + \sqrt{-12+28} = 5$. Значыць, лік -4 з'яўляецца адзіным коранем дадзенага ўраўнення.

Адказ: -4.

6. Рашыце ўраўненне $\sqrt[3]{3-2x} = 10 - 3\sqrt[6]{3-2x}$.

Рашэнне. Няхай $t = \sqrt[6]{3-2x}$, тады $t^2 = \sqrt[3]{3-2x}$ і зыходнае ўраўненне прымае выгляд $t^2 = 10 - 3t$; $t^2 + 3t - 10 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt[6]{3-2x} = 2, \\ \sqrt[6]{3-2x} = -5. \end{array}\right.$$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў. Тады $\sqrt[6]{3-2x} = 2$; $3 - 2x = 64$; $x = -30{,}5$.

Адказ: $-30{,}5$.

1. Якія з ураўненняў не маюць каранёў:

а) $\sqrt{2-x} = -3$; б) $\sqrt[3]{2-x} = -3$; в) $\sqrt[6]{2-x} = -\sqrt{x}$; г) $\sqrt[7]{2-x} = -\sqrt[7]{x}$?

2. Выберыце сістэму, раўназначную ўраўненню выгляду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$:

а) $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

2.243. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[4]{x} = 2$; б) $\sqrt[5]{x} = -1$; в) $\sqrt[6]{x-4} = 1$;

г) $\sqrt[7]{x-5} = -2$; д) $\sqrt[8]{2x-1} = 3$; е) $\sqrt[3]{4x-1} = 0$.

2.244. Рашыце ірацыянальнае ўраўненне:

а) $\sqrt{4x\quad 1}\quad 5$; б) $\sqrt[3]{8x\quad 31}\quad 3$; в) $\sqrt{8x\quad 1}\quad 3\quad 0$;

г) $1+\sqrt[3]{7-x}=0$; д) $2\sqrt[4]{\quad 3x\quad 2}\quad 1$; е) $5\sqrt[5]{9\quad 2x}\quad 10$.

2.245. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[3]{x^2\quad 31}\quad 3$; б) $\sqrt[4]{x^2-6x+16}=2$;

в) $\sqrt{3x^2\quad x\quad 15}\quad 3$; г) $\sqrt{16x^2\quad 16x\quad 29}\quad 5$;

д) $\sqrt{23+3x-5x^2}=3$; е) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4$.

2.246. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y\quad \sqrt[4]{2x\quad 7}$ і $y=4$; б) $y=\sqrt[3]{x^2-15x+6}$ і $y=-2$.

2.247. Рашыце ўраўненне:

а) $0{,}5\sqrt{16-\sqrt{x+1}}=2$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2-x}+9}}{3}=1$;

в) $\sqrt{7\quad \sqrt[3]{x^2\quad 7}}\quad 3$; г) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}-3=0$.

2.248. Рашыце ўраўненне двума спосабамі:

а) $\sqrt{x\quad 2}\quad x\quad 4$; б) $\sqrt{3\quad 2x}\quad x$; в) $\sqrt{x+2}-3x=4$.

2.249. Знайдзіце значэнні зменнай, пры якіх роўны значэнні выразаў:

а) $\sqrt{x-2}$ і $x-2$; б) $\sqrt{20-x}$ і $-10-x$; в) $x+2$ і $2\sqrt{x+5}$.

2.250. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y=\sqrt{2x^2-3x-10}$ і $y=x$; б) $y\quad \sqrt{2x^2\quad 5x\quad 4}$ і $y=2x+2$;

в) $y=\sqrt{8-3x-x^2}$ і $y=-x-2$.

2.251. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[3]{x^3-x^2+4}=x$; б) $\sqrt[5]{2\quad 7x\quad x^5}\quad x$;

в) $\sqrt[3]{x^3+x^2-5x+4}=x$.

2.252. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y=\sqrt{12-x}-x$; б) $y\quad \sqrt{1\quad 4x\quad x^2}\quad x\quad 1$;

в) $y=\sqrt{3x^2-3x+21}-x+5$.

2.253. Ці праўда, што ўраўненні раўназначныя:

а) $\sqrt{5x\quad 4}\quad \sqrt{2x\quad 5}$ і $5x\quad 4\quad 2x\quad 5$;

б) $\sqrt[3]{x^2-5x+1}=\sqrt[3]{x-4}$ і $x^2-5x+1=x-4$;

в) $\sqrt[4]{x^2+x-3}=\sqrt[4]{1-2x}$ і $x^2+x-3=1-2x$?

2.254. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{2x\quad 5}\quad\sqrt{4x\quad 1}$;

б) $\sqrt[3]{2x\quad 1}\quad\sqrt[3]{8\quad x}$;

в) $\sqrt[4]{2x\quad 3}\quad 2\sqrt[4]{x\quad 3}$;

г) $\sqrt{x^2\quad 36}\quad\sqrt{2x\quad 1}\quad 0$;

д) $\sqrt{x^2+4x-16}=\sqrt{2x-1}$;

е) $\sqrt[8]{x^2-4x+5}=\sqrt[8]{x-1}$.

2.255. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y=\sqrt{6x^2-3x-1}$ і $y=\sqrt{2x-1}$;

б) $y\quad\sqrt{6x^2\quad 2x\quad 10}$ і $y=\sqrt{x^2-x-2}$.

2.256. Рашыце двума спосабамі ўраўненне $\sqrt[10]{\quad x^2\quad 13x\quad 9}\quad\sqrt[10]{\quad 7x\quad 9}$.

2.257. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$;

б) $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$;

в) $2\sqrt{2\quad x}\quad\sqrt{7\quad x}\quad 1$;

г) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x+5}=5$;

д) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2}$;

е) $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x}=\sqrt{3}$.

Для рашэння якіх ураўненняў рацыянальна выкарыстоўваць функцыянальны падыход?

2.258. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}=4$;

б) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

в) $2\sqrt{x\quad 1}\quad 8\quad\sqrt{x\quad 6}$;

г) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{1-x}=3$.

2.259. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}$ і прамой $y=3$;

б) $y\quad 3\sqrt{x\quad 3}\quad\sqrt{x\quad 2}$ і прамой $y=7$.

2.260. Рашыце ўраўненне з дапамогай метаду замены зменнай:

а) $\sqrt{x}\quad\sqrt[4]{x}\quad 6\quad 0$;

б) $\sqrt[3]{x}\quad 5\sqrt[6]{x}\quad 6$;

в) $\sqrt{x+3}-3\sqrt[4]{x+3}+2=0$;

г) $\sqrt[3]{x+15}-\sqrt[6]{x+15}=2$;

д) $x^2\quad 7\quad\sqrt{x^2\quad 7}\quad 20$;

е) $x^2\quad 2x\quad\sqrt{x^2\quad 2x\quad 8}\quad 12$.

2.261. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}+\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}}=4{,}25$;

б) $\sqrt{x^2\quad x\quad 3}\quad 1\quad\frac{12}{\sqrt{x^2\quad x\quad 3}}$.

2.262. Ці праўда, што раўназначныя ўраўненні $\sqrt{3\quad x}\cdot\sqrt{2\quad x}\quad\sqrt{2}$ і $\sqrt{(3-x)(2-x)}=\sqrt{2}$?

2.263. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sqrt{x\quad 2}\cdot\sqrt{x\quad 5}\quad 2$;   б) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$;   г) $\dfrac{2}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{\sqrt{x+6}}{x+4}$.

2.264*. Рашыце ўраўненне $(x-3)(x-2)-4\sqrt{x^2-5x+1}=10$.

2.265. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{3x\quad 4}\quad 7$;   б) $2\sqrt[3]{x+8}-1=0$;

в) $\sqrt[5]{4\quad x^2}\quad 2$;   г) $\sqrt[4]{x^2-3x+81}=3$;

д) $\sqrt{2x^2-5x+11}=3$;   е) $\sqrt[4]{4x^2+6x-2}=2$;

ж) $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$;   з) $\sqrt{9x^2-12x+85}=9$.

2.266. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y=\sqrt[6]{5-3x}$ і $y=2$;   б) $y=\sqrt[5]{4x-x^2}$ і $y=-2$.

2.267. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x\quad 2}\quad 8\quad x$;   б) $\sqrt{x\quad 3}\quad x\quad 3$;   в) $\sqrt{x-2}+4=x$;

г) $\sqrt{5-4x}+5=4x$;   д) $x\quad 1\quad\sqrt{x\quad 5}$;   е) $\sqrt{8\quad x}\quad 12\quad x$.

2.268. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y=\sqrt{3x^2-11x-20}$ і $y=x-5$;   б) $y=\sqrt{2x^2-x+1}$ і $y=x+3$.

2.269. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[3]{8x^3+x^2-9}=2x$;   б) $\sqrt[7]{9\quad 4x\quad x^7}\quad x$.

2.270. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y\quad\sqrt{x\quad 3}\quad x\quad 3$;   б) $y=\sqrt{2x^2-7x+5}+x-1$.

2.271. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{2x\quad 1}\quad\sqrt{x\quad 3}$;   б) $\sqrt[5]{7\quad 2x}\quad\sqrt[5]{x\quad 3}$;

в) $\sqrt[4]{2x\quad 7}\quad 3\sqrt[4]{x\quad 1}$;   г) $\sqrt{x^2-16}-\sqrt{14+x}=0$;

д) $\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}$;   е) $\sqrt[6]{x^2+x-3}=\sqrt[6]{1-2x}$.

2.272. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый:

а) $y \quad \sqrt{7x^2 \quad x \quad 2}$ і $y = \sqrt{7x - 2}$;

б) $y \quad \sqrt{3x^2 \quad 4x \quad 14}$ і $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

2.273. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$; б) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$;

в) $2\sqrt{3x+2} - \sqrt{6x} = 2$; г) $\sqrt{2x \quad 1} \quad \sqrt{x \quad 1} \quad 1$.

2.274. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x+5} = 5$; б) $\sqrt{x \quad 4} \quad \sqrt{2x \quad 6} \quad 7$;

в) $\sqrt{3x \quad 5} \quad 3 \quad \sqrt{x \quad 2}$; г) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

2.275. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі $y \quad \sqrt{5x \quad 1} \quad \sqrt{7 \quad x}$ і прамой $y = 6$.

2.276. Рашыце ўраўненне з дапамогай метаду замены зменнай:

а) $\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 12 = 0$; б) $\sqrt[3]{x} \quad 2\sqrt[6]{x} \quad 3$;

в) $\sqrt{x-7} - 5\sqrt[4]{x-7} + 4 = 0$; г) $\sqrt[3]{x \quad 3} \quad \sqrt[6]{x \quad 3} \quad 2$;

д) $x^2 \quad 12 \quad 2\sqrt{x^2 \quad 12} \quad 8$; е) $x^2 \quad 5x \quad 5\sqrt{x^2 \quad 5x \quad 28} \quad 4$.

2.277. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\sqrt{\dfrac{3x}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{3x}} = \dfrac{5}{2}$; б) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-7}} + \sqrt[3]{\dfrac{x-7}{x}} = \dfrac{10}{3}$.

2.278. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x \quad 6} \cdot \sqrt{x \quad 1} \quad 6$; б) $\sqrt{3x \quad 5} \cdot \sqrt{x \quad 2} \quad x \quad 1$;

в) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{2x+6}$.

2.279. Функцыя $f(x)$ зададзена формулай $f(x) = x^2 - 4x$. Знайдзіце: $f(2)$; $f(-2)$; $f(0)$; $f(0,5)$.

2.280. Рашыце няроўнасць $\dfrac{8x \quad 3}{16} \quad \dfrac{2x \quad 5}{3} \geqslant \dfrac{11 \quad 7x}{12}$.

2.281. Вылічыце:

а) $\cos\dfrac{7\pi}{4}$; б) $\sin \quad \dfrac{19}{6}$; в) $\operatorname{tg}\dfrac{9\pi}{4}$; г) $\operatorname{ctg} \quad \dfrac{23}{3}$.

2.282. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{matrix} x^2 \quad y^2 \quad 2xy \quad 4, \\ x \quad y \quad 6. \end{matrix}$

2.283. Скараціце дроб $\frac{x^2 - 2x - 35}{25 - x^2}$.

2.284. Прывядзіце да стандартнага выгляду $2\frac{1}{2}a^4b^8\;\;^2 \cdot\;\; 1\frac{2}{7}a^5b^{12}\;\;$.

2.285. Выкарыстайце метад замены зменнай і рашыце ўраўненне $4(x - 7)^4 + 3(x - 7)^2 - 1 = 0$.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць і ўмець карыстацца азначэннем кораня n-й ступені з ліку;
- ведаць і ўмець карыстацца азначэннем арыфметычнага кораня n-й ступені з ліку;
- ведаць і ўмець прымяняць уласцівасці каранёў n-й ступені з ліку;
- умець будаваць графікі функцый $y \quad \sqrt[n]{x}$, $n \quad \boldsymbol{N}$, $n > 1$, і выконваць іх пераўтварэнні;
- умець рашаць ірацыянальныя ўраўненні;
- валодаць рознымі спосабамі аналізу і мадэлявання вучэбных і практычных сітуацый.

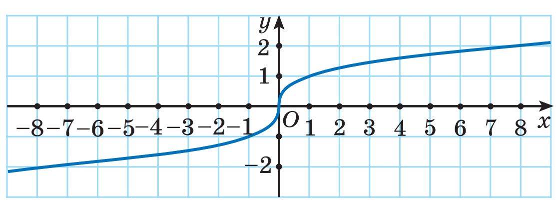
Я правяраю свае веды

1. Сярод дадзеных выразаў выберыце выразы, якія маюць сэнс:

а) $\sqrt[8]{2}$; б) $\sqrt[6]{-11}$; в) $\sqrt[5]{7}$; г) $\sqrt[3]{-5}$; д) $\sqrt[10]{0}$; е) $\sqrt[9]{-1}$.

2. Выберыце функцыю, графік якой паказаны на рысунку 124:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt[3]{x}$; в) $y = 3x$; г) $y = \frac{3}{x}$.



Рыс. 124

3. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} + \sqrt[4]{1}$;

в) $\sqrt[7]{128} : \sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt[3]{0{,}008} - \left(\sqrt[4]{3}\right)^4$.

4. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt[4]{2x \quad 1} \quad 3$; б) $\sqrt[5]{\quad 2x \quad 5} \quad\quad 1$;

в) $\sqrt[6]{x^2 - 2x + 61} = 2$; г) $\sqrt[3]{x^2 \quad x \quad 131} \quad\quad 5$.

5. Параўнайце лікі:

а) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[10]{29}$ і $\sqrt[5]{3\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$.

6. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{2x^2 \quad x \quad 6} \quad\quad x$; б) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x - 1}$;

в) $\sqrt{2x + 4} - \sqrt{7 - x} = 3$; г) $2\sqrt{x \quad 2} \quad \sqrt[4]{x \quad 2} \quad 15$.

7. Спрасціце выраз:

а) $\left(0{,}8\sqrt[4]{x} + 2\sqrt{y}\right)^2 - \left(0{,}8\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{y}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[4]{y}\right)\left(\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y}\right) + 4\sqrt[8]{y^7} : \sqrt[8]{y^3}$.

8. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f \quad x \quad\quad \sqrt[8]{x^2 \quad 9x \quad 8}$; б) $f \quad x \quad\quad \sqrt[4]{3 \quad 8x} \quad \frac{7}{\sqrt[5]{x \quad 1}}$;

в) $f \quad x \quad\quad \sqrt[8]{x \quad 5} \quad \frac{9}{\sqrt[4]{9 \quad 7x}}$; г) $f \quad x \quad\quad \sqrt[10]{25 \quad x^2} \quad \sqrt[6]{x^2 \quad 6x \quad 5}$.

9. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $2a\sqrt[6]{-a}$; б) $-m\sqrt[5]{m^3}$;

в) $-y\sqrt[6]{-y^7}$; г) $(y - 2)\sqrt[4]{4 - 2y}$.

10. Рашыце ўраўненне $\sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 1} = 4 - 3x - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 10» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 10 клас».

Раздзел 3

ВЫТВОРНАЯ

§ 18. Азначэнне вытворнай функцыі

3.1. З гарадоў A і B насустрач адзін аднаму адначасова выйшлі два паязды. Рухаючыся без прыпынкаў з пастаяннай скорасцю, яны сустрэліся праз 30 г пасля выхаду. Колькі часу спатрэбілася на праходжанне шляху AB кожнаму поезду, калі вядома, што першы прыбыў у горад B на 25 г пазней, чым другі прыбыў у горад A

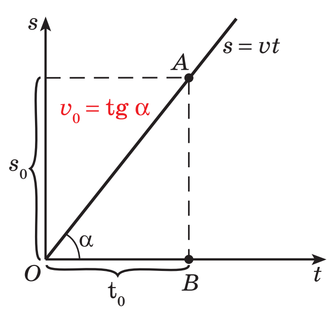
3.2. Дзве брыгады, працуючы разам, апрацавалі ўчастак зямлі за 12 г. За які час магла б апрацаваць гэты ўчастак кожная з брыгад асобна, калі скорасці выканання работы брыгадамі адносяцца як 3 : 2?

3.3. Уборку ўраджаю з участка пачаў адзін камбайн. Праз 2 г да яго далучыўся другі камбайн, і за 8 г сумеснай працы яны сабралі 80 % ураджаю. За колькі гадзін мог бы сабраць ураджай з участка кожны камбайн асобна, калі вядома, што аднаму на гэта спатрэбіцца на 5 г больш, чым другому?

У задачах на працэсы (руху, работы, планавання і г. д.), як правіла, скорасць разглядаемага працэсу лічыцца пастаяннай на ўсім пазначаным ва ўмове задачы прамежку часу.

Формула, якая выражае сувязь паміж s (пройдзеным шляхам) і t (часам руху) пры пастаяннай скорасці руху (v) мае выгляд $s = vt$.

Гэта залежнасць s ад t лінейная, яе графік зручна паказваць у сістэме каардынат (рыс. 125): гарызантальная вось — вось часу (t), вертыкальная вось — вось пройдзенага шляху (s).



Рыс. 125

Графікам лінейнай залежнасці $s = vt$ з'яўляецца прамая.

Заўважым, што пройдзены шлях (s_0) лікава роўны даўжыні адрэзка AB, час t_0 лікава роўны даўжыні адрэзка OB. З прамавугольнага трохвугольніка OAB адносіна катэта, процілеглага востраму вуглу α, да прылеглага катэта роўна тангенсу вугла α, г. зн.

$$\mathrm{tg} \quad \frac{AB}{OB} \quad \frac{s_0}{t_0} \quad v_0.$$

Такім чынам, дзяленнем пройдзенага шляху на затрачаны на гэты шлях час знаходзіцца v_0 — сярэдняя скорасць.

Тангенс вугла α роўны лікаваму значэнню скорасці праходжання працэсу, а вугал нахілу прамой OA да восі абсцыс характарызуе скорасць працэсу руху.

У рэальных працэсах скорасць руху (іншых працэсаў) не з'яўляецца пастаяннай нават на невялікім прамежку часу. У фізіцы разглядаецца як паняцце **сярэдняй скорасці**, модуль якой роўны адносіне модуля перамяшчэння да ўсяго часу перамяшчэння, так і **імгненнай скорасці**.

Разгледзім алгарытм вылічэння гэтых велічынь.

Няхай функцыя $s(t)$ — залежнасць пройдзенага шляху ад часу — зададзена графічна (рыс. 126).

① Выберам t_0 — пачатковы момант часу.

② Знойдзем $s(t_0)$ — адлегласць (пройдзены шлях) у момант t_0 ад пачатку адліку.

③ Выберам Δt — некаторы прамежак часу.

④ Атрымаем $t_0 + \Delta t$ — новы момант часу.

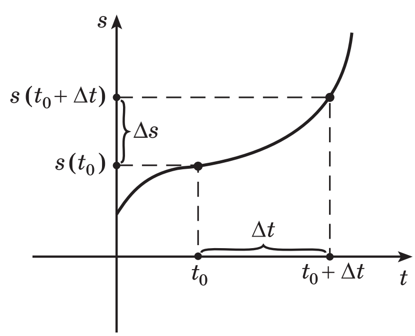
⑤ Адзначым $s(t_0 + \Delta t)$ — адлегласць у момант часу $t_0 + \Delta t$ ад пачатку адліку.

⑥ Знойдзем Δs — адлегласць, пройдзеную за прамежак часу Δt:

$$s \quad s\ t_0 \quad t \quad s\ t_0 \ .$$

⑦ Знойдзем **сярэднюю скорасць** руху на прамежку Δt:

$$v \quad \frac{s}{t}$$



Рыс. 126

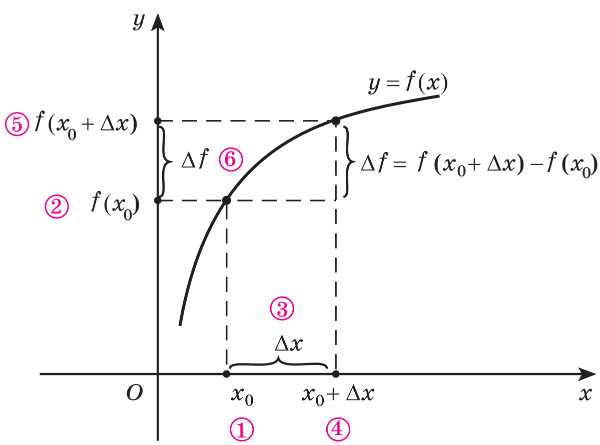
⑧ Калі прамежак Δt бясконца памяншаецца, гавораць «імкнецца да нуля» ($\Delta t \to 0$), то сярэдняя скорасць $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ імкнецца да **імгненнай скорасці** ($v_{\text{сяр}} \to v_{\text{імгн}}$).

Імгненная скорасць фіксуецца пры руху аўтамабіля на трасе з дапамогай прыбораў фіксацыі скорасці, напрыклад радара.

Па аналогіі з сярэдняй і імгненнай скарасцямі працэсу руху ў матэматыцы разглядаюцца сярэдняя і імгненная скорасці змянення розных функцый.

Для вылічэння значэнняў гэтых велічынь разгледзім, як змяняецца значэнне функцыі пры пераходзе ад аднаго значэння аргумента да другога, інакш кажучы, знойдзем **прырашчэнне функцыі**.

Для таго каб вылічыць прырашчэнне функцыі $y = f(x)$, трэба:

① Выбраць некаторае значэнне аргумента x_0 — першапачатковае значэнне аргумента. ② Знайсці $f(x_0)$ — першапачатковае значэнне функцыі. ③ Змяніць значэнне аргумента, для гэтага выбраць Δx — прырашчэнне аргумента. ④ Атрымаць $x_0 + \Delta x$ — нарошчанае значэнне аргумента. ⑤ Знайсці нарошчанае значэнне функцыі $f(x_0 + \Delta x)$. ⑥ Знайсці прырашчэнне функцыі $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.	Праілюструем этапы знаходжання прырашчэння функцыі на графіку. 

Напрыклад, выкарыстаўшы алгарытм, знойдзем прырашчэнне функцыі $f(x) = x^2$ пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$.

① Выберам некаторае значэнне аргумента x_0 — першапачатковае значэнне аргумента.

② Знойдзем $f(x_0)$ — першапачатковае значэнне функцыі: $f(x_0) = x_0^2$.

③ Зменім значэнне аргумента. Выберам Δx — прырашчэнне аргумента.

④ Атрымаем $x_0 \quad x$ — нарошчанае значэнне аргумента.

⑤ Знойдзем нарошчанае значэнне функцыі:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 \quad x_0^2 \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2.$$

⑥ Знойдзем прырашчэнне функцыі:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad x_0^2 \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2 \quad x_0^2 \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2.$$

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне прырашчэння функцыі $f(x) = x^2$, калі:

а) $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}5$; б) $x_0 = 2$; $\Delta x = 0{,}5$;
в) $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; г) $x_0 = -1$; $\Delta x = 0{,}1$.

Рашэнне. Падставім дадзеныя значэнні x_0 і Δx у атрыманы выраз $f \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2$ для $f(x) = x^2$.

а) Пры $x_0 = 1$ і $\Delta x = 0{,}5$ атрымаем

$$f \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2 \quad 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \quad 0{,}25 \quad 1{,}25;$$

б) пры $x_0 = 2$ і $\Delta x = 0{,}5$ атрымаем

$$f \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2 = 2 + 0{,}25 = 2{,}25;$$

в) пры $x_0 = 1$ і $\Delta x = 0{,}1$ атрымаем

$$f \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2 = 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}21;$$

г) пры $x_0 = -1$ і $\Delta x = 0{,}1$ атрымаем

$$f \quad 2x_0 \quad x \qquad x^2 = -0{,}2 + 0{,}01 = -0{,}19.$$

Заўважым, што прырашчэнне функцыі залежыць ад першапачатковага значэння аргумента і ад прырашчэння аргумента.

Для функцыі $f(x) = x^2$ знойдзем адносіну прырашчэння функцыі да прырашчэння аргумента пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{f}{x} \quad \frac{2x_0 \quad x \qquad x^2}{x} \quad 2x_0 \qquad x.$$

Няхай Δx бясконца памяншаецца, г. зн. Δx імкнецца да нуля, тады адносіна $\frac{f}{x} \quad 2x_0 \qquad x$ імкнецца да $2x_0$ $\frac{f}{x} \qquad x \qquad x$ якое ўжо не залежыць ад прырашчэння Δx.

Пры $x_0 = 2$ гэты лік роўны 4, пры $x_0 = 1$ гэты лік роўны 2 і г. д.

Азначэнне. Вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце называецца лік, да якога імкнецца адносіна прырашчэння функцыі да прырашчэння аргумента $\frac{f}{x}$ пры прырашчэнні аргумента (Δx), якое імкнецца да нуля.

Вытворная функцыі абазначаецца $f \quad x$ і чытаецца «эф штрых ад ікс».

