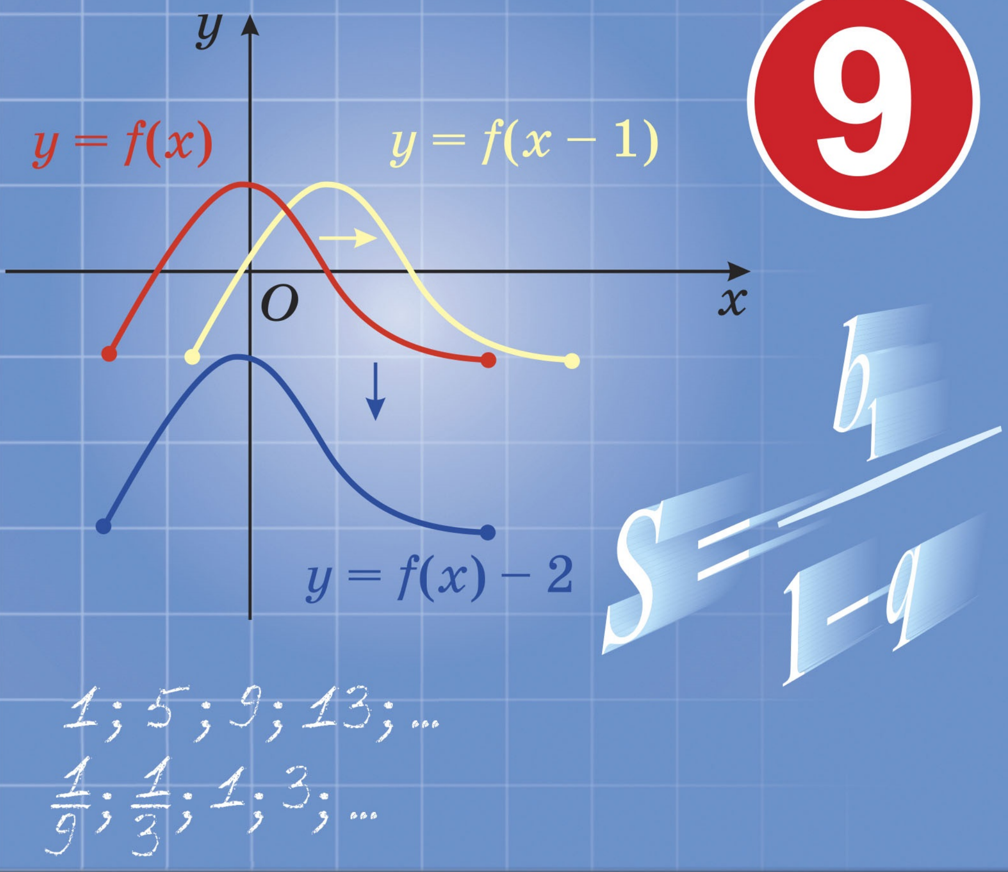
І. Г. Арэф'ева В. М. Пірутка

АЛГЕБРА

9



І. Г. Арэф’ева В. М. Пірутка

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 9 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск «Народная асвета» 2019

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.144я721
А80

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:
кафедра вышэйшай алгебры і абароны інфармацыі механіка-матэматычнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта, доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар *В. В. Беняш-Крывец*; настаўнік матэматыкі вышэйшай кваліфікацыйнай катэгорыі дзяржаўнай установы адукацыі «Сярэдняя школа № 24 г. Мінска» *Г. С. Лаўрэнцьева*

ISBN 978-985-03-3078-9

Шаноўныя дзевяцікласнікі!

Па гэтай кнізе вы працягнеце вывучэнне алгебры. Кніга складаецца з чатырох раздзелаў, кожны з якіх падзелены на параграфы, дзе вы сустрэнеце наступныя ўмоўныя абазначэнні:

🔍 — заданні на паўтарэнне для падрыхтоўкі да вывучэння новага матэрыялу;

📘 — новы тэарэтычны матэрыял і метады яго прымянення;

🔀 — алгарытмы;

🔔 — важныя правілы і сцверджанні;

📈 — дадатковы матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў;

⚙ — асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязным апісаннем паслядоўнасці дзеянняў;

? — вусныя пытанні і заданні;

🏋 — заданні для работы ў класе;

🏠 — заданні для дамашняй работы;

📖 — заданні для паўтарэння;

* — заданні павышанай складанасці.

Кожны раздзел вучэбнага дапаможніка заканчваецца рубрыкамі «Выніковая самаацэнка», «Практычная матэматыка», «Займальная матэматыка». У іх вы знойдзеце пералік патрабаванняў да засваення тэарэтычнага матэрыялу і практычныя заданні для самаправеркі, задачы на прымяненне матэматыкі ў разнастайных галінах жыцця, а таксама задачы для тых, хто захапляецца матэматыкай.

Для абагульнення раней вывучанага матэрыялу ў вучэбным дапаможніку дадзены раздзел «Выніковае паўтарэнне».

Дадатковыя матэрыялы да дапаможніка (трэнажоры, тэсты, трэніровачныя кантрольныя работы, гістарычныя звесткі і задачы практычнага зместу) можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка».

Жадаем поспехаў!

Паўтарэнне курса алгебры 7—8-х класаў

1. Выкарыстаўшы ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам, вылічыце:

а) $3^{-2}\cdot 3^{5}$; б) $7^{-8}\cdot 7^{8}$;

в) $12^{8}:12^{6}$; г) $5^{-9}:5^{-7}$;

д) $\left(3^{2}\right)^{2}$; е) $\left(0{,}1^{3}\right)^{-1}$;

ж) $18^{5}\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{5}$; з) $\dfrac{38^{4}}{19^{4}}$;

і) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 0{,}2^{-2}$;

к) $0{,}7^{-3}:1{,}4^{-3}$.

1) $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$;

2) $a^{m}:a^{n}=a^{m-n}$, $a\neq 0$;

3) $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$;

4) $a^{n}\cdot b^{n}=(ab)^{n}$;

5) $\dfrac{a^{n}}{b^{n}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}$, $b\neq 0$;

6) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$, $a\neq 0$.

Калі $a\neq 0$, то $a^{0}=1$.

2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $81\cdot 3^{-5}$; б) $1000\cdot 0{,}1^{5}$; в) $125^{-4}:25^{-6}$;

г) $7^{-15}\cdot\left(49^{-4}\right)^{-2}$; д) $\dfrac{36^{-5}}{6^{-3}\cdot 6^{-5}}$; е) $\left(4^{-10}\cdot 2^{21}\right)^{-4}$.

3. Вылічыце:

а) $5^{7}\cdot 5^{-5}$; б) $10^{9}:10^{6}$; в) $\left(0{,}1^{2}\right)^{-2}$;

г) $1{,}6^{3}\cdot\left(\dfrac{1}{8}\right)^{3}$; д) $\dfrac{2{,}8^{5}}{1{,}4^{5}}$; е) $16\cdot 2^{-6}$;

ж) $6^{-17}:\left(36^{-4}\right)^{2}$; з) $\dfrac{7^{-3}\cdot 49^{-4}}{7^{-9}}$.

4. Выкарыстаўшы формулы скарочанага множання і правілы раскрыцця дужак, запішыце выраз у выглядзе мнагачлена стандартнага выгляду:

а) $(a-b)(a+b)-a(a-1)$;

б) $(m+2)^{2}+4m(m-1)$;

в) $(b-5)^{2}-(b-3)(b+3)$;

г) $(c-2)(c+8)-(c-3)^{2}$.

$$(a-b)(a+b)=a^{2}-b^{2}$$

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$$

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2ab+b^{2}$$

5. Вынесіце агульны множнік за дужкі ў выразе:

а) $10a-35b$; б) $5x+xy$; в) $2ab-4ac$;

г) $3a^2+12ab$; д) $2b^4-b^2$; е) $21a^2b+3ab$.

6. Раскладзіце на множнікі двухчлен:

а) a^2-25; б) $16-9x^2$;

в) $4m^2-49n^4$; г) a^2b^2-1.

7. Раскладзіце мнагачлен на множнікі спосабам групоўкі:

а) $a^2+3a+ab+3b$; б) $15m-5n-mn+3m^2$.

8. Запішыце трохчлен у выглядзе квадрата двухчлена:

а) a^2+4a+4; б) $9b^2-6b+1$;

в) $m^2-18mn+81n^2$; г) $x^4+2x^2y+y^2$.

9. Раскладзіце, калі гэта магчыма, на множнікі квадратны трохчлен:

а) x^2-8x-9;

б) $6x^2-7x+1$;

в) $-x^2-5x+6$;

г) $5x^2+11x+2$.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

10. Раскладзіце мнагачлен на множнікі:

а) $8ab-4ac$; б) $6x^2y-3xy$;

в) m^2-36; г) $25-4y^2$;

д) $a^2-4a+ab-4b$; е) x^3-x^2+x-1.

Якімі спосабамі раскладання мнагачленаў на множнікі вы карысталіся?

11. Запішыце трохчлен у выглядзе квадрата двухчлена:

а) $x^2-10x+25$;

б) $4a^2+4ab+b^2$.

12. Раскладзіце на множнікі квадратны трохчлен:

а) x^2-2x-8;

б) $5x^2+6x+1$.

13. Выкарыстаўшы азначэнне і ўласцівасці арыфметычнага квадратнага кораня, вылічыце:

$$\sqrt{a} = b,\ \text{калі}\ b \geqslant 0\ \text{і}\ b^2 = a$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ \text{дзе}\ a \geqslant 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

а) $\sqrt{81} - \sqrt{\frac{4}{9}}$;

б) $2\sqrt{36} + \frac{\sqrt{64}}{4}$;

в) $\left(\sqrt{5}\right)^2 - \sqrt{169}$;

г) $\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2$;

д) $\sqrt{0{,}25 \cdot 81}$;

е) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{800}$;

ж) $\sqrt{\frac{0{,}01}{225}}$;

з) $\frac{\sqrt{450}}{\sqrt{2}}$.

14. Выканайце дзеянні і вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з’яўляецца значэнне выразу:

а) $7\sqrt{200} - \sqrt{50}$; б) $\left(2\sqrt{3} - \sqrt{27}\right)\sqrt{3}$;

в) $\left(6 - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + 6\right)$; г) $\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + \sqrt{12}$.

15. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{5} - 1}$; г) $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$.

16. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt{36} + \sqrt{\frac{9}{16}}$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{225}$;

в) $\sqrt{0{,}49 \cdot 64}$; г) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;

д) $5\sqrt{27} - 15\sqrt{3}$; е) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{20}\right)\sqrt{5}$;

ж) $\left(1 - \sqrt{3}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)$; з) $\left(\sqrt{2} + 3\right)^2 - \sqrt{72}$.

17. Рашыце ўраўненне:

а) $5x - 2(x + 3) = 9$;

б) $3(x - 1) - 4(x + 5) = 7 - 2x$;

в) $\frac{x + 2}{9} - \frac{1 - x}{18} = 1$;

г) $(x + 3)^2 - 10 = x(x + 5)$.

18. Рашыце няроўнасць, адказ запішыце ў выглядзе лікавага прамежку:

а) $3x - 5(x - 1) > 7$;

б) $\frac{x - 1}{3} \leqslant 2x + \frac{3x + 1}{4}$.

Лінейнае ўраўненне

$ax = b$

Лінейныя няроўнасці

$ax > b$; $ax < b$;

$ax \geqslant b$; $ax \leqslant b$

Лінейная функцыя

$y = kx + b$

Графік лінейнай функцыі — прамая.

19. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -x + 3$; в) $y = \frac{x}{3}$; г) $y = -4$.

20. Не выконваючы пабудовы графіка, для функцыі $y = -5x + 35$ знайдзіце:

а) абсяг вызначэння;

б) мноства значэнняў;

в) нуль;

г) прамежкі знакапастаянства;

д) вуглавы каэфіцыент прамой;

е) каардынаты пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат.

21. Рашыце ўраўненне:

а) $7x - (x + 2) = x - 8$; б) $(x - 4)^2 + 2 = x(x + 6)$;

в) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 = 11x + 8$.

22. Рашыце няроўнасць, адказ запішыце ў выглядзе лікавага прамежку:

а) $2x + 5(1 - x) < 20$; б) $\frac{x + 3}{3} - \frac{x - 4}{7} \geqslant 1$.

23. Пабудуйце графік функцыі $y = -2x + 3$.

24. Выкарыстаўшы формулу каранёў квадратнага ўраўнення, рашыце ўраўненне:

а) $x^2 - 8x - 20 = 0$;

б) $3x^2 + 4x + 1 = 0$;

в) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;

г) $7x^2 - 2x + 1 = 0$;

д) $5x^2 + x - 2 = 0$.

25. Рашыце ўраўненне:

а) $(x+4)^2 - 2(x-5) = 18$;

б) $(2x-1)^2 - x(x-1) = 1$;

в) $\dfrac{(x-3)^2}{8} - \dfrac{(x-2)^2}{2} = 1 - x$.

Квадратнае ўраўненне

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Калі $D > 0$, то

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Калі $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Калі $D < 0$, то няма каранёў.

26. Рашыце квадратную няроўнасць:

а) $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$;

б) $x^2 - 4x + 3 < 0$;

в) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$;

г) $x^2 + 3x + 7 < 0$;

д) $3x^2 + x > 0$;

е) $x^2 - 49 \leqslant 0$.

27. Пабудуйце графік функцыі, зададзенай формулай:

а) $y = x^2 - 4x + 3$;

б) $y = -x^2 + 2x + 8$;

в) $y = (x-3)^2 - 4$;

г) $y = -(x-3)(x-5)$.

Квадратныя няроўнасці

$$ax^2 + bx + c > 0;$$

$$ax^2 + bx + c < 0;$$

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0;$$

$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$

Квадратычная функцыя

$$y = ax^2 + bx + c$$

Графік квадратычнай функцыі — парабала.

28. Не выконваючы пабудовы графіка, для функцыі $y = 3x^2 - 12x + 9$ знайдзіце:

а) абсцыс вызначэння;

б) каардынаты вяршыні парабалы;

в) мноства значэнняў;
г) вось сіметрыі парабалы;
д) нулі;
е) прамежкі знакапастаянства;
ж) прамежкі манатоннасці;
з) каардынаты пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат.

29. Рашыце ўраўненне:

а) $3x^2 - 10x + 3 = 0$; б) $(x + 2)^2 = 4(x + 5)$.

30. Рашыце няроўнасць:

а) $x^2 - 5x + 4 < 0$; б) $2x^2 + 5x + 2 \geqslant 0$;
в) $x^2 - 4x + 4 > 0$; г) $x^2 - 6x \leqslant 0$.

31. Пабудуйце графік функцыі $y = x^2 - 6x + 8$.

Раздзел 1

РАЦЫЯНАЛЬНЫЯ ВЫРАЗЫ

§ 1. Рацыянальны дроб

1.1. Знайдзіце значэнне мнагачлена $3x^3-2x^2+x-3$ пры:
а) $x=1$; б) $x=-1$.

1.2. Сярод выразаў a^4+2a^3-7; $\frac{x^2}{4}$; $b-c$; 5; $x:(y-1)$; m^2-7m; y^4 выберыце:
а) адначлены; б) мнагачлены.

1.3. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:
а) $3:(x-8)$; б) $5:\left(x^2+7x\right)$;
в) $(2x-1):\left(x^2-36\right)$; г) $2:\left(x^2+1\right)$.

Разгледзім задачу. Турысты за першы дзень праплылі на лодцы па цячэнні ракі m км, а за другі — на 6 км больш. Колькі часу працягвалася ўсё падарожжа, калі ўласная скорасць лодкі роўна v $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, а скорасць цячэння ракі — 2 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$?

Рашэнне. Паколькі за два дні турысты пераадолелі $(2m+6)$ км па цячэнні ракі, а скорасць руху лодкі па цячэнні ракі роўна $(v+2)$ $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, то час, затрачаны на ўвесь шлях, роўны $(2m+6):(v+2)$ г. Дзель $(2m+6):(v+2)$ можна запісаць у выглядзе дробу $\frac{2m+6}{v+2}$.

Адказ: $\frac{2m+6}{v+2}$ г.

Пры рашэнні гэтай задачы атрымалі дроб, у лічніку і назоўніку якога запісаны мнагачлены. Такі дроб называецца рацыянальным.

Азначэнне. Дроб, лічнік і назоўнік якога — мнагачлены, называецца **рацыянальным дробам.**

Напрыклад, выразы $\frac{a-b}{a+b}$; $\frac{x^2-1}{x^3+7}$; $\frac{y-6}{y}$; $\frac{m}{n}$; $\frac{c+2d}{15}$; $\frac{8}{11}$ з'яўляюцца рацыянальнымі дробамі.

Рацыянальны дроб з'яўляецца рацыянальным выразам.

Выразы, якія складаюцца з лікаў, зменных з дапамогай дзеянняў складання, аднімання, множання, дзялення, узвядзення ў натуральную ступень, называюць **рацыянальнымі выразамі**.

Калі рацыянальны выраз **не змяшчае дзялення на выраз са зменнымі**, то ён называецца **цэлым** рацыянальным выразам.

Цэлыя рацыянальныя выразы

$8a^3b$; $x^2 - y^4$; $(a - b)^2$;

$\frac{m - n}{5}$; $(x - y) : 3$;

$x + \frac{x^3 - 1}{12}$

Напрыклад, выразы $2x^2y$; $(2 + a)(-3d)$; $4x^2 - 1$; $\frac{5a}{3} - 1$ з'яўляюцца цэлымі рацыянальнымі выразамі.

Рацыянальны выраз, **які змяшчае дзяленне на выраз са зменнымі**, называюць **дробавым** рацыянальным выразам.

Напрыклад, выразы $\frac{x + 3}{y - 2}$; $\frac{5}{ab}$; $\frac{4x^2 - y}{2x^2 - 3x + 1}$; $\frac{1}{a} - 2{,}5$; $\frac{2m}{n^2 + 4}$ з'яўляюцца дробавымі рацыянальнымі выразамі, паколькі змяшчаюць (акрамя дзеянняў складання, аднімання, множання) дзяленне на выраз са зменнымі.

Дробавыя рацыянальныя выразы

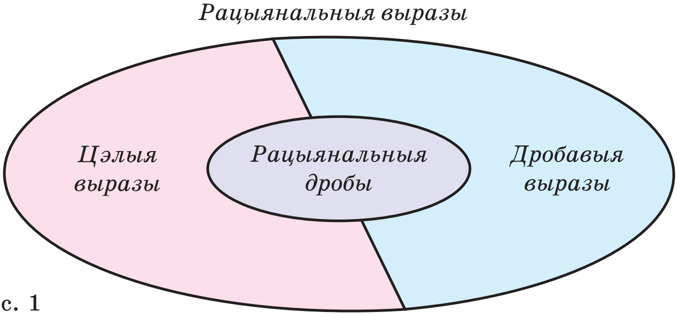
$\frac{6}{x - 9}$; $\frac{m}{n}$; $5 + \frac{x^2 - 1}{2x + 3}$;

$\frac{15}{x^2 - y^2} + \frac{6}{x}$

Сувязь паміж паняццямі «рацыянальны дроб», «цэлы рацыянальны выраз» і «дробавы рацыянальны выраз» ілюструе рысунак 1.

Цэлыя рацыянальныя выразы маюць сэнс пры любых значэннях зменных, якія ўваходзяць у іх.

Напрыклад, абсягам вызначэння выразу $9x^3 - 4x^2 - 1$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў.



Рыс. 1

Дробавыя рацыянальныя выразы маюць сэнс пры ўсіх значэннях зменных, акрамя тых, што ператвараюць назоўнікі дробаў у нуль.