Паколькі для функцыі $f(x) = x^2$ адносіна $\frac{f}{x} \quad 2x_0 \qquad x$ імкнецца да $2x_0$ пры Δx, якое імкнецца да нуля, то вытворная гэтай функцыі ў пункце x_0 роўна $2x_0$.

Можна запісаць $x^2 \qquad 2x$ (паколькі x_0 — адвольны пункт, то індэкс у абазначэнні $2x_0$ можна не пісаць). Вытворная пры дадзеным значэнні x ёсць лік. Калі вытворная дадзенай функцыі існуе для кожнага x з некатората прамежку, то яна з'яўляецца функцыяй ад x.

Для таго каб знайсці вытворную функцыі $y = f(x)$, трэба:

① Знайсці прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$. ② Знайсці $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ — адносіну прырашчэння функцыі да прырашчэння аргумента. ③ Знайсці вытворную функцыі $f'(x_0)$ — лік, да якога імкнецца $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ пры ўмове, што Δx імкнецца да нуля.	Знайдзіце вытворную функцыі $f(x) = \frac{1}{x}$. ① $f(x_0) \quad \frac{1}{x_0}$; $f(x_0 \quad x) \quad \frac{1}{x_0 \quad x}$, тады $f \quad f(x_0 \quad x) \quad f\ x_0 \quad \frac{1}{x_0 \quad x} \quad \frac{1}{x_0}$; $f \quad \frac{x_0 \quad x_0 \quad x}{x_0\ x_0 \quad x} \quad \frac{x_0 \quad x_0 \quad x}{x_0\ x_0 \quad x} \quad \frac{x}{x_0\ x_0 \quad x}$. ② $\frac{f}{x} \quad \frac{x}{x_0\ x_0 \quad x} : x \quad \frac{1}{x_0\ x_0 \quad x} \quad \frac{1}{x_0^2 \quad x_0\ x}$. ③ Пры $x \quad 0$ атрымаем, што $\frac{f}{x} \quad \frac{1}{x_0^2}$. Такім чынам, $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x^2}$.

Прыклад 2. Знайдзіце вытворную функцыі $f\ x \quad 5x \quad 9$.

Рашэнне. ① $f\ x_0 \quad 5x_0 \quad 9$; $f\ x_0 \quad x \quad 5\ x_0 \quad x \quad 9$, тады

$f \quad f(x_0 \quad x) \quad f\ x_0 \quad 5\ x_0 \quad x \quad 9 \quad 5x_0 \quad 9$;

$f \quad 5\ x_0 \quad x \quad 9 \quad 5x_0 \quad 9$;

$f \quad 5\ x_0 \quad x \quad 5x_0$;

$f \quad 5x_0 \quad 5\ x \quad 5x_0$;

$f \quad 5\ x$.

② $\frac{f}{x} \quad \frac{5\ x}{x} \quad 5$.

③ Адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не залежыць ад Δx, яна пастаянная і роўна 5, г. зн. пры $x \quad 0$ атрымаем, што $\frac{f}{x} \quad 5$.

Такім чынам, $5x \quad 9 \quad 5$.

Прыклад 3. Знайдзіце вытворную функцыі $f(x) = \frac{1}{x}$ у пункце $x = 2$.

Рашэнне. Паколькі $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x^2}$, то падставім у выраз $-\frac{1}{x^2}$ значэнне $x = 2$.

Прынятае абазначэнне: $f\ 2 \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{4}$.

Вернемся да імгненнай скорасці руху. Пры Δt, што імкнецца да нуля, сярэдняя скорасць імкнецца да імгненнай ($v_{сяр} \to v_{імгн}$ пры $\Delta t \to 0$), зна чыць, імгненная скорасць з'яўляецца вытворнай функцыі $s(t)$.

Прыклад 4. Закон руху зададзены функцыяй $s(t) = t^2 - t$. Знайдзіце скорасць руху ў момант часу $t = 3$.

Рашэнне. Паколькі імгненная скорасць v руху, зададзенага функ цыяй $s(t)$, роўна вытворнай гэтай функцыі ў пункце, то знойдзем вытвор ную функцыі $s(t) = t^2 - t$, г. зн. $s'(t)$.

① Знойдзем прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад t_0 да $t_0 + \Delta t$.

$s\ t_0 \quad t_0^2 \quad t_0$; $s\ t_0 \quad t \quad t_0 \quad t^{\ 2} \quad t_0 \quad t$, тады

$s \quad s\ x_0 \quad x \quad s\ x_0 \quad t_0 \quad t^{\ 2} \quad t_0 \quad t \quad t_0^2 \quad t_0$;

$s \quad t_0 \quad t^{\ 2} \quad t_0 \quad t \quad t_0^2 \quad t_0$;

$s \quad t_0^2 \quad 2t_0 \quad t \quad t^2 \quad t_0 \quad t \quad t_0^2 \quad t_0$;

$s \quad 2t_0 \quad t \quad t^2 \quad t$.

② $\frac{s}{t} \quad \frac{2t_0 \quad t \quad t^2 \quad t}{t} \quad 2t_0 \quad t \quad 1$.

③ Пры t 0 атрымаем, што $\frac{s}{t} \quad 2t_0 \quad 1$.

Такім чынам, $s\ t \quad t^2 \quad t \quad 2t \quad 1$, г. зн. $v \quad s\ t \quad t$

Скорасць руху ў момант часу $t = 3$ роўна $s\ 3 \quad 2 \cdot 3 \quad 1 \quad 5$.

Наогул кажучы, калі змяненне якой-небудзь велічыні задаецца функцыяй $y = f(t)$, то імгненная скорасць змянення гэтай велічыні пры $t = t_0$ роўна $f'(t_0)$, або коратка: вытворная ёсць скорасць змя нення функцыі.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Знайдзіце прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$, калі:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) \quad 2x \quad 3$.

Рашэнне. а) ① Выберам некаторае значэнне аргумента x_0 — перша пачатковае значэнне аргумента.

② Знойдзем $f\ x_0$ — першапачатковае значэнне функцыі:

$f\ x_0 \quad x_0^2 \quad 5$.

③ Зменім значэнне аргумента. Выберам Δx — прырашчэнне аргумента.

④ Атрымаем $x_0 + \Delta x$ — нарошчанае значэнне аргумента.

⑤ Знойдзем нарошчанае значэнне функцыі:

$$f \; x_0 \quad x \quad x_0 \quad x^{\;2} \quad 5 \quad x_0^2 \quad 2x_0 \quad x \quad x^2 \quad 5.$$

⑥ Знойдзем прырашчэнне функцыі:

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$

$$f \quad x_0^2 \quad 2x_0 \quad x \quad x^2 \quad 5 \quad x_0^2 \quad 5\;;$$

$$f \quad x_0^2 \quad 2x_0 \quad x \quad x^2 \quad 5 \quad x_0^2 \quad 5; \qquad f \quad 2x_0 \quad x \quad x^2.$$

б) $f \; x_0 \quad 2x_0 \quad 3; \; f \; x_0 \quad x \quad 2 \; x_0 \quad x \quad 3,$ тады

$$f \quad f \; x_0 \quad x \quad f \; x_0 \quad 2 \; x_0 \quad x \quad 3 \quad 2x_0 \quad 3\;;$$

$$f \quad 2 \; x_0 \quad x \quad 3 \quad 2x_0 \quad 3; \qquad f \quad 2 \; x_0 \quad x \quad 2x_0;$$

$$f \quad 2x_0 \quad 2 \quad x \quad 2x_0; \qquad f \quad 2 \quad x.$$

2. Знайдзіце адносіну $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, калі:

а) $f(x) = x^2 - 5;$ б) $f(x) \quad 2x \quad 3.$

Рашэнне. Выкарыстаем вынікі папярэдняга задання і атрымаем:

а) $\dfrac{f}{x} \quad \dfrac{2x_0 \;\; x \qquad x^2}{x} \quad \dfrac{x \;\; 2x_0 \qquad x}{x} \quad 2x_0 \quad x;$ б) $\dfrac{f}{x} \quad \dfrac{2 \;\; x}{x} \quad 2.$

3. Вызначце, да чаго імкнецца адносіна $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ для функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 5;$

б) $f(x) \quad 2x \quad 3,$ — калі Δx імкнецца да нуля ($x \quad 0$).

Рашэнне. Выкарыстаем вынікі папярэдняга задання і атрымаем:

а) $\dfrac{f}{x} \quad 2x_0 \quad x,$ паколькі другое складаемае ў суме імкнецца да нуля, то сума імкнецца да $2x_0$, г. зн. пры $x \quad 0$ атрымаем, што $\dfrac{f}{x} \quad 2x_0.$

б) $\dfrac{f}{x} \quad 2,$ паколькі адносіна $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ не залежыць ад Δx, то яна паста янная і роўна 2. Такім чынам, пры $x \quad 0$ атрымаем, што $\dfrac{f}{x} \quad 2.$

4. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) \quad 2x \quad 3$.

Рашэнне. Паколькі вытворная функцыі роўна ліку, да якога імкнецца $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ пры $\quad x \quad 0$, то, выкарыстаўшы вынікі папярэдняга задання, атрымаем:

а) $f \quad x \quad\quad x^2 \quad 5 \quad\quad 2x$; б) $f \quad x \quad\quad 2x \quad 3 \quad\quad 2$.

5. Вылічыце вытворную функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) \quad 2x \quad 3$ — у пункце $x = 4; -2; 0; 0{,}5$.

Рашэнне. Выкарыстаем вынікі, атрыманыя ў папярэднім заданні.
а) Паколькі $f\ (x) \quad 2x$, то падставім значэнні зменнай x у выраз $2x$ і атрымаем:

$f\ (4) \quad 2 \cdot 4 \quad 8$; $f\ (\quad 2) \quad 2 \cdot (\quad 2) \quad\quad 4$;

$f\ (0) \quad 2 \cdot 0 \quad 0$; $f\ (0{,}5) \quad 2 \cdot 0{,}5 \quad 1$;

б) $f \quad x \quad\quad 2x \quad 3 \quad\quad 2$, паколькі вытворная функцыі $f(x) \quad 2x \quad 3$ роўна 2 і не залежыць ад x, то пры любым значэнні зменнай яе значэнне роўна 2, г. зн. $f\ (4) \quad f\ (\quad 2) \quad f\ (0) \quad f\ (0{,}5) \quad 2$.

6. Закон руху зададзены функцыяй:

а) $s(t) = t^2 - 5$; б) $s(t) \quad 2t \quad 3$.

Знайдзіце скорасць руху ў момант часу $t = 5$.

Рашэнне. а) Паколькі імгненная скорасць руху, зададзенага функцыяй $s(t)$, роўна вытворнай гэтай функцыі, то

$v \quad\quad s \quad t \quad\quad t \quad\quad\quad\quad t$ У момант $t = 5$ знойдзем яе значэнне:

$v \quad\quad s \quad\quad\quad \cdot$

б) Паколькі $v \quad\quad s \quad t \quad\quad t$ не залежыць ад t, то ў любы момант часу яна роўна 2.

7. Знайдзіце вытворную лінейнай функцыі $f(x) \quad kx \quad b$.

Рашэнне. ① $f \quad x_0 \quad\quad kx_0 \quad\quad b$; $f \quad x_0 \quad\quad x \quad\quad k \quad x_0 \quad\quad x \quad\quad b$, тады

$f \quad f \quad x_0 \quad\quad x \quad f \quad x_0 \quad\quad k \quad x_0 \quad\quad x \quad\quad b \quad\quad kx_0 \quad b$;

$f \quad k\ x_0 \quad x \quad b \quad kx_0 \quad b; \qquad f \quad k\ x_0 \quad x \quad kx_0;$

$f \quad kx_0 \quad k\ x \quad kx_0; \qquad f \quad k\ x.$

② $\dfrac{f}{x} \quad \dfrac{k\ x}{x} \quad k.$

③ Паколькі адносіна $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ не залежыць ад Δx, то яна пастаянная і роўна k, значыць, $f \quad x \quad kx \quad b \quad k.$

8. Выкарыстайце вынік папярэдняга задання і знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) \quad 3x \quad 5;$ б) $f(x) = x.$

Рашэнне. а) $f(x) \quad 3x \quad 5$, паколькі $k = 3$, то $3x \quad 5 \quad 3;$

б) $f(x) = x$, паколькі $k = 1$, то $x \quad 1.$

9. Знайдзіце вытворную пастаяннай функцыі $y = C$.

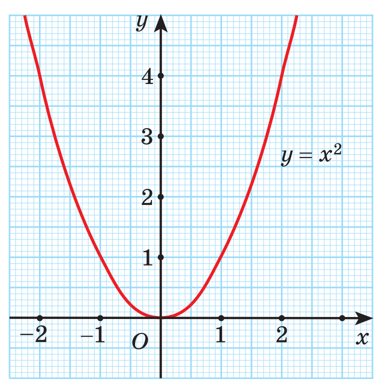
Рашэнне. $f \quad x_0 \quad x \quad f \quad x_0 \quad C \quad C \quad 0$, таму $C \quad 0.$

Ці праўда, што:

а) $(3x \quad 4) \quad 3;$ б) $(\ 3 \quad 5x) \quad 5;$ в) $(\ 7x) \quad 7;$ г) $6 \quad 0?$

3.4. Па графіку функцыі $y = x^2$ (рыс. 127) вызначце прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад значэння аргумента:

а) 1 да значэння 2;
б) 1 да значэння 1,5;
в) –2 да значэння –0,5.



Рыс. 127

3.5. Знайдзіце з дапамогай алгарытма прырашчэнне функцыі $y = x^2$ пры пераходзе ад значэння аргумента:

а) 1 да значэння 2;
б) 1 да значэння 1,5;
в) –2 да значэння –0,5.

3.6. Знайдзіце з дапамогай алгарытму прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$, калі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 1;$ б) $f(x) = -3x + 2;$ в) $f(x) = 3x^2;$ г) $f(x) = \frac{8}{x}.$

3.7. Знайдзіце адносіну $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, калі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 1;$ б) $f(x) = -3x + 2;$ в) $f(x) = 3x^2;$ г) $f(x) = \frac{8}{x}.$

3.8. Вызначце, да чаго імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функцыі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 1;$ б) $f(x) = -3x + 2;$ в) $f(x) = 3x^2;$

г) $f(x) = \frac{8}{x},$ — калі Δx імкнецца да нуля $\quad x \quad 0$.

3.9. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 1;$ б) $f(x) = -3x + 2;$ в) $f(x) = 3x^2;$ г) $f(x) = \frac{8}{x}.$

3.10. Вылічыце вытворную функцыі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 1;$ б) $f(x) = -3x + 2;$ в) $f(x) = 3x^2;$

г) $f(x) = \frac{8}{x}$ — у пунктах $x = -2;\ -1;\ 0{,}5;\ 8.$

3.11. Закон руху зададзены функцыяй:

а) $s(t) \quad 3t \quad 5;$ б) $s(t) \quad t^2 \quad 7.$

Знайдзіце скорасць руху ў момант часу $t = 4.$

3.12. Выкарыстайце тое, што $f\ (x) \quad (kx \quad b) \quad k,$ і знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = 8x - 2;$ б) $f(x) = -x + 2;$

в) $f(x) = \frac{x}{6} - 3;$ г) $f(x) = 5 - \frac{x}{4}.$

3.13. Для функцыі $f(x) = 3x^2 - 6x$ знайдзіце:

а) прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$; б) прырашчэнне функцыі, калі $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; в) адносіну $\frac{\Delta f}{\Delta x}$; г) да чаго імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля; д) вытворную функцыі; е) вытворную функцыі ў пункце $x = 5.$

3.14. Знайдзіце з дапамогай алгарытму прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$, калі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 8;$ б) $f(x) = -2x + 7.$

3.15. Знайдзіце адносіну $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, калі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

3.16. Вызначце, да чаго імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ для функцыі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 8$; б) $f(x) = -2x + 7$, — калі Δx імкнецца да нуля.

3.17. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 8$; б) $f(x) = -2x + 7$.

3.18. Вылічыце вытворную функцыі:

а) $f(x) \quad x^2 \quad 8$; б) $f(x) = -2x + 7$ — у пунктах $x = -3$; 0; $1{,}5$; 9.

3.19. Закон руху зададзены функцыяй $s(t) \quad t^2 \quad 1$. Знайдзіце скорасць руху ў момант часу $t = 10$.

3.20. Выкарыстайце тое, што $f\ (x) \quad (kx \quad b) \quad k$, і знайдзіце вытвор ную функцыі:

а) $f(x) = 5x - 8$; б) $f(x) = -6x + 1$;

в) $f(x) = \frac{2x}{7} - 5$; г) $f(x) = 7 - \frac{x}{9}$.

3.21. Для функцыі $f(x) \quad x^2 \quad 5x$ знайдзіце:

а) прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$;
б) прырашчэнне функцыі, калі $x_0 = 2$; $\Delta x = 0{,}1$;
в) адносіну $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
г) да чаго імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля;
д) вытворную функцыі;
е) вытворную функцыі ў пункце $x = -3$.

3.22. Сярод лікаў 3; $\frac{2}{7}$; $\sqrt[5]{3}$; 0; 9; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $5,\ 23$; 7; ; $7{,}8$; 15 вы берыце натуральныя, цэлыя, рацыянальныя, ірацыянальныя. Якому лікаваму мноству належаць усе гэтыя лікі?

3.23. Прамая $y = kx + b$ праходзіць праз пункты $A(2;\ 0)$ і $B(-2;\ 10)$. Запішыце ўраўненне гэтай прамой.

3.24. Рашыце ўраўненне $\frac{1 - 9x}{x^2 + 2x - 3} + \frac{3x - 1}{x - 1} = \frac{2x}{x + 3}$.

3.25. Знайдзіце нулі функцыі $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

§ 19. Правілы вылічэння вытворных

3.26. Рашыце ўраўненне $(x^2 - 4)(x^2 - 5x - 6) = 0$.

3.27. Рашыце няроўнасць $(x^2 - 4)(x^2 - 5x - 6) < 0$.

3.28. Рашыце няроўнасць $\frac{x-1}{(x+2)^3} < 0$.

Для вылічэння вытворных будзем карыстацца выведзенымі ў папярэднім параграфе формуламі:

$^2 \quad 2 \;;\quad ;\; \frac{1}{} \quad \frac{1}{^2};\quad 0.$ Запішам іх у табліцу.

$f(x)$	x^2	$kx + b$	$\frac{1}{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	0

Разгледзім некалькі правілаў вылічэння вытворных.

1. Вытворная сумы: калі функцыі U і V маюць вытворныя, то вытворная сумы роўна суме вытворных, г. зн. $U \quad V \qquad U \quad V$.

Доказ. Няхай $U + V = W$. Разгледзім суму прырашчэнняў функцый U і V:
$U \quad V \quad U(x \quad x) \; U(x) \; V(x \quad x) \; V(x) \; U(x \quad x) \; V(x \quad x) \; (V(x) \; U(x))$
$W(x \quad x) \; W(x) \quad W$. Тады $\frac{W}{x} \quad \frac{V \quad U}{x} \quad \frac{V}{x} \quad \frac{U}{x}$.

Калі Δx імкнецца да нуля, то $W \quad U \quad V \quad U \quad V$.

Прыклад 1. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f \; x \quad x^2 \quad 5x$; б) $h \; x \quad x^2 \quad \frac{1}{x}$.

$U \quad V \qquad U \quad V$

Рашэнне. а) $f \; x \quad x^2 \quad 5x \quad x^2 \quad 5x \quad 2x \quad 5$;

б) $h \; x \quad x^2 \; \frac{1}{x} \quad x^2 \quad \frac{1}{x} \quad 2x \; \frac{1}{x^2}$.

2. Вытворная здабытку: калі функцыі U і V маюць вытворныя, то $UV \quad U\,V \quad V\,U$.

Прыклад 2. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = x^2 \cdot (3x - 1)$.

$$(UV)' = U'V + V'U$$

Рашэнне. а) $f'(x) = (x^3)' = (x^2 \cdot x)' =$

$= (x^2)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$;

б) $f'(x) = (x^2 \cdot (3x - 1))' = (x^2)' \cdot (3x - 1) + (3x - 1)' \cdot x^2 =$

$= 2x \cdot (3x - 1) + 3 \cdot x^2 = 6x^2 - 2x + 3x^2 = 9x^2 - 2x.$

Вынік. Пастаянны множнік можна выносіць за знак вытворнай:

$$(Cf(x))' = C f'(x).$$

Прыклад 3. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = 5x^2$; б) $f(x) = \frac{7}{x}$.

Рашэнне. а) $f'(x) = (5 \cdot x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$;

б) $f'(x) = \left(\frac{7}{x}\right)' = \left(7 \cdot \frac{1}{x}\right)' = 7 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 7 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{7}{x^2}$.

3. Вытворная дзелі: калі функцыі U і V маюць вытворныя, то

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}.$$

Прыклад 4. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = \frac{4x - 1}{5x + 6}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$.

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

Рашэнне. а) $f'(x) = \left(\frac{4x - 1}{5x + 6}\right)' =$

$= \frac{(4x - 1)' \cdot (5x + 6) - (5x + 6)'(4x - 1)}{(5x + 6)^2} = \frac{4 \cdot (5x + 6) - 5(4x - 1)}{(5x + 6)^2} = \frac{29}{(5x + 6)^2}$;

б) $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x + 1}\right)' = \frac{(x^2)'(x + 1) - (x + 1)' \cdot x^2}{(x + 1)^2} = \frac{2x(x + 1) - 1 \cdot x^2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$.

4. Вытворная ступені: вытворная ступені роўна здабытку паказчыка ступені на ступень з той жа асновай і меншым на адзінку паказчыкам, г. зн. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, дзе $n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 5. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = x^8$; б) $f(x) = x^{15}$.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Рашэнне. а) $f'(x) = (x^8)' = 8x^{8-1} = 8x^7$;

б) $f'(x) = (x^{15})' = 15x^{15-1} = 15x^{14}$.

Знаходжанне вытворнай функцыі называецца **дыферэнцыраваннем** функцыі.

Правілы 1—4 называюцца правіламі дыферэнцыравання. Імі карыстаюцца для вылічэння вытворных розных функцый.

Прыклад 6. Знайдзіце $f'(x)$, калі:

а) $f(x) = 6x^2 - 9x + 2$; б) $f(x) = (3x^2 - 7)(4x^2 + 9)$;

в) $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 5}$; г) $f(x) = 4x^{10}$.

Рашэнне. а) Знойдзем вытворную функцыі $f(x) = 6x^2 - 9x + 2$ па правілах знаходжання вытворнай сумы, вынясення пастаяннага множніка за знак вытворнай і формул вытворных:

$$(6x^2 - 9x + 2)' = (6x^2)' - (9x)' + (2)' = 6(x^2)' - 9(x)' + 0 = 6 \cdot 2x - 9 \cdot 1 = 12x - 9.$$

б) Знойдзем вытворную функцыі $f(x) = (3x^2 - 7)(4x^2 + 9)$ па правіле знаходжання вытворнай здабытку:

$$((3x^2 - 7)(4x^2 + 9))' = (3x^2 - 7)'(4x^2 + 9) + (4x^2 + 9)'(3x^2 - 7) =$$
$$= 6x(4x^2 + 9) + 8x(3x^2 - 7) = 48x^3 - 2x.$$

в) Знойдзем вытворную функцыі $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 5}$ па правіле знаходжання вытворнай дзелі:

$$\left(\frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 5}\right)' = \frac{(1 - 2x^2)'(4x^2 + 5) - (4x^2 + 5)'(1 - 2x^2)}{(4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x\left(4x^2 + 5\right) - 8x\left(1 - 2x^2\right)}{\left(4x^2 + 5\right)^2} =$$
$$= \frac{-16x^3 - 20x - 8x + 16x^3}{(4x^2 + 5)^2} = -\frac{28x}{(4x^2 + 5)^2}.$$

г) Выкарыстаем правіла вынясення пастаяннага множніка за знак вы творнай і правіла знаходжання вытворнай ступені:

$$4x^{10} \quad 4 \ x^{10} \quad 4 \cdot 10x^{10 \quad 1} \quad 40x^{9}.$$

Прыклад 7. Вылічыце: а) $f'(1)$; б) $f'(4)$; в) $f\ (\ \ 2)$; г) $f'(0)$, — калі $f(x) = 3x^4 - 0{,}5x^2$.

Рашэнне. Знойдзем вытворную функцыі $f(x) = 3x^4 - 0{,}5x^2$, выкарыстаўшы правілы знаходжання вытворнай сумы, ступені і вынясення па

стаяннага множніка: $f \quad x \qquad 3x^4 \quad 0{,}5x^2 \quad = \quad 3x^4 \qquad 0{,}5x^2 \qquad 12x^3 \quad x.$

Падставіўшы ў выраз $12x^3 - x$ дадзеныя значэнні зменнай, знойдзем:

а) $f\ (1) \quad 12 \quad 1 \quad 11;$ б) $f\ (4) \quad 768 \quad 4 \quad 764;$

в) $f\ (\ \ 2) \quad 96 \quad 2 \quad 94;$ г) $f\ (0) \quad 0.$

Прыклад 8. Рашыце ўраўненне $f\ (x) \quad 3f(x)$, калі $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Рашэнне. Знойдзем вытворную функцыі $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, выкарыстаўшы правілы знаходжання вытворнай сумы, ступені і вынясення па

стаяннага множніка: $f \quad x \qquad 2x^3 \quad 3x^2 \qquad 6x^2 \quad 6x.$

Тады ўраўненне $f'(x) = 3f(x)$ прыме выгляд: $6x^2 - 6x = 3 \cdot (2x^3 - 3x^2)$. Рэшым яго:

$$6x^2 - 6x = 6x^3 - 9x^2 \Leftrightarrow 6x^3 - 15x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \quad 0, \\ x \quad 2, \\ x \quad \frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Адказ: 0; 0,5; 2.

Прыклад 9. Прамалінейны рух пункта зададзены ўраўненнем $s(t) = 2t^2 - 8t - 10$ (шлях вымяраецца ў метрах, час — у секундах). Знайдзіце скорасць руху ў момант часу, роўны 8 с.

Рашэнне. Паколькі імгненная скорасць руху, зададзенага функ цыяй $s(t) = 2t^2 \quad - \quad 8t \quad - \quad 10$, роўна вытворнай гэтай функцыі, то $v \qquad s \ \ t \qquad t \qquad t \qquad\qquad t$ у момант часу, роўны 8 с.

Знойдзем яе значэнне: $v \qquad s \qquad \cdot \qquad\qquad —$

Адказ: —

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы правілы дыферэнцыравання:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 2$; б) $g(x) = 2x^{19} - 0,3x^{33}$;

в) $h(x) = 3x^{15} - \frac{1}{x}$; г) $(\ \ ) = \frac{3}{8} - \frac{3}{7} + 8$.

Рашэнне. а) $f \quad x \qquad x^2 \quad 5x \quad 2 \qquad x^2 \qquad 5x \qquad 2 \qquad 2x \quad 5$;

б) $g \quad x \qquad 2x^{19} \quad 0,3x^{33} \qquad 2x^{19} \qquad 0,3x^{33} \qquad 2 \ x^{19} \qquad 0,3 \ x^{33} \qquad =$

$= 2 \cdot 19x^{18} \quad 0,3 \cdot 33x^{32} \quad 38x^{18} \quad 9,9x^{32}$;

в) $h \quad x \qquad 3x^{15} \ \frac{1}{x} \qquad 3x^{15} \qquad \frac{1}{x}$

$= 3 \ x^{15} \qquad \frac{1}{x} \qquad 3 \cdot 15x^{14} \qquad \frac{1}{x^2} \qquad 45x^{14} \quad \frac{1}{x^2}$;

г) $p \quad x \qquad \frac{x^3}{8} \quad \frac{3x}{7} \quad 8 \qquad \frac{x^3}{8} \qquad \frac{3x}{7} \qquad 8 \quad =$

$\frac{1}{8} \ x^3 \qquad \frac{3}{7}x \quad 0 \quad \frac{1}{8} \cdot 3x^2 \quad \frac{3}{7} \cdot 1 \quad \frac{3}{8}x^2 \quad \frac{3}{7}$.

2. Вылічыце $f\ (8)$; $f\ (5)$; $f\ (\ \ 2)$; $f\ (0)$, калі $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}$.

Рашэнне. Знойдзем вытворную функцыі $f(x) = \frac{3 - x}{x + 5}$.

Па правіле знаходжання вытворнай дзелі атрымаем:

$f(x) \qquad \frac{3 \quad x}{x \quad 5} \qquad \frac{3 \quad x \quad x \quad 5 \qquad x \quad 5 \quad 3 \quad x}{x \quad 5 \ ^2} \qquad \frac{x \quad 5 \qquad 3 \quad x}{x \quad 5 \ ^2}$

$\frac{8}{x \quad 5 \ ^2} \qquad \frac{8}{x \quad 5 \ ^2}$.

Тады $f\ (8) \qquad \frac{8}{169}$; $f\ (5) \qquad \frac{8}{100}$; $f\ (\ \ 2) \qquad \frac{8}{9}$; $f\ (0) \qquad \frac{8}{25}$.

3. Рашыце ўраўненне $f\ (x) \quad 0$, калі $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$.

Рашэнне. $f \quad x \qquad \frac{x^3}{3} \quad 3x \qquad \frac{x^3}{3} \qquad 3x \qquad \frac{1}{3} \ x^3 \qquad 3x \qquad x^2 \quad 3$.

Рэшым ураўненне $x^2 \quad 3 \quad 0$:

$x^2 \quad 3 \quad 0 \quad x^2 \quad \sqrt{3}^{\;2} \quad 0 \quad (x \quad \sqrt{3})(x \quad \sqrt{3}) = 0$ $\quad x \quad \sqrt{3},$ $\quad x \quad \sqrt{3}.$

Адказ: $\sqrt{3}; \ -\sqrt{3}$.

4. Рашыце няроўнасць $f \quad x \ > 0$, калі $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 4x$.

Рашэнне. $f \quad x \qquad x^3 \quad 0{,}5x^2 \quad 4x \qquad 3x^2 \quad x \quad 4$.

Рэшым няроўнасць $3x^2 - x - 4 > 0$.

Знойдзем нулі функцыі $y = 3x^2 - x - 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$.

Дадатныя значэнні функцыя прымае лявей за меншы корань ці правей за большы: $x \qquad ; \quad 1 \qquad 1\frac{1}{3}; \qquad .$

Адказ: $(- \quad ; -1) \quad \left(1\frac{1}{3}; + \quad \right)$.

5. Рашыце няроўнасць $f'(x) < 0$, калі $f(x) \quad \frac{1}{x^2} \quad x^2$.

Рашэнне. $f \quad x \qquad \frac{1}{x^2} \quad x^2 \qquad \frac{1 \cdot x^2 \quad x^2 \quad \cdot 1}{x^4} \qquad x^2 \qquad \frac{2x}{x^4} \quad 2x$

$\frac{2}{x^3} \quad 2x \quad \frac{2 \ x^4 \quad 1}{x^3}$.

Рэшым няроўнасць $\frac{2\left(x^4 - 1\right)}{x^3} > 0$ метадам інтэрвалаў:

$\frac{2 \ x^4 \quad 1}{x^3} > 0 \qquad \frac{2 \ x^2 \quad 1 \ x^2 \quad 1}{x^3} > 0 \qquad x \quad (\quad 1; \ 0) \quad (1; \qquad).$

Адказ: $(-1; \ 0) \quad (1; + \quad)$.

6. Закон прамалінейнага руху зададзены функцыяй $s \ t \qquad \frac{t^3}{3} \quad \frac{3t^2}{2} \quad 3t$. Знайдзіце, пры якіх значэннях часу імгненная скорасць руху больша за 1.

Рашэнне. Паколькі імгненная скорасць руху, зададзенага функцыяй $s(t)$, роўна вытворнай гэтай функцыі, то $v \qquad s \ t$

$\frac{t^3}{3} \quad \frac{3t^2}{2} \quad 3t \qquad t^2 \quad 3t \quad 3.$

У адпаведнасці з умовай рэшым няроўнасць:

$t^2 - 3t - 3 > 1$, $t^2 - 3t - 4 > 0$; $t \quad ; \quad 1 \quad 4; \quad .$

Паколькі $t > 0$, то $t \quad 4; \quad \infty$.

Адказ: $t \quad 4; \quad \infty$.

1. Вытворная функцыі $f(x) = x^5$ роўна:
а) x^4; б) $4x^4$; в) $5x^6$; г) $5x^4$.
Выберыце правільны адказ.

2. Вытворная функцыі $f(x) = 7 - 5x$ роўна:
а) $7 + x$; б) $-5x$; в) -5; г) 7.
Выберыце правільны адказ.

3.29. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f \ x \quad x^2 \quad x$; б) $f \ x \quad x \quad x^2$; в) $f \ x \quad 7x^2$;

г) $f \ x \quad 5x^2$; д) $f \ x \quad 6x^2 \quad 3x$; е) $f \ x \quad 9x^2 \quad 7x$;

ж) $f \ x \quad \frac{x^2}{4} \quad x$; з) $f \ x \quad \frac{x}{8} \quad \frac{5x^2}{7}$.

3.30. Знайдзіце $f \quad 0$ для функцыі:

а) $f \ x \quad 8x^2 \quad x \quad 2$; б) $f \ x \quad x^3 \quad x^2 \quad x \quad 9$;

в) $f \ x \quad x^7 \quad 2x^5 \quad 4$; г) $f \ x \quad 12x^4 \quad 7x^2 \quad x$;

д) $f \ x \quad \frac{x^4}{3} \quad 3x^2$; е) $f \ x \quad 0{,}1x^6 \quad x^3 \quad \frac{x}{2}$.

3.31. Рашыце ўраўненне $f'(x) = f(1)$, калі $f(x) = 3x^2 - x + 2$.

3.32. Параўнайце $f'(-1)$ і $f'(1)$ для функцыі:

а) $f \ x \quad x^4 \quad \frac{1}{x}$; б) $f \ x \quad \frac{x^3}{6} \quad \frac{8}{x}$.

3.33. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы правіла знаходжання вытворнай здабытку:

а) $f \ x \quad x^2 \quad 2x \quad x^2 \quad 3$; б) $f \ x \quad x^3 \quad x^2 \quad x^2 \quad 8x$;

в) $f \ x \quad x^4 \ \ 5x^2 \quad x$; г) $f \ x \quad 3x^7 \ \ 1 \quad x^9$.

3.34. Ці праўда, што $f\ \ 2 < g\ \ 2$, калі $f\ x\ \ \frac{x^2}{5}\ \ x\ \ 5x^3\ \ 1$, а $g(x) =$ $x^2\ \ x\ \ 2\ \frac{x^3}{6}\ \ x$?

3.35. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы правіла знаходжання вытворнай дзелі:

а) $f\ x\ \ \frac{5x\ \ 2}{5x\ \ 2}$; б) $f\ x\ \ \frac{x^2\ \ 3}{x^2\ \ 3}$;

в) $f\ x\ \ \frac{2x\ \ 9}{x\ \ 3}$; г) $f\ x\ \ \frac{4x^2}{1\ \ x}$.

3.36. Знайдзіце вытворную функцыі $f\ x\ \ \frac{2x\ \ \sqrt{5}\ \ 2x\ \ \sqrt{5}}{x\ \ 4}$.

3.37. Знайдзіце значэнне выразу $f\ \ 3\ \ f\ \ 2$ для функцыі $f\ x\ \ \frac{x^3\ \ x^2\ \ 2}{x}$.

3.38. Знайдзіце вытворную функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0, калі:

а) $f\ x\ \ x^6\ \ 2x^4\ \ x\ \ 3$, $x_0\ \ 2$; б) $f\ x\ \ 3x\ \ 1\ \ \frac{6}{x}$, $x_0\ \ 1$;

в) $f\ x\ \ x^3\ \ 4\ \ x^5\ \ 1$, $x_0\ \ \sqrt{2}$; г) $f\ x\ \ \frac{5\ \ x}{x^2}$, $x_0\ \ 5$.

3.39. Вытворная функцыі $f\ x\ \ \frac{1}{3}x^3$ у некаторым пункце x_0 роўна 0,25. Знайдзіце $f(x_0)$.

3.40. Рашыце ўраўненне $f\ \ x\ \ 0$, калі:

а) $f\ x\ \ x\ \ 2x^2$; б) $f\ x\ \ 5x^3\ \ 2x^2\ \ 1$;

в) $f\ x\ \ \frac{x^5}{5}\ \ x^3\ \ 2x$; г) $f\ x\ \ \frac{5}{x}\ \ 20x$.

3.41. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай роўна нулю вытворная функцыі $f\ x\ \ \frac{x^3}{3}\ \ \frac{x^2}{2}\ \ 20x$.

3.42. Рашыце ўраўненне $f\ \ x\ \ 1$, калі:

а) $f\ x\ \ \frac{6x\ \ 1}{6x\ \ 1}$; б) $f\ x\ \ \frac{2x^2}{x\ \ 4}$.

3.43. Рашыце няроўнасць $f\ \ x > 0$, калі:

а) $f\ x\ \ x^3\ \ x^2\ \ x$; б) $f\ x\ \ 27x\ \ x^3$; в) $f\ x\ \ \frac{2x^3}{3}\ \ x^2\ \ 24$;

г) $f\ x\ \ \frac{x}{x^2\ \ 3}$; д) $f\ x\ \ x\ \ \frac{4}{x}$; е) $f\ x\ \ \frac{x^2\ \ 1}{x}$.

3.44. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай вытворная функцыі прымае дадатныя значэнні:

а) $f\ \ x\ \ \ x^3\ \ 48x$; б) $f\ \ x\ \ \ x\ \ 2\ \ 1\ \ x^2$; в) $f\ \ x\ \ \frac{3x\ \ 1}{x}$.

3.45. Рашыце няроўнасць $f\ \ x \geqslant 0$, калі $f\ \ x\ \ \frac{x^2\ \ 3}{3\ x\ \ 1}$.

3.46. Прымяніце формулу квадрата рознасці або квадрата сумы для знаходжання вытворнай функцыі і рашыце ўраўненне $f\ \ x\ \ \ 0$, калі:

а) $f\ \ x\ \ \ 2x\ \ 1\ ^2$; б) $f\ \ x\ \ \frac{3x\ \ 5\ ^2}{x\ \ 1}$.

3.47. Дадзена функцыя $f\ \ x\ \ \ 4x\ \ 13\ ^2$. Параўнайце $f'(-3)$ і $f\ \ \sqrt{5}$.

3.48. Рашыце няроўнасць $f\ \ x \leqslant 0$, калі $f\ \ x\ \ \ x\ \ 2\ \ x\ \ 3\ ^2$.

3.49. Знайдзіце скорасць пункта, які рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = -t^2 + 10t - 7$, у момант часу $t = 3$ с, калі шлях вымяраецца ў метрах.

3.50. Рух пункта адбываецца па законе $s(t) = t^2 + 4t + 2$ (шлях вымяраецца ў метрах, час — у секундах). Знайдзіце, у які момант часу скорасць руху пункта роўна 8 —

3.51. Два пункты рухаюцца па законах $s_1(t)\ \ \ 4t^2\ \ 2$ і $s_2(t)\ \ \ 3t^2\ \ 4t\ \ 1$ (шлях вымяраецца ў метрах, час — у секундах). Знайдзіце скорасці руху пунктаў у тыя моманты, калі пройдзеныя імі адлегласці роўныя.

3.52. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ 9x^2\ \ x$; б) $f\ \ x\ \ \ 8x\ \ x^2$;

в) $f\ \ x\ \ \ x^2\ \ 2x$; г) $f\ \ x\ \ \frac{x^2}{2}\ \ 9x$.

3.53. Знайдзіце $f'(1)$ для функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ 5x^2\ \ x\ \ 3$; б) $f\ \ x\ \ \ x^8\ \ x^5\ \ x\ \ 2$;

в) $f\ \ x\ \ \ 10x^5\ \ 3x^2\ \ x$; г) $f\ \ x\ \ \frac{x^6}{9}\ \ 4x^2$.

3.54. Параўнайце $f'(2)$ і $f'(3)$ для функцыі $f\ \ x\ \ \ x^3\ \ \frac{2}{x}$.

3.55. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы правіла знаходжання вытворнай здабытку:

а) $f\ \ x\ \ \ 2x^2\ \ x\ \ x^2\ \ 7$; б) $f\ \ x\ \ \ x^2\ \ 6x\ \ x^3$.

3.56. Знайдзіце $f'(0)$ для функцыі $f\ \ x\ \ \ \frac{x^4}{8}\ \ 2x\ \ x^2\ \ x$.

3.57. Знайдзіце вытворную функцыі, выкарыстаўшы правіла знаходжання вытворнай дзелі:

а) $f\ \ x\ \ \ \frac{7x\ \ 3}{7x\ \ 3}$; б) $f\ \ x\ \ \ \frac{5x^2\ \ x}{x\ \ 2}$.

3.58. Параўнайце $f'(-1)$ і $f'(-2)$ для функцыі $f\ \ x\ \ \ \frac{x^4\ \ 5x\ \ 3}{x}$.

3.59. Вытворная функцыі $f\ \ x\ \ \ \frac{1}{12}x^3$ у некаторым пункце x_0 роўна $-0{,}25$. Знайдзіце $f(x_0)$.

3.60. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$, калі:

а) $f\ \ x\ \ \ 8x^2\ \ x$; б) $f\ \ x\ \ \ x^5\ \ 2x^3\ \ x$.

3.61. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 1$, калі:

а) $f\ \ x\ \ \ \frac{x\ \ 5}{x\ \ 5}$; б) $f\ \ x\ \ \ \frac{3x}{x\ \ 1}$.

3.62. Рашыце няроўнасць $f\ \ \ x < 0$, калі:

а) $f\ \ x\ \ \ 3x^2\ \ 2x$; б) $f\ \ x\ \ \ x^3\ \ 2x^2\ \ x$;

в) $f\ \ x\ \ \ \frac{9}{x}\ \ x$; г) $f\ \ x\ \ \ \frac{2x}{x^2\ \ 1}$.

3.63. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай вытворная функцыі $f\ \ x\ \ \ x^4\ \ \frac{x^2}{2}$ прымае дадатныя значэнні.

3.64. Рашыце няроўнасць $f\ \ \ x \leqslant 0$, калі $f\ \ x\ \ \ \frac{2x^2\ \ 6}{3\ x\ \ 1}$.

3.65. Прымяніце формулу квадрата рознасці для знаходжання вытвор най функцыі $f\ \ x\ \ \ 5x\ \ 9\ ^2$ і параўнайце $f'(1)$ і $f\ \ \sqrt{5}$.

3.66. Рашыце няроўнасць $f\ \ \ x \leqslant 0$, калі:

а) $f\ \ x\ \ \ x\ \ 7\ ^2$; б) $f\ \ x\ \ \ \frac{x\ \ 2\ ^2}{x\ \ 1}$.

3.67. Знайдзіце скорасць пункта, які рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = -t^2 + 9t + 8$, у момант часу $t = 4$ с, калі шлях вымяраецца ў метрах.

3.68. Рух пункта адбываецца па законе $s(t) = t^2 - 9t + 4$ (шлях вымяра ецца ў метрах, час — у секундах). Знайдзіце, у які момант часу скорасць руху пункта роўна 11 —

3.69. Чаму роўны вуглавы каэфіцыент прамой:

а) $y = -x + 3$; б) $y = x + 3$; в) $y \quad \frac{x}{5} \quad 3$; г) $y = -8$?

3.70. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{5^{\ 1} \cdot 3^{\ 1} \cdot \ 0{,}4^{\quad 2}}{6 \quad \frac{1}{3}^{\quad 1}}$.

3.71. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x^2 \quad 15} \quad \sqrt{4x \quad 3}$; б) $\sqrt[4]{x-3} + 12 = \sqrt{x-3}$.

3.72. Прымяніце формулы двайнога вугла і знайдзіце значэнне выразу:

а) $3 \quad 6\sin^2 \frac{5}{12}$; б) $\cos\frac{7\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8}$; в) $\dfrac{4\operatorname{tg}\frac{}{12}}{1 \quad \operatorname{tg}^2\frac{11}{12}}$.

3.73. Рашыце няроўнасць $(x^2 - 9)(x + 3) \geqslant 0$ метадам інтэрвалаў.

3.74. Высветліце, цотнай ці няцотнай з'яўляецца функцыя $f \ x \quad \dfrac{\cos 3x}{x^2 \quad 2}$.

§ 20. Геаметрычны сэнс вытворнай. Сувязь паміж знакам вытворнай функцыі і яе нарастаннем ці спаданнем

3.75. Для функцыі $y \quad x \quad 1^{\ 2} \quad 5$ знайдзіце:

а) найменшае значэнне; б) прамежак нарастання.

3.76. Параўнайце $f\left(-2\sqrt[4]{3}\right)$ і $f\left(-3\sqrt[4]{3}\right)$, калі $f \ x \quad \dfrac{9}{x}$.

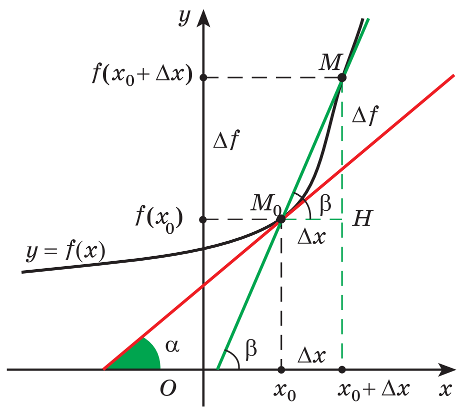
3.77. Знайдзіце вуглавы каэфіцыент прамой і вызначце, які вугал (востры ці тупы) утварае дадзеная прамая з воссю абсцыс:

а) $y = 3x + 1$; б) $y = -x + 5$; в) $y = 8 + 5x$.

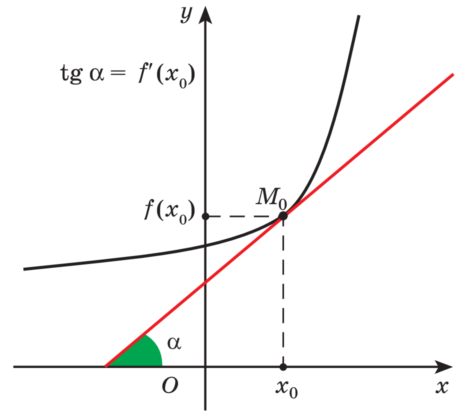
Разгледзім уласцівасці вытворнай функцыі, якія выкарыстоўваюць для вывучэння ўласцівасцей функцыі $y = f(x)$ (рыс. 128 на с. 240).

Прамую M_0M, што праходзіць праз два пункты графіка функцыі $y = f(x)$, называюць сякучай. Тангенс вугла β нахілу сякучай да восі абсцыс можна вызначыць з прамавугольнага трохвугольніка M_0MH: $\operatorname{tg} \quad \dfrac{f}{x}$.

Калі Δx імкнецца да нуля, то пункт M, рухаючыся па крывой, набліжаецца да пункта M_0.



Рыс. 128



Рыс. 129

У гранічным становішчы, калі пункт M супадае з пунктам M_0, прамая M_0M зойме становішча **датычнай** да графіка функцыі ў пункце $M_0(x_0; f(x_0))$.

Тангенс вугла α нахілу датычнай да восі абсцыс роўны ліку, да якога імкнецца tg $\frac{f}{x}$ пры ўмове, што Δx імкнецца да нуля, г. зн. вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0.

Геаметрычны сэнс вытворнай: калі функцыя $y = f(x)$ мае вытворную ў пункце x_0, то **тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай**, праведзенай да графіка функцыі ў пункце $(x_0; f(x_0))$, **роўны вытворнай функцыі** ў гэтым пункце, г. зн. tg f x_0 (рыс. 129).

Для таго каб знайсці вугал нахілу датычнай да восі абсцыс, праведзенай да графіка функцыі $f(x)$ у пункце $(x_0; f(x_0))$, трэба:

① Знайсці вытворную функцыі f x . ② Знайсці значэнне вытворнай у пункце x_0, г. зн. f x_0 . Атрыманае значэнне роўна тангенсу вугла нахілу α датычнай да восі абсцыс, г. зн. tg f x_0 . ③ Параўнаць значэнне $f'(x)$ з нулём. Калі f x_0 >0, то вугал α востры і arctg f x_0 ; калі f x_0 <0, то вугал α тупы і arctg f x_0 ; калі f x_0 0, то α = 0.	Знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = x^2$ у пункце з абсцысай $x_0 = 0{,}5$. ① f x x^2 $2x$. ② f 0,5 $2 \cdot 0{,}5$ 1. tg f 0,5 , г. зн. tg α = 1. ③ Паколькі f x_0 >0, то вугал α востры і α = arctg 1, значыць, α = 45°.

Прыклад 1. Знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = 5x^2$ у пункце з абсцысай $x_0 = -1$.

Рашэнне. ① Знойдзем вытворную функцыі:

$$f \quad x \qquad 5x^2 \qquad 5 \cdot 2x \quad 10x.$$

② Знойдзем значэнне вытворнай у пункце $x_0 = -1$:

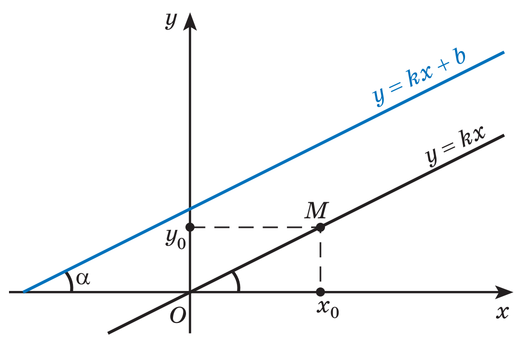
$$f \quad 1 \quad 10 \cdot \quad 1 \qquad 10.$$

Атрымаем тангенс вугла нахілу датычнай да восі абсцыс:

$$\mathrm{tg} \qquad f \quad 1 \qquad 10.$$

③ Паколькі $f \quad x_0 \; < 0$, то вугал α тупы, значыць, $\qquad\qquad \mathrm{arctg}\, 10.$

Заўважым, што ва ўраўненні прамой $y = kx + b$ каэфіцыент $k = \mathrm{tg}\ \alpha$, дзе α — вугал нахілу гэтай прамой да восі абсцыс (рыс. 130).



$\mathrm{tg}\ \alpha = \dfrac{y_0}{x_0} = k$, паколькі $y_0 = kx_0$

Рыс. 130

Прыклад 2. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f \quad x \qquad x^3 \quad 1$ у пункце $x_0 = 1$.

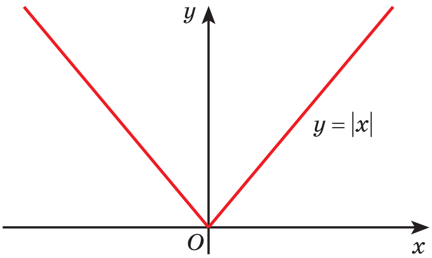
Рашэнне. Запішам ураўненне прамой $y = kx + b$. Калі $y = kx + b$ з'яўляецца датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у дадзеным пункце, то $k \quad \mathrm{tg} \qquad f \quad x_0$. Знойдзем значэнне вытворнай функцыі $f\ (x) \qquad x^3 \quad 1$ у пункце $x_0 = 1$: $f\ (x) \quad 3x^2$, $f \quad 1 \quad 3$, значыць, $k = 3$. Тады $y = 3x + b$.