Напрыклад, выраз $8x - \frac{6}{x+5}$ пры $x = -5$ не мае сэнсу, паколькі пры $x = -5$ назоўнік дробу $\frac{6}{x+5}$ ператвараецца ў нуль. Значыць, дадзены выраз мае сэнс пры ўсіх значэннях зменнай, акрамя -5.

Рацыянальны дроб $\frac{4}{a^2 - 36}$ мае сэнс пры любых значэннях зменнай, акрамя лікаў -6 і 6, паколькі пры $a = -6$ і пры $a = 6$ назоўнік дробу ператвараецца ў нуль.

Абсягам вызначэння рацыянальнага дробу з'яўляецца мноства ўсіх значэнняў зменных, што ўваходзяць у яго, акрамя тых, што ператвараюць яго назоўнік у нуль.

Прыклад. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу:

а) $\frac{5x}{x-4}$; б) $\frac{6y-1}{y(y+8)}$; в) $\frac{7a-4}{a^2+9}$.

Рашэнне. а) Абсягам вызначэння рацыянальнага дробу $\frac{5x}{x-4}$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя ліку 4, паколькі пры $x = 4$ назоўнік дробу ператвараецца ў нуль. Можна запісаць: $x \in (-\infty;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

б) Знойдзем, пры якіх значэннях зменнай назоўнік дробу $\frac{6y-1}{y(y+8)}$ ператвараецца ў нуль. Для гэтага рэшым ураўненне $y(y+8) = 0$. Каранямі дадзенага ўраўнення з'яўляюцца лікі -8 і 0. Значыць, абсягам вызначэння дробу $\frac{6y-1}{y(y+8)}$ з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў -8 і 0, г. зн. $y \in (-\infty;\ -8) \cup (-8;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

в) Паколькі выраз $a^2 + 9$ з'яўляецца дадатным лікам пры любых значэннях зменнай, то няма такіх значэнняў зменнай, пры якіх назоўнік дробу $\frac{7a-4}{a^2+9}$ быў бы роўны нулю. Значыць, рацыянальны дроб мае сэнс пры любых значэннях зменнай, г. зн. абсягам вызначэння дробу з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, $a \in \boldsymbol{R}$.

Рацыянальныя выразы	
1. Якія з наступных выразаў: а) $6{,}7z+\frac{2}{3}xy$; б) $2\sqrt{xy}$; в) $\frac{x+y}{x-6}$; г) $4+\frac{1}{30}x^2y$; д) $\sqrt{2}x$ — з’яўляюцца рацыянальнымі?	Выразы а), в), г) і д) з’яўляюцца рацыянальнымі, паколькі складаюцца з лікаў, зменных і змяшчаюць дзеянні складання, аднімання, множання і дзялення. Выраз б) не з’яўляецца рацыянальным, паколькі змяшчае дзеянне здабывання кораня з выразу са зменнымі.
2. Якія з наступных выразаў: а) $0{,}2x+\frac{x}{3}$; б) $\frac{2x^2-y^4}{x}$; в) $\frac{x-5y}{2x+y}$; г) $\frac{4-y}{3}$; д) $\frac{y+5}{4x-6}$ — з’яўляюцца дробавымі рацыянальнымі?	Выразы б), в), д) з’яўляюцца дробавымі рацыянальнымі, паколькі складаюцца з лікаў, зменных, натуральных ступеней зменных з дапамогай дзеянняў складання, аднімання, множання і змяшчаюць дзеянне дзялення на рацыянальны выраз са зменнымі.
3. Якія з наступных выразаў: а) $\frac{14c}{15}$; б) $\frac{2x}{x^4+2}$; в) $\frac{6}{p-5}$; г) $\frac{m}{6m^2+3}$; д) $\frac{8}{9c}$ — з’яўляюцца рацыянальнымі дробамі?	Выразы а) — д) з’яўляюцца рацыянальнымі дробамі, паколькі кожны з іх уяўляе сабой дроб, лічнік і назоўнік якога з’яўляюцца мнагачленамі.
4. Знайдзіце значэнне выразу: а) $\frac{x+3}{x-3}$ пры $x=0$; б) $a+\frac{8}{a-1}$ пры $a=\frac{1}{2}$; в) $\frac{2m-n}{3m+2n}$ пры $m=4$, $n=-5$.	а) Падставім $x=0$ у выраз $\frac{x+3}{x-3}$ і атрымаем: $\frac{x+3}{x-3}=\frac{0+3}{0-3}=-1$. б) Пры $a=\frac{1}{2}$ маем: $a+\frac{8}{a-1}=\frac{1}{2}+\frac{8}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}+8:\left(-\frac{1}{2}\right)=$ $=\frac{1}{2}-16=-15{,}5.$ в) Калі $m=4$, $n=-5$, то $\frac{2m-n}{3m+2n}=$ $=\frac{2\cdot4-(-5)}{3\cdot4+2\cdot(-5)}=\frac{8+5}{12-10}=\frac{13}{2}=6{,}5.$

Абсяг вызначэння рацыянальнага выразу	
5. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу: а) $\dfrac{x+5}{6-2x}$; б) $\dfrac{2x-7}{x(x+2)}$; в) $\dfrac{x+15}{x^2-16}$.	а) Знойдзем, пры якім значэнні зменнай назоўнік дробу ператвараецца ў нуль. Для гэтага рэшым ураўненне $6-2x=0$; $x=3$. Абсягам вызначэння дадзенага дробу з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя ліку 3, г. зн. $x \in (-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; б) $x(x+2) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq -2$. Абсягам вызначэння дадзенага дробу з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў -2 і 0, г. зн. $x \in (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; в) $x^2-16 \neq 0$; $(x-4)(x+4) \neq 0$; $x \neq 4$, $x \neq -4$. Абсягам вызначэння дадзенага дробу з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў -4 і 4. Значыць, $x \in (-\infty;\ -4) \cup (-4;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.
6. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага выразу: а) x^3-4x^2+2; б) $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{x+6}{x+3}$.	а) Выраз x^3-4x^2+2 з'яўляецца цэлым рацыянальным, яго абсягам вызначэння з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, г. зн. $x \in \boldsymbol{R}$. б) Назоўнік першага дробу ператвараецца ў нуль пры $x=1$, а назоўнік другога дробу роўны нулю пры $x=-3$. Значыць, абсягам вызначэння дадзенага выразу з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў 1 і -3. Такім чынам, $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

1. Ці праўда, што цэлы рацыянальны выраз не змяшчае дзеяння дзялення?
2. У якім абсягу на рысунку 1 знаходзяцца мнагачлены?

1.4. З выразаў $\dfrac{5x}{7y^2}$; $\dfrac{2a^3}{5}-\dfrac{b}{4}$; $12+\dfrac{m}{n}$; $\dfrac{2}{9x-7}$; $\dfrac{y-3}{y+3}$; $2{,}4a^5b^6$; $5\sqrt{ab}$; $\dfrac{c^4+2c+3}{c}$; $\dfrac{x^2-xy}{6}$; $\dfrac{5}{7}$ выберыце: а) цэлыя рацыянальныя выразы; б) дробавыя рацыянальныя выразы; в) рацыянальныя дробы.

1.5. Прывядзіце прыклад рацыянальнага дробу, які з'яўляецца:

а) цэлым рацыянальным выразам;

б) дробавым рацыянальным выразам.

1.6. Знайдзіце значэнне рацыянальнага дробу $\frac{m^2+5m}{2m-1}$ пры:

а) $m=-2$; б) $m=0$.

1.7. Чаму роўна значэнне рацыянальнага дробу $\frac{4a-b}{2a+5b}$, калі:

а) $a=-3,\ b=1$; б) $a=0{,}1,\ b=-0{,}3$?

1.8. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $b-\frac{3b-1}{b^2+1}$, калі $b=7$;

б) $\frac{x^3-2x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{x}$, калі $x=\sqrt{3}$;

в) $\frac{x+5}{y}-\frac{y-1}{x-3}$, калі $x=-2{,}5,\ y=10$;

г) $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}$, калі $a=\sqrt{10},\ b=\sqrt{7}$.

1.9. Прывядзіце прыклад значэнняў зменных a і b, пры якіх значэнне рацыянальнага дробу $\frac{a+1}{b}$ з'яўляецца:

а) цэлым лікам; б) дробавым лікам;

в) адмоўным лікам; г) ірацыянальным лікам.

1.10. Знайдзіце значэнне функцыі $y=\frac{x^2-x}{x-3}$ пры значэнні аргумента, роўным:

а) 1; б) $2\frac{1}{3}$; в) 1,5; г) $\sqrt{2}+3$.

Выберыце сярод гэтых значэнняў: 1) цэлыя; 2) рацыянальныя; 3) ірацыянальныя.

1.11. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу:

а) $\frac{x-1}{x-4}$; б) $\frac{3c+5}{1-5c}$; в) $\frac{8m-5}{m}$; г) $\frac{8}{x(x+2)}$;

д) $\frac{12a+7}{a^2-8a}$; е) $\frac{8b-1}{(b-3)(b+2)}$; ж) $\frac{5y}{y^2-9}$; з) $\frac{3a-1}{a^2-7}$;

і) $\frac{x+4}{12}$; к) $\frac{9}{n^2+7}$; л) $\frac{6x}{2x^2+1}$; м) $\frac{12c-1}{c^2}$.

1.12. Прывядзіце прыклад рацыянальнага дробу, абсягам вызначэння якога з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя: а) ліку 5; б) лікаў –4 і 2; в) лікаў 0 і 15.

1.13. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай мае сэнс выраз:

а) $x^2 + 8x - 5$; б) $x + \frac{x-4}{7}$; в) $\frac{x-6}{x} + \frac{5}{x-2}$;

г) $\frac{2x-1}{3x+2} - \frac{x-7}{x-4}$; д) $\frac{5}{x^2+3x} + \frac{8}{x-1}$; е) $\frac{9}{x^2-25} + \frac{7}{x^2+16}$.

1.14. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\frac{3x-1}{x+2}$; б) $\frac{x-4}{x} + \frac{9x+1}{2x-3}$; в) $\frac{3}{8x^2+x}$;

г) $\frac{x+4}{x^2-6x+9}$; д) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{9}$; е) $\frac{7}{x^2-5} + \frac{3}{x^2}$.

1.15*. Вядома, што $3a - 12b = 1$. Знайдзіце, калі гэта магчыма, значэнне выразу:

а) $a - 4b$; б) $\frac{5}{6a-24b}$; в) $\frac{8b-2a}{7}$; г) $\frac{3}{a^2-8ab+16b^2}$.

1.16*. Высветліце, ці мае сэнс выраз $\frac{x}{4-\frac{4}{x}}$ пры:

а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = -1$; г) $x = 0{,}5$.

Калі мае, то знайдзіце значэнне выразу пры гэтых значэннях зменных.

1.17*. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\frac{x}{1-\frac{5}{x}}$; б) $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$.

1.18. З выразаў $12x^2 - xy$; $\frac{a+2}{a-2}$; $48n - \frac{m}{n}$; $\frac{8x+2}{3x-4}$; $\frac{y^2-18}{6}$; $7\sqrt{mn}$; $8m^2n$; $\frac{b^3-5b+4}{3b}$; $\frac{1}{9}$ выпішыце ўсе:

а) цэлыя рацыянальныя выразы;
б) рацыянальныя дробы.

1.19. Вызначце, чаму роўна значэнне дробу $\frac{x^2-5x}{x-1}$, калі:

а) $x = -3$; б) $x = 0$.

1.20. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{3m+n}{m-3n}$ пры:

а) $m = 2$, $n = -5$; б) $m = -0{,}5$, $n = -0{,}4$.

1.21. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{5a-3}{4a+1}-3a$, калі $a=0{,}25$; б) $\frac{2\sqrt{5}}{b}-3b^2$, калі $b=\sqrt{5}$.

1.22. Вызначце, якія са значэнняў функцыі $y=\frac{2x-1}{x^2+5}$ пры значэнні аргумента, роўным: а) –2; б) 0,5; в) $\sqrt{3}$, — з'яўляюцца цэлымі; рацыянальнымі; ірацыянальнымі лікамі.

1.23. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу:

а) $\frac{a+4}{a-6}$; б) $\frac{9x-5}{2x+1}$; в) $\frac{7n+4}{n}$; г) $\frac{12y-1}{y(y-3)}$;

д) $\frac{9}{c^2-8c}$; е) $\frac{x+3}{(x-5)(x+1)}$; ж) $\frac{9d}{d^2-16}$; з) $\frac{15c+2}{c^2-5}$;

і) $\frac{a^2-9}{8}$; к) $\frac{x-6}{x^2+5}$; л) $\frac{8m}{3m^2+2}$; м) $\frac{3x-5}{x^2}$.

1.24. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай мае сэнс выраз:

а) x^2-9x+1; б) $3x-\frac{8x+1}{5}$; в) $\frac{x+7}{x-5}-\frac{2}{x}$;

г) $\frac{x+4}{5x-1}+\frac{6x}{x+2}$; д) $\frac{12}{x^2-8x}+\frac{5}{x+6}$; е) $\frac{7}{x^2-36}-\frac{8}{x^2+49}$.

1.25*. Знайдзіце, калі гэта магчыма, значэнне выразу $\frac{x}{x-\frac{16}{x}}$ пры:

а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=4$; г) $x=-4$.

1.26. Сярод дробаў $\frac{5}{45}$; $\frac{3}{17}$; $\frac{2}{21}$; $\frac{7}{91}$; $\frac{6}{48}$ выберыце ўсе нескарачальныя дробы.

1.27. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{12}{\sqrt{5}-1}$.

1.28. Раскладзіце на множнікі квадратны трохчлен:

а) x^2-4x+3; б) $2x^2+5x+3$.

1.29. У першы дзень у краме прадалі 60 % тавару, што паступіў, а ў другі — 30 % астачы. Знайдзіце, колькі працэнтаў тавару, што паступіў, засталося непрададзеным.

§ 2. Асноўная ўласцівасць рацыянальнага дробу. Скарачэнне рацыянальных дробаў

1.30. Раскладзіце на множнікі мнагачлен:

а) $2x^4y^2 - x^3y$; б) $x^3 - 3x^2 + x - 3$.

1.31. Скараціце дробы: $\frac{4}{10}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{25}{35}$, $\frac{180}{300}$.

1.32. Знайдзіце A і B, калі роўнасць $x^2 - 2x - 8 = (x - A)(x + B)$ з'яўляецца тоеснасцю.

Дзеянні з рацыянальнымі дробамі выконваюцца па тых жа правілах, што са звычайнымі дробамі. Так, згодна з асноўнай уласцівасцю звычайных дробаў, калі лічнік і назоўнік дробу памножыць або падзяліць на адзін і той жа лік, не роўны нулю, то атрымаецца дроб, роўны дадзенаму.

Напрыклад, $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{35}{84}$; $\frac{26}{39} = \frac{26 : 13}{39 : 13} = \frac{2}{3}$.

Аналагічную ўласцівасць можна сфармуляваць для рацыянальных дробаў.

Калі лічнік і назоўнік дробу памножыць або падзяліць на адзін і той жа выраз, не роўны нулю, то атрымаецца дроб, тоесна роўны дадзенаму.

Гэту ўласцівасць называюць **асноўнай уласцівасцю дробу.**

Для любога рацыянальнага дробу $\frac{A}{B}$ справядлівая тоеснасць $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, дзе $C \neq 0$.

Памножым лічнік і назоўнік дробу $\frac{3a^2}{4b}$ на адначлен $5b^2$ і атрымаем: $\frac{3a^2}{4b} = \frac{3a^2 \cdot 5b^2}{4b \cdot 5b^2} = \frac{15a^2b^2}{20b^3}$. У гэтым выпадку гавораць, што дроб $\frac{3a^2}{4b}$ прывялі да новага назоўніка $20b^3$.

Прыклад 1. Прывядзіце дроб:

а) $\frac{5x}{2y^2}$ да назоўніка $6y^3$;

б) $\frac{a+1}{a}$ да назоўніка $a^2 - a$;

в) $\frac{5}{x-4}$ да назоўніка $x^2 - 16$.

Рашэнне. а) $\frac{5x}{2y^2} = \frac{5x \cdot 3y}{2y^2 \cdot 3y} = \frac{15xy}{6y^3}$;

б) $\frac{a+1}{a} = \frac{(a+1)\cdot(a-1)}{a\cdot(a-1)} = \frac{a^2-1}{a^2-a}$;

в) $\frac{5}{x-4} = \frac{5\cdot(x+4)}{(x-4)\cdot(x+4)} = \frac{5(x+4)}{x^2-16}$.

Калі асноўную ўласцівасць дробу запісаць справа налева, то атрымаецца роўнасць $\frac{A \cdot C}{B \cdot C} = \frac{A}{B}$.

Гэта роўнасць дазваляе дроб $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ замяніць на тоесна роўны яму дроб $\frac{A}{B}$, падзяліўшы лічнік і назоўнік дробу $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ на множнік C.

Напрыклад, падзелім лічнік і назоўнік дробу $\frac{15a^2b^2}{20b^3}$ на адначлен $5b^2$ і атрымаем: $\frac{15a^2b^2}{20b^3} = \frac{15a^2b^2 : \left(5b^2\right)}{20b^3 : \left(5b^2\right)} = \frac{3a^2}{4b}$. У гэтым выпадку гавораць, што дроб $\frac{15a^2b^2}{20b^3}$ скарацілі на множнік $5b^2$.

Скараціць рацыянальны дроб — гэта значыць лічнік і назоўнік дробу падзяліць на іх агульны множнік.

Напрыклад, скароцім дроб $\frac{15x^2y}{12xy^2}$. Для гэтага трэба знайсці множнік, на які можна падзяліць лічнік і назоўнік дробу. Аднačлены $15x^2y$ і $12xy^2$ маюць агульны множнік $3xy$, на які можна скараціць дадзены дроб:

$$\frac{15x^2y}{12xy^2} = \frac{15x^2y : (3xy)}{12xy^2 : (3xy)} = \frac{5x}{4y}.$$

Каб скараціць рацыянальны дроб, трэба:

① Раскласці (калі магчыма) лічнік і назоўнік дробу на множнікі.	Скараціце дроб $\frac{a^3-2a^2}{3a^2b}$.
② Вызначыць агульны множнік лічніка і назоўніка дробу.	① $\frac{a^3-2a^2}{3a^2b} = \frac{a^2(a-2)}{3a^2b}$.
③ Падзяліць лічнік і назоўнік дадзенага дробу на агульны множнік.	② a^2 — агульны множнік лічніка і назоўніка дробу. ③ $\frac{a^3-2a^2}{3a^2b} = \frac{a^2(a-2)}{3a^2b} = \frac{a-2}{3b}$.

Прыклад 2. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{2xy-x}{4xy-x^2}$; б) $\dfrac{a^2-16}{a^2-8a+16}$.

Рашэнне. а) ① Раскладзём лічнік і назоўнік дробу на множнікі:

$$\frac{2xy-x}{4xy-x^2}=\frac{x(2y-1)}{x(4y-x)}.$$

② Лічнік і назоўнік дробу маюць агульны множнік x.

③ Падзелім лічнік і назоўнік дадзенага дробу на агульны множнік, г. зн. скароцім дроб:

$$\frac{2xy-x}{4xy-x^2}=\frac{x(2y-1)}{x(4y-x)}=\frac{2y-1}{4y-x}.$$

б) ① З дапамогай формул скарочанага множання раскладзём лічнік і назоўнік дробу на множнікі:

$$\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}=\frac{(a-4)(a+4)}{(a-4)^2}.$$

② Агульны множнік лічніка і назоўніка роўны $a-4$.