Знойдзем значэнне функцыі ў пункце $x_0 = 1$: $f\ 1 \qquad 1^3 \quad 1 \quad 2$, г. зн. прамая $y = 3x + b$ праходзіць праз пункт з каардынатамі (1; 2).

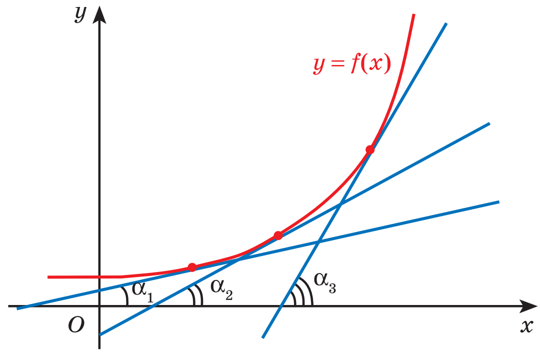
Падставім знойдзеныя значэнні ва ўраўненне прамой $y = 3x + b$ і атрымаем: $2 \quad 3 \cdot 1 \quad b;\ b \qquad 1.$

Такім чынам, $y = 3x - 1$ — гэта ўраўненне датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f \quad x \qquad x^3 \quad 1$ у пункце $x_0 = 1$.

Заўважым, што не ў любым пункце графіка функцыі можна правесці датычную. Напрыклад, у пункце (0; 0) датычнай да графіка функцыі



Рыс. 131



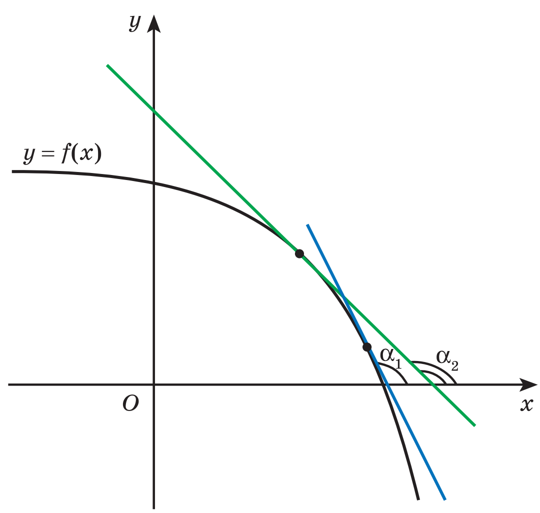
Рыс. 132

$y = |x|$ не існуе (рыс. 131), значыць, не існуе вытворнай у пункце $x_0 = 0$ функцыі $y = |x|$.

Разгледзім графік функцыі $y = f(x)$, якая нарастае на некаторым прамежку. Правядзём датычныя ў пунктах графіка гэтай функцыі (рыс. 132) і заўважым, што вуглы, якія ўтвараюць гэтыя датычныя з воссю абсцыс, — вострыя. Такім чынам, вытворная гэтай функцыі ў кожным пункце гэтага прамежку дадатная. Справядлівая тэарэма, якую мы прымем без доказу.

Тэарэма 1 (прымета нарастання функцыі)

Калі функцыя мае *дадатную вытворную* ў кожным пункце некаторага прамежку, то яна *нарастае* на гэтым прамежку.



Рыс. 133

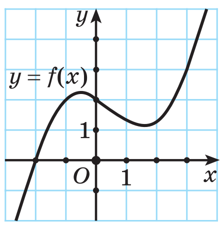
Разгледзім графік функцыі $y = f(x)$, якая спадае на некаторым прамежку. Вуглы, якія ўтвараюць датычныя да графіка гэтай функцыі з воссю абсцыс, — тупыя (рыс. 133). Значыць, вытворная гэтай функцыі ў кожным пункце гэтага прамежку адмоўная.

Тэарэма 2 (прымета спадання функцыі)

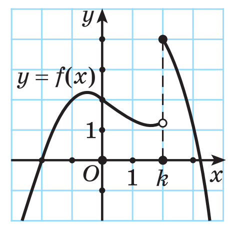
Калі функцыя мае *адмоўную вытворную* ў кожным пункце некаторага прамежку, то яна *спадае* на гэтым прамежку.

Прыметы нарастання і спадання функцыі сфармуляваны для непарыўных функцый.

Уяўленне аб непарыўнасці функцыі дае яе графік: яго можна начарціць, не адрываючы аловак ад паперы. Так, на рысунку 134 паказаны графік непарыўнай функцыі, а на рысунку 135 — графік функцыі, якая не з'яўляецца непарыўнай.

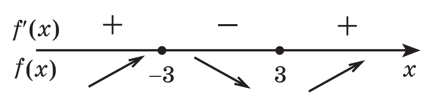


Рыс. 134



Рыс. 135

Для таго каб знайсці прамежкі манатоннасці функцыі $y = f(x)$, трэба:

<table>
<tr>
<td>① Знайсці абсяг вызначэння функцыі $D\ f$.
② Знайсці вытворную функцыі $f\ \ x$.
③ Рашыць няроўнасці $f\ \ x > 0$ і $f\ \ x < 0$.
Знакі вытворнай і адпаведныя прамежкі манатоннасці функцыі адзначыць на схеме.
④ Запісаць адказ:
рашэнні няроўнасці $f\ \ x > 0$ — гэта прамежкі нарастання дадзенай функцыі;
рашэнні няроўнасці $f\ \ x < 0$ — гэта прамежкі спадання дадзенай функцыі.
Для непарыўных функцый канцы прамежкаў манатоннасці можна ўключыць у адказ.</td>
<td>Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі $f\ x\ \ \ x^3\ \ 27x$.
① $D\ f\ \ \ \boldsymbol{R}$.
② $f\ \ x\ \ \ \ x^3\ \ 27x\ \ \ \ 3x^2\ \ 27.$
③ $f\ \ x > 0;\ 3x^2\ \ 27 > 0;\ x^2\ \ 9 > 0;$
$x\ \ 3\ \ x\ \ 3\ \ \ 0;\ x\ \ \ \ \ ;\ \ 3\ \ \ 3;\ \ \ ;$
$f\ \ x < 0$ пры $x\ \ \ 3;\ 3$.

④ *Адказ*: функцыя нарастае на прамежках $\infty;\ \ 3$ і $3;\ \ \infty$; функцыя спадае на прамежку $3;\ 3$.</td>
</tr>
</table>

Прыклад 3. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі

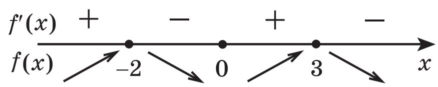
$$f\ \ x\ \ \ \ 1\ \ 3x^2\ \ \frac{x^3}{3}\ \ \frac{x^4}{4}.$$

Рашэнне. ① $D\ f\quad \boldsymbol{R}$.

② $f\quad x\quad 6x\quad x^2\quad x^3\quad x\ x^2\quad x\quad 6\quad x\ x\quad 3\quad x\quad 2$.

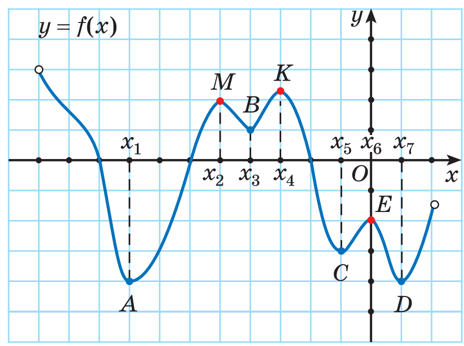
③ $f\quad x > 0$ пры $x\quad ;\ 2\quad 0; 3\ ;\ f\quad x < 0$ пры $x\quad 2; 0\quad 3;\quad$.

Адзначым на схеме знакі вытворнай і адпаведныя прамежкі манатоннасці функцыі.



④ *Адказ*: функцыя нарастае на прамежках $(-\infty; -2]$ і $[0; 3]$ і спадае на прамежках $[-2; 0]$ і $[3; +\infty)$.

Разгледзім функцыю $y = f(x)$, за дадзеную графічна. Высветлім, якую асаблівасць маюць пункты A, B, C, D, M, K, адзначаныя на рысунку 136.

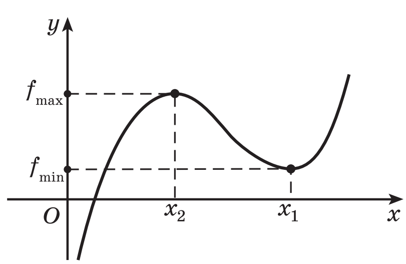


Рыс. 136

Паблізу ад абсцысы x_1 пункта A ва ўсіх пунктах значэнні функцыі (ардынаты пунктаў) большыя, чым у пункце A. Такую ж уласцівасць маюць пункты B, C і D. Пункты x_1, x_3, x_5, x_7 — **пункты мінімуму** дадзенай функцыі (абазначаецца $x\quad$).

Паблізу ад абсцысы x_2 пункта M ва ўсіх пунктах значэнні функцыі (ардынаты пунктаў) меншыя, чым у пункце M. Такую ж уласцівасць маюць пункты K і E. Пункты x_2, x_4, x_6 — **пункты максімуму** дадзенай функцыі (абазначаецца $x\quad$).

Пункты мінімуму і пункты максімуму называюць **пунктамі экстрэмуму** функцыі. Так, пункты x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 — пункты экстрэмуму дадзенай функцыі.

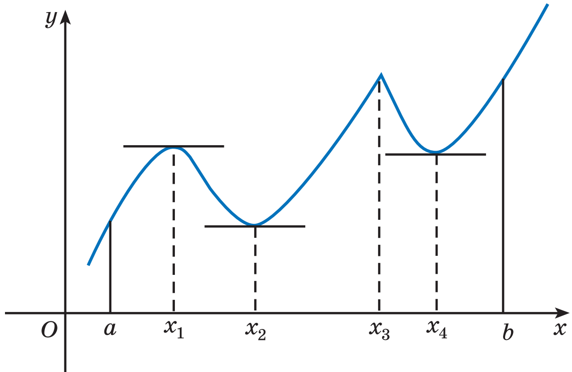


Рыс. 137

На рысунку 137 пункт x_1 — пункт мінімуму функцыі $y = f(x)$. Значэнне функцыі ў пункце мінімуму $f(x_1)$ **называюць мінімумам функцыі** (абазначаюць $f\quad$).

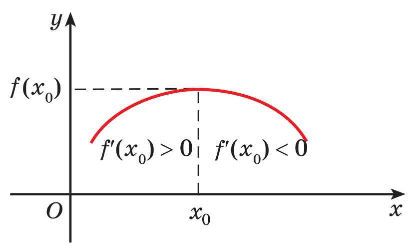
Пункт x_2 — пункт максімуму функцыі $y = f(x)$. Значэнне функцыі ў пункце максімуму $f(x_2)$ **называюць максімумам функцыі** (абазначаюць $f\quad$).

Мінімумы і максімумы называюць **экстрэмумамі** функцыі.



Рыс. 138

У пунктах экстрэмуму датычная да графіка функцыі або **паралельна восі абсцыс** (пункты x_1, x_2, x_4 на рысунку 138), тады вытворная ў гэтым пункце роўна нулю, або **не існуе** (пункт x_3), гэта азначае, што вытворная ў гэтым пункце **не існуе**.



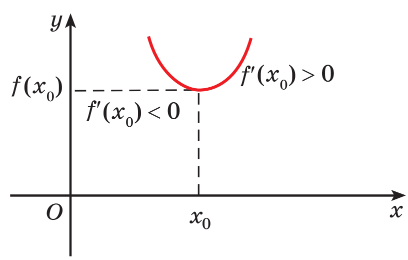
Рыс. 139

Заўважым, што злева ад пункта максімуму функцыі $y = f(x)$ значэнні вытворнай дадатныя (функцыя нарастае), а справа — адмоўныя (функцыя спадае).

Гавораць: «***пры пераходзе праз пункт максімуму вытворная мяняе знак з «плюса» на «мінус»*** (рыс. 139).

Калі x_0 — пункт мінімуму функцыі $y = f(x)$, то значэнні вытворнай злева ад гэтага пункта адмоўныя (функцыя спадае), а справа — дадатныя (функцыя нарастае).

Гавораць: «***пры пераходзе праз пункт мінімуму вытворная мяняе знак з «мінуса» на «плюс»*** (рыс. 140).



Рыс. 140

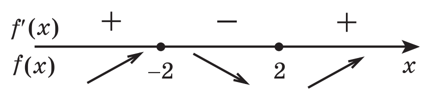
Тэарэма 3 (прымета пункта максімуму функцыі)

Калі функцыя $f(x)$ непарыўная ў пункце x_0, а вытворная мяняе знак з «плюса» на «мінус» пры пераходзе праз гэты пункт, то гэты пункт — пункт максімуму функцыі.

Тэарэма 4 (прымета пункта мінімуму функцыі)

Калі функцыя $f(x)$ непарыўная ў пункце x_0, а вытворная мяняе знак з «мінуса» на «плюс» пры пераходзе праз гэты пункт, то гэты пункт — пункт мінімуму функцыі.

Для таго каб знайсці пункты экстрэмуму функцыі $y = f(x)$, трэба:

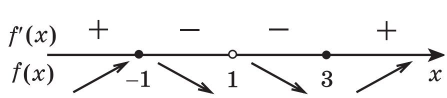
① Знайсці абсяг вызначэння функцыі $D(f)$. ② Знайсці вытворную функцыі $f'(x)$. ③ Знайсці пункты з абсягу вызначэння, у якіх вытворная роўна нулю або не існуе. ④ Калі функцыя непарыўная ў пункце x_0, а вытворная пры пераходзе праз гэты пункт x_0 мяняе знак: • з «+» на «–», то гэты пункт — пункт максімуму функцыі; • з «–» на «+», то гэты пункт — пункт мінімуму функцыі.	Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі $f(x) = 2x^3 - 24x$. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$. ② $f'(x) = (2x^3 - 24x)' = 6x^2 - 24.$ ③ $f'(x) = 0;\ 6x^2 - 24 = 0;\ x^2 - 4 = 0;$ $(x-2)(x+2) = 0;\ x_1 = -2,\ x_2 = 2.$ $f'(x)$ існуе на ўсім абсягу вызначэння функцыі $y = f(x)$.  ④ $x_{max} = -2,\ x_{min} = 2.$

Прыклад 4. Знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі $f(x) = \dfrac{3x + x^2}{x - 1}$.

Рашэнне. ① $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

② $f'(x) = \dfrac{(3 + 2x)(x - 1) - 1 \cdot (3x + x^2)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \dfrac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}.$

③ $f'(x) = 0$ пры $x = -1$ і $x = 3$.

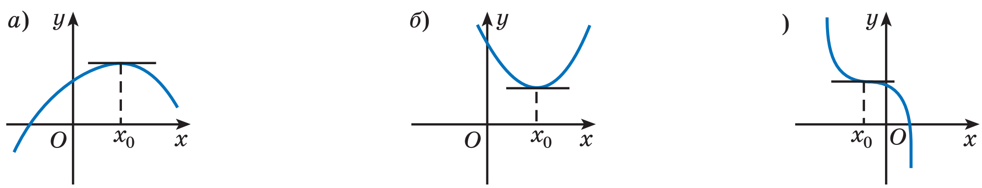


④ $x_{max} = -1;\ x_{min} = 3.$

$$f_{max} = f(-1) = \frac{3 \cdot (-1) + (-1)^2}{-1 - 1} = 1;\ f_{min} = f(3) = \frac{3 \cdot 3 + 3^2}{3 - 1} = 9.$$

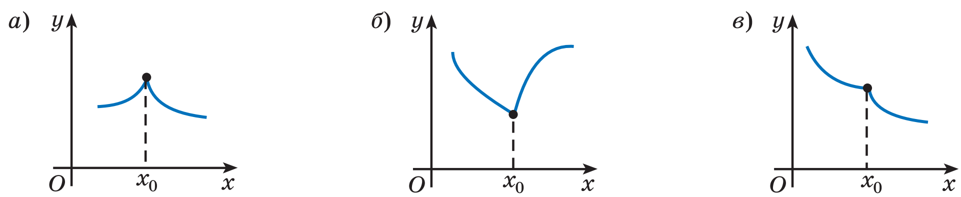
Адказ: $x_{max} = -1;\ f_{max} = 1;\ x_{min} = 3;\ f_{min} = 9.$

На рысунках 141, *а*, *б*, *в* паказаны датычныя да графікаў функцый у пункце x_0. Яны паралельны восі абсцыс, значыць, вытворная ў пункце x_0 роўна нулю ва ўсіх трох выпадках.
Але вытворная функцыі, паказанай на рысунку 141, *в*, не мяняе знак пры пера ходзе праз гэты пункт, таму ў дадзеным выпадку пункт x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі (яна называецца пунктам перагібу).



Рыс. 141

На рысунках 142, *а*, *б*, *в* паказаны графікі функцый, датычная ў пункце x_0 да якіх не існуе, г. зн. не існуе вытворная ў пункце x_0 ва ўсіх трох выпадках. Але на рысунках 142, *а*, *б* гэтыя пункты з'яўляюцца пунктамі экстрэмуму, а на рысунку 142, *в* — пункт x_0 не з'яўляецца пунктам экстрэмуму функцыі.



Рыс. 142

Унутраныя пункты абсягу вызначэння функцыі, у якіх вытворная роўна нулю або не існуе, называюцца яе **крытычнымі пунктамі.**

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Знайдзіце тангенс вугла нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x)\quad x^2\quad 5x$ у пункце $x_0 = -1$.

Рашэнне. 1) Знойдзем вытворную функцыі: $f\quad x\qquad x^2\quad 5x\qquad 2x\quad 5.$

2) Знойдзем значэнне вытворнай у пункце $x_0 = -1$:

$f\quad 1\quad 2\cdot\quad 1\quad 5\quad 3.$

3) tg $\quad f\quad 1$, г. зн. tg $\quad 3.$

2. Знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $f(x) = \frac{1}{x}$ у пункце $N(1;\ 1)$.

Рашэнне. ① Знойдзем вытворную функцыі: $f \quad x \qquad \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x^2}$.

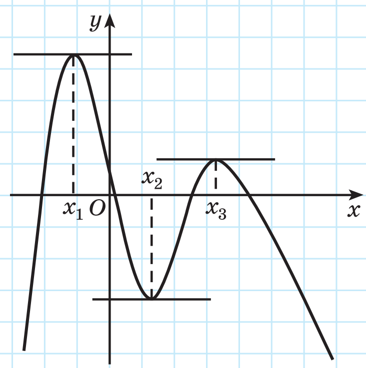
② Знойдзем значэнне вытворнай у пункце $x_0 = 1$: $f \quad 1 \qquad \frac{1}{1^2} \qquad 1$.
③ tg $\qquad f \;\; 1 \qquad 1$.

④ Паколькі $f \quad x_0 \;\; < 0$, то вугал α тупы, значыць, $\qquad \operatorname{arctg} 1$
$\frac{}{4} \quad \frac{3}{4}$.

3. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = 3x - x^2$ у пункце з абсцысай $x_0 = 1$.

Рашэнне. Ураўненне прамой, якая з'яўляецца датычнай да графіка дадзенай функцыі ў дадзеным пункце, мае выгляд $y \quad kx \quad b$. Паколькі $k \quad \text{tg} \qquad f \quad x_0$, то знойдзем значэнне вытворнай дадзе най функцыі ў пункце $x_0 = 1$: $f \quad x \qquad 3 \quad 2x$; $f \quad 1 \qquad 3 \quad 2 \cdot 1 \qquad 1$, зна чыць, $k = 1$. Тады $y = x + b$. Знойдзем значэнне функцыі ў пункце $x_0 = 1$: $f(1) = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2$, г. зн. прамая $y = x + b$ праходзіць праз пункт з каардынатамі $(1;\ 2)$. Падставім знойдзеныя значэнні ва ўраўненне прамой $y = x + b$ і атрымаем: $2 = 1 + b$; $b = 1$. Такім чы нам, $y = x + 1$ — гэта ўраўненне шуканай датычнай.

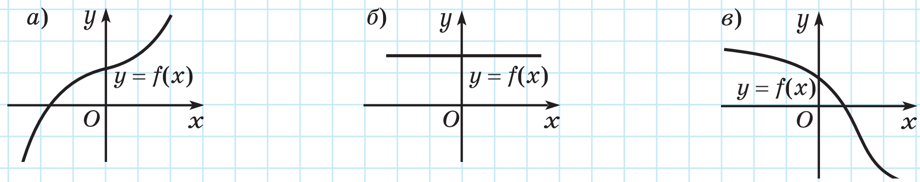
4. Функцыя $y = h(x)$ зададзена графічна (рыс. 143). Вызначце значэнне вытворнай дадзенай функцыі ў пунктах x_1, x_2, x_3.



Рыс. 143

Рашэнне. Паколькі датычныя да графіка функцыі ў пунктах x_1, x_2, x_3 паралель ны восі абсцыс, то вугал нахілу да тычных у гэтых пунктах да восі аб сцыс роўны нулю, г. зн. $\alpha = 0$, тады $\text{tg}\, 0 = 0$, а паколькі $\text{tg} \qquad h\,(x_0)$, то $h\,(x_1) \quad h\,(x_2) \quad h\,(x_3) \quad 0$.

5. Для графіка функцыі, паказанага на рысун ку 144, выберыце правільныя сцверджанні:
1) $f\,(x) \quad 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) > 0$.



Рыс. 144

Рашэнне. а) На рысунку 144, *а* паказаны графік нарастальнай функцыі. На гэтым графіку няма пункта, у якім датычная да графіка паралельна восі абсцыс, значыць, вытворная функцыі да датная $f'(x) > 0$. Правільнае сцверджанне 3).

б) На рысунку 144, *б* паказаны графік пастаяннай функцыі, зна чыць, $f\ (x)\quad 0$. Правільнае сцверджанне 1).

в) На рысунку 144, *в* паказаны графік спадальнай функцыі. На гэ тым графіку няма пункта, у якім датычная да графіка паралель на восі абсцыс, значыць, вытворная функцыі адмоўная $f'(x) < 0$. Правільнае сцверджанне 2).

6. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

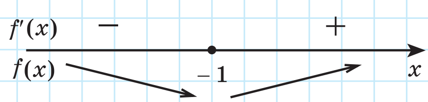
а) $f\ x\quad x^2\quad 2x\quad 3$; б) $f\ x\quad x^3\quad 4x^2$.

Рашэнне. а) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f\ x\quad x^2\quad 2x\quad 3\quad 2x\quad 2$.

③ $f\ x\quad 0;\ 2x\quad 2\quad 0;\ x\quad 1;\ x\quad 1;\quad ;$

$f\ x < 0$ пры $x\quad \infty;\ 1$.



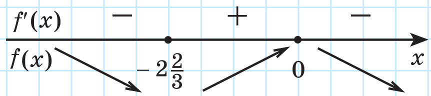
④ *Адказ:* функцыя нарастае на прамежку $[-1; +\infty)$; функцыя спадае на прамежку $(-\infty; -1]$.

б) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f\ x\quad x^3\quad 4x^2\ ;\ f\ x\quad x^3\quad 4x^2\ ;$

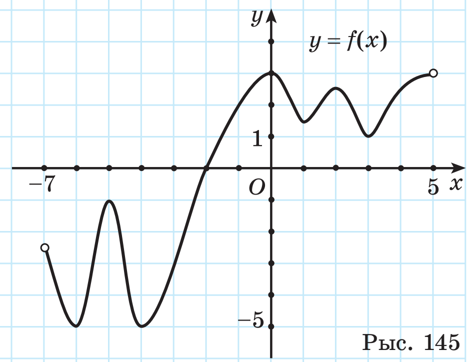
$f\ x\quad 3x^2\quad 8x;\ f\ x\quad x\ 3x\quad 8$.

③ $f'(x) > 0$ пры $x\quad 2\frac{2}{3};\ 0\ ;\ f\ x < 0$ пры $x\quad ;\ 2\frac{2}{3}\quad 0;\quad .$



④ *Адказ:* функцыя нарастае на прамежку $\quad 2\frac{2}{3};\ 0\quad;$ функцыя спадае на прамежках $\quad\infty\qquad -\qquad\infty$

7. Па графіку функцыі $y = f(x)$ (рыс. 145) знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі.



Рыс. 145

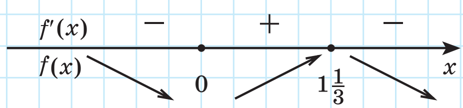
Рашэнне. Пункты мінімуму: -6; -4; 1 і 3.
Мінімумы функцыі роўны:
$f(\ \ 6)\qquad 5;\ \ f(\ \ 4)\qquad 5;$
$f(1) = 1{,}5;\ \ f(3) = 1.$
Пункты максімуму: -5; 0 і 2.
Максімумы функцыі роўны:
$f(\ \ 5)\qquad 1;\ \ f(0)\qquad 3;\ \ f(2) = 2{,}5.$

8. Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі $f\ \ x\qquad x^3\quad 2x^2$.

Рашэнне. а) ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f\ \ x\qquad 3x^2\quad 4x.$

③ $f\ \ x\qquad 0;\quad 3x^2\quad 4x\quad 0;\ 3x^2\quad 4x\quad 0;\ x(3x-4)=0;\ x=0,\ x=1\frac{1}{3}.$



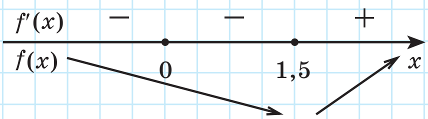
④ $x_{\max} = 1\frac{1}{3},\ x_{\min} = 0.$

9. Знайдзіце пункты максімуму і мінімуму функцыі $f\ \ x\qquad 3x^4\quad 6x^3\quad 1.$

Рашэнне. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$.
② $f\ \ x\qquad 12x^3\quad 18x^2.$

③ $f\ \ x\qquad 0;\ 12x^3\quad 18x^2\quad 0;\ 2x^3\quad 3x^2\quad 0;\ x^2(2x-3)=0;$

$x = 0,\ x = 1{,}5.$
Пры пераходзе праз пункт 0 знак вытворнай не мяняецца.