③ Скароцім дадзены дроб на агульны множнік $a-4$:

$$\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}=\frac{(a-4)(a+4)}{(a-4)^2}=\frac{a+4}{a-4}.$$

$$\frac{7m^4n^2}{28m^3n^4}=\frac{7m^3n^2\cdot m}{7m^3n^2\cdot 4n^2}=\frac{m}{4n^2}$$

$$\frac{6a-30b}{6a}=\frac{6\cdot(a-5b)}{6\cdot a}=\frac{a-5b}{a}$$

$$\frac{x^2-9}{x^2+3x}=\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x\cdot(x+3)}=\frac{x-3}{x}$$

З асноўнай уласцівасці дробу вынікае, што $\dfrac{A}{B}=\dfrac{-A}{-B}$ і $\dfrac{-A}{B}=\dfrac{A}{-B}$ (і ў тым і ў другім выпадку другі дроб атрыманы з першага множаннем лічніка і назоўніка на –1).

Прыклад 3. Прывядзіце дроб $\dfrac{3-x}{-7x-6}$ да назоўніка $7x+6$.

Рашэнне. Выкарыстаем роўнасць $\dfrac{A}{B}=\dfrac{-A}{-B}$ і атрымаем:

$$\frac{3-x}{-7x-6}=\frac{-(3-x)}{-(-7x-6)}=\frac{x-3}{7x+6}.$$

Прыклад 4. Скараціце дроб:

а) $\dfrac{a^2-2}{2a-a^3}$; б) $\dfrac{y^2-25}{5y-y^2}$.

Рашэнне. а) Раскладзём назоўнік дробу на множнікі і атрымаем:

$$\frac{a^2-2}{2a-a^3}=\frac{a^2-2}{a\left(2-a^2\right)}.$$

Выразы a^2-2 і $2-a^2$ адрозніваюцца толькі знакамі. Каб скараціць дроб, памяняем знакі аднаго з множнікаў a^2-2 або $2-a^2$:

$$\frac{a^2-2}{2a-a^3}=\frac{a^2-2}{a\left(2-a^2\right)}=\frac{a^2-2}{-a\left(a^2-2\right)}=\frac{1}{-a}.$$

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$$

Атрыманы адказ можна запісаць у выглядзе $\frac{1}{-a}=-\frac{1}{a}$. У гэтым выпадку гавораць, што знак «мінус» паставілі перад дробам.

б) Раскладзём лічнік і назоўнік дробу на множнікі і атрымаем:

$$\frac{y^2-25}{5y-y^2}=\frac{(y-5)(y+5)}{y(5-y)}.$$

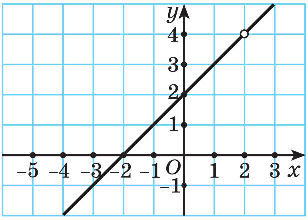
Памяняем знакі аднаго з множнікаў $y-5$ або $5-y$ і паставім знак «мінус» перад дробам:

$$\frac{y^2-25}{5y-y^2}=\frac{(y-5)(y+5)}{y(5-y)}=\frac{(y-5)(y+5)}{-y(y-5)}=-\frac{(y-5)(y+5)}{y(y-5)}=-\frac{y+5}{y}.$$

<table>
<tr><th colspan="2">Асноўная ўласцівасць рацыянальнага дробу</th></tr>
<tr><td>**1.** Прывядзіце дроб $\frac{3x-1}{2x+3}$ да назоўніка:
а) $4x+6$;
б) $4x^2-9$.</td><td>а) Памножым лічнік і назоўнік дробу на 2 і атрымаем:
$\frac{2\cdot(3x-1)}{2\cdot(2x+3)}=\frac{6x-2}{4x+6}$.
б) Памножым лічнік і назоўнік дробу на $(2x-3)$ і атрымаем:
$\frac{(3x-1)\cdot(2x-3)}{(2x+3)\cdot(2x-3)}=\frac{(3x-1)\cdot(2x-3)}{4x^2-9}$.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Скарачэнне рацыянальных дробаў</th></tr>
<tr><td>**2.** Скараціце дроб
$\frac{15x^4y^2}{25x^2y^3}$.</td><td>Дроб можна скараціць на $5x^2y^2$ — агульны множнік лічніка і назоўніка дробу:
$\frac{15x^4y^2}{25x^2y^3}=\frac{15x^4y^2:\left(5x^2y^2\right)}{25x^2y^3:\left(5x^2y^2\right)}=\frac{3x^2}{5y}$.</td></tr>
</table>

3. Скараціце дроб: а) $\frac{18mn-27n}{9mn}$; б) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2-2nm}$; в) $\frac{x^2-y^2}{3y-3x}$; г) $\frac{16-x^2}{(x-4)^2}$.	а) Раскладзём на множнікі лічнік дробу і скароцім дроб: $\frac{18mn-27n}{9mn}=\frac{9n(2m-3)}{9mn}=\frac{2m-3}{m}$. б) З дапамогай формул скарочанага множання раскладзём на множнікі лічнік і назоўнік дробу і атрымаем: $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2-2nm}=\frac{(m-n)(m+n)}{(m-n)^2}=$ $=\frac{m+n}{m-n}$. в) Раскладзём на множнікі лічнік і назоўнік дробу: $\frac{x^2-y^2}{3y-3x}=\frac{(x-y)(x+y)}{3(y-x)}$. Множнікі $x-y$ і $y-x$ адрозніваюцца толькі знакамі. Памяняем знакі аднаго з множнікаў $x-y$ або $y-x$ і паставім знак «мінус» перад дробам: $\frac{x^2-y^2}{3y-3x}=\frac{(x-y)(x+y)}{3(y-x)}=$ $=\frac{(x-y)(x+y)}{-3(x-y)}=-\frac{(x-y)(x+y)}{3(x-y)}=$ $=-\frac{x+y}{3}$. г) Пасля раскладання на множнікі лічніка дробу маем: $\frac{16-x^2}{(x-4)^2}=\frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)^2}$. Выкарыстаем тое, што $(a-b)^2=(b-a)^2$, г. зн. $(x-4)^2=(4-x)^2$, і атрымаем: $\frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)^2}=\frac{(4-x)(4+x)}{(4-x)^2}=\frac{4+x}{4-x}$.
4. Скараціце дроб: а) $\frac{12a^2-9ab+4ac-3bc}{20a^2+3bc-15ab-4ac}$; б) $\frac{ay-bx+by-ax}{x^2-y^2}$.	а) З дапамогай спосабу групоўкі раскладзём лічнік і назоўнік дробу на множнікі і скароцім дроб: $\frac{12a^2-9ab+4ac-3bc}{20a^2+3bc-15ab-4ac}=$

	$= \frac{\left(12a^2 - 9ab\right) + \left(4ac - 3bc\right)}{\left(20a^2 - 15ab\right) + \left(3bc - 4ac\right)} =$ $= \frac{3a(4a - 3b) + c(4a - 3b)}{5a(4a - 3b) - c(4a - 3b)} =$ $= \frac{(4a - 3b)(3a + c)}{(4a - 3b)(5a - c)} = \frac{3a + c}{5a - c}.$ б) $\frac{ay - bx + by - ax}{x^2 - y^2} =$ $= \frac{(ay + by) + (-ax - bx)}{x^2 - y^2} =$ $= \frac{(ay + by) - (ax + bx)}{(x - y)(x + y)} = \frac{y(a + b) - x(a + b)}{(x - y)(x + y)} =$ $= \frac{(y - x)(a + b)}{(x - y)(x + y)} = -\frac{(x - y)(a + b)}{(x - y)(x + y)} = -\frac{a + b}{x + y}.$
5. Скараціце дроб $\frac{(1 - 3x)^2}{3x^2 + 5x - 2}.$	Для раскладання на множнікі назоўніка дробу выкарыстаем формулу раскладання квадратнага трохчлена на множнікі: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$ Знойдзем карані квадратнага трохчлена $3x^2 + 5x - 2$. Для гэтага рэшым квадратнае ўраўненне $3x^2 + 5x - 2 = 0$. $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49,$ $x_1 = \frac{-5 - 7}{2 \cdot 3} = -2, \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3},$ тады $3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) =$ $= (x + 2)(3x - 1).$ Скароцім дроб: $\frac{(1 - 3x)^2}{3x^2 + 5x - 2} = \frac{(3x - 1)^2}{(x + 2)(3x - 1)} = \frac{3x - 1}{x + 2}.$
6. Спрасціце выраз $\frac{2x^2y - xy^2}{2x - y}$ і знайдзіце яго значэнне пры $x = 2{,}56,\ y = 10.$	Спросцім выраз, скараціўшы дроб: $\frac{2x^2y - xy^2}{2x - y} = \frac{xy(2x - y)}{2x - y} = xy.$ Падставім $x = 2{,}56$ і $y = 10$ у выраз xy і атрымаем $xy = 2{,}56 \cdot 10 = 25{,}6.$

7. Сярод дадзеных рацыянальных дробаў выберыце дроб, тоесна роўны дробу $\frac{a-b}{3b-a}$: а) $\frac{a-b}{a-3b}$; б) $\frac{b-a}{3b-a}$; в) $\frac{b-a}{a-3b}$.	Выканаем пераўтварэнні: $\frac{a-b}{3b-a}=\frac{-(a-b)}{-(3b-a)}=\frac{-a+b}{-3b+a}=\frac{b-a}{a-3b}$. Дробу $\frac{a-b}{3b-a}$ тоесна роўны дроб в).
8. Прывядзіце дроб: а) $\frac{b}{7-b}$ да назоўніка $b-7$; б) $\frac{8-a}{-6a-b}$ да назоўніка $6a+b$.	Памножым лічнік і назоўнік дробу на –1 і атрымаем: а) $\frac{b}{7-b}=\frac{-b}{-(7-b)}=\frac{-b}{-7+b}=\frac{-b}{b-7}=$ $=-\frac{b}{b-7}$; б) $\frac{8-a}{-6a-b}=\frac{-(8-a)}{-(-6a-b)}=\frac{-8+a}{6a+b}=\frac{a-8}{6a+b}$.
9*. Пабудуйце графік функцыі $y=\frac{x^2-4}{x-2}$.	Абсягам вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя ліку 2. Скароцім дроб $\frac{x^2-4}{x-2}$ і атрымаем: $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$. Неабходна пабудаваць графік функцыі $y=x+2$ пры $x\neq2$. Графікам дадзенай функцыі з'яўляецца прамая $y=x+2$ без пункта (2; 4). 

1. Вызначце агульны множнік лічніка і назоўніка рацыянальнага дробу:

а) $\frac{7a^2b^4}{14a}$; б) $\frac{6a+15b}{3c}$; в) $\frac{ax+bx}{cx+dx}$.

2. Сярод дадзеных роўнасцей выберыце роўнасці, правільныя пры ўсіх значэннях зменных, якія ўваходзяць у іх, з абсягу вызначэння дробу:

а) $\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$; б) $\frac{x^2}{3x}=\frac{x}{3}$; в) $\frac{3a}{a}=2a$; г) $\frac{3a}{a}=3$.

3. На які выраз трэба памножыць лічнік і назоўнік дробу $\frac{x-y}{x-1}$, каб атрымаць дроб з назоўнікам $x^2 - x$?

1.33. Выкарыстаўшы асноўную ўласцівасць дробу, прывядзіце дроб:

а) $\frac{x}{y}$ да назоўніка $5y$; y^2; $-y$; yz; $2xy$;

б) $\frac{a-b}{ab}$ да назоўніка $3ab$; a^2b; ab^3; $-ab$; a^2b^2;

в) $\frac{c}{c-d}$ да назоўніка $7c-7d$; $d(c-d)$; $d-c$; $(c-d)^2$; c^2-d^2;

г) $\frac{m-2}{m+2}$ да назоўніка $3m+6$; $-m-2$; m^2+2m; $(m+2)^2$; m^2-4.

1.34. Прывядзіце да назоўніка:

а) $6a^6$ дроб $\frac{5}{a}$; $\frac{b}{2a^2}$; $\frac{a-b}{6a^5}$;

б) $(x-4)^3$ дроб $\frac{3}{x-4}$; $\frac{x-1}{4-x}$; $\frac{5}{x^2-8x+16}$;

в) $3m^2-3n^2$ дроб $\frac{m}{m+n}$; $\frac{7}{3m+3n}$; $\frac{m-2n}{n-m}$.

1.35. Ці праўда, што аднаchлен $5a^2b^2$ з’яўляецца агульным множнікам лічніка і назоўніка дробу:

а) $\frac{10a^2b^2c}{15a^2b^2d}$; б) $\frac{25a^3b^2}{15a^2b^3}$; в) $\frac{5a^4b}{35a^2b^5}$; г) $\frac{20a^2b^4d^3}{5a^5b^2}$?

1.36. Вызначце выраз, на які можна падзяліць лічнік і назоўнік дробу, каб скараціць дроб:

а) $\frac{7a}{14b}$; б) $\frac{12a^2}{4a^3}$; в) $\frac{8ab}{20a^2b}$; г) $\frac{18a^4b^2c}{12a^2b^2c^3}$.

1.37. Вызначце агульны множнік лічніка і назоўніка дробу і скараціце дроб:

а) $\frac{15a}{3}$; б) $\frac{6}{18b}$; в) $\frac{8c}{9c}$; г) $\frac{15d}{35d}$;

д) $\frac{8a}{20b}$; е) $\frac{5xy}{4x}$; ж) $\frac{7m}{21mn}$; з) $\frac{5xy}{45yz}$.

1.38. Скараціце рацыянальны дроб, прымяніўшы алгарытм:

а) $\frac{ab^2}{ab}$; б) $\frac{xyz}{x^2y^2}$; в) $\frac{6m^2n^2}{18mn}$; г) $\frac{3ab}{12ab^3}$;

д) $\frac{a^4bc}{ab^2}$; е) $\frac{m^2n^3k^5}{m^5n^3k}$; ж) $\frac{36x^8y^5z}{24x^{10}y^2z^4}$; з) $\frac{3a^6b^9c^4}{a^5b^{10}c^3}$.

1.39. Скараціце рацыянальны дроб:

а) $\frac{a^4}{-a^5}$; б) $\frac{-x^8}{x^6}$; в) $\frac{cd^2}{-c^3}$;

г) $\frac{-mn}{m^3}$; д) $\frac{-4a^2b^3}{6ab}$; е) $\frac{-15x^2y^5z^6}{-20x^3y^4z^5}$.

1.40. Скараціце рацыянальны дроб, прымяніўшы алгарытм:

а) $\frac{4(x-y)}{8x}$; б) $\frac{15m}{3(m+n)}$; в) $\frac{8(a+b)}{3(a+b)}$;

г) $\frac{3a^2(x-1)}{5a(x-1)}$; д) $\frac{5(c-3)}{(c-3)^2}$; е) $\frac{7a(b+4)^3}{(b+4)^5}$.

1.41. Раскладзіце на множнікі лічнік і назоўнік дробу і скараціце дроб:

а) $\frac{3a-3b}{6a}$; б) $\frac{7x}{7x+14y}$; в) $\frac{xy+xz}{xy}$;

г) $\frac{2a^2b}{2a^3b-6a^2b}$; д) $\frac{3m-3n}{6(m+n)}$; е) $\frac{9a^2(a-2b)}{3a-6b}$;

ж) $\frac{3x+6y}{5x+10y}$; з) $\frac{5n-m}{5n^2-mn}$; і) $\frac{7a-14b}{(a-2b)^2}$;

к) $\frac{(2c+3d)^3}{2ac+3ad}$; л) $\frac{3x^2y-x^2z}{(3y-z)^4}$; м) $\frac{5a(c+6d)^2}{5ac+30ad}$.

1.42. Складзіце план рашэння і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{a^3+a^2}{a^2}$ пры $a=8{,}9$; б) $\frac{3x^2}{x^4-x^2}$ пры $x=2\sqrt{3}$;

в) $\frac{b^5-b^3}{b^2-1}$ пры $b=0{,}25$; г) $\frac{y^3-y^2}{y^2+y^3}$ пры $y=\frac{1}{12}$.

1.43. Раскладзіце на множнікі лічнік і назоўнік дробу і скараціце дроб:

а) $\frac{4a-12b}{5a-15b}$; б) $\frac{2x-10y}{x^2-5xy}$; в) $\frac{c^2-3c}{cd-3d}$;

г) $\frac{x^2+xy}{y^2+xy}$; д) $\frac{m^2-16}{2m+8}$; е) $\frac{a^2-5a}{a^2-25}$;

ж) $\frac{x^2+4x+4}{2x+4}$; з) $\frac{m^2-6mn}{m^2-12mn+36n^2}$; і) $\frac{25c^2-1}{25c^2+10c+1}$;

к) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-9}$; л) $\frac{x^2+8xy+16y^2}{x^2-16y^2}$; м) $\frac{12a^2-3}{4a^2-4a+1}$.

1.44. Замяніце выраз роўным яму так, каб перад дробам не было знака «мінус»:

а) $-\frac{m-n}{m+n}$; б) $-\frac{x+y}{y-z}$; в) $-\frac{-c-d}{cd}$;

г) $-\frac{a-b}{2ab}$; д) $-\frac{5bc}{-b-c}$; е) $-\frac{7z}{y-x}$.

1.45. Двума спосабамі замяніце выраз роўным яму так, каб перад дробам стаяў знак «мінус»:

а) $\frac{x-y}{y-z}$; б) $\frac{-m-n}{m-k}$; в) $\frac{c-d}{-b-c}$; г) $\frac{a+b}{a-c}$.

1.46. Сярод дадзеных дробаў выберыце дроб, тоесна роўны дробу $\frac{(2a-5b)^3}{a-7b}$:

а) $\frac{(5b-2a)^3}{a-7b}$; б) $-\frac{(5b-2a)^3}{7b-a}$;

в) $\frac{(5b-2a)^3}{7b-a}$; г) $-\frac{(2a-5b)^3}{a-7b}$.

1.47. Скараціце дроб:

а) $\frac{m-n}{n-m}$; б) $\frac{c-d}{3(d-c)}$; в) $\frac{5x-5y}{7y-7x}$;

г) $\frac{a^2-5ab}{20b-4a}$; д) $\frac{3m-9m^2}{12m^2-4m}$; е) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

ж) $\frac{36-x^2}{5x-30}$; з) $\frac{5a-a^2}{a^2-25}$; і) $\frac{m^2-6m+9}{6-2m}$;

к) $\frac{16-y^2}{y^2-8y+16}$; л) $\frac{x^2-2x+1}{2-2x^2}$; м) $\frac{25-a^2}{2a^2-20a+50}$.

1.48. Выкарыстайце скарачэнне дробу для рацыянальнага вылічэння значэння выразу:

а) $\frac{x^2-9}{3-x}$ пры $x=5{,}65$; б) $\frac{3a^2-15ab}{25b^2-a^2}$ пры $a=15$, $b=31$;

в) $\frac{m^2-9m}{81m-m^3}$ пры $m=21$.

1.49. Выкарыстайце для раскладання лічніка і назоўніка дробу на множнікі спосаб групоўкі, калі гэта неабходна, і скараціце дроб:

а) $\frac{xy+x-3y-3}{5y+5}$; б) $\frac{ab-4b-2a+8}{20-5a}$;

в) $\frac{mn-m+n-n^2}{m^2-n^2}$; г) $\frac{16-a^2}{a^2-ab-4a+4b}$;

д) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$; е) $\frac{ax-ay-by+bx}{ay-ax-by+bx}$;

ж) $\frac{3y-3+5xy-5x}{5x+3+5xy+3y}$; з) $\frac{6a^2+15ab-8ac-20bc}{12a^2-9ab-16ac+12bc}$.

1.50. Выкарыстайце формулу раскладання квадратнага трохчлена на множнікі і скараціце дроб:

а) $\frac{x^2-x}{x^2+2x-3}$; б) $\frac{x^2-5x+4}{16-x^2}$; в) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}$;

г) $\frac{7x^2-6x-1}{7x+1}$; д) $\frac{2a-1}{10a^2-a-2}$; е) $\frac{2x^2-5x-3}{1-4x^2}$;

ж) $\frac{6x^2+x-7}{13-10x^2-3}$; з) $\frac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}$.

1.51. Скараціце рацыянальны дроб:

а) $\frac{(5m+5n)^2}{m+n}$; б) $\frac{(-3a-3b)^2}{a+b}$; в) $\frac{2x-2y}{(7y-7x)^2}$;

г) $\frac{(-2c-2d)^2}{c^2-d^2}$; д) $\frac{9y^2-x^2}{(2x-6y)^2}$; е) $\frac{(5a+5b)^2}{(-4a-4b)^2}$.

1.52*. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y=\frac{x^2-9}{x+3}$; б) $y=\frac{5x^2-10x}{5x}$;

в) $y=\frac{x^2-8x+16}{4-x}$; г) $y=\frac{x^2+x-12}{x+4}$.

1.53*. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{(m-n)^2-(m+n)^2}{4mn}=-1$; б) $\frac{x^2+xy}{x+y}=\frac{x^3-x}{x^2-1}$.

1.54*. Скараціце дроб $\frac{3x^3-6x^2y+3xy^2}{(3x-3y)^3}$.

1.55*. Дакажыце, што значэнне дробу $\frac{(x-y)^2-(x-3y)^2}{2xy-4y^2}$ не залежыць ад значэнняў зменных.

1.56*. Скараціце рацыянальны дроб $\frac{x^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)x+\sqrt{77}}{x^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)x-\sqrt{21}}$.

1.57*. Спрасціце выраз $\frac{(4x+5)^2+2\left(16x^2-25\right)+(4x-5)^2}{(4x+5)^2-2\left(16x^2-25\right)+(4x-5)^2}$.

1.58*. Скараціце дроб:

а) $\frac{5a^2-4ab-b^2}{b^2+7ab+10a^2}$; б) $\frac{20a^2+8ab-b^2}{b^2+5ab+6a^2}$.

Якім спосабам раскладання мнагачленаў на множнікі вы карысталіся?

1.59*. Прывядзіце рацыянальны дроб да нескарачальнага дробу:

а) $\frac{3x^4-12x^3+12x^2}{4x-x^3}$; б) $\frac{x^4+2x^2-3}{x^3-2x^2-x+2}$.

1.60*. Скараціце дроб:

а) $\frac{b^4+4}{b^2-2b+2}$; б) $\frac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$.

1.61*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{4xy+81-4x^2-y^2}{y+9-2x}-2x$ пры $x=18{,}05$; $y=-232$.

* * *

1.62. Выкарыстаўшы асноўную ўласцівасць дробу, прывядзіце дроб:

а) $\frac{3}{a}$ да назоўніка $4a$; a^2; $-a$; ab;

б) $\frac{x+y}{x}$ да назоўніка $-5x$; x^2; $-x$; xy;

в) $\frac{b+3}{b-3}$ да назоўніка $2b-6$; b^2-3b; $3-b$; $(b-3)^2$; b^2-9.

1.63. Прывядзіце дробы $\frac{4}{a+b}$; $\frac{a-8b}{b-a}$ да назоўніка a^2-b^2.

1.64. Вызначце агульны множнік лічніка і назоўніка дробу:

а) $\frac{5m}{15n}$; б) $\frac{18m^4}{12m^6}$; в) $\frac{3mn}{18m^2n}$; г) $\frac{m^7n^5k}{6m^3n^4k^6}$.

1.65. Выкарыстаўшы алгарытм, скараціце дроб:

а) $\frac{24b}{3}$; б) $\frac{3a}{5a}$; в) $\frac{7cd}{3c}$; г) $\frac{-5xy}{10x^2}$;

д) $\frac{ab}{bc}$; е) $\frac{3mn}{m^3n^3}$; ж) $\frac{7x^4y^3}{21x^5y^2}$; з) $\frac{-a^2b^4c}{-abc}$;

і) $\frac{bc^5d}{b^2c^5}$; к) $\frac{7x^9y^4z^7}{x^8y^5z^6}$; л) $\frac{15a^3b^4c^5}{5a^2b^3c^4}$; м) $\frac{8xy^2z^3}{24x^2y^4z^3}$.

1.66. Скараціце рацыянальны дроб:

а) $\frac{5(a+b)}{15b}$; б) $\frac{3x}{9(x-2y)}$; в) $\frac{4c+4d}{2c}$;

г) $\frac{abc}{ab-ac}$; д) $\frac{3a-3b}{12a-12b}$; е) $\frac{3x+12}{(x+4)^2}$;

ж) $\frac{m-6n}{m^2-6mn}$; з) $\frac{4ab}{4a^2b-8ab}$; і) $\frac{9x^2y-6xy^2}{3xy}$.

1.67. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{b^4 - b^3}{b^4}$ пры $b = \frac{2}{7}$; б) $\frac{a^6 + a^4}{a^2 + 1}$ пры $a = 2\sqrt{5}$.

1.68. Раскладзіце на множнікі лічнік і назоўнік дробу і скараціце дроб:

а) $\frac{5m + 10n}{3m + 6n}$; б) $\frac{8a - 2b}{4a^2 - ab}$; в) $\frac{2x^2 - xy}{2xy - y^2}$;

г) $\frac{b^2 - 25}{3b - 15}$; д) $\frac{m^2 - 6m}{m^2 - 36}$; е) $\frac{a^2 + 8a + 16}{3a + 12}$;

ж) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$; з) $\frac{9b^2 + 6b + 1}{9b^2 - 1}$; і) $\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 - 12ab + 9b^2}$.

1.69. Замяніце выраз роўным яму так, каб перад дробам не было знака «мінус»:

а) $-\frac{x - 2}{x + 3}$; б) $-\frac{a + 6}{3 - a}$; в) $-\frac{-m - 5}{m - 3}$; г) $-\frac{b - 4}{4b}$.

1.70. Двума спосабамі замяніце выраз роўным яму так, каб перад дробам стаяў знак «мінус»:

а) $\frac{m - n}{n - k}$; б) $\frac{-a - b}{c - d}$; в) $\frac{x - y}{x + z}$.

1.71. Скараціце дроб:

а) $\frac{a - b}{6(b - a)}$; б) $\frac{4m - 4n}{5n - 5m}$; в) $\frac{x^2 - 3xy}{12y - 4x}$;

г) $\frac{a^3 - a^2}{a - a^2}$; д) $\frac{c^2 - 49}{14 - 2c}$; е) $\frac{2b^2 - 8b}{16 - b^2}$;

ж) $\frac{10 - 5x}{x^2 - 4x + 4}$; з) $\frac{m^2 - 12m + 36}{36 - m^2}$; і) $\frac{3 - 3x^2}{x^2 - 2x + 1}$.

1.72. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{a - 4}{16 - a^2}$ пры $a = -4{,}01$; б) $\frac{x^3 - 9x}{3x - x^2}$ пры $x = 2\frac{3}{7}$.

1.73. Выкарыстайце для раскладання лічніка і назоўніка дробу на множнікі спосаб групоўкі, калі гэта неабходна, і скараціце дроб:

а) $\frac{ab - a - 5b + 5}{6b - 6}$; б) $\frac{ax + 7x - ay - 7y}{7y - 7x}$; в) $\frac{3a + 4 + 3ab + 4b}{4b - 4 + 3ab - 3a}$;

г) $\frac{2 + c - 2c - c^2}{c^2 - 1}$; д) $\frac{9 - n^2}{3m - bn + mn - 3b}$; е) $\frac{x^2 - xy + 3y - 3x}{x^2 - 6x + 9}$.

1.74. Выкарыстайце формулу раскладання квадратнага трохчлена на множнікі і скараціце дроб:

а) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$; б) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x-15}$; в) $\frac{6x^2+11x-2}{6x-1}$;

г) $\frac{5x^2-3x-2}{4-25x^2}$; д) $\frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$; е) $\frac{a^4+2a^3-9a^2-18a}{a^2-a-6}$.

1.75. Скараціце рацыянальны дроб:

а) $\frac{(4x+4y)^2}{(x+y)^2}$; б) $\frac{(m+n)^2}{(-2m-2n)^2}$;

в) $\frac{(3x-3y)^2}{x^2-y^2}$; г) $\frac{4a^2-b^2}{(3b-6a)^2}$.

1.76*. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \frac{x^2-1}{x-1}$; б) $y = \frac{4x^2+12x}{4x}$;

в) $y = \frac{x^2-2x+1}{1-x}$; г) $y = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

1.77*. Дакажыце тоеснасць $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2+y^2} = 2$.

1.78*. Скараціце дроб $\frac{4a^3-8a^2b+4ab^2}{(2a-2b)^3}$.

1.79*. Скараціце дроб $\frac{x^4-4x^2+3}{x^3+2x^2-x-2}$. Якімі спосабамі раскладання на множнікі мнагачлена вы карысталіся?

* * *

1.80. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{7}{15}+0{,}25$; б) $\frac{3}{8}-\frac{5}{6}$; в) $1{,}2+3\frac{1}{3}$; г) $6\frac{3}{7}-2\frac{7}{12}$.

1.81. Запішыце ў стандартным выглядзе лік $0{,}00057 \cdot 10^{12}$ і вызначце яго парадак.

1.82. Функцыя зададзена формулай $y = 5x - 7$. Вызначце:

а) значэнне функцыі пры значэнні аргумента, роўным 2;

б) значэнне аргумента пры значэнні функцыі, роўным 13;

в) ці праходзіць графік гэтай функцыі праз пункт $A(-7; -25)$.

1.83. Рэкламны аддзел кампаніі плануе размясціць на адным з тэлеканалаў два відэаролікі працягласцю 30 с. Кампанія хоча самастойна выбраць час паказу ролікаў. Кошт такой паслугі складае 15 % ад кошту размяшчэння кожнага роліка, роўнага 1000 р. За размяшчэнне двух ролікаў канал прапануе зніжку ў памеры 10 % ад агульнага кошту заказу. Колькі трэба будзе заплаціць кампаніі?

1.84. Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе:

а) $\sqrt{18a^2}$ пры $a \leqslant 0$; б)* $\sqrt{-a^3b^4}$.

1.85. Рашыце ўраўненне з дапамогай метаду замены зменнай:

а) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; б)* $\left(x^2 + 2x\right)\left(x^2 + 2x - 2\right) = 3$.

§ 3. Складанне і адніманне рацыянальных дробаў

1.86. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{5}{12}$.

1.87. Прывядзіце дроб $\frac{2}{x+1}$ да назоўніка $x^2 + x$.

1.88. Прывядзіце дроб $\frac{2x}{x-6}$ да назоўніка $x^2 - 36$.

Успомнім, як складаюць і аднімаюць звычайныя дробы. Напрыклад:

$$\frac{5}{18} + \frac{4}{18} = \frac{5+4}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{9}{17} - \frac{3}{17} = \frac{9-3}{17} = \frac{6}{17}.$$

Складанне і адніманне рацыянальных дробаў выконваецца па такіх жа правілах, што складанне і адніманне звычайных дробаў.

Каб скласці дробы з аднолькавымі назоўнікамі, трэба скласці іх лічнікі, а назоўнік пакінуць тым жа. Затым, калі магчыма, трэба скараціць атрыманы дроб.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{a}{b} = \frac{a^2 + a}{b}$$

$$\frac{3m^2}{5n} + \frac{7m^2}{5n} = \frac{10m^2}{5n} = \frac{2m^2}{n}$$

$$\frac{3x-1}{2x^2} + \frac{x+1}{2x^2} = \\ = \frac{3x-1+x+1}{2x^2} = \frac{4x}{2x^2} = \frac{2}{x}$$

Прыклад 1. Знайдзіце суму рацыянальных дробаў:

а) $\frac{7m}{4ab} + \frac{11m}{4ab}$;

б) $\frac{12-x}{x+3} + \frac{2x+8}{x+3}$.

Рашэнне. а) $\frac{7m}{4ab} + \frac{11m}{4ab} = \frac{7m + 11m}{4ab} = \frac{18m}{4ab} = \frac{9m}{2ab}$;

б) $\frac{12 - x}{x + 3} + \frac{2x + 8}{x + 3} = \frac{12 - x + 2x + 8}{x + 3} = \frac{x + 20}{x + 3}$.

Каб выканаць адніманне дробаў з аднолькавымі назоўнікамі, трэба ад лічніка памяншаемага адняць лічнік аднімаемага, а назоўнік пакінуць тым жа. Затым, калі магчыма, трэба скараціць атрыманы дроб.

$$\boldsymbol{\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A - B}{C}}$$

$$\frac{3n}{m} - \frac{1}{m} = \frac{3n - 1}{m}$$

$$\frac{5b}{3a^2} - \frac{2b}{3a^2} = \frac{3b}{3a^2} = \frac{b}{a^2}$$

$$\frac{5}{x} - \frac{2x + 5}{x} = \frac{5 - (2x + 5)}{x} = \\ = \frac{5 - 2x - 5}{x} = -\frac{2x}{x} = -2$$

Прыклад 2. Знайдзіце рознасць рацыянальных дробаў:

а) $\frac{7am}{m - n} - \frac{7an}{m - n}$;

б) $\frac{a + 2b}{a + 3b} - \frac{2a - b}{a + 3b}$.

Рашэнне. а) $\frac{7am}{m - n} - \frac{7an}{m - n} = \frac{7am - 7an}{m - n} = \frac{7a(m - n)}{m - n} = 7a$;

б) $\frac{a + 2b}{a + 3b} - \frac{2a - b}{a + 3b} = \frac{a + 2b - (2a - b)}{a + 3b} = \frac{a + 2b - 2a + b}{a + 3b} = \frac{3b - a}{a + 3b}$.

Пры складанні і адніманні звычайных дробаў з рознымі назоўнікамі іх прыводзяць да агульнага назоўніка (напрыклад, $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$).

Для таго каб выканаць складанне або адніманне рацыянальных дробаў з рознымі назоўнікамі, іх таксама трэба прывесці да агульнага назоўніка.

Каб прывесці рацыянальныя дробы да агульнага назоўніка, трэба:

① Раскласці назоўнік кожнага дробу на множнікі (калі гэта неабходна) і вызначыць агульны назоўнік дробаў.	Прывядзіце да агульнага назоўніка рацыянальныя дробы $\frac{c}{a^2 - 2a}$ і $\frac{1}{3a - 6}$. ① $\frac{c}{a^2 - 2a} = \frac{c}{a(a - 2)}$ і $\frac{1}{3a - 6} = \frac{1}{3(a - 2)}$. Агульны назоўнік $3a(a - 2)$.
② Памножыць лічнік і назоўнік кожнага дробу на множнікі з агульнага назоўніка дробаў, якіх не хапае.	② $\frac{c}{a(a - 2)} = \frac{c \cdot 3}{a(a - 2) \cdot 3} = \frac{3c}{3a(a - 2)}$; $\frac{1}{3(a - 2)} = \frac{1 \cdot a}{3(a - 2) \cdot a} = \frac{a}{3a(a - 2)}$.

Прыклад 3. Прывядзіце да агульнага назоўніка дробы:

а) $\frac{2a}{10x^3y}$ і $\frac{b}{15x^2y^2}$; б) $\frac{x}{x^2-4}$ і $\frac{5}{3x+6}$.

Рашэнне. а) Агульным назоўнікам дадзеных дробаў з'яўляецца адначлен $30x^3y^2$, паколькі НАК $(10,\ 15) = 30$ і зменныя x і y узяты з найбольшым паказчыкам ступені.

Памножым лічнік і назоўнік першага дробу на $3y$, а лічнік і назоўнік другога дробу на $2x$ і прывядзём дробы да агульнага назоўніка:

$$\frac{2a}{10x^3y} = \frac{2a\cdot 3y}{10x^3y\cdot 3y} = \frac{6ay}{30x^3y^2} \quad \text{і} \quad \frac{b}{15x^2y^2} = \frac{b\cdot 2x}{15x^2y^2\cdot 2x} = \frac{2bx}{30x^3y^2}.$$

б) Раскладзём на множнікі назоўнік кожнага дробу і атрымаем:

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} \quad \text{і} \quad \frac{5}{3x+6} = \frac{5}{3(x+2)}.$$

Памножым лічнік і назоўнік першага дробу на 3, а лічнік і назоўнік другога дробу на $(x-2)$ і прывядзём дробы да агульнага назоўніка:

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{3x}{3(x-2)(x+2)}$$

$$\text{і} \quad \frac{5}{3x+6} = \frac{5}{3(x+2)} = \frac{5(x-2)}{3(x-2)(x+2)}.$$

Каб выканаць складанне (адніманне) рацыянальных дробаў з рознымі назоўнікамі, трэба:

① Прывесці дробы да агульнага назоўніка. ② Прымяніць правіла складання (аднімання) дробаў з аднолькавымі назоўнікамі.	Знайдзіце суму рацыянальных дробаў $\frac{m-2}{2m}+\frac{m+3}{3m}$. ① $\frac{m-2}{2m}+\frac{m+3}{3m}=\frac{3(m-2)}{6m}+\frac{2(m+3)}{6m}$. ② $\frac{3(m-2)}{6m}+\frac{2(m+3)}{6m}=$ $=\frac{3(m-2)+2(m+3)}{6m}=\frac{3m-6+2m+6}{6m}=$ $=\frac{5m}{6m}=\frac{5}{6}$.

Прыклад 4. Знайдзіце рознасць рацыянальных дробаў

$$\frac{a+6}{a^2-a}-\frac{a-3}{a^2-1}.$$

Рашэнне. $\frac{a+6}{a^2-a}-\frac{a-3}{a^2-1}=\frac{a+6}{a(a-1)}-\frac{a-3}{(a-1)(a+1)}=$

$$=\frac{(a+6)(a+1)}{a(a-1)(a+1)}-\frac{a(a-3)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{(a+6)(a+1)-a(a-3)}{a(a-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{a^2+a+6a+6-a^2+3a}{a(a-1)(a+1)}=\frac{10a+6}{a(a-1)(a+1)}.$$

Складанне (аднiманне) рацыянальных дробаў з аднолькавымі назоўнікамі	
1. Выканайце складанне рацыянальных дробаў: а) $\frac{mn}{n+2}+\frac{2m}{n+2}$; б) $\frac{m^2+n^2}{n^2-m^2}+\frac{2mn}{n^2-m^2}$.	а) $\frac{mn}{n+2}+\frac{2m}{n+2}=\frac{mn+2m}{n+2}=$ $=\frac{m(n+2)}{n+2}=m$; б) $\frac{m^2+n^2}{n^2-m^2}+\frac{2mn}{n^2-m^2}=\frac{m^2+n^2+2mn}{n^2-m^2}=$ $=\frac{(m+n)^2}{(n-m)(n+m)}=\frac{m+n}{n-m}$.
2. Знайдзіце рознасць рацыянальных дробаў: а) $\frac{m}{6ab}-\frac{5m}{6ab}$; б) $\frac{a}{2(m+n)}-\frac{3a}{2(m+n)}$; в) $\frac{2a-3}{a^2-b^2}-\frac{2b-3}{a^2-b^2}$.	а) $\frac{m}{6ab}-\frac{5m}{6ab}=\frac{m-5m}{6ab}=\frac{-4m}{6ab}=-\frac{2m}{3ab}$; б) $\frac{a}{2(m+n)}-\frac{3a}{2(m+n)}=\frac{a-3a}{2(m+n)}=$ $=\frac{-2a}{2(m+n)}=-\frac{a}{m+n}$; в) $\frac{2a-3}{a^2-b^2}-\frac{2b-3}{a^2-b^2}=\frac{2a-3-(2b-3)}{a^2-b^2}=$ $=\frac{2a-3-2b+3}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=$ $=\frac{2(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{2}{a+b}$.
3. Выканайце дзеянні: а) $\frac{3x-9}{x-2}+\frac{x-5}{2-x}$; б) $\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2-a}{1-2a}$.	а) Назоўнікі дробаў адрозніваюцца толькі знакам. Памяняем знак у назоўніку другога дробу і перад гэтым дробам і атрымаем: $\frac{3x-9}{x-2}+\frac{x-5}{2-x}=\frac{3x-9}{x-2}+\frac{x-5}{-(x-2)}=$ $=\frac{3x-9}{x-2}-\frac{x-5}{x-2}=\frac{3x-9-(x-5)}{x-2}=$ $=\frac{3x-9-x+5}{x-2}=\frac{2x-4}{x-2}=\frac{2(x-2)}{x-2}=2$. б) $\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2-a}{1-2a}=\frac{2a+1}{2a-1}+\frac{2-a}{2a-1}=$ $=\frac{2a+1+2-a}{2a-1}=\frac{a+3}{2a-1}$.