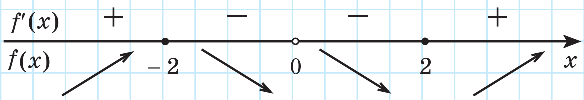


④ $x_{\min}$ = 1,5, пунктаў максімуму функцыя не мае.

10. Знайдзіце прамежкі манатоннасці, пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі $f \quad x \quad \frac{x^2 \quad 4}{x}$.

Рашэнне. $D \; f$; 0 0; .

$$f \quad x \quad \frac{x^2 \quad 4 \quad x \quad x \quad x^2 \quad 4}{x^2} \quad \frac{2x^2 \quad x^2 \quad 4}{x^2} \quad \frac{x \quad 2 \quad x \quad 2}{x^2}.$$

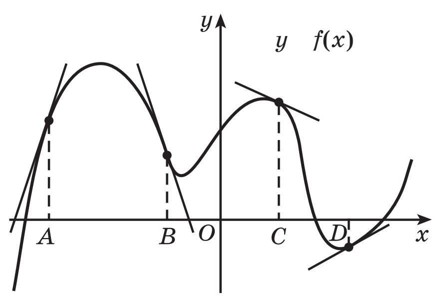


Функцыя нарастае на прамежках (–∞; –2] і [2; +∞).
Функцыя спадае на прамежках [–2; 0) і (0; 2].
x = 2; x = –2.

$$f_{\min} \quad f \; 2 \quad \frac{2^2 \quad 4}{2} \quad 4; \quad f_{\max} \quad f \quad 2 \quad \frac{2 \;\; ^2 \quad 4}{2} \quad 4.$$

? **1.** Калі вытворная ў пункце функцыі $y = f(x)$ роўна:
а) 2; б) –1; в) 0; г) 0,1, — то вугал, які ўтварае датычная да графіка функцыі ў гэтым пункце:
1) тупы; 2) востры; 3) прамы; 4) роўны нулю.
Выберыце правільныя адказы.

2. Вызначце знак вытворнай функцыі $y = f(x)$ у пунктах A, B, C, D на рысунку 146.



Рыс. 146

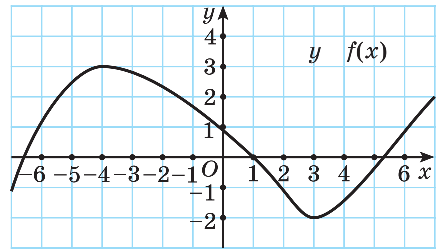
3.78. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $f(x) = x^2 - 4x$ у пункце:

а) $x_0 = 5$; б) $x_0 = -2$; в) $x_0 = 1$; г) $x_0 = 2$.

3.79. На рысунку 147 паказаны графік функцыі $y = f(x)$. Запішыце некалькі пунктаў, у якіх датычная да графіка дадзенай функцыі ўтварае з воссю абсцыс:

а) востры вугал; б) тупы вугал.

У якіх пунктах датычная да графіка дадзенай функцыі паралельна восі абсцыс?

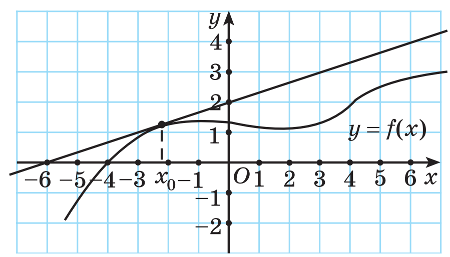


Рыс. 147

3.80. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $x_0 = 1$, калі:

а) $f\ x\ \ x^3\ \ 3x^2$; б) $f\ x\ \ 2x^2\ \ \frac{1}{x}$; в) $f\ x\ \ \frac{2x\ \ 1}{x\ \ 1}$.

3.81. Да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 праведзена датычная (рыс. 148). Знайдзіце $f'(x_0)$.



Рыс. 148

3.82. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі:

а) $f(x) = x^2$ у пункце $x_0 = 0{,}5$;

б) $f\ x\ \ \frac{x^2}{2}\ \ 1$ у пункце $x_0 = \sqrt{3}$;

в) $f(x) = -x^3 + x^2$ у пункце $x_0 = 1$;

г) $f(x) = \frac{6 - x}{x}$ у пункце $x_0 = -2$.

3.83. Ці праўда, што датычная да графіка функцыі $f\ x\ \ \frac{3x\ \ 2}{x\ \ 1}$ у пункце $x_0 = 1$ утварае тупы вугал з воссю абсцыс?

3.84. У якім пункце графіка функцыі $f\ x\ \ 2x^2\ \ \sqrt{3}x\ \ 3$ датычная да графіка дадзенай функцыі нахілена да восі абсцыс пад вуглом 60°

3.85. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0:

а) $f\ x\ \ x^2\ \ 4x\ \ 2,\ x_0 = 1$; б) $f\ x\ \ 3x\ \ x^2,\ x_0 = 0$;

в) $f\ x\ \ \frac{x^3}{3}\ \ 4x,\ x_0 = -2$; г) $f\ x\ \ x^4\ \ 9x^2,\ x_0 = -1$.

3.86. Вызначце паслядоўнасць дзеянняў і складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f\ x\ \ \frac{2}{x\ \ 1}$ у пункце $x_0 = -1$.

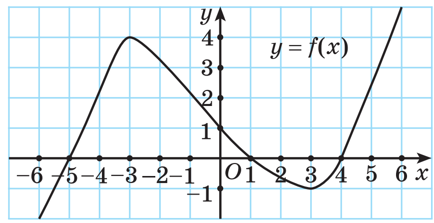
3.87. Вызначце, ці належыць пункт графіку функцыі $f \quad x \qquad \frac{3x \quad 2}{x \quad 1}$, складзіце ўраўненне датычнай да графіка дадзенай функцыі ў пункце:

а) $A(1;\ 0{,}5)$; б) $A(0;\ -2)$.

3.88. Вызначце парадак дзеянняў і складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = x^3 + 3x^2 - 5$ у пункце перасячэння гэтага графіка з воссю ардынат.

3.89. На рысунку 149 паказаны графік функцыі $y = f(x)$. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх:

а) $f \quad x \ > 0$; б) $f \quad x \ < 0$.



Рыс. 149

3.90. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f \quad x \qquad 2x^2 \quad 5$;

б) $f \quad x \qquad x^3 \quad 3x$;

в) $f \quad x \qquad x^4 \quad 2x^2$; г) $f \quad x \qquad 8 \quad 6x^2 \quad x^4$.

3.91. Знайдзіце прамежкі спадання функцыі $f \quad x \qquad \frac{3}{x} \quad 8x$.

3.92. Прымяніце алгарытм і вызначце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f \quad x \qquad x^3 \quad x^2 \quad x \quad 7$; б) $f \quad x \qquad 4x \quad x^4$;

в) $f \quad x \qquad 5 \quad 3x^2 \quad \frac{x^3}{3} \quad \frac{x^4}{4}$.

3.93. Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання функцыі:

а) $f \quad x \qquad \frac{x \quad 4}{x}$; б) $f \quad x \qquad \frac{x \quad 5}{2x \quad 3}$.

3.94. Дакажыце, што функцыя $y = f(x)$ нарастае на ўсім абсягу вызначэння:

а) $f \quad x \qquad 6x \quad 5$; б) $f \quad x \qquad x^3 \quad 7x$;

в) $f \quad x \qquad x^3 \quad x^2 \quad 6x \quad 5$; г) $f \quad x \qquad x^7 \quad x^4 \quad x \quad 5$.

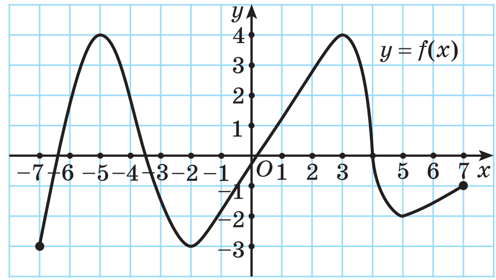
3.95. Прывядзіце прыклад функцыі, якая спадае на ўсім абсягу вызначэння.

3.96. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f \quad x \qquad x^2 \quad 4x \quad 7$; б) $f \quad x \qquad x^3 \quad \frac{3x^2}{2}$;

в) $f \quad x \qquad 5 \quad 3x \quad x^2 \quad \frac{x^3}{3}$; г) $f \quad x \qquad 2x^4 \quad x$.

3.97. На рысунку 150 паказаны графік функцыі $y = f(x)$, зададзенай на прамежку [–7; 7]. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх $f\ \ x\ \ \ 0$.



Рыс. 150

3.98. Функцыя $y = f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў. Вядома, што $f'(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$. Знайдзіце прамежкі нарастання функцыі.

3.99. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ 8\ \ 6x\ \ x^2$; б) $f\ \ x\ \ \ 4x^2\ \ x^4$;

в) $f\ \ x\ \ \ x\ \ \frac{9}{x}$; г) $f\ \ x\ \ \ \frac{x}{2}\ \ \frac{2}{x}$.

3.100. Дакажыце, што функцыя $f\ \ x\ \ \ x^5\ \ 4x^3$ не мае экстрэмумаў.

3.101. Знайдзіце мінімум функцыі $f\ \ x\ \ \ x\ \ 1\ \ x\ \ 2\ ^2$.

3.102. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ 12x\ \ x^3$; б) $f\ \ x\ \ \ \frac{x^3}{3}\ \ x^2\ \ 3x\ \ 1$.

3.103. Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання, а таксама пункты экстрэмуму функцыі $f\ \ x\ \ \ \frac{x^2\ \ 8x}{x\ \ 1}$.

3.104. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $f(x) = x^2 + 2x$ у пункце: а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = -1$; в) $x_0 = -3$.

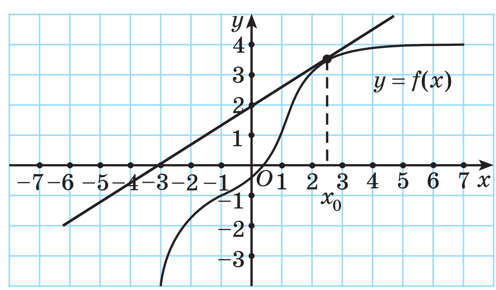
3.105. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце $x_0 = -2$, калі:

а) $f\ \ x\ \ \ 2x^3\ \ x^2$;

б) $f\ \ x\ \ \ 3x\ \ \frac{1}{x}$;

в) $f\ \ x\ \ \ \frac{x\ \ 5}{x\ \ 1}$.

3.106. Да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0 праведзена датычная (рыс. 151). Знайдзіце $f\ \ x_0$.



Рыс. 151

3.107. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі:

а) $f \quad x \qquad \frac{x^2}{2} \qquad x$ у пункце $x_0 = -1$; б) $f \quad x \qquad x^3 \quad 3x^2$ у пункце $x_0 = 1$.

3.108. Вызначце паслядоўнасць дзеянняў і знайдзіце, у якім пункце графіка функцыі $f \quad x \qquad x^2 \quad 6x \quad 5$ датычная да графіка дадзенай функцыі нахілена да восі абсцыс пад вуглом 45°.

3.109. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з абсцысай x_0:

а) $f \quad x \qquad x^2 \quad 3x \quad 7,\ x_0 = 2$; б) $f \quad x \qquad \frac{x^4}{4} \quad 3x,\ x_0 = 0$.

3.110. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f \quad x \qquad 2 \quad \frac{4}{x}$ у пункце $x_0 = 2$.

3.111. Складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f \quad x \qquad \frac{7 \quad x}{x \quad 3}$ у пункце графіка $A(4;\ 3)$.

3.112. Выберыце паслядоўнасць дзеянняў і складзіце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = 3x^3 + 2x + 5$ у пункце перасячэння гэтага графіка з воссю ардынат.

3.113. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f \quad x \qquad 4x^2 \quad 2x$; б) $f \quad x \qquad x^4 \quad 8x^2$; в) $f \quad x \qquad 3x \quad x^3$.

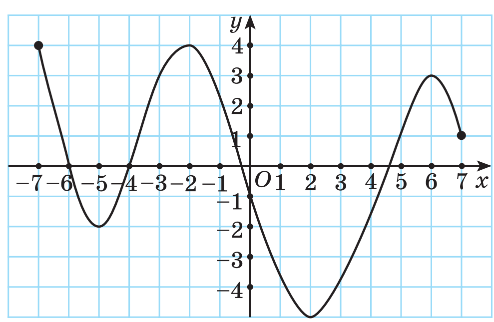
3.114. Знайдзіце прамежкі нарастання функцыі $f \quad x \qquad 5x \quad \frac{4}{x}$. Ці можна запісаць прамежкі спадання гэтай функцыі?

3.115. Знайдзіце прамежкі спадання функцыі $f \quad x \qquad 1 \quad x^2 \quad \frac{x^3}{3} \quad \frac{3x^4}{4}$.

3.116. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце прамежкі спадання і прамежкі нарастання функцыі

$f \quad x \qquad \frac{4x \quad 3}{x \quad 1}$.

3.117. На рысунку 152 паказаны графік функцыі $y = f(x)$, зададзенай на прамежку $[-7;\ 7]$. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх $f \quad x \qquad 0$.



Рыс. 152

3.118. Выкарыстайце алгарытм і знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f \quad x \qquad x^2 \quad 6x \quad 4$;

б) $f \quad x \qquad 3x^2 \quad x^3$.

3.119. Знайдзіце пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі:

а) $f\ x \quad 5 \quad 4x \quad x^2$; б) $f\ x \quad 3x \quad x^3$; в) $f\ x \quad x \quad \frac{1}{x}$.

3.120. Знайдзіце максімум функцыі $f\ x \quad x \quad 4^{\ 2}\ x \quad 1$. Ці можна знайсці мінімум гэтай функцыі?

3.121. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі:

а) $f\ x \quad x^3 \quad 3x$; б) $f\ x \quad 2x^3 \quad 6x^2 \quad 18x \quad 5$.

3.122*. Знайдзіце прамежкі нарастання і прамежкі спадання, а таксама пункты экстрэмуму функцыі $f\ x \quad \frac{x^2 \quad 9}{x}$.

3.123. Выкарыстайце ўласцівасці кораня n-й ступені і знайдзіце значэнні выразаў $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ і $\sqrt[4]{m} : \sqrt[4]{n}$, калі:

а) $a = 25$, $b = 5$, $m = 3$, $n = 243$;
б) $a = 0{,}27$, $b = 0{,}1$, $m = 0{,}6$, $n = 9{,}6$;
в) $a = 3\frac{4}{7}$, $b = \frac{5}{49}$, $m = \frac{5}{8}$, $n = \frac{2}{125}$.

3.124. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f\ x \quad x \quad 3^{\ 2} \quad 1$; б) $f\ x \quad -2\ x \quad 5^{\ 2} \quad 7$.

3.125. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin\ \frac{x}{2} \quad \frac{}{3} \quad \frac{1}{2} \quad 0$; б) $\sqrt{2}\cos\ 5x \quad \frac{}{4} \quad 1 \quad 0$.

3.126. Выканайце дзеянні:

$$\frac{3a}{a \quad 5} \quad \frac{8a}{a^2 \quad 10a \quad 25} : \frac{3a \quad 7}{a^2 \quad 25} \quad \frac{5a \quad 25}{a \quad 5}.$$

§ 21. Прымяненне вытворнай да даследавання функцый

3.127. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = x^3$; г) $y = |x|$.

3.128. Прымяніце алгарытм пабудовы графіка функцыі $g(x) = -x^2 + 6x - 2$.

3.129. Пабудуйце графік функцыі $y = 3(x - 1)^2$, выкарыстаўшы пераўтварэнне графіка функцыі $y = 3x^2$.

Даследаванне функцый з дапамогай вытворнай дазваляе вывучаць уласцівасці розных функцый, напрыклад цэлых рацыянальных і дробава-рацыянальных.

Алгарытм даследавання функцыі з дапамогай вытворнай

① Знайсці абсяг вызначэння функцыі.

② Даследаваць функцыю на цотнасць.

③ Знайсці, калі магчыма, нулі функцыі (пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс), для гэтага рашыць ураўненне $f(x) = 0$.

④ Знайсці пункт перасячэння графіка з воссю ардынат, для гэтага вылічыць значэнне функцыі ў пункце 0, г. зн. $f(0)$.

⑤ Знайсці прамежкі манатоннасці, пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі.

⑥ Пабудаваць графік, выкарыстаўшы вынікі даследавання.

Разгледзім некаторыя прыклады даследавання функцый і пабудовы іх графікаў.

Прыклад 1. Даследуйце функцыю $f\ x \quad x^3 \quad 4x^2 \quad 4x$ і пабудуйце яе графік.

Рашэнне. ① Знойдзем абсяг вызначэння функцыі: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

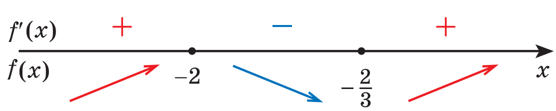
② Даследуем функцыю на цотнасць: $f \quad x \qquad x^{\ 3} \quad 4 \quad x^{\ 2} \quad 4 \quad x$ $= -x^3 + 4x^2 - 4x$, г. зн. $f \quad x \qquad f\ x$ і $f \quad x \qquad f\ x$, значыць, функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

③ Знойдзем нулі функцыі, для гэтага рэшым ураўненне $f(x) = 0$:

$$x^3 \quad 4x^2 \quad 4x \quad 0;\ x\ x^2 \quad 4x \quad 4 \quad 0;\ x\ x \quad 2^{\ 2} \quad 0;\ \begin{matrix} x & 0, \\ x & 2. \end{matrix}$$

④ Знойдзем пункт перасячэння графіка з воссю ардынат, для гэтага вылічым: $f\ 0 \quad 0^3 \quad 4 \cdot 0^2 \quad 4 \cdot 0 \quad 0$.

⑤ Знойдзем прамежкі манатоннасці, пункты экстрэмуму і экстрэмумы функцыі: $f \quad x \quad 3x^2 \quad 8x \quad 4;\ f \quad x \quad 3\ x \quad 2\ x \quad \frac{2}{3}$.



$$x_{\max} \qquad 2,\ f_{\max} \quad f\ {-2} \qquad -2^{\ 3} \quad 4 \cdot \ -2^{\ 2} \quad 4 \cdot \ -2 \qquad 0;$$

$$x_{\min} \qquad \frac{2}{3},\ f_{\min} \quad f\ -\frac{2}{3} \qquad -\frac{2}{3}^{\ 3} \quad 4 \cdot \ -\frac{2}{3}^{\ 2} \quad 4 \cdot \ -\frac{2}{3} \qquad 1\frac{5}{27}.$$

Атрыманыя вынікі запішам у табліцу.

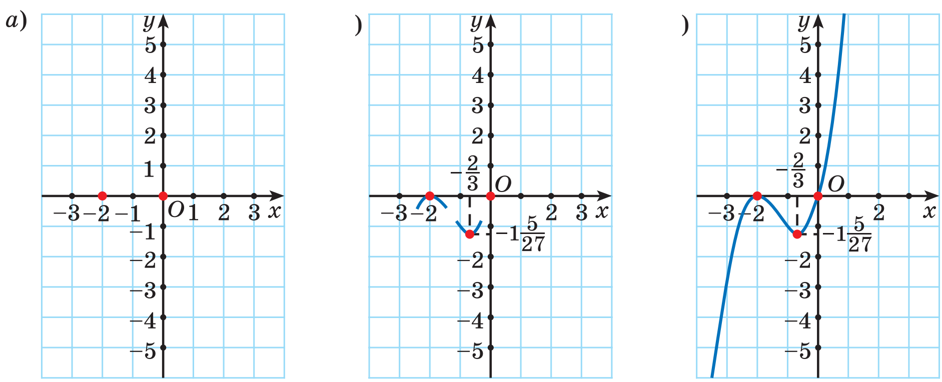
x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$\left(-2;\ -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$
$f \quad x$	+	0	–	0	+
$f \ x$	нарастае ↗	0 **max**	спадае ↘	$-1\frac{5}{27}$ **min**	нарастае ↗

⑥ Пабудуем графік, выкарыстаўшы вынікі даследавання.

а) Адзначым пункты перасячэння графіка функцыі з восямі каардынат па выніках пунктаў 3 і 4 даследавання (рыс. 153, *а*).

б) Адзначым экстрэмумы па выніках пункта 5 даследавання (рыс. 153, *б*).

в) Дабудуем графік на прамежках нарастання і спадання функцыі (рыс. 153, *в*).



Рыс. 153

Прыклад 2. Даследуйце функцыю $f \ x \quad 0{,}75x^4 \quad x^3 \quad 3x^2$ і пабудуйце яе графік.

Рашэнне. Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай:

① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f \quad x \quad 0{,}75 \quad x^{4} \quad x^{3} \quad 3 \quad x^{2} \quad 0{,}75x^4 \quad x^3 \quad 3x^2,$

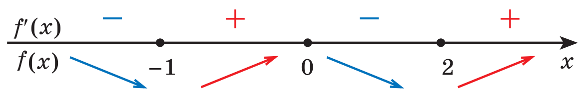
г. зн. $f \quad x \quad f \ x$ і $f \quad x \quad f \ x$, значыць, функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

③ $0{,}75x^4 \quad x^3 \quad 3x^2 \quad 0;\ 3x^4 \quad 4x^3 \quad 12x^2 \quad 0;\ x^2\ 3x^2 \quad 4x \quad 12 \quad 0;$

$$x^2 \quad 0, \qquad 3x^2 \quad 4x \quad 12 \quad 0; \qquad x \quad 0, \quad x \quad \frac{2 \quad 2\sqrt{10}}{3}, \quad x \quad \frac{2 \quad 2\sqrt{10}}{3}; \qquad x \quad 0, \quad x \quad 2{,}8, \quad x \quad 1{,}4.$$

④ $f\ 0 \quad 0{,}75 \cdot 0^4 \quad 0^3 \quad 3 \cdot 0^2 \quad 0.$

⑤ $f \quad x \quad 3x^3 \quad 3x^2 \quad 6x;\ f \quad x \quad 3x\ x^2 \quad x \quad 2\ ;\ f \quad x \quad 3x\ x \quad 2\ x \quad 1\ .$

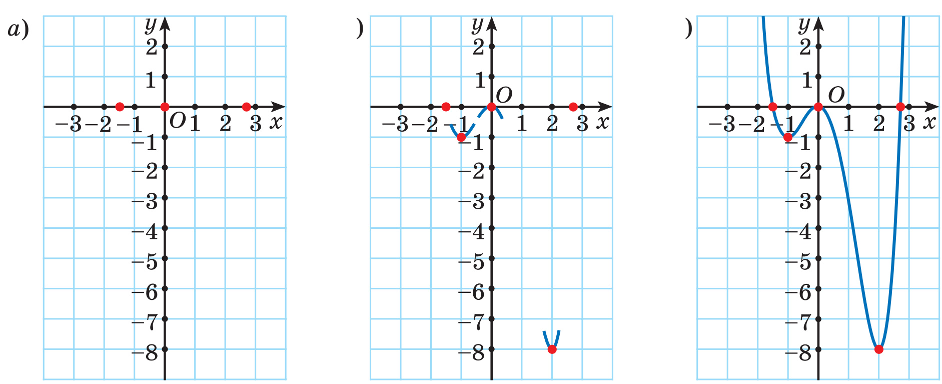


$x \quad = -1,\ f \quad = f(-1) = 0{,}75 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -1{,}25;$
$x \quad = 0,\ f \quad = f(0) = 0{,}75 \cdot 0^4 - 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0;$
$x \quad = 2,\ f \quad = f(2) = 0{,}75 \cdot 2^4 - 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -8.$

Вынікі даследавання запішам у табліцу.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f \quad x$	–	0	+	0	–	0	+
$f \quad x$	спадае ↘	–1,25 **min**	нарастае ↗	0 **max**	спадае ↘	–8 **min**	нарастае ↗

⑥ Пабудуем графік, выкарыстаўшы вынікі даследавання (рыс. 154).



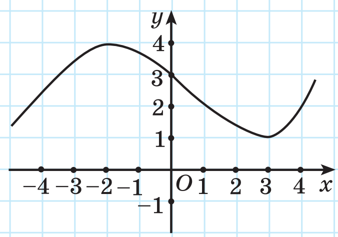
Рыс. 154

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. Пабудуйце графік функцыі, калі некаторыя яе ўласцівасці адлюстраваны ў табліцы:

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ 3)$	3	$(3;\ +\infty)$
$f\ \ x$	+	0	–	0	+
$f\ \ x$	нарастае	4 **max**	спадае	1 **min**	нарастае

Рашэнне. Напрыклад:



2. Даследуйце функцыю $f\ \ x \quad \frac{x^4}{2} \quad 4x^2 \quad 4{,}5$ і пабудуйце яе графік.

Рашэнне. Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай:

① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f(-x) = \frac{(-x)^4}{2} - 4(-x)^2 - 4{,}5 = \frac{x^4}{2} - 4x^2 - 4{,}5 = f(x)$, значыць, функцыя цотная, г. зн. яе графік сіметрычны адносна восі ардынат.

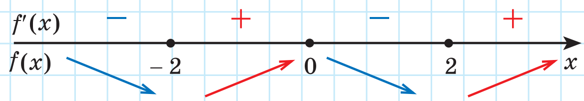
③ $\frac{x^4}{2} \quad 4x^2 \quad 4{,}5 \quad 0$; $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Няхай $t = x^2$, тады ўраўненне прымае выгляд

$$t^2 \quad 8t \quad 9 \quad 0; \quad \begin{array}{ll} t & 9, \\ t & 1; \end{array} \quad \begin{array}{ll} x^2 & 9, \\ x^2 & 1; \end{array} \quad x^2 \quad 9; \quad \begin{array}{ll} x & 3, \\ x & 3. \end{array}$$

Графік функцыі перасякае вось абсцыс у пунктах (3; 0) і (–3; 0).