4. Выканайце дзеянні: а) $\frac{c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}+\frac{2c}{c-d}$; б) $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{x-2}{x-1}$.	а) $\frac{c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}+\frac{2c}{c-d}=$ $=\frac{c}{c-d}-\frac{3d}{c-d}+\frac{2c}{c-d}=$ $=\frac{c-3d+2c}{c-d}=\frac{3c-3d}{c-d}=\frac{3(c-d)}{c-d}=3.$ б) $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{x-2}{x-1}=\frac{x^2-2x-(x-2)}{x-1}=$ $=\frac{x^2-2x-x+2}{x-1}=\frac{x^2-3x+2}{x-1}.$ Раскладзём на множнікі квадратны трохчлен у лічніку дробу і скароцім дроб: $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2.$

Складанне (адніманне) рацыянальных дробаў з living рознымі назоўнікамі

5. Выканайце складанне рацыянальных дробаў: а) $\frac{5}{c}+\frac{4}{d}$; б) $\frac{a+2}{3}+\frac{a-3}{4}$; в) $\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$; г) $\frac{2a}{a^2-10a+25}+\frac{1}{15-3a}$.	а) $\frac{5}{c}+\frac{4}{d}=\frac{5\cdot d}{c\cdot d}+\frac{4\cdot c}{d\cdot c}=\frac{5d+4c}{cd}$; б) $\frac{a+2}{3}+\frac{a-3}{4}=\frac{4\cdot(a+2)}{4\cdot 3}+\frac{3\cdot(a-3)}{3\cdot 4}=$ $=\frac{4(a+2)+3(a-3)}{12}=\frac{4a+8+3a-9}{12}=$ $=\frac{7a-1}{12}$; в) $\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}=\frac{b}{(a-b)(a+b)}+\frac{1}{a+b}=$ $=\frac{b}{(a-b)(a+b)}+\frac{1\cdot(a-b)}{(a+b)(a-b)}=$ $=\frac{b+(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a}{(a+b)(a-b)}$; г) $\frac{2a}{a^2-10a+25}+\frac{1}{15-3a}=$ $=\frac{2a}{(a-5)^2}+\frac{1}{3(5-a)}=\frac{2a}{(5-a)^2}+\frac{1}{3(5-a)}=$ $=\frac{3\cdot 2a}{3(5-a)^2}+\frac{1\cdot(5-a)}{3(5-a)^2}=$ $=\frac{6a+5-a}{3(5-a)^2}=\frac{5a+5}{3(5-a)^2}=\frac{5(a+1)}{3(5-a)^2}.$
6. Выканайце адніманне: а) $\frac{b+4}{b(b-2)}-\frac{3}{b-2}$;	а) $\frac{b+4}{b(b-2)}-\frac{3}{b-2}=\frac{b+4}{b(b-2)}-\frac{3b}{b(b-2)}=$ $=\frac{b+4-3b}{b(b-2)}=\frac{-2b+4}{b(b-2)}=\frac{-2(b-2)}{b(b-2)}=-\frac{2}{b}$;

б) $\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{3x^2-3x}$; в) $\frac{12-a}{6a-36}-\frac{6}{a^2-6a}$; г) $\frac{3n^2}{n-4}-3n$; д) $\frac{x^2}{2x^2-3x+1}-\frac{1}{x-1}$.	б) $\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{3x^2-3x}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{3x(x-1)}=$ $=\frac{1\cdot 3x}{3x(x-1)}-\frac{x+2}{3x(x-1)}=\frac{3x-x-2}{3x(x-1)}=$ $=\frac{2x-2}{3x(x-1)}=\frac{2(x-1)}{3x(x-1)}=\frac{2}{3x}$; в) $\frac{12-a}{6a-36}-\frac{6}{a^2-6a}=\frac{12-a}{6(a-6)}-\frac{6}{a(a-6)}=$ $=\frac{a\cdot(12-a)}{6a(a-6)}-\frac{6\cdot 6}{6a(a-6)}=\frac{a(12-a)-36}{6a(a-6)}=$ $=\frac{12a-a^2-36}{6a(a-6)}=\frac{-\left(a^2-12a+36\right)}{6a(a-6)}=$ $=-\frac{(a-6)^2}{6a(a-6)}=-\frac{a-6}{6a}=\frac{6-a}{6a}$; г) $\frac{3n^2}{n-4}-3n=\frac{3n^2}{n-4}-\frac{3n}{1}=$ $=\frac{3n^2}{n-4}-\frac{3n\cdot(n-4)}{n-4}=\frac{3n^2-3n(n-4)}{n-4}=$ $=\frac{3n^2-3n^2+12n}{n-4}=\frac{12n}{n-4}$; д) Раскладзём на множнікі квадратны трохчлен уназоўніку першага дробу: $\frac{x^2}{2x^2-3x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x^2}{(x-1)(2x-1)}-\frac{1}{x-1}=$ $=\frac{x^2-(2x-1)}{(x-1)(2x-1)}=\frac{x^2-2x+1}{(x-1)(2x-1)}=$ $=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-1)}=\frac{x-1}{2x-1}$.
7. Запішыце ў выглядзе дробу выраз $\frac{5a}{a-2b}-\frac{a}{a+2b}+\frac{4ab}{4b^2-a^2}$.	$\frac{5a}{a-2b}-\frac{a}{a+2b}+\frac{4ab}{4b^2-a^2}=$ $=\frac{5a}{a-2b}-\frac{a}{a+2b}-\frac{4ab}{a^2-4b^2}=$ $=\frac{5a}{a-2b}-\frac{a}{a+2b}-\frac{4ab}{(a-2b)(a+2b)}=$ $=\frac{5a(a+2b)-a(a-2b)-4ab}{(a-2b)(a+2b)}=$ $=\frac{5a^2+10ab-a^2+2ab-4ab}{(a-2b)(a+2b)}=$ $=\frac{4a^2+8ab}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{4a(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{4a}{a-2b}$.

1. Агульны назоўнік сумы рацыянальных дробаў $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a}$ роўны:

а) $a+b$; б) a; в) $2a+b$; г) $a(a+b)$. Выберыце правільны адказ.

2. Выберыце правільную роўнасць:

а) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a+b$; б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$;

в) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$; г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$.

1.89. Выканайце складанне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$; б) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{7}$; в) $\frac{3m}{n} + \frac{1}{n}$;

г) $\frac{4a}{3b} + \frac{5a}{3b}$; д) $\frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a^2}$; е) $\frac{y^2}{8xz} + \frac{3y^2}{8xz}$.

1.90. Выканайце адніманне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{9a^2}{8} - \frac{5a^2}{8}$; б) $\frac{2m}{5ab} - \frac{7}{5ab}$; в) $\frac{6b^3}{25c} - \frac{b^3}{25c}$;

г) $\frac{b}{ad} - \frac{3c}{ad}$; д) $\frac{x^2}{9y} - \frac{z^2}{9y}$; е) $\frac{5k^4}{2mn} - \frac{7k^4}{2mn}$.

1.91. Складзіце дробы:

а) $\frac{2x-1}{4}$ і $\frac{3x}{4}$; б) $\frac{4b+3}{5}$ і $\frac{b-1}{5}$;

в) $\frac{a-b}{2c}$ і $\frac{a+b}{2c}$; г) $\frac{m+5}{m}$ і $\frac{2m-5}{m}$.

1.92. Знайдзіце рознасць дробаў:

а) $\frac{3a-7}{2}$ і $\frac{a}{2}$; б) $\frac{7m+4}{3}$ і $\frac{3m-2}{3}$;

в) $\frac{x-y}{4z}$ і $\frac{x+y}{4z}$; г) $\frac{6b-c}{5ab}$ і $\frac{5b-c}{5ab}$.

1.93. Запішыце кожны з рацыянальных дробаў $\frac{5x-2y}{7}$; $\frac{8b+c}{abc}$; $\frac{3a}{b}$ у выглядзе: а) сумы рацыянальных дробаў; б) рознасці рацыянальных дробаў.

1.94. Выканайце складанне або адніманне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{3x}{x+y} + \frac{3y}{x+y}$; б) $\frac{m}{m-2} - \frac{2}{m-2}$;

в) $\frac{6b+5}{4b-4} + \frac{2b-5}{4b-4}$; г) $\frac{3n-2k}{n+k} - \frac{2n-3k}{n+k}$;

д) $\frac{8x-6}{3x-2} + \frac{2-2x}{3x-2}$; е) $\frac{a+b}{b+3} - \frac{a-3}{b+3}$.

1.95. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{y}{y^2-16}+\frac{4}{y^2-16}$; б) $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}$;

в) $\frac{4x}{x^2-y^2}+\frac{4y}{x^2-y^2}$; г) $\frac{10}{c^2-4}-\frac{5c}{c^2-4}$;

д) $\frac{3x^2}{(x-y)^2}-\frac{3y^2}{(x-y)^2}$; е) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}+\frac{2mn}{m^2-n^2}$;

ж) $\frac{c^2+3c}{c^2-4}-\frac{7c-4}{c^2-4}$; з) $\frac{3b^2}{b^2-6b+9}-\frac{2b^2+9}{b^2-6b+9}$;

і) $\frac{a^2-a}{a-5}-\frac{a+15}{a-5}$; к) $\frac{x^2}{x^2-6x+8}-\frac{4}{x^2-6x+8}$.

1.96. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{m^2-7}{m+5}-\frac{18}{m+5}$ пры $m=12{,}67$;

б) $\frac{a^2}{a-7}-\frac{14a-49}{a-7}$ пры $a=1\frac{3}{14}$;

в) $\frac{x^2-x}{x^2-4}+\frac{5x+4}{x^2-4}$ пры $x=2{,}01$;

г) $\frac{c^2-4c}{c^2-7c+12}-\frac{c-6}{c^2-7c+12}$ пры $c=3{,}5$.

1.97. Дакажыце тоеснасць $\frac{(m+3n)^2}{2mn}-\frac{(m-3n)^2}{2mn}=6$.

1.98. Змяніце знак у назоўніку аднаго з дробаў і перад гэтым дробам, а затым спрасціце выраз:

а) $\frac{3a}{a-b}+\frac{3b}{b-a}$; б) $\frac{c-5d}{c-d}-\frac{5d}{d-c}$; в) $\frac{x+2y}{y-x}+\frac{x+3y}{x-y}$;

г) $\frac{m-3}{m-2}-\frac{m+3}{2-m}$; д) $\frac{2a-7}{a-b}+\frac{a+7}{b-a}$; е) $\frac{b^2}{b-4}+\frac{16}{4-b}$;

ж) $\frac{3y}{9y^2-1}-\frac{1}{1-9y^2}$; з) $\frac{a^2+4b^2}{a-2b}+\frac{4ab}{2b-a}$.

1.99. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{x^2-85}{x-9}-\frac{4}{9-x}$ пры $x=3\frac{1}{9}$;

б) $\frac{n^2-n}{n-9}+\frac{9+7n}{9-n}$ пры $n=\sqrt{3}-1$.

1.100. Спрасціце выраз:

а) $\frac{7m-1}{16m-8}-\frac{7-4m}{8-16m}-\frac{3m+2}{8-16m}$;

б) $\frac{2x^2+11x}{x^2-25}+\frac{7x-2}{25-x^2}-\frac{x^2+14x-23}{x^2-25}$.

1.101. Запішыце ў выглядзе дробу выраз:

а) $\dfrac{10-9x}{(x-1)^2}-\dfrac{9-8x}{(1-x)^2}$; б) $\dfrac{a^2+4}{(a-2)^3}+\dfrac{4a}{(2-a)^3}$;

в) $\dfrac{b^2-5b}{(b-2)(b-3)}-\dfrac{3b}{(b-2)(3-b)}$; г) $\dfrac{c^2+c}{c^2-4c-12}+\dfrac{c+36}{4c+12-c^2}$.

1.102. Дакажыце, што значэнне выразу

$$\frac{(2-x)^2}{x^2-3}-\frac{3x-2}{3-x^2}+\frac{x-5}{x^2-3}$$

не залежыць ад значэння зменнай.

1.103. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{a^2-4ab}{a^2-4b^2}-\dfrac{4b^2}{4b^2-a^2}$ пры $a=6,\ b=-0{,}5$;

б) $\dfrac{n^2+n}{n^2-81}+\dfrac{9-7n}{81-n^2}$ пры $n=9{,}02$.

1.104. Выканайце складанне або адніманне дробаў з рознымі назоўнікамі, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $\dfrac{c}{5}+\dfrac{2d}{3}$; б) $\dfrac{6a}{7}-\dfrac{a}{4}$; в) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{9}$;

г) $\dfrac{5}{b}-\dfrac{6}{c}$; д) $\dfrac{x}{8y}+\dfrac{y}{6x}$; е) $\dfrac{m}{n}-\dfrac{3k}{5n}$;

ж) $\dfrac{14}{3x}+\dfrac{z}{12xy}$; з) $\dfrac{8a}{bcd}-\dfrac{3d}{bck}$; і) $\dfrac{c}{d^2}+\dfrac{2}{cd^3}$.

1.105. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{x+3}{8}-\dfrac{x-1}{10}$; б) $\dfrac{3m-5n}{9}+\dfrac{m+2n}{12}$;

в) $\dfrac{6a+1}{3a}-\dfrac{2a+8}{a}$; г) $\dfrac{x-2y}{14x}+\dfrac{3x+y}{7x}$;

д) $\dfrac{5c-2}{c}-\dfrac{5d-1}{d}$; е) $\dfrac{2a-1}{9a}+\dfrac{3-2b}{9b}$;

ж) $\dfrac{m+n}{mn}-\dfrac{m+k}{mk}$; з) $\dfrac{2b-1}{b^2}+\dfrac{1}{b}$;

і) $\dfrac{a-1}{a^4}-\dfrac{1}{a^3}$; к) $\dfrac{y+3}{y}-\dfrac{3y-1}{y^2}$.

1.106. Знайдзіце рознасць $A-B$, калі $A=-\dfrac{x+y}{36x}$, $B=-\dfrac{y+x}{6x}$.

1.107. Знайдзіце суму і рознасць дробаў:

а) $\dfrac{1}{x}$ і $\dfrac{x}{x+3}$; б) $\dfrac{a^2-b}{a-b}$ і $\dfrac{b}{a}$;

в) $\dfrac{2}{m}$ і $\dfrac{3m-2}{m+1}$; г) $\dfrac{c-d}{d}$ і $\dfrac{c-d}{c+d}$.

1.108. Запішыце ў выглядзе дробу выраз:

а) $\frac{m}{n}+n$; б) $d-\frac{c}{d}$; в) $\frac{a}{b}+1$;

г) $x-\frac{2}{x}$; д) $\frac{x^2-6y}{y}+6$; е) $3a-\frac{3a^2+b}{a}$;

ж) $\frac{3m^2}{m+1}-3m$; з) $5-\frac{5b}{b+c}$; і) $\frac{12x^2}{3x-2}-4x+1$.

1.109. Выканайце складанне або адніманне дробаў:

а) $\frac{x}{x-5}-\frac{5}{x+5}$; б) $\frac{a}{4a-1}-\frac{a}{4a+1}$; в) $\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m+n}$;

г) $\frac{1}{c+3d}+\frac{1}{3d-c}$; д) $\frac{n}{2n+1}-\frac{n}{3n-2}$; е) $\frac{a}{2a+3}+\frac{a}{a-1}$.

1.110. Выканайце складанне або адніманне дробаў:

а) $\frac{18}{c(c-6)}+\frac{3}{c}$; б) $\frac{5}{y-3}-\frac{4y+3}{y(y-3)}$;

в) $\frac{a}{2(b+7)}-\frac{a}{5(b+7)}$; г) $\frac{6x+1}{9(x+1)}+\frac{2x-1}{6(x+1)}$;

д) $\frac{3}{m(n-m)}-\frac{3}{n(n-m)}$; е) $\frac{2}{(a-1)(a-2)}+\frac{3}{(a-1)(a-3)}$.

1.111. Прывядзіце рацыянальны выраз да нескарачальнага рацыянальнага дробу:

а) $\frac{15}{x^2+5x}-\frac{3}{x}$; б) $\frac{b}{b+2}+\frac{1-3b}{3b+6}$;

в) $\frac{4}{2y-y^2}+\frac{y}{y-2}$; г) $\frac{m-1}{6m-2}+\frac{m}{3m-1}$;

д) $\frac{3c+1}{3c+15}-\frac{2c-1}{2c+10}$; е) $\frac{2y-1}{10y-10z}-\frac{3y-1}{15z-15y}$;

ж) $\frac{2n+2}{n^2+2n}-\frac{n+4}{2n+4}$; з) $\frac{5a-4b}{a^2-2ab}-\frac{a-5b}{2b^2-ab}$.

1.112. Выканайце дзеянні: $\frac{a-6}{a^2+3a}-\frac{a-3}{a}+\frac{a}{a+3}$.

1.113. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{b+2}{b}-\frac{b}{b-2}-\frac{b+2}{2b-b^2}$ пры $b=0{,}2$.

1.114. Выкарыстайце формулу рознасці квадратаў для раскладання на множнікі назоўнікаў дробаў і выканайце дзеянні:

а) $\frac{4d}{d^2-1}-\frac{4}{d+1}$; б) $\frac{x^2+9}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}$;

в) $\frac{2a+1}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{2}{3c+2}-\frac{8}{4-9c^2}$;

д) $\frac{4+y}{4-y}+\frac{y^2+16}{y^2-16}$; е) $\frac{b^2+4c^2}{b^2-4c^2}-\frac{b-2c}{b+2c}$.

1.115. Спрасціце выраз:

а) $\frac{3}{c+2}+\frac{2c-5}{4-c^2}+\frac{5}{c-2}$; б) $\frac{a+6}{4a+8}-\frac{a+2}{4a-8}+\frac{5}{a^2-4}$.

1.116. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{3x+3}$ пры $x=0{,}3$;

б) $\frac{1}{a}-\frac{a+2b}{2ab-a^2}-\frac{4a}{a^2-4b^2}$ пры $a=\sqrt{7}$, $b=5-\sqrt{7}$.

1.117. Выкарыстайце формулы скарочанага множання для раскладання на множнікі назоўнікаў дробаў і выканайце дзеянні:

а) $\frac{1}{x+y}-\frac{y}{x^2+2xy+y^2}$; б) $\frac{m^2}{m^2-2m+1}+\frac{m}{1-m}$;

в) $\frac{3x+1}{3x-15}-\frac{2x-10}{x^2-10x+25}$; г) $\frac{a}{64-a^2}+\frac{a-1}{a^2-16a+64}$.

1.118. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{3}{5a-20}-\frac{a-5}{a^2-8a+16}$ пры $a=4{,}1$.

1.119. Замяніце M такім двухчленам, пры якім правільная роўнасць $\frac{10}{a^2-2ab+b^2}-\frac{5}{b^2-a^2}=\frac{M}{(a-b)^2(a+b)}$.

1.120. З дапамогай якога спосабу можна раскласці на множнікі назоўнікі дадзеных дробаў? Прымяніце гэты спосаб і выканайце дзеянні:

а) $\frac{a+4}{ab-7b+5a-35}-\frac{1}{b+5}$; б) $\frac{2x+3y-1}{6xy+4x-9y-6}+\frac{1}{3-2x}$;

в) $\frac{1}{a+b}-\frac{x-y}{ax-3ay+bx-3by}$.

1.121. Выкарыстайце формулу раскладання квадратнага трохчлена на множнікі і выканайце дзеянні:

а) $\frac{1}{a^2-4a+3}-\frac{2}{a^2-5a+4}$; б) $\frac{3-x}{x^2-5x+6}-\frac{x-4}{x^2-6x+8}$;

в) $\frac{a+2}{a^2-a-6}-\frac{a}{a^2-6a+9}$; г) $1-\frac{b-4}{b^2+2b-24}-\frac{2}{b+6}$.

1.122*. Спрасціце выраз найбольш рацыянальным спосабам:

а) $\frac{x^2+10x+24}{xy+4y-2x-8}-\frac{x+5}{y-2}$; б) $\frac{n-4}{2m-1}-\frac{n^2-3n-18}{2mn-n+6m-3}$.

1.123*. Дакажыце, што пры ўсіх дапушчальных значэннях зменнай выраз $\frac{8}{c^4-4}+\frac{1}{c^2+2}-\frac{2}{c^2-2}$ прымае толькі адмоўныя значэнні.

1.124*. Дакажыце, што значэнне выразу

$$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}-\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}$$

не залежыць ад значэнняў зменных.

1.125*. Спрасціце выраз

$$\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2+12xz+36z^2}+\frac{36z^2+12yz}{y^2-x^2-12xz-36z^2}.$$

1.126*. Спрасціце выраз:

а) $\frac{1}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+8)}$;

б) $\frac{1}{b^2+3b}+\frac{1}{b^2+9b+18}+\frac{1}{b^2+15b+54}+\frac{1}{b^2+21b+108}$.

1.127*. Дакажыце тоеснасць

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}=1.$$

1.128*. Знайдзіце значэнне выразу

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4} \text{ пры } a=\sqrt{3}.$$

1.129. Выканайце складанне або адніманне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{m}{7}+\frac{n}{7}$; б) $\frac{5a}{b}-\frac{3a}{b}$; в) $\frac{5x}{y^2}+\frac{3}{y^2}$;

г) $\frac{12c^2}{5ab}-\frac{2c^2}{5ab}$; д) $\frac{mn}{3k}+\frac{cd}{3k}$; е) $\frac{2x^2}{9a^4}-\frac{20x^2}{9a^4}$.

1.130. Знайдзіце суму і рознасць дробаў:

а) $\frac{5x+2}{7}$ і $\frac{3x}{7}$; б) $\frac{3a-1}{4}$ і $\frac{a+2}{4}$;

в) $\frac{m+n}{6a}$ і $\frac{m-n}{6a}$; г) $\frac{7y-2}{3xy}$ і $\frac{5y+2}{3xy}$.

1.131. Выканайце складанне або адніманне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{5a}{a+b}+\frac{5b}{a+b}$; б) $\frac{3c}{3c-1}-\frac{1}{3c-1}$;

в) $\frac{4x+3}{5x+5}+\frac{6x-3}{5x+5}$; г) $\frac{m-n}{n-2}-\frac{m-2}{n-2}$.

1.132. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{a}{a^2-9}+\frac{3}{a^2-9}$;
б) $\frac{x^2}{x-4}-\frac{16}{x-4}$;
в) $\frac{5m}{m^2-n^2}+\frac{5n}{m^2-n^2}$;
г) $\frac{6}{b^2-9}-\frac{2b}{b^2-9}$;
д) $\frac{a^2}{a^2-9b^2}+\frac{6ab+9b^2}{a^2-9b^2}$;
е) $\frac{y^2+7y}{y^2-1}-\frac{5y-1}{y^2-1}$;
ж) $\frac{a^2+3a}{a-1}+\frac{2a-6}{a-1}$;
з) $\frac{x^2}{x^2-4x+3}-\frac{1}{x^2-4x+3}$.

1.133. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{2n^2-7}{n^2-6n+9}-\frac{n^2+2}{n^2-6n+9}$ пры $n=3{,}1$.

1.134. Змяніце знак у назоўніку аднаго з дробаў і перад гэтым дробам, а затым спрасціце выраз:

а) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{2-b}$;
б) $\frac{7m}{m-n}+\frac{7n}{n-m}$;
в) $\frac{a-4b}{a-3b}-\frac{5a-14b}{3b-a}$;
г) $\frac{49x^2}{7x-y}+\frac{y^2}{y-7x}$;
д) $\frac{m^2}{5m-10}+\frac{4}{10-5m}$;
е) $\frac{9c^2}{3c-1}+\frac{6c-1}{1-3c}$.

1.135. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{5a+2}{a^2-16}+\frac{6a-2}{16-a^2}$ пры $a=-4{,}5$.

1.136. Спрасціце выраз $\frac{9a+2}{a^2-4}+\frac{30-a}{a^2-4}-\frac{7a-2}{4-a^2}$.

1.137. Запішыце ў выглядзе дробу выраз:

а) $\frac{16}{(4-a)^2}-\frac{a^2}{(a-4)^2}$;
б) $\frac{1-6x}{(3x-1)^3}-\frac{9x^2}{(1-3x)^3}$.

1.138. Дакажыце, што значэнне выразу

$\frac{(a-1)^2}{a^2-2}+\frac{1-2a}{2-a^2}-\frac{2}{a^2-2}$ не залежыць ад значэння зменнай.

1.139. Выканайце складанне або адніманне дробаў з рознымі назоўнікамі, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $\frac{8a}{2}-\frac{b}{3}$;
б) $\frac{x}{7}+\frac{3x}{5}$;
в) $\frac{m}{10}-\frac{n}{15}$;
г) $\frac{9}{x}+\frac{5}{y}$;
д) $\frac{2a}{15b}-\frac{3b}{5a}$;
е) $\frac{c}{d}+\frac{5a}{7d}$;
ж) $\frac{2a}{5m}-\frac{1}{20mn}$;
з) $\frac{x}{y^2z}+\frac{3}{yz^2}$;
і) $\frac{1}{3x}-\frac{y}{5x^2}$.

1.140. Спрасціце выраз:

а) $\frac{a+4}{9}+\frac{a-1}{6}$;
б) $\frac{2x-5}{3x}-\frac{x+1}{5x}$;
в) $\frac{n+3}{3n}-\frac{m+3}{3m}$;

г) $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-d}{cd}$; д) $\frac{3}{y}-\frac{2y-3}{y^2}$; е) $\frac{a+3}{a^3}-\frac{1}{a^2}$;

ж) $\frac{6m+1}{m^9}-\frac{6+m}{m^8}$; з) $\frac{5x-3}{xy}+\frac{3x+1}{x^2y}$.

1.141. Знайдзіце суму і рознасць дробаў:

а) $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n-m}$; б) $\frac{5a+4}{a+2}$ і $\frac{4}{a}$.

1.142. Запішыце выраз у выглядзе дробу:

а) $x+\frac{y}{x}$; б) $\frac{a}{b}-2$; в) $\frac{6}{m}+m$;

г) $3-\frac{c+3d}{d}$; д) $\frac{5x^2+2y}{x}-5x$; е) $\frac{7n^2}{1-n}+7n$;

ж) $8-\frac{8y}{x+y}$; з) $\frac{15b^2}{5b+1}-3b-1$.

1.143. Выканайце складанне або адніманне дробаў:

а) $\frac{m}{m-7}-\frac{7}{m+7}$; б) $\frac{2}{4-x}+\frac{3}{x+4}$; в) $\frac{3}{4a-3}-\frac{4}{3a+1}$.

1.144. Выканайце складанне або адніманне дробаў:

а) $\frac{5}{x}-\frac{20}{x(x+3)}$; б) $\frac{1-6a}{a(a-1)}+\frac{6}{a-1}$;

в) $\frac{m}{4(n-1)}-\frac{m}{7(n-1)}$; г) $\frac{y-1}{15(y+2)}+\frac{2y+1}{10(y+2)}$;

д) $\frac{5}{b(a-b)}-\frac{5}{a(a-b)}$; е) $\frac{1}{(c+1)(c+5)}-\frac{1}{(c+1)(c-4)}$.

1.145. Спрасціце выраз:

а) $\frac{18}{a^2+9a}-\frac{2}{a}$; б) $\frac{x}{x-7}-\frac{3x+2}{3x-21}$;

в) $\frac{9}{3b-b^2}+\frac{b}{b-3}$; г) $\frac{m-1}{4m-8}+\frac{m+2}{6m-12}$;

д) $\frac{y-5}{xy-y^2}+\frac{x-5}{xy-x^2}$; е) $\frac{m+4}{4m-24}-\frac{9-4m}{6m-m^2}$.

1.146. Выканайце дзеянні: $\frac{a-12}{a^2+4a}-\frac{a-4}{a}+\frac{a}{a+4}$.

1.147. Выкарыстайце формулу рознасці квадратаў для раскладання на множнікі назоўнікаў дробаў і прывядзіце выраз да нескарачальнага дробу:

а) $\frac{x^2}{x^2-16}-\frac{x}{x-4}$; б) $\frac{4}{b-3}-\frac{3b+1}{b^2-9}$;

в) $\frac{3y}{9y^2-1}+\frac{1}{1-3y}$; г) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$.

1.148. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{c-3}{c^2+3c}+\frac{c+3}{3c-c^2}-\frac{4c}{c^2-9}$ пры $c = 3\frac{2}{7}$.

1.149. Выкарыстайце формулы скарочанага множання для раскладання на множнікі назоўнікаў дробаў і выканайце дзеянні:

а) $\frac{c}{c+6}-\frac{c^2}{c^2+12c+36}$; б) $\frac{4}{x^2-4x+4}-\frac{2}{2-x}$.

1.150. Прымяніце спосаб групоўкі для раскладання на множнікі назоўнікаў дробаў і выканайце дзеянні:

а) $\frac{m+8}{mn-6n+3m-18}-\frac{1}{n+3}$; б) $\frac{x-y}{3x-2x^2+3y-2xy}+\frac{1}{2x-3}$.

1.151. Выкарыстайце формулу раскладання квадратнага трохчлена на множнікі і выканайце дзеянні:

а) $\frac{2}{y^2-3y+2}-\frac{1}{y^2-6y+5}$; б) $\frac{a-3}{a^2-9a+20}-\frac{a-5}{a^2-7a+12}$;

в) $\frac{a-4}{a^2-2a+1}-\frac{a+2}{a^2+a-2}$.

1.152*. Дакажыце, што пры ўсіх дапушчальных значэннях зменнай выраз $\frac{10}{25-m^4}+\frac{1}{5+m^2}-\frac{1}{5-m^2}$ прымае толькі дадатныя значэнні.

1.153*. Спрасціце выраз

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

і знайдзіце яго значэнне пры $x = 10$.

* * *

1.154. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{3}{7}\cdot 49$; б) $25:\frac{5}{9}$; в) $3\frac{1}{5}\cdot\frac{7}{12}$; г) $10\frac{1}{3}:2\frac{2}{3}$.

1.155. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу $\frac{6^{-3}\cdot 2^{-4}}{18^{-2}}$.

1.156. Вылічыце: $\left(\sqrt{108}-\sqrt{147}\right)\cdot 2\sqrt{3}$.

1.157. Пабудуйце парабалу $y = x^2$ і прамую $y = x + 6$. Запішыце каардынаты пунктаў перасячэння графікаў гэтых функцый.

1.158. Запішыце ўсе двухзначныя лікі, кратныя 7, але не кратныя 21.

1.159. Рашыце сістэму квадратных няроўнасцей
$$\begin{cases} x^2 - 25 \leqslant 0, \\ x^2 + 5x \geqslant 0. \end{cases}$$

1.160. Знайдзіце суму і здабытак каранёў ураўнення:

а) $x^2 - 7x - 2 = 0$; б) $3x^2 + 5x - 13 = 0$.

1.161. Выберыце рацыянальны спосаб і рашыце сістэму лінейных ураўненняў $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25. \end{cases}$

§ 4. Множанне і дзяленне рацыянальных дробаў

1.162. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{3}{8} : \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12}$; б) $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{5}$.

1.163. Выканайце множанне: $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)\left(x^4 + 1\right)$.

1.164. Раскладзіце на множнікі мнагачлен $x^4 - 8x^2 + 16$.

Успомнім, як памнажаюць і дзеляць звычайныя дробы. Напрыклад: $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5 \cdot 6}{12 \cdot 7} = \frac{5}{14}$; $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 2} = \frac{2}{3}$.

Правілы множання і дзялення рацыянальных дробаў аналагічны правілам множання і дзялення звычайных дробаў.

Здабытак рацыянальных дробаў роўны дробу, лічнік якога роўны здабытку лічнікаў дадзеных дробаў, а назоўнік роўны здабытку назоўнікаў дадзеных дробаў.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Каб знайсці здабытак рацыянальных дробаў, трэба:

① Здабытак лічнікаў дадзеных дробаў запісаць у лічніку новага дробу, а здабытак назоўнікаў дадзеных дробаў запісаць у назоўніку новага дробу. ② Скараціць атрыманы дроб, калі гэта магчыма.	Знайдзіце здабытак рацыянальных дробаў $\frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{(2x+1)^2}$. ① $\frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{(2x+1)^2} = \frac{(2x+1) \cdot (x^2-9)}{(x-3) \cdot (2x+1)^2}$. ② $\frac{(2x+1) \cdot (x^2-9)}{(x-3) \cdot (2x+1)^2} = \frac{(2x+1)(x-3)(x+3)}{(x-3)(2x+1)^2} =$ $= \frac{x+3}{2x+1}$.

Прыклад 1. Знайдзіце здабытак рацыянальных дробаў:

а) $\frac{8a^2b}{c}\cdot\frac{c^3}{4ab^2}$;

б) $\frac{6x^3}{x-5}\cdot\frac{25-x^2}{18x^2}$.

Рашэнне. а) $\frac{8a^2b}{c}\cdot\frac{c^3}{4ab^2}=$

$=\frac{8a^2b\cdot c^3}{c\cdot 4ab^2}=\frac{2ac^2}{b}$;

$$\frac{3x}{5y}\cdot\frac{m}{4n}=\frac{3x\cdot m}{5y\cdot 4n}=\frac{3mx}{20ny}$$

$$\frac{a^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a+b}{a}=\frac{a^2\cdot(a+b)}{\left(a^2-b^2\right)\cdot a}=$$

$$=\frac{a^2\cdot(a+b)}{(a-b)(a+b)\cdot a}=\frac{a}{a-b}$$

б) $\frac{6x^3}{x-5}\cdot\frac{25-x^2}{18x^2}=\frac{6x^3\cdot(25-x^2)}{18x^2\cdot(x-5)}=-\frac{6x^3\cdot(5-x)(5+x)}{18x^2\cdot(5-x)}=-\frac{x(x+5)}{3}$.

Правілам множання рацыянальных дробаў можна карыстацца пры ўзвядзенні рацыянальных дробаў у ступень. Напрыклад:

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2=\frac{m-n}{m+n}\cdot\frac{m-n}{m+n}=\frac{(m-n)\cdot(m-n)}{(m+n)\cdot(m+n)}=\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}.$$

Абагульнім гэты прыём і атрымаем правіла:

каб узвесці рацыянальны дроб у ступень, трэба ўзвесці ў гэту ступень лічнік дробу і атрыманы вынік запісаць у лічніку новага дробу, узвесці ў гэту ступень назоўнік дробу і атрыманы вынік запісаць у назоўніку новага дробу.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$$

Прыклад 2. Узвядзіце ў ступень дроб:

а) $\left(\frac{3b^2c}{2a^5}\right)^4$; б) $\left(\frac{2x-y}{4xy}\right)^3$.

Рашэнне.

а) $\left(\frac{3b^2c}{2a^5}\right)^4=\frac{(3b^2c)^4}{(2a^5)^4}=\frac{81b^8c^4}{16a^{20}}$;

б) $\left(\frac{2x-y}{4xy}\right)^3=\frac{(2x-y)^3}{(4xy)^3}=\frac{(2x-y)^3}{64x^3y^3}$.

$$\left(\frac{xy^3}{2z}\right)^5=\frac{\left(xy^3\right)^5}{(2z)^5}=\frac{x^5y^{15}}{32z^5}$$

$$\left(\frac{a-2b}{a+2b}\right)^4=\frac{(a-2b)^4}{(a+2b)^4}$$

Каб падзяліць адзін рацыянальны дроб на другі, трэба дзялімае памножыць на дроб, адваротны дзельніку.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

Прыклад 3. Знайдзіце дзель:

а) $\frac{25z^2}{64x^3y^3}:\frac{15z}{16xy}$;

б) $\frac{a^2+ab}{b}:\frac{a+b}{b^2}$.

Рашэнне. а) $\frac{25z^2}{64x^3y^3}:\frac{15z}{16xy}=$

$=\frac{25z^2}{64x^3y^3}\cdot\frac{16xy}{15z}=\frac{25z^2\cdot16xy}{64x^3y^3\cdot15z}=$

$=\frac{5z}{12x^2y^2}$;

б) $\frac{a^2+ab}{b}:\frac{a+b}{b^2}=\frac{a^2+ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a+b}=\frac{a(a+b)\cdot b^2}{b\cdot(a+b)}=ab.$

$$\frac{3a}{7b}:\frac{m}{2n}=\frac{3a}{7b}\cdot\frac{2n}{m}=\frac{6an}{7bm}$$

$$\frac{a-3}{a^2}:\frac{(a-3)^2}{a}=$$
$$=\frac{a-3}{a^2}\cdot\frac{a}{(a-3)^2}=$$
$$=\frac{(a-3)\cdot a}{a^2\cdot(a-3)^2}=\frac{1}{a(a-3)}$$

Прыклад 4. Запішыце ў выглядзе дробу рацыянальны выраз:

а) $3a^2b\cdot\frac{2b}{9a^3}$;

б) $(x+y)^2:\frac{x^2+xy}{x-y}$.

Рашэнне. а) Запішам множнік $3a^2b$ у выглядзе рацыянальнага дробу: $3a^2b=\frac{3a^2b}{1}$.

Выканаем множанне дробаў:

$\frac{3a^2b}{1}\cdot\frac{2b}{9a^3}=\frac{3a^2b\cdot2b}{1\cdot9a^3}=\frac{2b^2}{3a}$.

$$\frac{a+b}{a-b}\cdot\left(a^2-b^2\right)=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a^2-b^2}{1}=$$
$$=\frac{(a+b)(a-b)(a+b)}{a-b}=(a+b)^2$$

$$\frac{9l^4n^2}{k}:3l^3n^2=\frac{9l^4n^2}{k}:\frac{3l^3n^2}{1}=$$
$$=\frac{9l^4n^2}{k}\cdot\frac{1}{3l^3n^2}=\frac{9l^4n^2}{k\cdot3l^3n^2}=\frac{3l}{k}$$

б) Запісаўшы выраз $(x+y)^2$ у выглядзе рацыянальнага дробу $\frac{(x+y)^2}{1}$, атрымаем: $(x+y)^2:\frac{x^2+xy}{x-y}=\frac{(x+y)^2}{1}:\frac{x(x+y)}{x-y}=$

$=\frac{(x+y)^2}{1}\cdot\frac{x-y}{x(x+y)}=\frac{(x+y)^2(x-y)}{1\cdot x(x+y)}=\frac{(x+y)(x-y)}{x}=\frac{x^2-y^2}{x}$.