④ $f\ \ 0 \quad \frac{0^4}{2} \quad 4 \cdot 0^2 \quad 4{,}5 \quad\ 4{,}5$. Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце (0; –4,5).

⑤ $f\ \ x \quad 2x^3 \quad 8x;\ f\ \ x \quad 2x\ \ x^2 \quad 4\ ;\ f\ \ x \quad 2x\ \ x \quad 2\ \ x \quad 2\ .$



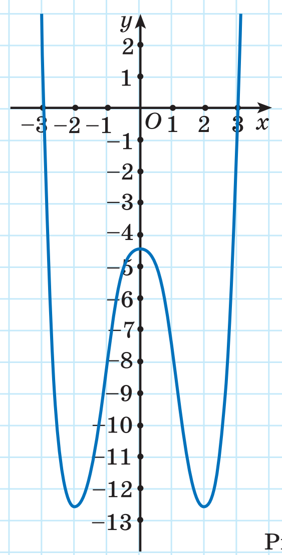
$x \quad = -2,\ f \quad = f(-2) = \frac{(-2)^4}{2} - 4 \cdot (-2)^2 - 4,5 = -12,5;$

$x \quad = 0,\ f \quad = f(0) = \frac{0^4}{2} - 4 \cdot 0^2 - 4,5 = -4,5;$

$x \quad = 2,\ f \quad = f(2) = \frac{2^4}{2} - 4 \cdot 2^2 - 4,5 = -12,5.$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f\ \ x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f\ \ x$	спадае	$-12,5$ **min**	нарастае	$-4,5$ **max**	спадае	$-12,5$ **min**	нарастае

⑥ Пабудуем графік функцыі (рыс. 155).



Рыс. 155

3. Даследуйце функцыю $f\ \ x\ \ \ 3x^5\ \ 5x^3\ \ 4$ і пабудуйце яе графік.

Рашэнне. Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай:

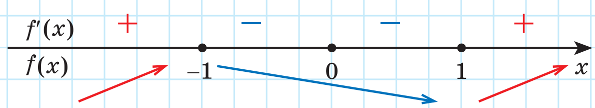
① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f\ \ x\ \ \ 3\ \ x\ ^5\ \ 5\ \ x\ ^3\ \ 4\ \ \ 3x^5\ \ 5x^3\ \ 4$, паколькі $f\ \ x\ \ \ f\ x$ і $f\ \ x\ \ \ f\ x$, то функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

③ Графік функцыі перасякае вось абсцыс паміж пунктамі –2 і –1, паколькі $f(-2) < 0$, а $f(-1) > 0$.

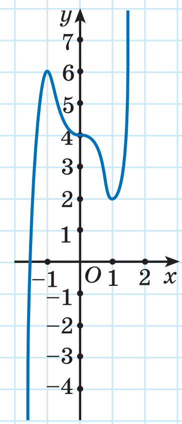
④ $f\ 0\ \ \ 3\cdot 0^5\ \ 5\cdot 0^3\ \ 4\ \ \ 4$. Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце (0; 4).

⑤ $f\ \ x\ \ \ 15x^4\ \ 15x^2$; $f\ \ x\ \ \ 15x^2\ \ x^2\ \ 1$; $f\ \ x\ \ \ 15x^2\ \ x\ \ 1\ \ x\ \ 1$.



$x\ \ \ = -1,\ f\ \ \ = f(-1) = 3\cdot(-1)^5 - 5\cdot(-1)^3 + 4 = 6;$
$x\ \ \ = 1,\ f\ \ \ = f(1) = 3\cdot 1^5 - 5\cdot 1^3 + 4 = 2.$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f\ \ x$	+	0	–	0	–	0	+
$f\ \ x$	нарас- тае	6 **max**	спадае	4 *пункт перагібу	спадае	2 **min**	нарас тае



Рыс. 156

⑥ Пабудуем графік функцыі (рыс. 156).

1. Калі на некаторым прамежку з абсягу вызначэння вытворная функцыі $f(x)$ дадатная, то:

а) $f(x) > 0$ на гэтым прамежку;

б) графік функцыі $f(x)$ не перасякае вось абсцыс на гэтым прамежку;

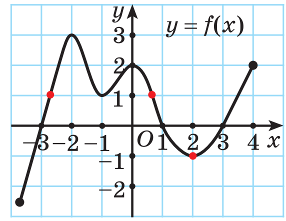
в) функцыя $f(x)$ не спадае.

Выберыце правільныя адказы.

2. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 157). Вы значце знак:

а) функцыі $f(x)$;

б) вытворнай функцыі $f \quad x$ у адзначаных на графіку пунктах.



Рыс. 157

3.130. Выкарыстайце алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай і пабудуйце графік функцыі:

а) $f \quad x \quad\quad x^3 \quad 3x$; б) $f \quad x \quad\quad x^3 \quad 3x^2$;

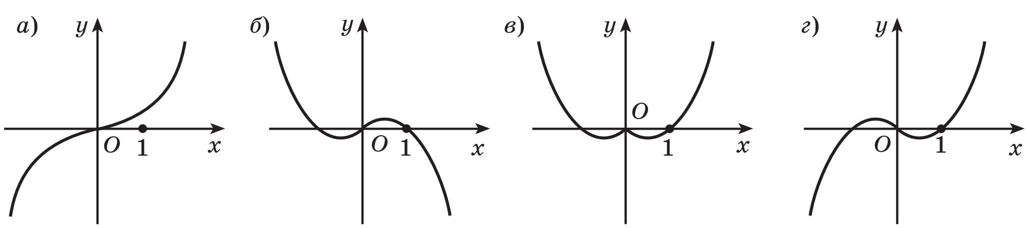
в) $f \quad x \quad\quad \frac{x^3}{3} \quad x^2$; г) $f \quad x \quad\quad 2x^2 \quad x^3$.

3.131. Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $f \quad x \quad\quad x^3 \quad 6x^2 \quad 9x$; б) $f \quad x \quad\quad 2x^2 \quad x^3 \quad x$;

в) $f \quad x \quad\quad 2x^3 \quad 6x^2 \quad 4$; г) $f \quad x \quad\quad \frac{x^3}{3} \quad 4x \quad 4$.

3.132. З графікаў функцый, паказаных на рысунку 158, выберыце графік функцыі $f \quad x \quad\quad x^3 \quad x$.



Рыс. 158

3.133. Вызначце, колькі агульных пунктаў мае прамая $y = 2$ і графік функцыі:

а) $f \quad x \quad\quad x^4 \quad 2x^2$; б) $f \quad x \quad\quad 2x^4 \quad x$;

в) $f \quad x \quad\quad 5x^4 \quad 4x^5$; г) $f \quad x \quad\quad x^4 \quad 4x^3 \quad 9$.

3.134. Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

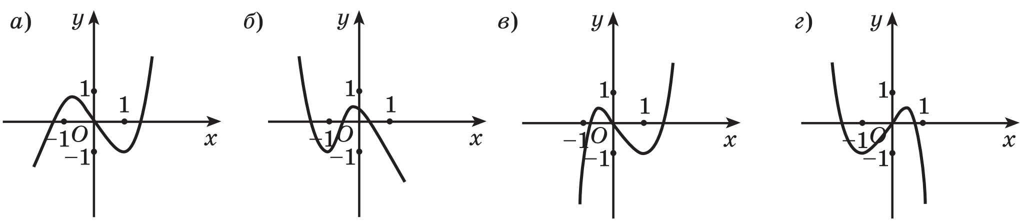
а) $f \quad x \quad\quad x^4 \quad 8x^2 \quad 8$; б) $f \quad x \quad\quad 24x^2 \quad 9x^4 \quad 2x^6$.

3.135. Даследуйце функцыю, пабудуйце яе графік і знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $f\ x\qquad 5$, калі:

а) $f\ x\qquad x\quad 1^{\ 2}\ x\quad 1$; б) $f\ x\qquad 4x^2\ x\quad 2^{\ 2}$.

3.136. Даследуйце функцыю $y\quad \frac{x^3}{3}\quad \frac{9}{4}x^2\quad 2x\quad 3$ і пабудуйце яе графік.

3.137. З графікаў функцый, паказаных на рысунку 159, выберыце графік функцыі $f\ x\qquad x^3\quad x^2\quad x$.



Рыс. 159

3.138. Выкарыстайце алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай і пабудуйце графік функцыі:

а) $f\ x\qquad x^3\quad 3x$; б) $f\ x\qquad 9x\quad x^3$.

3.139. Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $f\ x\qquad 5x^3\quad 3x^5$; б) $f\ x\qquad x^3\quad 4x^2\quad 4x$.

3.140. Вызначце, колькі агульных пунктаў маюць прамая $y = -1$ і графік функцыі $f\ x\qquad x^6\quad 3x^4\quad 9x^2$.

3.141. Даследуйце функцыю $f\ x\qquad 2x\quad 4\quad x\quad 1^{\ 2}$, пабудуйце яе графік і знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $f(x) = 4$.

3.142. Даследуйце функцыю $y = 6 - \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x$ і пабудуйце яе графік.

3.143. З графікаў функцый, паказаных на рысунку 159, выберыце графік функцыі $f\ x\qquad x^3\quad x^2\quad x$.

3.144. Дакажыце тоеснасць $\sin\frac{\ }{6}\qquad \cos\qquad \frac{2}{3}\qquad \cos\quad$.

3.145. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{x} = x - 2$; б) $\sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{x}$.

3.146. Вылічыце:

а) $\dfrac{16^2 \cdot 3^5}{12^4}$; б) $\dfrac{8^5 \cdot 3^4}{48^3}$; в) $\dfrac{15^{10}}{25^4 \cdot 3^9}$; г) $\dfrac{10^3 \cdot 6^2}{4^4 \cdot 5^4}$.

3.147. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{7x^2 - 6x - 1}{7x + 1}$; б) $\dfrac{1 - 4x^2}{2x^2 - 5x - 3}$.

§ 22. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі

3.148. Знайдзіце найменшае значэнне функцыі:

а) $y = x^2 - 2x - 3$; б) $y = 2\cos 3x$;

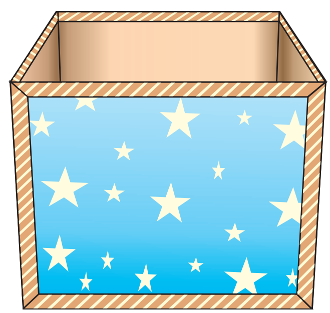
в) $y = 3\sin x - 1$; г) $y = |x| - 5$.

3.149. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі:

а) $g \quad x \qquad x^2 \quad 6x \quad 2$; б) $y = 5\cos x$;

в) $y = -2\sin x - 1$; г) $y = -|x| - 1$.

Разгледзім задачу. Для ўпакоўкі падарунка вырабілі скрыначку, якая мае форму прама вугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай. Скрыначку ўпрыгожылі, абклеіўшы ўсе яе канты каляровай стужкай (рыс. 160). Усяго спатрэбілася 3,6 м стужкі. Знайдзіце памеры скрыначкі, калі вядома, што яе аб'ём найбольшы.



Рыс. 160

Рашэнне. Абазначым старану асновы скрыначкі праз x м ($x > 0$), а вышыню — праз b м. Тады даўжыня стужкі роўна суме даўжынь усіх кантаў скрыначкі: $8x + 4b = 3{,}6$.

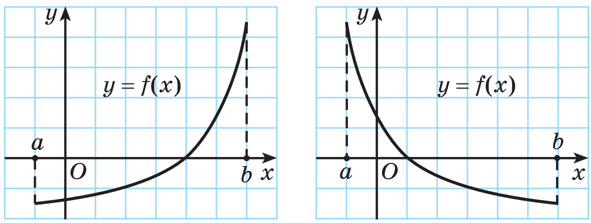
Аб'ём скрыначкі роўны $V(x) = x^2 b$. З роўнасці $8x + 4b = 3{,}6$ выразім $b = 0{,}9 - 2x$, тады $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$ і $0{,}9 - 2x > 0$, г. зн. $x < 0{,}45$.

Атрымалі функцыю $V(x) = x^2(0{,}9 - 2x)$, для якой трэба знайсці най большае значэнне пры $0 < x < 0{,}45$.

Для рашэння задач на адшуканне найбольшага (найменшага) значэння функцыі карыстаюцца вытворнай функцыі.

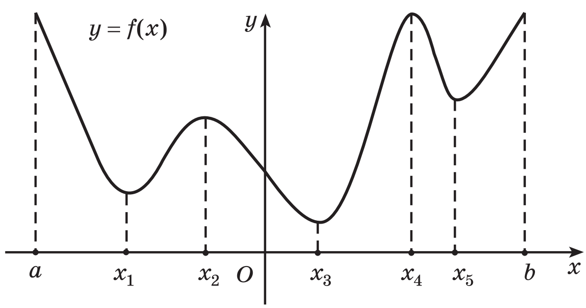
Разгледзім функцыю $y = f(x)$ для $x \in [a; b]$. Калі ўнутры адрэзка $[a; b]$ няма крытычных пунктаў, тады яна нарастае ці спадае на адрэзку $[a; b]$

(рыс. 161). Такім чынам, найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y = f(x)$ на адрэзку $[a; b]$ дасягаюцца на канцах прамежку.



Рыс. 161

Калі ж унутры адрэзка $[a; b]$ ёсць канечны лік крытычных пунктаў, то гэтыя пункты разбіваюць адрэзак на канечны лік адрэзкаў (рыс. 162). Унутры кожнага з іх няма крытычных пунктаў, а значыць, на кожным з іх функцыя нарастае ці спадае. Значыць, найбольшае і найменшае значэнні функцыі на кожным з іх дасягаюцца на канцах прамежкаў. Канцы гэтых прамежкаў з'яўляюцца або крытычнымі пунктамі дадзенай функцыі, або канцамі адрэзка $[a; b]$. Значыць, найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y = f(x)$ на адрэзку $[a; b]$ дасягаюцца ў крытычных пун ктах ці на канцах прамежку.



Рыс. 162

Для таго каб знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y = f(x)$ на адрэзку $[a; b]$, трэба:

① Знайсці вытворную функцыі $f \quad x$. ② Знайсці пункты, у якіх вытворная роўна нулю або не існуе (крытычныя пункты функцыі). ③ Выбраць з гэтых пунктаў тыя, якія на лежаць адрэзку $[a; b]$.	Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f \; x \quad 2x^3 \quad 6x^2 \quad 5$ на адрэзку $[-1; 1]$. ① $f \quad x \qquad 6x^2 \quad 12x$. ② $6x^2 \quad 12x \quad 0; \; x^2 \quad 2x \quad 0;$ $x \; x \quad 2 \quad 0; \; x_1 = 0, \; x_2 = -2.$

④ Вылічыць значэнні функцыі ў выбраных крытычных пунктах і на канцах адрэзка [a; b]. ⑤ Выбраць з гэтых значэнняў найбольшае значэнне функцыі $y = f(x)$ на адрэзку [a; b] (абазначаецца $\max\limits_{a;\,b} f(x)$) і найменшае значэнне функцыі $y = f(x)$ на адрэзку [a; b] (абазначаецца $\min\limits_{a;\,b} f(x)$).	Пунктаў, у якіх вытворная не існуе, няма. ③ $x_1 \quad 0 \quad\quad 1;1$, $x_2 \quad\quad 2 \quad\quad 1;1$. ④ $f\ 0 \quad\quad 2 \cdot 0^3 \quad 6 \cdot 0^2 \quad 5 \quad 5;$ $f \quad 1 \quad\quad 2 \cdot \quad 1^{\ 3} \quad 6 \cdot \quad 1^{\ 2} \quad 5 \quad 1;$ $f\ 1 \quad\quad 2 \cdot 1^3 \quad 6 \cdot 1^2 \quad 5 \quad\quad 3.$ ⑤ $\max\limits_{1;\,1} f\ x \quad\quad f\ 0 \quad\quad 5;$ $\min\limits_{1;\,1} f\ x \quad\quad f\ 1 \quad\quad 3.$

Вернемся да задачы, разгледжанай у пачатку параграфа.

Для функцыі $V \ x \quad\quad x^2 \ 0{,}9 \quad 2x$ знойдзем найбольшае значэнне на адрэзку [0; 0,45] (далучым канцы прамежку).

① Знойдзем вытворную функцыі $V \quad x$:

$$V \quad x \quad\quad x^2 \ 0{,}9 \quad 2x \quad\quad\quad 2x^3 \quad 0{,}9x^2 \quad\quad\quad 6x^2 \quad 1{,}8x.$$

② Знойдзем пункты, у якіх вытворная роўна нулю або не існуе (крытычныя пункты функцыі):

$$6x^2 \quad 1{,}8x \quad\quad 0; \ x^2 \quad 0{,}3x \quad\quad 0; \ x \ x \quad\quad 0{,}3 \quad\quad 0; \begin{array}{l} x \quad\quad 0, \\ x \quad\quad 0{,}3. \end{array}$$

Пунктаў, у якіх вытворная не існуе, няма.

③ Выберам з гэтых пунктаў тыя, што належаць адрэзку [0; 0,45]:

$$x \quad\quad 0 \quad\quad 0;\,0{,}45 \ , \ x \quad\quad 0{,}3 \quad\quad 0;\,0{,}45 \ .$$

④ Вылічым значэнне функцыі ў выбраных крытычных пунктах і на канцах адрэзка [0; 0,45]:

$$V\ 0 \quad\quad 0^2 \cdot \ 0{,}9 \quad 2 \cdot 0 \quad\quad 0;$$

$$V\ 0{,}3 \quad\quad 0{,}3^2 \cdot \ 0{,}9 \quad 2 \cdot 0{,}3 \quad\quad 0{,}09 \cdot 0{,}3 \quad\quad 0{,}027;$$

$$V\ 0{,}45 \quad\quad 0{,}45^2 \cdot \ 0{,}9 \quad 2 \cdot 0{,}45 \quad\quad 0.$$

⑤ Выберам з гэтых значэнняў найбольшае:

$$\max\limits_{0;\,0{,}45} V \ x \quad\quad V\ 0{,}3 \quad\quad 0{,}027.$$

Такім чынам, найбольшае значэнне функцыі $V \ x \quad\quad x^2 \ 0{,}9 \quad 2x$ для $x \quad\quad 0;\ 0{,}45$ дасягаецца пры $x = 0{,}3$.

Знойдзем значэнне b. Калі $x = 0{,}3$, то $b = 0{,}9 - 2x = 0{,}9 - 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}3$.

Адказ: скрыначка мае найбольшы аб’ём, калі ўсе яе канты роўны па 0,3 м.

Прыклад 1. Участак зямлі прамавугольнай формы адной стараной мяжуе з ракой. Пры якіх памерах плошча ўчастка будзе найбольшай, калі для яго абгароджвання набыта сетка даўжынёй 900 м?

Рашэнне. Найбольшае значэнне трэба знайсці для плошчы прамавугольніка.

Даўжыня агароджы роўна $2a + b$, дзе a і b — даўжыні старон участка прамавугольнай формы, прычым b — старана ўчастка, якая мяжуе з ракой.

Плошча прамавугольніка: $S = ab$.

Выразім b з умовы $2a + b = 900$ і атрымаем $b = 900 - 2a$, тады $S(a) = a(900 - 2a)$.

Па сэнсе задачы $a > 0$ і $b > 0$, г. зн. $900 - 2a > 0$; $a < 450$, значыць, $0 < a < 450$.

Разгледзім функцыю $S(a) = a(900 - 2a)$ і знойдзем найбольшае значэнне гэтай функцыі для $a \in (0; 450)$.

① $S'(a) = (a(900 - 2a))' = (900a - 2a^2)' = 900 - 4a$.

② $900 - 4a = 0$; $a = 225$.

③ $225 \in [0; 450]$.

④ $S(225) = 225 \cdot (900 - 2 \cdot 225) = 101\,250$;

$S(0) = 0 \cdot (900 - 2 \cdot 0) = 0$;

$S(450) = 450 \cdot (900 - 2 \cdot 450) = 0$.

⑤ $\max\limits_{[0;\,450]} S(a) = S(225) = 101\,250$.

Такім чынам, найбольшае значэнне функцыі $S(a) = a(900 - 2a)$ для $a \in [0; 450]$ дасягаецца пры $a = 225$.

Знойдзем значэнне b. Калі $a = 225$, то $b = 900 - 2a = 900 - 2 \cdot 225 = 450$.

Адказ: плошча ўчастка будзе найбольшай, калі старана, якая мяжуе з ракой, будзе роўна 450 м, а другая старана — 225 м.

Алгарытм рашэння задач на вылічэнне найбольшага і найменшага значэнняў велічыні

① Вылучыць ва ўмове задачы велічыню, для якой трэба знайсці найбольшае (найменшае) значэнне.

② Запісаць выраз для гэтай велічыні ў адпаведнасці з умовай задачы: атрымаць функцыю ад адной зменнай.

③ Знайсці прамежак змянення зменнай функцыі.

④ Даследаваць функцыю на прамежку.

⑤ Запісаць адказ у адпаведнасці з умовай задачы.

Прыклад 2. На старонцы друкаваны тэкст павінен займаць 150 см^2. Верхняе і ніжняе палі старонкі роўны па 3 см, правае і левае — па 2 см. Якімі павінны быць памеры старонкі, каб яе агульная плошча была найменшай?

Рашэнне. ① Найменшае значэнне трэба знайсці для плошчы старонкі.

② $S = ab$, дзе a і b — памеры старонкі.

Па ўмове задачы $(a - 6)(b - 4) = 150$, адкуль $b = \frac{150}{a-6} + 4$.

Тады $S(a) = a \cdot \left(\frac{150}{a-6} + 4\right)$.

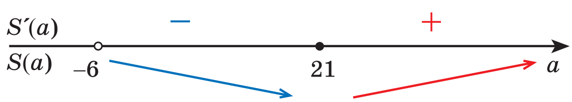
③ Па сэнсе задачы $a > 6$, г. зн. $a \in (6; +\infty)$.

④ Даследуем функцыю $S(a) = a \cdot \left(\frac{150}{a-6} + 4\right)$ на прамежку $(6; +\infty)$.

$$S'(a) = \left(a \cdot \left(\frac{150}{a-6} + 4\right)\right)' = \left(\frac{4a^2 + 126a}{a-6}\right)' = \frac{(4a^2 + 126a)'(a-6) - (a-6)'(4a^2 + 126a)}{(a-6)^2} =$$

$$= \frac{(8a + 126)(a-6) - 1 \cdot (4a^2 + 126a)}{(a-6)^2} = \frac{4a^2 - 48a - 756}{(a-6)^2} = \frac{4(a-21)(a+9)}{(a-6)^2}.$$

Пункт $a = 21$ — адзіны крытычны пункт дадзенай функцыі на прамежку $(6; +\infty)$, ён з'яўляецца пунктам мінімуму.



Такім чынам, у гэтым пункце функцыя $S(a) = a \cdot \left(\frac{150}{a-6} + 4\right)$ на прамежку $(6; +\infty)$ дасягае найменшага значэння.

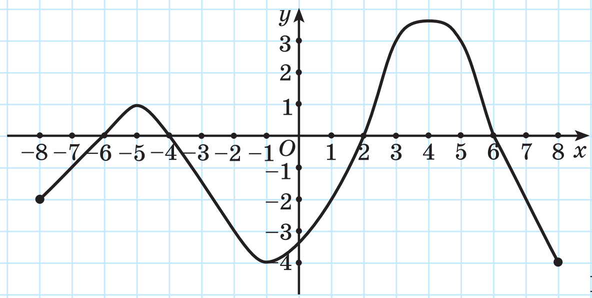
Агульная плошча старонкі будзе найменшай, калі $a = 21$ см, а $b = \frac{150}{a-6} + 4 = 14$ (см).

⑤ *Адказ*: 14 см і 21 см.

Прыклады асноўных заданняў і іх рашэнні

1. З дапамогай рысунка 163 (гл. с. 270), на якім паказаны графік функцыі $y = f(x)$, знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі на адрэзках:

а) $[2; 3]$; б) $[-3; 3]$; в) $[-7; 1]$.



Рыс. 163

Рашэнне. а) $\max\limits_{2;\,3} f \;\; x \quad f \;\; 3 \quad 3;$ $\min\limits_{2;\,3} f \;\; x \quad f \;\; 2 \quad 0;$

б) $\max\limits_{3;\,3} f \;\; x \quad f \;\; 3 \quad 3;$ $\min\limits_{3;\,3} f \;\; x \quad f \;\; -1 \quad 4;$

в) $\max\limits_{7;\,1} f \;\; x \quad f \quad 5 \quad 1;$ $\min\limits_{7;\,1} f \;\; x \quad f \quad 1 \quad 4.$

2. Знайдзіце найменшае і найбольшае значэнні функцыі $f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$ на адрэзку $[-1; 4]$.

Рашэнне. ① $f \;\; x \quad 12x^2 \quad 4x^3.$

② $12x^2 \quad 4x^3 \quad 0;$ $3x^2 \quad x^3 \quad 0;$ $x^2(3 - x) = 0;$ $x_1 = 0,$ $x_2 = 3.$
Пунктаў, у якіх вытворная не існуе, няма.

③ $x_1 \quad 0 \quad 1;\ 4\ ,$ $x_2 \quad 3 \quad 1;\ 4\ .$

④ $f\ 0 \quad 5 \quad 4 \cdot 0^3 \quad 0^4 \quad 5;$ $f\ 3 \quad 5 \quad 4 \cdot 3^3 \quad 3^4 \quad 32;$

$f \quad 1 \quad 5 \quad 4 \cdot \quad 1^{\ 3} \quad 1^{\ 4} \quad 0;$ $f\ 4 \quad 5 \quad 4 \cdot 4^3 \quad 4^4 \quad 5.$

⑤ $\max\limits_{1;\,4} f \;\; x \quad f\ 3 \quad 32;$ $\min\limits_{1;\,4} f \;\; x \quad f \quad 1 \quad 0.$

3. Адкрыты бак з квадратнай асновай павінен змяшчаць 500 л (дм^3) вадкасці. У якім выпадку на яго выраб пойдзе найменшая колькасць матэрыялу?

Рашэнне. ① Неабходная колькасць матэрыялу для вырабу бака (без адходаў) роўна плошчы паверхні бака. Найменшае значэнне трэба знайсці для плошчы паверхні бака.

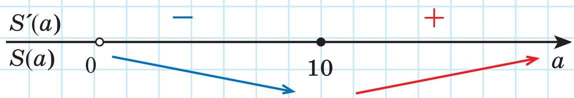
② Плошча паверхні бака $S \quad a^2 \quad 4ah,$ дзе a — старана асновы, h — вышыня. Аб'ём бака $V = a^2h$. Выразім h і атрымаем $h = \frac{500}{a^2}$, адкуль $S\ a \quad a^2 \quad \frac{2000}{a}.$

③ Па сэнсе задачы $a > 0$, г. зн. $a \in (0; +\infty)$.

④ Даследуем функцыю $S\ a \quad a^2 \quad \frac{2000}{a}$ на прамежку $(0; +\infty)$.

$S\ a \quad 2a \quad \frac{2000}{a^2} \quad \frac{2a^3 \quad 2000}{a^2} \quad \frac{2\ a^3 \quad 1000}{a^2}$. $S\ a \quad 0$ пры $a = 10$.

Пункт $a = 10$ — адзіны крытычны пункт функцыі $S\ a \quad a^2 \quad \frac{2000}{a}$ на прамежку $(0; +\infty)$, ён з'яўляецца пунктам мінімуму.



Значыць, у гэтым пункце функцыя $S\ a \quad a^2 \quad \frac{2000}{a}$ на прамежку $(0; +\infty)$ дасягае найменшага значэння. Такім чынам, у тым выпадку, калі старана асновы бака $a = 10$ дм, а вышыня бака $h = \frac{500}{a^2} = 5$ дм, на выраб бака пойдзе найменшая колькасць матэрыялу.

④ *Адказ*: на выраб бака пойдзе найменшая колькасць матэрыялу, калі старана яго асновы будзе роўна 10 дм, а вышыня — 5 дм.

1. Калі функцыя мае на адрэзку пункт максімуму, то гэта функцыя:
а) прымае найбольшае значэнне ў гэтым пункце; б) прымае найбольшае значэнне на адным з канцоў адрэзка; в) не прымае найбольшага значэння; г) прымае най большае значэнне на канцы адрэзка ці ў пункце максімуму. Выберыце правільны адказ.

2. Калі функцыя мае на адрэзку пункт мінімуму, то гэта функцыя:
а) прымае найменшае значэнне ў гэтым пункце; б) прымае найменшае значэнне на адным з канцоў адрэзка; в) не прымае найменшага значэння; г) прымае най меншае значэнне на канцы адрэзка ці ў пункце мінімуму. Выберыце правільны адказ.

3.150. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = -x^3 + 2$ на адрэзку $[-1; 4]$.

3.151. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = -2x^2 + 8x - 7$ на адрэзках:
а) $[-1; 4]$; б) $[-5; 1]$.

3.152. На адрэзку [–6; –0,5] знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $f \ \ x \qquad \frac{6}{x}$; б) $f \ \ x \qquad \frac{12}{x}$.

3.153. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f \ \ x \qquad x^2 \quad 6x \quad 7$ на адрэзку:

а) [1; 6]; б) [–2; 3]; в) [–1; 7]; г) [5; 7].

3.154. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f \ \ x \qquad x^4 \quad 2x^2 \quad 1$ на адрэзку:

а) [–2; 0]; б) [–1; 1]; в) [–2; 4]; г) [–3; –2].

3.155. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $y = f(x)$ на адпаведным адрэзку:

а) $f \ \ x \qquad x^3 \quad 3x^2 \quad 9x \quad 1, \quad 4; 4$; б) $f \ \ x \qquad \frac{x^3}{3} \quad 2x^2 \quad 3x \quad 1, \quad 2; 4$;

в) $f \ \ x \qquad \frac{x^4}{4} \quad 8x^2, \quad 1; 2$; г) $f \ \ x \qquad 3x^5 \quad 5x^3 \quad 1, \quad 2; 2$.

3.156. Знайдзіце два лікі, сума якіх роўна 40, а здабытак — найбольшы з магчымых.

3.157. Лік 18 запішыце ў выглядзе сумы двух дадатных складаемых так, каб здабытак першага складаемага і квадрата другога складаемага быў найбольшым.

3.158. Плотам даўжынёй 60 м трэба абгарадзіць прамавугольную пляцоўку найбольшай плошчы. Знайдзіце памеры гэтай пляцоўкі.

3.159. Дэкаратыўнай агароджай даўжынёй 36 м трэба абгарадзіць з трох бакоў прамавугольную клумбу найбольшай плошчы. Знайдзіце памеры гэтай клумбы.

3.160. Плошча прамавугольнага ўчастка, вылучанага для эксперыментальнага агародніцтва, роўна 1 га. Знайдзіце, якімі павінны быць памеры ўчастка, каб на абгароджванне пайшла найменшая колькасць сеткі.

3.161. Правіламі перавозкі пасажыраў у метрапалітэне прадугледжана, што бясплатна можна перавозіць ручную паклажу, памеры якой у суме вымярэнняў па даўжыні, шырыні і вышыні не перавышаюць 120 сантыметраў. Знайдзіце памеры скрыні з квадратным дном, якая задавальняе гэту ўмову і мае найбольшы аб'ём.

3.162. З усіх прамавугольных паралелепіпедаў, у якіх у аснове ляжыць квадрат і плошча поўнай паверхні роўна 24 дм^2, знайдзіце паралелепіпед найбольшага аб'ёму.

3.163. Металічны кантэйнер з накрыўкай аб'ёмам 72 дм^3 мае форму прамавугольнага паралелепіпеда, стораны асновы якога адносяцца як 1 : 2. Пры якіх памерах кантэйнера на афарбоўку яго поўнай паверхні спатрэбіцца менш усяго фарбы?

3.164. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = x^3 - 2$ на адрэзку [–5; 2].

3.165. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = 4x^2 - 24x + 1$ на адрэзках:

а) [–1; 4]; б) [–5; 1].

3.166. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f \quad x \qquad \frac{8}{x}$ на адрэзку [–4; –1].

3.167. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) \quad x^3 \quad 3x^2 \quad 2$ на адрэзку:

а) [–1; 3]; б) [–4; –1]; в) [–3; 1]; г) [2; 3].

3.168. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ на адрэзку:

а) [–3; –1]; б) [–1; 0]; в) [–1; 3]; г) [–3; 3].

3.169. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f \quad x \quad \frac{x^3}{3} \quad 1{,}5x^2 \quad 2x \quad 3$ на адрэзку [–3; 0].

3.170. Знайдзіце два лікі, сума якіх роўна 60, а здабытак — найбольшы з магчымых.

3.171. Запішыце лік 10 у выглядзе сумы двух неадмоўных складаемых так, каб сума квадратаў гэтых складаемых была найменшай.

3.172. Плотам даўжынёй 100 м трэба абгарадзіць прамавугольную пляцоўку найбольшай плошчы. Знайдзіце памеры гэтай пляцоўкі.

3.173. Плошча прамавугольніка роўна 81 м^2. Знайдзіце найменшы магчымы перыметр гэтага прамавугольніка.

3.174. Каркас драўлянай скрыні ўмацавалі, аббіўшы ўсе яго канты металічнай стужкай. Усяго выкарыстана 10 м стужкі. Знайдзіце памеры скрыні, ведаючы, што яна мае форму прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай, а яе аб'ём — найбольшы.

3.175. Вылічыце:

а) $5\sqrt{64} - 3\sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[6]{2{,}25} : \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

3.176. Рашыце ўраўненне:

а) $2\cos^2 x \quad 5\cos x \quad 2 \quad 0$; б) $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$.

3.177. Складзіце квадратнае ўраўненне, каранямі якога з'яўляюцца лікі: а) -9 і 7; б) $3\sqrt{7}+1$ і $3\sqrt{7}-1$.

3.178. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{matrix} x \quad y \quad 1, \\ x^2 \quad y^2 \quad 41. \end{matrix}$

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

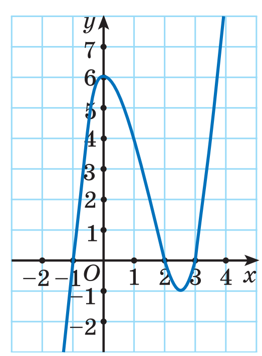
- ведаць азначэнне вытворнай функцыі ў пункце;
- ведаць фізічны сэнс вытворнай;
- ведаць формулы для вылічэння вытворнай;
- ведаць правілы дыферэнцыравання;
- ведаць геаметрычны сэнс вытворнай;
- умець карыстацца алгарытмам вылічэння вытворнай функцыі па азначэнні;
- умець прымяняць правілы дыферэнцыравання;
- умець рашаць задачы на прымяненне фізічнага і геаметрычнага сэнсу вытворнай;
- умець карыстацца алгарытмамі для вызначэння прамежкаў манатоннасці, пунктаў экстрэмуму і экстрэмумаў функцый, пабудовы графікаў функцый;
- умець прымяняць алгарытмы знаходжання найбольшага і найменшага значэнняў функцый з дапамогай вытворнай.

Я правяраю свае веды

1. Функцыя зададзена формулай $f(x) = 5x^2 - 6x$. Выберыце правільную роўнасць:

а) $f \quad 1 \qquad 1$; б) $f \quad 1 \quad 4$;

в) $f \quad 1 \quad 5$; г) $f \quad 1 \quad 1$.



Рыс. 164

2. З дапамогай графіка функцыі $y = f(x)$, паказанага на рысунку 164, знайдзіце:

а) значэнні аргумента, пры якіх $f \quad x \qquad 0$;

б) значэнні аргумента, пры якіх $f\ \ x\ < 0$;

в) значэнні аргумента, пры якіх $f\ \ x\ > 0$.

3. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = 7 - x^2$ на адрэзку $[-1; 2]$.

4. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f\ \ x\ \ \ \frac{3}{x}\ \ 2x\ \ 1$; б) $f\ \ x\ \ \ 4x^2\ \ x^3\ \ \frac{x^4}{8}$;

в) $f\ \ x\ \ \ \frac{3x^2\ \ 2}{x\ \ 1}$; г) $f\ \ x\ \ \ x^3\ 2x^2\ \ 5$.

5. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $f(x) = x^2 + 4x$ у пункце з абсцысай $x_0 = 2$.

6. Цела рухаецца па законе $s(t) = 3t^3 - t^2 + 5t$ (шлях вымяраецца ў метрах, час — у секундах). Знайдзіце скорасць цела праз 3 с пасля пачатку руху.

7. Знайдзіце прамежкі манатоннасці і пункты экстрэмуму функцыі $f\ \ x\ \ \ 2x^3\ \ 9x^2\ \ 12x\ \ 8$.

8. Даследуйце функцыю $f\ \ x\ \ \ x^3\ \ 3x^2\ \ 4$ і пабудуйце яе графік.

9. Да графіка функцыі $f(x) = 6x - x^2$ праведзены дзве датычныя. Першая датычная праведзена ў пункце на графіку з абсцысай $x_0 = 2$, другая — у пункце максімуму дадзенай функцыі. Знайдзіце плошчу трохвугольніка, утворанага воссю ардынат і гэтымі датычнымі.

10. Знайдзіце, пры якіх значэннях a функцыя $f\ \ x\ \ \ 2x^3\ \ 5x^2\ \ ax\ \ 9$ нарастае для ўсіх рэчаісных x.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 10» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 10 клас».

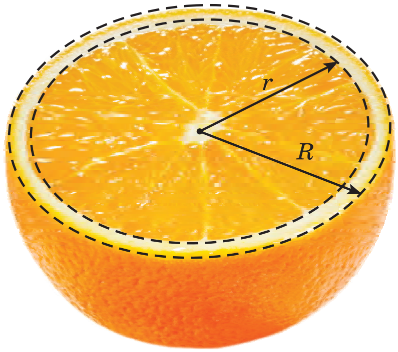
Матэматыка вакол нас*

1. Музычны строй — гэта сістэма супастаўлення нот і гукавых частот. Перыядам музычнага строю з'яўляецца актава — інтэрвал паміж нотамі, частоты якіх адрозніваюцца ў 2 разы. Актава складаецца з 12 ступеней. На клавіятуры раяля яна прадстаўлена сямю белымі і пяццю чорнымі клавішамі (рыс. 165). Адносіна гукавых частот суседніх

Рыс. 165

* Па матэрыялах інтэрнэт-крыніц.

нот для фартэпіяна роўна $\sqrt[12]{2}$. Ноце «ля» першай актавы адпавядае часта та 440 Гц. Знайдзіце частату ноты: а) «до» 2-й актавы; б) «ля» 3-й актавы.



Рыс. 166

2. Як вы думаеце, якую частку аб'ёму апельсіна складае яго лупіна?

Няхай радыус апельсіна роўны 5 см, а таўшчыня лупіны — 5 мм (рыс. 166). Тады

$V \quad - \ R \quad - \ \cdot$

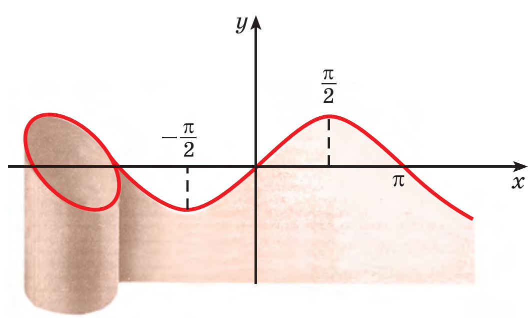
$V \quad - \ R \quad r \quad - \qquad - \ \text{———}$

$\frac{V}{V} \approx \text{———}$

Такім чынам, лупіна складае амаль трэць аб'ёму апельсіна! Знайдзіце адносіну таўшчыні лупіны да радыуса апельсіна, калі яе аб'ём складае палову аб'ёму апельсіна.

3. Вядома, што пры аднолькавай шчыльнасці рэчыва памеры двух па добных цел адносяцца як кубічныя карані з іх мас. Так, калі адзін ка вун важыць у два разы больш за другі, то яго дыяметр будзе ўсяго крыху больш чым на чвэрць (на 26 %) перавышаць дыяметр другога кавуна; і на вока будзе здавацца, што розніца ў вазе не такая істотная. Таму пры адсутнасці вагаў (продаж на вока) звычайна больш выгадна купляць большы плод.

4. Калі рулон шпалер разрэзаць наўскос і разгарнуць, то край па перы будзе разрэзаны па сінусоідзе (рыс. 167). На гэтай уласцівасці за снавана рашэнне многіх практыч ных задач.



Рыс. 167

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Алгебра, 10» можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка. 10 клас».

АДКАЗЫ

Раздзел 1. Трыганаметрыя

1.24. а) − °; б) − ° **1.26.** а) $\alpha =$ ° $\beta =$ °; б) $\alpha = -$ ° $\beta = -$ °; в) $\alpha =$ ° $\beta =$ ° **1.28.** а) $\alpha =$ ° + °n $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\alpha = -$ ° + °n $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\alpha =$ ° + °n $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\alpha = -$ ° + °n $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.29.** а) 45°; б) − °; в) − ° **1.30.** а) $\frac{\pi}{10}$; б) $\frac{\ }{3}$; в) − π **1.32.** а) ≈ °; б) ≈ − ° **1.33.** а) Трэцяй; б) першай; в) другой; г) чацвёртай; д) трэцяй; е) чацвёртай; ж) другой; з) першай. **1.34.** а) Першай; б) трэцяй; в) трэцяй; г) першай. **1.35.** $\frac{\ }{2}$ 2 n, $n \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{5}{4}$ 2 n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.36.** ° ° ° **1.37.** а) − ° − π; б) − ° − π **1.66.** а) $\sin\alpha = 0{,}8$; $\cos\alpha = -0{,}6$; б) $\sin$ $\frac{15}{17}$; $\cos$ $\frac{8}{17}$. **1.69.** а) 1; б) 1; в) 0; г) − д) −1; е) 0. **1.72.** а) 0; б) 1; в) 0; г) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; е) $-\frac{1}{4}$. **1.73.** а) −1; б) − в) 2; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $-\frac{1}{4}$; е) $-\frac{1}{2}$. **1.74.** $\frac{2}{5}$; −0,3; 1; $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **1.75.** $\sin\alpha > 0$; $\cos\alpha > 0$; $\sin\beta =$ $\cos\beta <$ $\sin\gamma > 0$; $\cos\gamma < 0$; $\sin\varphi < 0$; $\cos\varphi >$ **1.76.** а) $\cos 1125° > 0$; б) $\sin$ $\frac{12}{17}$ < 0; в) $\sin 3 >$ г) $\cos\frac{15\pi}{8} > 0$. **1.77.** а) $\sin 130° > \sin 140°$ б) $\cos 40° > \cos 50°$; в) $\cos(-$ °$) > \cos(-$ °$)$; г) $\sin(-$ °$) > \sin(-$ °$)$. **1.78.** а) Другой; б) трэцяй. **1.79.** а) $\sin$ 45 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos$ 45 $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 135$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin 225$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 225$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin 405$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 405$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.80.** ° − ° − ° ° **1.82*.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.104.** а) tg $\frac{8}{15}$; ctg $\frac{15}{8}$; б) tg $\frac{4}{3}$; ctg $\frac{3}{4}$. **1.106.** а) 2,5; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.107.** а) Не існуе; б) не існуе; в) 0; г) 0. **1.108.** а) −1; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.110.** а) $\mathrm{ctg}\,55° > \mathrm{ctg}\,63°$ б) $\mathrm{tg}\,42° < \mathrm{tg}\,68°$; в) $\mathrm{ctg}\,200° > \mathrm{ctg}\,225°$; г) $\mathrm{tg}(-$ °$) > \mathrm{tg}(-$ °$)$. **1.111.** $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$; $\mathrm{ctg}\,\alpha >$ $\mathrm{tg}\,\beta > 0$; $\mathrm{ctg}\,\beta > 0$; $\mathrm{tg}\,\gamma < 0$; $\mathrm{ctg}\,\gamma < 0$; $\mathrm{tg}\,\varphi < 0$; $\mathrm{ctg}\,\varphi <$ **1.112.** а) $\mathrm{ctg}\frac{8\pi}{9}$ $\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{10}$ 0; б) $\mathrm{tg}(-$ °$) \cdot \mathrm{tg}(-$ °$) < 0$; в) $\mathrm{ctg}\,2 \cdot \mathrm{tg}\,5 >$ **1.113.** а) Трэцяй; б) другой. **1.139.** $\cos\alpha = -$ tg $\frac{3}{4}$; ctg $\frac{4}{3}$. **1.140.** а) sin α; б) −cos α; в) 8; г) 3tg α; д) cosα; е) sin α; ж) 2cos α з) cos α **1.141.** sin $\frac{12}{13}$; cos $\frac{5}{13}$; tg $\frac{12}{5}$. **1.143.** а) 1; б) sin α; в) −1; г) $\frac{1}{\sin\alpha}$; д) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; е) $\frac{2}{\cos\alpha}$; ж) 6. **1.144.** sin $\frac{1}{\sqrt{5}}$; cos $\frac{2}{\sqrt{5}}$; tg $\frac{1}{2}$. **1.145.** а) cos α б) sin α; в) 1. **1.146.** cos $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; ctg $2\sqrt{2}$. **1.147*.** $-\frac{5}{9}$. **1.204.** а) Праўда; б) праўда; в) няпраўда. **1.206.** а) [− −4]; б) [2; 4]; в) [− −3]; г) [−3; 7]; д) [− −0,5]; е) [− **1.207.** а) $D(f) = \boldsymbol{R}$ $E(f) = [-$ б) $D(g) = \boldsymbol{R}$ $E(g) = [-$ $-2]$; в) $D(h) = \boldsymbol{R}$ $E(h) = [4;\ 10]$.

1.208. а) 3; –3; б) 2; –2; в) 9; 1. **1.209.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) – **1.211** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 0. **1.212.** а) Няцотная; б) цотная; в) няцотная; г) ні цотная, ні няцотная. **1.213.** а) 1; б) – в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 0. **1.214.** а) Праўда; б) не; в) праўда; г) не; д) не; е) праўда; $\frac{9}{2}$. **1.215.** а) $x \quad \frac{n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $x \quad \frac{}{6} \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.216.** а) $\sin \frac{}{8} < 0$; б) $\sin\frac{7\pi}{6} < 0$; в) $\sin \frac{3}{2} > 0$; г) $\sin\frac{11\pi}{5} > 0$. **1.217.** sin2 · sin3 · sin4 < **1.218.** а) $\sin \frac{}{7} < \sin\frac{2}{7}$; б) $\sin\frac{3\pi}{5} > \sin\frac{9\pi}{10}$. **1.219.** sin(– °); sin(– °); sin(– °). **1.222.** а) Праўда; б) праўда; в) праўда. **1.224.** а) [– –4]; б) [2,5; 3,5]; в) [– г) [– **1.225.** а) $D(f) = \boldsymbol{R}$ $E(f) = [-3; 3]$; б) $D(g) = \boldsymbol{R}$ $E(g) = [4; 6]$; в) $D(h) = \boldsymbol{R}$ $E(h) = [-$ **1.226.** а) 5; –5; б) 3; –3; в) 1; – **1.227.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) – **1.229.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0. **1.230.** а) Цотная; б) няцотная; в) цотная; г) ні цотная, ні няцотная. **1.231.** а) – б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1.232.** а) $\frac{11}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$; б) – π **1.233.** а) $x \quad \frac{}{4} \quad \frac{n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ б) $x \quad \frac{}{6} \quad n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.234.** а) $\cos \frac{}{5} > 0$; б) $\cos\frac{5\pi}{6} < 0$; в) $\cos \frac{7}{8} < 0$; г) $\cos\frac{15\pi}{7} > 0$. **1.235.** $\cos \frac{9}{8} \quad \cos \frac{}{5} \quad \cos\frac{4}{5} \quad 0$. **1.236.** а) cos0,5 > cos1; б) cos(–2) < cos(–1). **1.237.** cos57°; cos32°; cos20° **1.239.** а) $D = \boldsymbol{R}$ $E = [-7; 1]$; б) $D = \boldsymbol{R}$ $E = [1; 2]$. **1.240.** а) $y =$ пры $x \quad \frac{}{2} \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $y = -6$ пры $x \quad \frac{}{2} \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $y = 4$ пры $x \quad \frac{}{2} \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $y = -4$ пры $x \quad \frac{}{2} \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $y = 8{,}7$ пры $x \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $y = -8{,}7$ пры $x \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $y = \frac{1}{5}$ пры $x \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $y = -\frac{1}{5}$ пры $x \quad 2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.279.** а) Праўда; б) праўда; в) не. **1.280.** а) Праўда; б) не; в) не. **1.282.** а) $x \quad \frac{}{4} \quad \frac{n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $E = \boldsymbol{R}$; б) $x \quad 4 \quad 8\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $E = \boldsymbol{R}$ **1.283.** а) $\sqrt{3}$; б) 1; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) 0. **1.284.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) 0. **1.285.** а) 0; б) –1; в) $-\sqrt{3}$. **1.286.** а) Праўда; б) не; в) праўда; г) не; д) не; е) праўда. **1.287.** tg(–1) · tg0,5 · tg1 < **1.288.** $\mathrm{tg}\frac{\pi}{5} < \mathrm{tg}\frac{4\pi}{9}$. **1.289.** tg67°; tg23°; tg(– °). **1.291.** а) Належыць; б) належыць; в) не. **1.292.** а) Не; б) праўда; в) не. **1.294.** а) $x \quad \frac{n}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ $E = \boldsymbol{R}$ б) $x \neq \quad \pi n$ $n \in \boldsymbol{Z}$ $E = \boldsymbol{R}$ **1.295.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) 1; г) 0. **1.296.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) –1; в) 0; г) $-\sqrt{3}$. **1.297.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) – **1.298.** а) Праўда; б) не; в) праўда; г) не; д) не; е) праўда. **1.299.** $\mathrm{ctg}\frac{11}{6} \quad \mathrm{ctg}\frac{}{5} \quad \mathrm{ctg}\frac{}{7} \quad 0$. **1.300.** ctg 100 > ctg 30 . **1.301.** ctg2; ctg1; ctg0,5. **1.322.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{}{3}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{}{3}$; е) $\frac{2\pi}{3}$; ж) $\frac{\pi}{2}$; з) π; і) 0. **1.323.** а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{8\pi}{3}$. **1.324.** а) –π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 0; г) $\frac{3\pi}{2}$. **1.325.** а) (– π –π); б) $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{3}$. **1.326.** а) [–