Множанне і дзяленне рацыянальных дробаў	
1. Выканайце множанне рацыянальных дробаў: а) $\frac{l}{n}\cdot\frac{1}{l^2}$; б) $\frac{b}{2a}\cdot\frac{a^2}{3b}$.	а) $\frac{l}{n}\cdot\frac{1}{l^2}=\frac{l\cdot1}{n\cdot l^2}=\frac{1}{ln}$; б) $\frac{b}{2a}\cdot\frac{a^2}{3b}=\frac{b\cdot a^2}{2a\cdot3b}=\frac{a}{6}$.

2. Запішыце ў выглядзе рацыянальнага дробу здабытак: а) $\frac{a+b}{2(a-b)}\cdot\frac{4(a-b)^2}{(a+b)^2}$; б) $\frac{a-b}{c}\cdot\frac{a-b}{b}$; в) $\frac{x-1}{y}\cdot\frac{5y^2}{1-x^2}$.	а) $\frac{a+b}{2(a-b)}\cdot\frac{4(a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)\cdot4(a-b)^2}{2(a-b)(a+b)^2}=$ $=\frac{2(a-b)}{a+b}$; б) $\frac{a-b}{c}\cdot\frac{a-b}{b}=\frac{(a-b)(a-b)}{c\cdot b}=\frac{(a-b)^2}{bc}$; в) $\frac{x-1}{y}\cdot\frac{5y^2}{1-x^2}=\frac{(x-1)\cdot5y^2}{y\cdot(1-x^2)}=$ $=\frac{(x-1)\cdot5y^2}{y\cdot(1-x)(1+x)}=-\frac{(x-1)\cdot5y^2}{y\cdot(x-1)(1+x)}=-\frac{5y}{x+1}$.
3. Запішыце ў выглядзе рацыянальнага дробу выраз: а) $\left(\frac{2a^2b}{c^4}\right)^5$; б) $\left(\frac{x}{y+z}\right)^2$; в) $\left(-\frac{4x^3}{3yz^2}\right)^3$.	а) $\left(\frac{2a^2b}{c^4}\right)^5=\frac{\left(2a^2b\right)^5}{\left(c^4\right)^5}=\frac{32a^{10}b^5}{c^{20}}$; б) $\left(\frac{x}{y+z}\right)^2=\frac{x^2}{(y+z)^2}$; в) $\left(-\frac{4x^3}{3yz^2}\right)^3=-\left(\frac{4x^3}{3yz^2}\right)^3=-\frac{\left(4x^3\right)^3}{\left(3yz^2\right)^3}=-\frac{64x^9}{27y^3z^6}$.
4. Запішыце ў выглядзе ступені рацыянальны дроб: а) $\frac{16a^8b^2}{c^4}$; б) $\frac{(x-y)^{18}}{a^9b^{27}}$.	а) $\frac{16a^8b^2}{c^4}=\frac{\left(4a^4b\right)^2}{\left(c^2\right)^2}=\left(\frac{4a^4b}{c^2}\right)^2$; б) $\frac{(x-y)^{18}}{a^9b^{27}}=\frac{\left((x-y)^2\right)^9}{\left(ab^3\right)^9}=\left(\frac{(x-y)^2}{ab^3}\right)^9$.
5. Выканайце дзяленне рацыянальных дробаў: а) $\frac{a^4}{9b^3}:\frac{a^2}{18b^3}$; б) $\frac{y}{9x^2}:\frac{xy+y^2}{3x}$; в) $\frac{a-3b}{a+3b}:\frac{6b-2a}{b}$;	а) $\frac{a^4}{9b^3}:\frac{a^2}{18b^3}=\frac{a^4}{9b^3}\cdot\frac{18b^3}{a^2}=\frac{a^4\cdot18b^3}{9b^3\cdot a^2}=2a^2$; б) $\frac{y}{9x^2}:\frac{xy+y^2}{3x}=\frac{y}{9x^2}\cdot\frac{3x}{xy+y^2}=$ $=\frac{y\cdot3x}{9x^2\cdot y(x+y)}=\frac{1}{3x(x+y)}$; в) $\frac{a-3b}{a+3b}:\frac{6b-2a}{b}=\frac{a-3b}{a+3b}\cdot\frac{b}{6b-2a}=$ $=\frac{(a-3b)\cdot b}{(a+3b)\cdot2(3b-a)}=-\frac{(a-3b)\cdot b}{(a+3b)\cdot2(a-3b)}=$ $=-\frac{b}{2(a+3b)}$;

г) $\frac{1}{x^2-1}:\frac{x}{x^2-2x+1}$; д) $\frac{p}{3p^2+p-2}:\frac{p}{9p^2-4}$.	г) $\frac{1}{x^2-1}:\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x}=$ $=\frac{1\cdot(x-1)^2}{(x-1)(x+1)\cdot x}=\frac{x-1}{x(x+1)}$. д) Выкарыстаем формулу раскладання квадратнага трохчлена на множнікі і атрымаем: $3p^2+p-2=(p+1)(3p-2)$. Тады $\frac{p}{3p^2+p-2}:\frac{p}{9p^2-4}=\frac{p}{3p^2+p-2}\cdot\frac{9p^2-4}{p}=$ $=\frac{p\cdot(3p-2)(3p+2)}{(p+1)(3p-2)\cdot p}=\frac{3p+2}{p+1}$.
6. Выканайце дзеянні: а) $(3a-9)\cdot\frac{a}{a^2-6a+9}$; б) $\frac{4x^2-36x}{y}:(9-x)$; в) $\frac{a+b}{5ax-ay+5bx-by}\times$ $\times(10x-2y)$.	а) $(3a-9)\cdot\frac{a}{a^2-6a+9}=\frac{3a-9}{1}\cdot\frac{a}{a^2-6a+9}=$ $=\frac{3(a-3)\cdot a}{(a-3)^2}=\frac{3a}{a-3}$; б) $\frac{4x^2-36x}{y}:(9-x)=\frac{4x^2-36x}{y}:\frac{9-x}{1}=$ $=\frac{4x^2-36x}{y}\cdot\frac{1}{9-x}=\frac{4x(x-9)}{y(9-x)}=-\frac{4x(x-9)}{y(x-9)}=$ $=-\frac{4x}{y}$. в) Раскладзём на множнікі мнагачлен, прымяніўшы спосаб групоўкі: $5ax-ay+5bx-by=(5x-y)(a+b)$. Тады $\frac{a+b}{5ax-ay+5bx-by}\cdot(10x-2y)=$ $=\frac{a+b}{5ax-ay+5bx-by}\cdot\frac{10x-2y}{1}=$ $=\frac{(a+b)\cdot 2(5x-y)}{(5x-y)(a+b)}=2$.
7. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{(x-13)^2}{x^2-169}:\frac{x^2}{13+x}$ пры $x=-4$.	Выканаем дзяленне: $\frac{(x-13)^2}{x^2-169}:\frac{x^2}{13+x}=\frac{(x-13)^2}{(x-13)(x+13)}\cdot\frac{13+x}{x^2}=$ $=\frac{x-13}{x^2}$. Пры $x=-4$ атрымаем: $\frac{x-13}{x^2}=\frac{-4-13}{16}=-\frac{17}{16}=-1\frac{1}{16}$.

8. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{5a^2}{2a^2-4a+2}\cdot(a-1)^2$ пры $a=-2\sqrt{3}$.	Выканаем множанне: $\frac{5a^2}{2a^2-4a+2}\cdot(a-1)^2=\frac{5a^2}{2a^2-4a+2}\cdot\frac{(a-1)^2}{1}=$ $=\frac{5a^2\cdot(a-1)^2}{2(a^2-2a+1)}=\frac{5a^2\cdot(a-1)^2}{2(a-1)^2}=\frac{5a^2}{2}.$ Пры $a=-2\sqrt{3}$ маем: $\frac{5a^2}{2}=\frac{5\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)^2}{2}=\frac{5\cdot 12}{2}=30.$

1. Ці праўда, што пры множанні дробу $\frac{x}{3}$ на дроб $\frac{9}{x^2}$ атрымаецца:

а) $\frac{27}{x^3}$; б) $\frac{x^3}{27}$; в) $\frac{3}{x}$?

2. Ці праўда, што пры дзяленні дробу $\frac{a}{3}$ на дроб $\frac{a^2}{9}$ атрымаецца:

а) $\frac{a}{3}$; б) $\frac{27}{a^3}$; в) $\frac{3}{a}$?

3. Які з дробаў: $\frac{b}{c^2}$, $\frac{(a-b)^2}{b}$ — з'яўляецца вынікам множання, а які — вынікам дзялення дробаў $\frac{a-b}{c}$ і $\frac{(a-b)c}{b}$?

1.165. Выканайце множанне рацыянальных дробаў, прымяніўшы алгарытм:

а) $\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{y}$; б) $\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{5}$; в) $\frac{2}{m}\cdot\frac{3}{m}$;

г) $\frac{3y}{z}\cdot\frac{y^2}{z}$; д) $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}$; е) $\frac{a-b}{x}\cdot\frac{a-b}{3x}$;

ж) $\frac{7a}{b-2}\cdot\frac{1}{(b-2)^2}$; з) $\frac{1}{(x-5)^2}\cdot\frac{2}{(x-5)^3}$.

1.166. Узвядзіце ў ступень рацыянальны дроб:

а) $\left(\frac{a}{b^3}\right)^2$; б) $\left(\frac{5}{mn^2}\right)^3$; в) $\left(\frac{2x^2y^3}{m^4n}\right)^5$; г) $\left(\frac{ab}{3c^4}\right)^4$;

д) $\left(\frac{10a}{a-1}\right)^5$; е) $\left(\frac{n^2-1}{n}\right)^6$; ж) $\left(\frac{x-y}{2x+3y}\right)^7$; з) $\left(\frac{c^3+3}{c^2-3}\right)^5$.

1.167. Знайдзіце дзель рацыянальных дробаў:

а) $\frac{a}{4}:\frac{7}{b}$; б) $\frac{x}{6}:\frac{7}{x}$; в) $\frac{5}{c}:\frac{c}{2}$;

г) $\frac{b}{a}:\frac{a}{b^2}$; д) $\frac{y^2}{x}:\frac{1}{y}$; е) $\frac{c-d}{4}:\frac{3}{c-d}$;

ж) $\frac{x+1}{y}:\frac{1}{(x+1)^2}$; з) $\frac{1}{(m-3)^2}:\frac{(m-3)^5}{7}$.

1.168. Выканайце множанне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{5x}{y} \cdot \frac{y}{15x}$; б) $\frac{12a}{b^2} \cdot \frac{b^2c}{4a}$; в) $\frac{b}{cd} \cdot \frac{d^4}{7b}$;

г) $\frac{m}{nk} \cdot \frac{n}{2mk}$; д) $\frac{x^3y}{6z} \cdot \frac{18z}{xy^3}$; е) $\frac{b^5c^2}{12mn} \cdot \frac{9m^2}{b^3c^2}$.

1.169. Знайдзіце дзель рацыянальных дробаў:

а) $\frac{4m^2}{n} : \frac{m}{n}$; б) $\frac{a}{3b} : \frac{a}{b^2}$; в) $\frac{x^3}{y^2} : \frac{x^2}{y}$;

г) $\frac{9x}{14y} : \frac{5x^2}{28y^2}$; д) $\frac{5a^2b}{3cd^2} : \frac{15a^3}{cd}$; е) $\frac{3x^4y^2}{ab} : \frac{x^2y^2}{18a^3}$.

1.170. Запішыце ступень у выглядзе рацыянальнага дробу:

а) $\left(-\frac{5x^2}{y}\right)^2$; б) $\left(-\frac{3a}{2b^4c}\right)^3$; в) $\left(-\frac{2}{x^6y}\right)^4$; г) $\left(-\frac{l^2n^4}{k^3}\right)^5$.

1.171. Выканайце множанне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{c^2+2dc}{d} \cdot \frac{d}{c}$; б) $\frac{3}{b^2} \cdot \frac{ab-3b}{3a}$; в) $\frac{m+n}{m} \cdot \frac{5m}{m+n}$;

г) $\frac{2y}{x^2+x} \cdot \frac{x+1}{10xy}$; д) $\frac{b^3}{c-d} \cdot \frac{5d-5c}{b^4}$; е) $\frac{x^2+xy}{y} \cdot \frac{1}{x+y}$.

1.172. Выканайце дзяленне рацыянальных дробаў:

а) $\frac{x+y}{3x} : \frac{x+y}{3y}$; б) $\frac{ab-2b}{a} : \frac{a^2-2a}{b}$;

в) $\frac{m^2-mn}{m^2} : \frac{n-m}{n}$; г) $\frac{a-b}{a^4} : \frac{3a-3b}{a^2}$;

д) $\frac{b+c}{bc} : \frac{7b+7c}{5bc}$; е) $\frac{1}{m^2-3m} : \frac{m}{15-5m}$.

1.173. Выканайце дзеянні з рацыянальнымі дробамі:

а) $\frac{x+4}{x^2-25} \cdot \frac{x+5}{x+4}$; б) $\frac{a-4}{a^2-3a} : \frac{a-4}{a^2-9}$;

в) $\frac{a+2}{b^2-ab} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+2a}$; г) $\frac{1}{a^2-2a} : \frac{2}{a^2-4}$;

д) $\frac{x^2-y^2}{3xy^2} \cdot \frac{6xy}{5y-5x}$; е) $\frac{m}{m^2-n^2} : \frac{1}{7m+7n}$;

ж) $\frac{5a-b}{4a+4b} \cdot \frac{(a+b)^2}{25a^2-b^2}$; з) $\frac{3c+9}{c^2-4} : \frac{(c+3)^2}{4-2c}$.

1.174. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{a+2}{a} \cdot \frac{3a^2}{a^2-4}$ пры $a = 1{,}9$;

б) $\frac{x^2-9}{y^2-y} : \frac{3x-9}{4y^2-4}$ пры $x = 6{,}3$, $y = -\frac{1}{3}$.

1.175. Узвядзіце ў квадрат, куб і пятую ступень выраз і запішыце вынік у выглядзе рацыянальнага дробу:

а) $\frac{1}{a^2b}$; б) $-\frac{2m^3}{m-n}$; в) $\frac{x^2+y^2}{10xy}$; г) $-\frac{c-d}{c+d}$.

1.176. Цэлым ці дробавым рацыянальным выразам з'яўляецца вынік спрашчэння выразу:

а) $(3x-12)\cdot\frac{x^2}{x-4}$; б) $(3m-n):\frac{3m-n}{3m+n}$;

в) $\frac{c+1}{c^2-25d^2}\cdot(2c+10d)$; г) $\frac{9-4a^2}{3a}:(2a+3)$;

д) $(b^2-64c^2)\cdot\frac{bc}{8c-b}$; е) $\frac{2x+10y}{y}:(x^2-25y^2)$;

ж) $\frac{1}{m^2-25n^2}\cdot(15n-3m)$; з) $\frac{a^2-16}{5}:(a-4)^2$?

1.177. Выканайце дзеянні найбольш рацыянальным спосабам:

а) $\frac{m^2-m}{m^4+m^3}\cdot\frac{m^5+m^4}{(3m-3)^2}$; б) $\frac{n^7+n^5}{(2n-2)^2}:\frac{n^6+n^4}{9n^2-9n}$.

1.178. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{(m+3)^2}{(2m-4)^2}:\frac{(2m+6)^2}{(2-m)^3}$ пры $m=\sqrt{2}+2$;

б) $\frac{a+b}{(2a-2b)^4}\cdot\frac{(2a-2b)^5}{(3a+3b)^2}$ пры $a=\sqrt{3}-2$, $b=4-\sqrt{3}$.

1.179. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{a+6}{a-3}\cdot\frac{a-3}{a^2+12a+36}$; б) $\frac{2-a}{a^2}:\frac{a^2-4a+4}{2a}$;

в) $\frac{x+3}{x^2-6x+9}\cdot(x-3)$; г) $\frac{m^2+10m+25}{m-5}:(m^2-25)$;

д) $\frac{1}{c^2-8c+16}\cdot\frac{16-c^2}{c}$; е) $\frac{m^2-12m+36}{3m+21}:\frac{5m-30}{m^2-49}$;

ж) $\frac{2x+6y}{100y^2-x^2}\cdot\frac{x^2-20xy+100y^2}{7x+21y}$;

з) $\frac{4x^2-y^2}{2x^4+x^3}:\frac{4x^2+4xy+y^2}{12x^3+6x^2}$;

і) $\frac{4x^2-9y^2}{18y^2}\cdot\frac{24y}{4x^2+12xy+9y^2}$;

к) $\frac{5x-15}{2x}:(3x^2-18x+27)$.

1.180. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{x^2-2xy+y^2}{xy^2+y^3}:\frac{y^2-x^2}{y^3}$ пры $x=2\sqrt{5}$, $y=\sqrt{5}$.

1.181. Запішыце ў выглядзе ступені рацыянальны дроб:

а) $\frac{25m^2n^6}{k^8}$; б) $\frac{x^3y^6}{(a+y)^9}$; в) $\frac{(m-n)^{25}}{m^{10}n^{15}}$; г) $\frac{(c+d)^8}{c^{16}(c-d)^{12}}$.

1.182. Запішыце выраз у выглядзе нескарачальнага рацыянальнага дробу:

а) $\frac{x^2-x}{x^2-3x+ax-3a}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1}$; б) $\frac{x^2-25}{x^2-4}:\frac{5x-x^2}{x^3+2x^2-4x-8}$.

1.183. Спрасціце выраз:

а) $\frac{1}{x^2-9}\cdot\left(x^2-4x+3\right)$; б) $\frac{x^2+7x+10}{x}:\left(x^2+2x\right)$;

в) $\frac{2-m}{3m+2}\cdot\frac{9m^2-4}{2m^2-5m+2}$; г) $\frac{10b^2-9b+2}{25b^2-36}:\frac{5b-2}{5b+6}$;

д) $\frac{x^2+8x+15}{x^2+8x+12}\cdot\frac{x^2-36}{x^2-25}$; е) $\frac{a^2-8a+16}{4-a^2}:\frac{a^2-5a+4}{a^2-5a+6}$.

1.184*. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{2xz^2}{3x-2x}\cdot\frac{9xy-4xy}{10x^4z^4}:\frac{3y+2y}{25x^3z^2}$; б) $\frac{3c^2x}{ax-bx}:\frac{6c^3x^5}{a^2x-b^2x}\cdot\frac{4cx^4}{a+b}$.

1.185*. Выканайце дзяленне і запішыце дзель у выглядзе нескарачальнага дробу: $\frac{ac+ay-cx-xy}{bx-5x-ab+5a}:\frac{cx+xy-ac-ay}{ab+6b-2a-12}$.

1.186*. Выканайце множанне $\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{b^2-3ab+2a^2}{2a^2+ab-b^2}$.

1.187*. Выканайце дзеянні з рацыянальнымі дробамі:

а) $\frac{x^2+xy}{6x-x^2+y^2-6y}\cdot\frac{x^2-y^2+36-12x}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{m+n}{m^2-5n+5m-n^2}:\frac{m^2+mn}{25-n^2-m^2-2mn}$.