б) [12; 16]. **1.327.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) 0; в) $\frac{}{3}$; г) 0. **1.328.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) 0; г) –1; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) 0. **1.329.** $\frac{4\pi}{3}$. **1.330.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.351.** а) $1^{n}\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{6}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ в) $1^{n}\frac{4}{3}$ $4\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{3}{8}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{}{9}$ $1^{n\ 1}\frac{}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) няма каранёў; ж) $1^{n}\arcsin\frac{5}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ з) $\frac{}{4}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; і) $\frac{}{9}$ $\frac{n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.352.** а) $\frac{}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ б) $\frac{2}{3}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{14}{3}$ $8\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $3\mathrm{arctg}\,7 +\ \pi n$ $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{1}{5}\mathrm{arcctg}\,2$ $\frac{n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ е) $\frac{}{10}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.353.** а) $\frac{}{8}$ $\frac{n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{9}$ $\frac{n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{}{2}$ $8\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.354.** $\frac{}{12}$ $\frac{5}{18}$ $\frac{2\ n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.355.** а) $2\pi n$ $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pi +\ \pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ в) $\frac{}{2}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $2\pi n$ $n \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{3}$ $2\ k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; д) $1^{n\ 1}\frac{}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; ж) $-\mathrm{arctg}\,3 + \pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; з) $-\mathrm{arctg}\,2 + \pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.356.** а) $2\pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{2}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $2\pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $1^{n}\,2\arcsin\frac{2}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ в) $\frac{4}{3}$ $4\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $1^{k}\frac{}{6}$ k, $k \in \boldsymbol{Z}$ $1^{n\ 1}\frac{}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{}{2}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) πn $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.357.** а) $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\mathrm{arctg}\,3 + \pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$ k, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.358*.** а) 240° – °; б) 67,5° – °; в) 495° – ° **1.386.** а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) $\sin\alpha$; е) $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ **1.387.** а) $-\cos\alpha$; б) $-\mathrm{ctg}\,\alpha$; в) $\sin\alpha$; г) $-\sin\alpha$; д) $\mathrm{tg}\,\alpha$; е) $-\mathrm{tg}\,\alpha$ **1.388.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) –1; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\frac{1}{2}$. **1.389.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\sqrt{3}$; е) $-\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) – **1.390.** а) $\mathrm{ctg}\ \alpha$; б) $\sin\ \alpha$; в) $\sin\ \alpha$ **1.391.** а) 0; б) 0. **1.392.** а) 0; б) 1; в) 0; г) 1. **1.393.** а) $\frac{5}{6}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{}{12}$ $\frac{n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ г) $\mathrm{arcctg}\frac{3}{5}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.394.** а) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) 7. **1.395.** а) $-\sin\ \alpha$; б) – **1.396.** $\frac{12}{5}$. **1.397.** а) – б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; в) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; г) $\mathrm{ctg}\ \alpha$; д) –2; е) $\mathrm{tg}\,\alpha$ **1.398.** а) $\frac{}{2}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.399.** а) $\frac{}{6}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{}{2}$ $2\ k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{5}{6}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.400*.** **1.437.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) – **1.438.** а) $\cos\alpha\ \cos\beta$; б) $-\sin\alpha\ \sin\beta$ **1.439.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; в) $2+\sqrt{3}$. **1.440.** а) $\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ б) $1^{n}\frac{}{24}$ $\frac{n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{}{12}$ $\frac{n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.441.** а) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; б) $-\frac{15\sqrt{3}+8}{34}$. **1.442.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) – **1.443.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$; б) $2\sin\alpha - 2\cos\alpha$ **1.444.** $E = [7; 9]$. **1.445.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 1. **1.446.** а) $-\frac{16}{65}$; б) 2. **1.447.** а) $2\pi n$

$n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{}{3}$ $1^n \frac{}{3}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.448.** $\frac{}{9}$ $\frac{2\ n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.450.** а) $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ б) $\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.452.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1.453.** $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$. **1.454.** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$. **1.455.** $\sqrt{2}$. **1.457.** **1.458.** **1.459*.** π **1.460*.** **1.496.** а) $\sin 12\alpha$; б) $\cos 2\alpha$ в) $\mathrm{ctg}\,\alpha$; г) $2\mathrm{ctg}\,\alpha$; д) $\cos 6\alpha$; е) $-\cos\alpha$; ж) 1; з) $\sin 2\alpha$; і) $\mathrm{tg}\,8\alpha$; к) $\mathrm{ctg}\,2\alpha$; л) $\frac{2}{1\ \ \mathrm{tg}^2}$. **1.497.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **1.498.** а) 0,96; б) $-\frac{47}{49}$. **1.499.** а) $1^n \frac{}{12}$ $\frac{n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ б) $\frac{2}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{}{2}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{}{8}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{5}{12}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.500.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) 2. **1.502.** а) $\frac{}{2}$ k, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) πk $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{3}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $2\pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $1^{n}\ ^{1}\frac{}{6}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ г) $\frac{}{12}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) $2\pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{2}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) πk $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{2}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.503.** а) $\frac{1}{2\cos\alpha}$; б) 1; в) $-\sin 2\alpha$; г) $\mathrm{tg}\,2\alpha$ **1.505.** а) 2; б) $\mathrm{ctg}\ \alpha$; в) 1. **1.506.** а) 4; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.507.** $\frac{}{2}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.508.** $-\frac{25}{23}$. **1.509.** $\frac{8}{9}$. **1.510.** а) $1^{n}\ ^{1}\frac{}{6}$ $\frac{n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ б) $\frac{}{2}$ k, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{2}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{}{4}$ k, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\mathrm{arctg}\,5$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{}{8}$ $\frac{}{8}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.511.** а) 0; б) $\mathrm{tg}\,\alpha$; в) $-\cos 4\alpha$ **1.512.** $\frac{k}{9}$, k $\boldsymbol{Z}$; $\frac{1}{9}\mathrm{arctg}\,2$ $\frac{n}{9}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.533.** а) $2\cos 6\alpha\ \cos 2\alpha$; б) $2\sin\frac{3}{2}\cos\frac{7}{2}$; в) $2\sin 2\alpha\sin\alpha$; г) $2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{9\alpha}{2}$. **1.534.** а) 0; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **1.536.** а) $\frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ πn $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{7}{48}$ $\frac{k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{13}{96}$ $\frac{n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ в) $-\ \ ^\circ +\ \ ^\circ n$ $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.537.** а) 0; б) 0; в) 1; г) 1. **1.538.** а) $\mathrm{ctg}\frac{}{2}$; б) $2\sin\alpha$; в) $\mathrm{tg}\,3\alpha$ **1.539.** а) 0; б) 0; в) $\sqrt{3}$; г) 1; д) 1; е) $\sqrt{3}$. **1.540.** а) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ $1^n \frac{}{24}$ $\frac{n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ б) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ πn $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\frac{}{4}$ $\frac{k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{2}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **1.541.** $-4\sin 3\alpha$ **1.542.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Я правяраю сваe веды

1. б); в). **2.** а) 70°; б) $\approx -\ \ ^\circ$; в) $\frac{4}{3}$. **3.** а) $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{2\sqrt{3} - 3}{6}$; в) $-$ **4.** а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **5.** а) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $-\frac{1}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $-\frac{33}{65}$. **7.** а) $\frac{2}{3}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\mathrm{arctg}\,2 + \pi k$ $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{4}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{2\pi k}{11}$, $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{2\pi n}{9}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $1^n \frac{}{48}$ $\frac{n}{8}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; д) πk $k \in \boldsymbol{Z}$ $\frac{}{4}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $\frac{}{24}$ n, $n \in \boldsymbol{Z}$; ж) $\frac{}{4}$ $\frac{3}{4}$ $2\ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ **8.** $\sqrt{3}$. **10.** $\frac{}{4}$ $\frac{3}{4}$ $2\ n$, n $\boldsymbol{Z}$.

Раздзел 2. Корань n-й ступені з ліку

2.24. а); б); в); д); е). **2.25.** а); в); г); д). **2.26.** а) $-\sqrt[4]{7}$; $\sqrt[4]{7}$; б) 0; в) $\sqrt[7]{4}$; г) няма каранёў. **2.27.** а) 3; б) $\frac{1}{2}$; в) 10; г) 2; д) 4; е) –3; ж) –1; з) 0,2; і) –0,5; к) 0; л) –0,1; м) –30; н) 2; о) – **2.28.** а) 0; б) –2; в) 10; г) –30; д) 0,101; е) $1\frac{39}{125}$. **2.29.** а) $\frac{5}{6}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) – **2.30.** а) 2; 20; –0,2; б) – – **2.31.** а) 1; б) 12; в) 1; г) 10; д) –5; е) –2,6; ж) $-\frac{8}{15}$; з) 0,1; і) 20; к) 0,05; л) 0,12; м) – **2.32.** а) $1\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{23}{30}$. **2.33.** а) 2; б) – **2.34.** а) 7; б) 10; в) 5; г) –7; д) 192; е) $\frac{2}{27}$. **2.35.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $1\frac{17}{20}$; в) –0,5; г) – **2.37.** а) – б) $19\frac{13}{15}$. **2.76.** а) 15; б) 12; в) 0,3; г) 2,8; д) 12; е) 48,6. **2.77.** а) 2; б) 4; в) 5; г) 3; д) 0,5; е) – **2.78.** а) $6\frac{2}{3}$; б) 150; в) $\frac{1}{20}$; г) 25. **2.79.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 5; г) – **2.80.** а) 1,5; $16\frac{2}{3}$; б) 200; 50. **2.81.** а) $116\frac{2}{3}$; б) $1\frac{1}{3}$. **2.82** а) 6; б) 6; в) –15; г) 6; д) 2,5; е) 1,5. **2.83.** а) 14; б) –30; в) –80; г) 14. **2.84.** а) 7; б) 3. **2.85.** а) $\sqrt[8]{9}$; б) $\sqrt[12]{27}$; в) $\sqrt[16]{81}$. **2.86.** а) $\sqrt[10]{49}$, $\sqrt[10]{32}$ і $\sqrt[10]{3}$; б) $\sqrt[24]{729}$, $\sqrt[24]{625}$ і $\sqrt[24]{343}$. **2.87.** а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[4]{5^3}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\sqrt[3]{2}$. **2.88.** а) 5; б) 3; в) 9; г) 100. **2.89.** а) 6; б) 2; в) $\sqrt[12]{5^7}$; г) 3. **2.90.** а) $\sqrt[16]{b}$; б) $\sqrt[6]{b}$; в) $\sqrt[7]{b}$; г) $\sqrt{b}$ **2.91.** а) 2; б) 3; в) 2. **2.92.** а) 19; б) –5; в) 2; г) – **2.93.** а) m; б) $-c$; в) $2x$; г) $-\frac{a}{3}$; д) $10y$; е) – b **2.94.** а) x; б) – b; в) – c ; г) – y **2.95.** **2.96.** а) a ; б) $3m$; в) $2a$; г) $\frac{a^{12}}{2}$; д) $6b$; е) – n **2.97.** а) $\frac{2}{3}m^2n^5$; б) $-\frac{2}{3}m^2n^5$. **2.98*.** а) a – б) $-b-2$; в) $3b$ **2.150.** а) $2\sqrt[3]{3}$; б) $6\sqrt[3]{2}$; в) $2\sqrt[4]{3}$; г) $2\sqrt[4]{10}$; д) $3\sqrt[4]{4}$; е) $2\sqrt[5]{5}$; ж) $10\sqrt[5]{5}$; з) $2\sqrt[7]{3}$. **2.151.** а) $14\sqrt[3]{2}$; б) $1{,}5\sqrt[3]{4}$; в) $-10\sqrt[4]{5}$; г) $5\sqrt[5]{9}$; д) $-7\sqrt[5]{2}$; е) $-\frac{\sqrt[7]{2}}{2}$. **2.152.** а) $|b|\sqrt[4]{3}$; б) $a^2\sqrt[6]{17}$; в) $3k^2|p|\sqrt[4]{2}$; г) $2y^3z^2\sqrt[3]{x}$. **2.153.** а) $n\sqrt[4]{5}$; б) $-m\sqrt[6]{7}$; в) $2m^2n^3\sqrt[4]{3}$; г) $-mn^2\sqrt[6]{3n}$; д) $m^2n^4\sqrt[8]{2}$; е) $-m^3n^5\sqrt[10]{5}$. **2.154.** а) $b\sqrt[3]{7}$; б) $a\sqrt[3]{a^2}$; в) $n\sqrt[5]{n}$; г) $ab^3\sqrt[5]{b^3}$; д) $m^2n\sqrt[5]{m^2n^2}$; е) $-3x^2y^3\sqrt[3]{4xy}$. **2.155.** а) $2a\sqrt[4]{b}$; б) $-2m^3n^3\sqrt[4]{2n}$; в) $-3x^2y^3\sqrt[6]{xy}$. **2.156.** а) $x^2\sqrt[4]{3x}$; б) $y^2\sqrt[6]{-y}$; в) $a^3b^2\sqrt[8]{a}$. **2.157.** а) $\sqrt[3]{250}$; б) $\sqrt[4]{48}$; в) $\sqrt[4]{405}$; г) $\sqrt[3]{3}$; д) $\sqrt[4]{0{,}81}$; е) $\sqrt[5]{2510}$; ж) $\sqrt[5]{2}$; з) $\sqrt[6]{7}$. **2.158.** а) $\sqrt[4]{16x}$; б) $\sqrt[4]{2y}$; в) $\sqrt[3]{2b}$; г) $-\sqrt[6]{2b^5}$. **2.159.** а) $\sqrt[6]{3k^6}$; б) $-\sqrt[6]{3k^6}$. **2.160.** а) $\sqrt[4]{2n^4}$; б) $-\sqrt[8]{7m^8}$; в) $\sqrt[3]{2c^3}$; г) $\sqrt[5]{k^6}$; д) $\sqrt[6]{x^7}$; е) $-\sqrt[4]{(b-a)^5}$. **2.161.** а) $\sqrt[5]{b^3}$; б) $\sqrt[4]{b}$. **2.162.** а) $9\sqrt[3]{2}$; б) $-3\sqrt[4]{3}$; в) $7\sqrt[5]{6}$; г) $-\sqrt[6]{5}$. **2.163.** а) $10\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt[3]{3}$; $24\sqrt[3]{9}$; 1,5; б) $-2\sqrt[4]{2}$; $-4\sqrt[4]{2}$; $-3\sqrt{2}$; –3; в) 0; $-4\sqrt[5]{6}$; $-4\sqrt[5]{36}$; –1. **2.164.** а) $3\sqrt[3]{2}$; б) $11\sqrt[5]{3}$; в) $\sqrt[7]{2}$; г) $-3\sqrt[3]{3}$; д) $6\sqrt[3]{5}$; е) $11\sqrt[3]{2}$. **2.165.** а) $3\sqrt{2}-4$; б) $4\sqrt{3}+6$. **2.166.** а) 9; б) $4\sqrt{2}$; в) –4; г) 1,6. **2.167.** а) –2; б) – **2.168.** $12\sqrt[3]{3}$ см **2.169.** 30 см **2.170.** а) 0; б) 1. **2.171.** а) 11; б) 7. **2.172.** а) $1-a$; б) $m-n$ **2.173.** а) $3\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$; б) $\sqrt[3]{2}\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$;

в) $\sqrt[4]{6}\left(1-2\sqrt[4]{216}\right)$; г) $\sqrt{5}\left(\sqrt[4]{2}+1\right)$. **2.174.** а) $\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)\left(\sqrt[5]{7}-\sqrt[5]{2}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x}-4\right)$. **2.175.** а) $1-\sqrt[3]{36}$; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; в) $\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{8}$; г) $-\frac{1}{2}$. **2.176.** а) $\frac{\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3x}-1}$; б) $-\sqrt{m}$ **2.177.** а) $\frac{1}{\sqrt[4]{m}+1}$; б) $\sqrt[5]{x^3}+2$; в) $-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$; г) $-\sqrt[4]{m}-\sqrt{n}$. **2.178.** а) $\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}$; б) $a\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}$. **2.179.** а) $\sqrt[3]{4}$; б) $2\sqrt[3]{3}$; в) $8\sqrt[4]{8}$; г) $3\sqrt[3]{49}$. **2.180.** а) $6\sqrt[3]{2}$; б) $-4\sqrt[5]{3}$. **2.182.** а) $2\sqrt[4]{7}\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$; б)* – **2.217.** $\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}$; **2.218.** $2\frac{1}{2}$; $2-\sqrt{5}$. **2.219.** – $\frac{1}{27}$; – **2.220.** а); г). **2.221.** а) ∞; $2\frac{2}{3}$; б) (–∞ –1,5) ∪ (– +∞); в) (– ; – 3) $\left(-\frac{1}{3};\ +\ \right)$; г) (–∞ – ∪ (6; +∞). **2.222.** а) [–8; 3); б) [–7; 3) ∪ (3; +∞); в) [– ∪ **2.223.** а) [7; +∞); б) (–∞; 3]; в) (–∞ +∞); г) [– +∞). **2.224.** а) 2; б) –10; в) –63; г) – **2.225.** а) $\frac{2}{7}$; б) $-\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{2}$; 2; г) $-\frac{1}{3}$; **2.226.** а) Не; б) праўда. **2.227.** а) $\sqrt[5]{1{,}8}>\sqrt[5]{1{,}6}$; б) $\sqrt[3]{-19}>\sqrt[3]{-23}$; в) $2>\sqrt[3]{7}$; г) $\sqrt[4]{15}<2$; д) $\sqrt[3]{28}>3$; е) $\sqrt[15]{31}<\sqrt[3]{2}$. **2.228.** а) 2; 3; б) 2; 3; в) 5; 6; г) – – **2.229.** а) – –1; 0; 1; 2; 3; б) – – **2.230.** а) $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[12]{12}>\sqrt[8]{5}$; в) $\sqrt{3}<\sqrt[5]{\sqrt{247}}$; г) $\sqrt[10]{7}<\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$. **2.231.** а) $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[3]{\sqrt{30}}$. **2.232.** а) Ні цотная, ні няцотная; б) няцотная; в) цотная; г) цотная. **2.235.** а) (1; 1); б) $\frac{1}{256}$; $\frac{1}{2}$; в) не перасякаюцца; г) 13; $\sqrt[8]{13}$. **2.236.** (– –1); (0; 0); (1; 1). **2.265.** а) 15; б) $-7\frac{7}{8}$; в) –6; 6; г) 0; 3; д) $\frac{1}{2}$; е) –3; 1,5; ж) –11; 7; з) $\frac{2}{3}$. **2.266.** а) $-19\frac{2}{3}$; б) – **2.267.** а) 6; б) 3; 4; в) 6; г) 1,25; д) 4; е) – **2.268.** а) 5; б) – **2.269.** а) –3; 3; б) 2,25. **2.270.** а) 6; б) 1. **2.271.** а) Няма каранёў; б) $1\frac{1}{3}$; в) $-\frac{74}{79}$; г) –5; 6; д) 5; е) – **2.272.** а) $\frac{6}{7}$; б) – **2.273.** а) 4; б) 2; в) $\frac{2}{3}$; г) 1; 5. **2.274.** а) 2; б) 5; в) 3; г) – **2.275.** **2.276.** а) 16; б) 729; в) 8; 263; г) –2; д) $-2\sqrt{7}$; $2\sqrt{7}$; е) – **2.277.** а) $\frac{1}{13}$; $\frac{4}{7}$; б) $-\frac{7}{26}$; $7\frac{7}{26}$. **2.278.** а) 3; б) 3; в) 5.

Я правяраю свае веды

1. а); в); г); д); е). **2.** б). **3.** а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $-1\frac{1}{3}$; г) – **4.** а) 40; б) –2; в) –1; 3; г) – **5.** а) $\sqrt{5}>\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[10]{29}>\sqrt[5]{3\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}>\sqrt[5]{\sqrt{3}}$. **6.** а) –2; б) 2; 3; в) 6; г) 83. **7.** а) $6{,}4\sqrt[4]{x}\sqrt{y}$; б) $\sqrt{x}$ **8.** а) $D=$ (–∞ ∪ [8; +∞); б) D ; 1 1; $\frac{3}{8}$; в) D 5; $1\frac{2}{7}$; г) $D=$ = [– ∪ **9.** а) $-\sqrt[6]{-64a^7}$; б) $-\sqrt[5]{m^8}$; в) $\sqrt[6]{-y^{13}}$; г) $-\sqrt[4]{2(2-y)^5}$. **10.**

Арэф'ева, І. Г.

А89 Алгебра : вучэбны дапаможнік для 10-га класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / І. Г. Арэф'ева, В. М. Пірутка ; пер. з рус. мовы Н. М. Алганавай. — Мінск : Народ ная асвета, 2019. — 285 с. : іл.

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.144я721

(Назва і нумар установы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам

Вучэбнае выданне

Арэф'ева Ірына Глебаўна
Пірутка Вольга Мікалаеўна

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева.* Рэдактар *Н. М. Алганава.* Мастацкія рэдактары *А. М. Багушэвіч, А. А. Праваловіч.* Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *Г. А. Дудко.* Карэктары *В. С. Бабеня, В. С. Казіцкая, А. П. Тхір, Г. В. Алешка.*

Падпісана да друку 02.12.2019. Фармат 70 × . Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 21,06 + 0,29 форз. Ул.-выд. арк. 14,62 + 0,38 форз. Тыраж 11 500 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013.
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Выдавецтва «Беларускі Дом друку».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/102 ад 01.04.2014.
Пр. Незалежнасці, 79, 220013, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

ЗМЕСТ

Корань n-й ступені

$\sqrt[n]{a}=b$, калі $b\geqslant 0$, $b^n=a$, дзе $n\in N$, $n>1$

Корань n-й ступені са здабытку

$\sqrt[4]{81\cdot 625}=\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{625}=3\cdot 5=15$	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, дзе $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $n\in N$, $n>1$	$\sqrt[5]{72}\cdot\sqrt[5]{\frac{4}{9}}=\sqrt[5]{72\cdot\frac{4}{9}}=\sqrt[5]{32}=2$

Корань n-й ступені з дзелі

$\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{3}{2}=1{,}5$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, дзе $a\geqslant 0$, $b>0$, $n\in N$, $n>1$	$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\frac{128}{2}}=\sqrt[6]{64}=2$

Корань n-й ступені са ступені з паказчыкам m

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 2]{2^2}=\sqrt[6]{4}$ $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 3]{2^3}=\sqrt[9]{8}$ $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 5]{2^5}=\sqrt[15]{32}$	$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$; $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:r]{a^{m:r}}$, дзе $a\geqslant 0$, $n\in N$, $m\in Z$, $k\in N$, r — агульны натуральны дзельнік лікаў m і n, $n>1$, $k>1$ і $r>1$	$\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[2\cdot 3]{5^3}=\sqrt{5}$ $\sqrt[12]{10\,000}=\sqrt[3\cdot 4]{10^4}=\sqrt[3]{10}$

Корань k-й ступені з кораня n-й ступені

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[3\cdot 5]{a}=\sqrt[15]{a}$	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[kn]{a}$ для любых натуральных $n>1$, $k>1$ і $a\geqslant 0$	$\sqrt[6]{\sqrt{a}}=\sqrt[6\cdot 2]{a}=\sqrt[12]{a}$

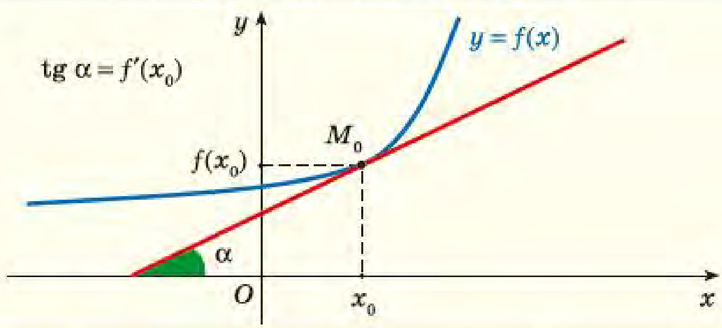
Корань n-й ступені са ступені з паказчыкам n

$\sqrt[8]{(-13)^8}=\lvert -13\rvert=13$	$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}\lvert a\rvert, & \text{калі } n \text{ — цотны;}\\ a, & \text{калі } n \text{ — няцотны}\end{cases}$	$\sqrt[5]{(-7)^5}=-7$

Вытворная				
$f(x)$	x^2	$kx+b$	$\frac{1}{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	0

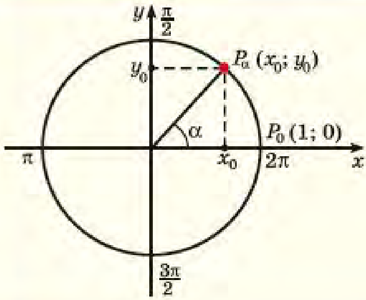
Правілы вылічэння вытворных	
Вытворная сумы	$(U+V)' = U' + V'$
Вытворная здабытку	$(UV)' = U'V + V'U$
Вытворная дзелі	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
Вытворная ступені	$(x^n)' = nx^{n-1}$, дзе $n \in Z$

Геаметрычны сэнс вытворнай



Натуральныя ступені лікаў 2, 3, 4, 5, 6										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187			
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125					
6^n	6	36	216	1296						

Трыганаметрыя



Ардыната пункта P_α трыганаметрычнай акружнасці, які адпавядае вуглу α, называецца **сінусам** вугла α, а абсцыса гэтага пункта — **косінусам** вугла α.

$x_0 = \cos\alpha \qquad y_0 = \sin\alpha$

π рад $= 180°$ $\quad$ 1 рад $\approx 57°$

Суадносіны паміж трыганаметрычнымі функцыямі аднаго вугла

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

Формулы складання

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

Формулы двайнога вугла

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$

Пераўтварэнне сумы (рознасці) трыганаметрычных функцый у здабытак

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Найпрасцейшыя трыганаметрычныя ўраўненні

Рашэнні ўраўнення $\sin x = a$	
$\lvert a \rvert > 1$	Няма каранёў
$a = 0$	$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\lvert a \rvert < 1,\ a \neq 0$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Рашэнні ўраўнення $\cos x = a$	
$\lvert a \rvert > 1$	Няма каранёў
$a = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = 1$	$x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$a = -1$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\lvert a \rvert < 1,\ a \neq 0$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Рашэнні ўраўнення $\operatorname{tg} x = a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Рашэнні ўраўнення $\operatorname{ctg} x = a$	
$a \in \boldsymbol{R}$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$