1.188. Выканайце множанне рацыянальных дробаў, прымяніўшы алгарытм:

а) $\frac{3}{b}\cdot\frac{4}{b}$; б) $\frac{5a^2}{b}\cdot\frac{a}{b}$; в) $\frac{1}{c^4}\cdot\frac{1}{c^2}$; г) $\frac{1}{y+2}\cdot\frac{5}{y+2}$.

1.189. Якім правілам можна карыстацца для ўзвядзення ў ступень рацыянальнага дробу? Узвядзіце ў ступень рацыянальны дроб:

а) $\left(\dfrac{m^2}{n}\right)^4$; б) $\left(\dfrac{2}{x^2y}\right)^5$; в) $\left(\dfrac{10ab^2}{c^4d}\right)^3$;

г) $\left(\dfrac{a-b}{d}\right)^3$; д) $\left(\dfrac{x}{x^2-5}\right)^4$; е) $\left(\dfrac{3m+n}{m^2-7}\right)^6$.

1.190. Якім дзеяннем можна замяніць дзяленне рацыянальных дробаў? Выканайце дзяленне рацыянальных дробаў:

а) $\dfrac{n}{3}:\dfrac{5}{n}$; б) $\dfrac{x^2}{y}:\dfrac{y}{x^2}$; в) $\dfrac{a^3}{b}:\dfrac{1}{a}$; г) $\dfrac{1}{d+5}:\dfrac{d+5}{c}$.

1.191. Выканайце дзеянні з рацыянальнымі дробамі:

а) $\dfrac{12a}{b}\cdot\dfrac{b}{3a}$; б) $\dfrac{x}{5y^3}:\dfrac{x}{y^2}$; в) $\dfrac{a^4b}{c^2}\cdot\dfrac{cd}{ab}$;

г) $\dfrac{3m}{16n^2}:\dfrac{7m^2}{12n}$; д) $\dfrac{7a^2b}{2c}\cdot\dfrac{ac^2}{14b}$; е) $\dfrac{5xy^3}{z}:\dfrac{x^2y^2}{15z^3}$.

1.192. Узвядзіце ў ступень выраз:

а) $\left(-\dfrac{8a^3}{b}\right)^2$; б) $\left(-\dfrac{xy}{z^8}\right)^3$; в) $\left(-\dfrac{3c}{a^2b}\right)^4$; г) $\left(-\dfrac{2mn^2}{k^6}\right)^5$.

1.193. Выканайце множанне рацыянальных дробаў:

а) $\dfrac{a^2-3ab}{b}\cdot\dfrac{b}{a}$; б) $\dfrac{c}{3c-3d}\cdot\dfrac{c-d}{cd}$;

в) $\dfrac{x+5}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2+5x}$; г) $\dfrac{5m-5n}{m^3}\cdot\dfrac{m^2}{2n-2m}$.

1.194. Выканайце дзяленне рацыянальных дробаў:

а) $\dfrac{m-2n}{m}:\dfrac{m-2n}{n}$; б) $\dfrac{xy+3y}{x}:\dfrac{x^2+3x}{y^2}$;

в) $\dfrac{5b+c}{c^5}:\dfrac{10b^2+2bc}{c^3}$; г) $\dfrac{3}{a^2-6a}:\dfrac{1}{6a^2-a^3}$.

1.195. Выканайце дзеянні:

а) $\dfrac{a^2-36}{a+1}\cdot\dfrac{a+1}{a+6}$; б) $\dfrac{m^2-n^2}{m^3}:\dfrac{5m-5n}{m^4}$;

в) $\dfrac{x^2+3x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x+3}$; г) $\dfrac{3c}{c^2-d^2}:\dfrac{1}{2c-2d}$;

д) $\dfrac{a^2}{6-2a}\cdot\dfrac{a^2-9}{a}$; е) $\dfrac{(y-5)^2}{1-y}:\dfrac{2y-10}{y^2-1}$;

1.196. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{b^2-9}{b^2+b}:\frac{b^2-3b}{b+1}$ пры $b=0{,}01$.

1.197. Узвядзіце ў квадрат, куб і чацвёртую ступень выраз $-\frac{3a^2b}{a^2-b}$.

1.198. Прывядзіце да рацыянальнага дробу выраз:

а) $(a-7)\cdot\frac{a}{a-7}$; б) $(2x-y):\frac{4x-2y}{x+y}$;

в) $\frac{b-3}{9b^2-1}\cdot(3b-1)$; г) $\frac{m-1}{m}:(1-m^2)$;

д) $\frac{1}{a^2-4b^2}\cdot(10b-5a)$; е) $\frac{4c^2-1}{8}:(2c-1)^2$.

1.199. Выканайце дзеянні з рацыянальнымі дробамі:

$$\frac{(2a-2)^2}{a^5+a^3}\cdot\frac{a^7+a^5}{a^2-1}.$$

1.200. Спрасціце выраз:

а) $\frac{x^2-6x+9}{2x+3}\cdot\frac{4x+6}{x-3}$; б) $\frac{9y^2-6y+1}{4y-2}:\frac{3y-1}{2y-1}$;

в) $\frac{n^2-4n+4}{n+1}\cdot\frac{n^2+n}{5n-10}$; г) $(x-1):\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

д) $\frac{a+7}{a-8}\cdot\frac{a^2-16a+64}{a^2-49}$; е) $\frac{y^2-10y+25}{y+3}:(5-y)^2$;

ж) $\frac{c-2d}{1-5d}\cdot\frac{5d^2-d}{c^2-4cd+4d^2}$; з) $\frac{x+5}{3x-1}:(2x^2+20x+50)$.

1.201. Запішыце ў выглядзе ступені рацыянальны дроб:

а) $\frac{49a^8}{b^2c^{10}}$; б) $\frac{(m-n)^6}{c^9d^{12}}$; в) $\frac{a^8b^{12}}{(a+b)^{16}}$.

1.202. Спрасціце выраз, вынік запішыце ў выглядзе нескарачальнага дробу:

а) $\frac{3x^2-6x}{x^2+x-ax-a}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-4}$; б) $\frac{x^2-16}{x^2-a^2}:\frac{x^2+4x}{x^3-a^2x+x^2-a^2}$.

1.203. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{3}{2a^2-5a-3}\cdot(a-3)$; б) $\frac{b-3}{4b^2-1}:\frac{6-2b}{2b^2+7b+3}$;

в) $\frac{x^2-3x+2}{x^2+7x+12}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-1}$; г) $(4m^2-5m+1):\frac{m-1}{m}$.

1.204*. Запішыце дзель $\frac{x^2+ax+bx+ab}{x^2-ax+cx-ac}:\frac{x^2-a^2}{x^2-c^2}$ у выглядзе нескарачальнага рацыянальнага дробу.

1.205*. Выканайце множанне рацыянальных выразаў:

$$\frac{a-b+c}{a^2-b^2+c^2+2ac}\cdot\left(a^2+ab-bc-c^2\right).$$

1.206. Вызначце парадак дзеянняў у выразе $\left(\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}\cdot 0{,}15\right):0{,}3$ і знайдзіце яго значэнне.

1.207. Графік функцыі $f(x)=x^3$ праходзіць праз пункт, абсцыса якога роўна 4. Чаму роўна ардыната гэтага пункта? Знайдзіце значэнне выразу $f(-1)+f(0)-f(2)$.

1.208. Выканайце дзеянні:

а) $\left(5\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^5$; б) $\frac{4^7\cdot 64}{16^4}$.

1.209. Вылічыце, выкарыстаўшы ўласцівасці квадратных каранёў:

а) $\sqrt{50\cdot 44\cdot 550}$; б) $3\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{13}$.

1.210. Рашыце двайную няроўнасць $-1\leqslant 2-5x<3$.

1.211. У школьную бібліятэку даставілі ўпакоўкі новых падручнікаў. Колькасць падручнікаў у кожнай упакоўцы на 15 меншая за колькасць упаковак. Колькі падручнікаў у адной упакоўцы, калі ўсяго даставлена 700 падручнікаў?

§ 5. Пераўтварэнне рацыянальных выразаў

1.212. Знайдзіце значэнне выразу $4\frac{8}{11}\cdot\frac{6}{13}-1\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{26}$.

1.213. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt{(-3{,}47)^2}$; б) $\sqrt{y^2}$, калі $y>0$.

1.214. Вылічыце: $4^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}:(-2)^{15}$.

Пры рашэнні многіх задач патрабуецца спрашчаць рацыянальныя выразы, прыводзячы іх да рацыянальных дробаў. Для гэтага выконваюць пераўтварэнні рацыянальных выразаў.

Каб пераўтварыць рацыянальны выраз, трэба:

① Устанавіць парадак дзеянняў у выразе. ② Выканаць дзеянні па парадку, выкарыстаўшы правілы складання, аднімання, множання і дзялення рацыянальных дробаў.	Спрасціце выраз $\frac{m}{n} : \left(\frac{3m}{n} - \frac{m}{3n}\right).$ ① $\frac{m}{n} \overset{2)}{:} \left(\frac{3m}{n} \overset{1)}{-} \frac{m}{3n}\right).$ ② 1) $\frac{3m}{n} - \frac{m}{3n} = \frac{9m - m}{3n} = \frac{8m}{3n};$ 2) $\frac{m}{n} : \frac{8m}{3n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{3n}{8m} = \frac{3}{8}.$

Прыклад 1. Запішыце выраз $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b}{a - b}$ у выглядзе рацыянальнага дробу.

Рашэнне. ① Спачатку неабходна выканаць адніманне выразаў, якія знаходзяцца ў дужках, а затым выканаць множанне.

② 1) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ba} - \frac{b^2}{ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab};$

2) $\frac{(a-b)(a+b)}{ab} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)b}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{a}.$

Пераўтварэнне рацыянальнага выразу можна выконваць не па дзеяннях, а «ланцужком». У дадзеным выпадку атрымаем:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b}{a-b} = \left(\frac{a^2}{ba} - \frac{b^2}{ab}\right) \cdot \frac{b}{a-b} =$$

$$= \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right) \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)b}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{a}.$$

Прыклад 2. Знайдзіце значэнне выразу

$$\left(\frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2 - 4x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2}\right) \text{ пры } x = \frac{1}{8}.$$

Рашэнне. Спросцім выраз, выканаўшы дзеянні па парадку:

1) $\frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} - \frac{3y}{y^2 - 4x^2} = \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-y} + \frac{3y}{4x^2 - y^2} =$

$= \frac{2(2x-y) - (2x+y) + 3y}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{4x - 2y - 2x - y + 3y}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{2x}{(2x-y)(2x-y)};$

2) $\frac{y^2}{8x^2} - \frac{1}{2} = \frac{y^2 - 4x^2}{8x^2} = -\frac{4x^2 - y^2}{8x^2} = -\frac{(2x-y)(2x+y)}{8x^2};$

3) $\frac{2x}{(2x-y)(2x-y)} \cdot \left(-\frac{(2x-y)(2x+y)}{8x^2}\right) = -\frac{1}{4x}.$

Пры $x = \frac{1}{8}$ атрымаем: $-\frac{1}{4x} = -\frac{8}{4} = -2$.

Пераўтварэнне рацыянальных выразаў можна выконваць разам з іншымі раней вывучанымі пераўтварэннямі.

Прыклад 3. Спрасціце выраз $\left(a^{-1} + a^{-2}\right) : \frac{a^2-1}{a} - \frac{1}{a-1}$, прывёўшы яго да рацыянальнага дробу.

Рашэнне. 1) $a^{-1} + a^{-2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{a+1}{a^2}$;

2) $\frac{a+1}{a^2} : \frac{a^2-1}{a} = \frac{a+1}{a^2} \cdot \frac{a}{a^2-1} = \frac{(a+1)\cdot a}{a^2(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a(a-1)}$;

3) $\frac{1}{a(a-1)} - \frac{1}{a-1} = \frac{1}{a(a-1)} - \frac{1\cdot a}{(a-1)a} = \frac{1-a}{(a-1)a} = -\frac{a-1}{(a-1)a} = -\frac{1}{a}$.

Правілы пераўтварэння рацыянальных выразаў можна выкарыстоўваць і для пераўтварэння выразаў, якія змяшчаюць карані.

Прыклад 4. Скараціце дроб:

а) $\frac{x-3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}$; б) $\frac{3\sqrt{a}-a}{a-9}$; в) $\frac{b-2\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-b}$.

Рашэнне. а) $\frac{x-3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right)}{5\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-3}{5}$;

б) $\frac{3\sqrt{a}-a}{a-9} = \frac{3\sqrt{a}-\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2-9} = \frac{\sqrt{a}\left(3-\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)} = -\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-3\right)}{\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+3\right)} =$
$= -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}$;

в) $\frac{b-2\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-b} = \frac{\left(\sqrt{b}-1\right)^2}{\sqrt{b}\left(1-\sqrt{b}\right)} = \frac{\left(1-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{b}\left(1-\sqrt{b}\right)} = \frac{1-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$.

Прыклад 5. Спрасціце выраз $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Рашэнне. 1) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} - \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} =$
$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2 - \left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1} = \frac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{4\sqrt{x}}{x-1}$;

2) $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$;

3) $\frac{4\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = 4$.

Пераўтварэнне рацыянальных выразаў	
1. Запішыце выраз $\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{a-b}$ у выглядзе дробу.	1) $1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{b^2}-\frac{2ab}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}=$ $=\frac{b^2-2ab+a^2}{b^2}=\frac{(a-b)^2}{b^2};$ 2) $\frac{(a-b)^2}{b^2}\cdot\frac{b}{a-b}=$ $=\frac{(a-b)^2\cdot b}{b^2\cdot(a-b)}=\frac{a-b}{b}.$
2. Знайдзіце значэнне выразу $\left(a+1+\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2}{1-2a+a^2}$ пры $a=-2{,}13$.	Пераўтворым дадзены выраз «ланцужком»: $\left(a+1+\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2}{1-2a+a^2}=$ $=\frac{(a+1)(a-1)+1}{a-1}:\frac{a^2}{(a-1)^2}=$ $=\frac{a^2-1+1}{a-1}\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2}=$ $=\frac{a^2\cdot(a-1)^2}{(a-1)\cdot a^2}=a-1.$ Пры $a=-2{,}13$ атрымаем: $a-1=-2{,}13-1=-3{,}13.$
3. Спрасціце выраз $\left(\frac{a-4}{a^2-2a+1}-\frac{a+2}{a^2+a-2}\right):\frac{1}{(2a-2)^2}.$	1) Каранямі квадратнага трохчлена a^2+a-2 з’яўляюцца лікі $a_1=-2$, $a_2=1$, значыць, $a^2+a-2=(a+2)(a-1)$, тады: $\frac{a-4}{a^2-2a+1}-\frac{a+2}{a^2+a-2}=$ $=\frac{a-4}{(a-1)^2}-\frac{a+2}{(a+2)(a-1)}=$ $=\frac{a-4}{(a-1)^2}-\frac{1}{a-1}=\frac{a-4-(a-1)}{(a-1)^2}=$ $=\frac{-3}{(a-1)^2};$ 2) $\frac{-3}{(a-1)^2}:\frac{1}{(2a-2)^2}=$ $=\frac{-3}{(a-1)^2}\cdot\frac{(2a-2)^2}{1}=$ $=\frac{-3(2a-2)^2}{(a-1)^2}=\frac{-3\cdot 4(a-1)^2}{(a-1)^2}=-12.$

4. Дакажыце, што значэнне выразу $\left(\frac{4y}{x^2-3xy}-\frac{x}{xy-3y^2}\right):\frac{x^2-4y^2}{3xy^2-x^2y}$ не залежыць ад значэнняў зменных.	Значэнне выразу пры розных значэннях зменных з абсягу яго вызначэння можна знайсці, папярэдне спрасціўшы яго: 1) $\frac{4y}{x^2-3xy}-\frac{x}{xy-3y^2}=$ $=\frac{4y}{x(x-3y)}-\frac{x}{y(x-3y)}=$ $=\frac{4y^2-x^2}{xy(x-3y)}$; 2) $\frac{4y^2-x^2}{xy(x-3y)}:\frac{x^2-4y^2}{3xy^2-x^2y}=$ $=\frac{4y^2-x^2}{xy(x-3y)}\cdot\frac{xy(3y-x)}{x^2-4y^2}=$ $=\frac{\left(4y^2-x^2\right)\cdot xy(3y-x)}{xy(x-3y)\cdot\left(x^2-4y^2\right)}=$ $=\frac{xy\left(x^2-4y^2\right)(x-3y)}{xy(x-3y)\left(x^2-4y^2\right)}=1.$ Атрымалі, што вынік спрашчэння роўны ліку 1, значыць, пры любых значэннях зменных з абсягу вызначэння выразу значэнне дадзенага выразу роўна 1, г. зн. не залежыць ад значэнняў зменных.
5*. Спрасціце выраз $\frac{a-\frac{4a-4}{a}}{\frac{2}{a}-1}$.	Запішам дроб у выглядзе дзелі і атрымаем: $\frac{a-\frac{4a-4}{a}}{\frac{2}{a}-1}=$ $=\left(a-\frac{4a-4}{a}\right):\left(\frac{2}{a}-1\right)=$ $=\frac{a^2-4a+4}{a}:\frac{2-a}{a}=$ $=\frac{(2-a)^2\cdot a}{a\cdot(2-a)}=2-a.$
6. Спрасціце выраз $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-2}-1$, прывёўшы яго да нескарачальнага дробу.	1) $a^{-2}-b^{-2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}$; 2) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-2}=\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-2}=$

	$= \left(\frac{ab}{b-a}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(b-a)^2}$; 3) $\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(b-a)^2} =$ $= \frac{(b-a)(b+a)\cdot a^2b^2}{a^2b^2\cdot(b-a)^2} = \frac{b+a}{b-a}$; 4) $\frac{b+a}{b-a} - 1 = \frac{b+a}{b-a} - \frac{b-a}{b-a} =$ $= \frac{b+a-b+a}{b-a} = \frac{2a}{b-a}$.
7. Прымяніце да выразу алгарытм скарачэння рацыянальнага дробу: а) $\frac{5\sqrt{b}+b\sqrt{5}}{\sqrt{b}+\sqrt{5}}$; б) $\frac{m-2\sqrt{3m}+3}{3-m}$.	а) $\frac{5\sqrt{b}+b\sqrt{5}}{\sqrt{b}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5b}\left(\sqrt{5}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}+\sqrt{5}} =$ $=\sqrt{5b}$; б) $\frac{m-2\sqrt{3m}+3}{3-m} =$ $=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{m}\right)^2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{m}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{m}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{m}}{\sqrt{3}+\sqrt{m}}$.
8. Спрасціце выраз $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a+b}$.	1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{a-b} =$ $=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} =$ $=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} =$ $=\frac{a-2\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} =$ $=\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$; 2) $\frac{a+b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\cdot\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a+b} =$ $=\frac{(a+b)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot(a+b)} =$ $=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

9. Знайдзіце значэнне выразу

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

пры $x=0{,}6,\ y=0{,}006.$

Спросцім дадзены выраз:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

Пры $x=0{,}6$ і $y=0{,}006$ атрымаем:

$$2\sqrt{\frac{x}{y}}=2\sqrt{\frac{0{,}6}{0{,}006}}=2\sqrt{100}=20.$$

Вынікам пераўтварэння дробавага рацыянальнага выразу можа быць: а) цэлы рацыянальны выраз; б) дробавы рацыянальны выраз; в) рацыянальны дроб; г) рацыянальны лік; д) ірацыянальны лік. Выберыце правільныя адказы. Прывядзіце прыклады.

1.215. Устанавіце парадак дзеянняў і пераўтварыце выраз:

а) $\left(\frac{x}{5}-\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{9}{x^2}$;

б) $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right):\frac{2n-m}{3mn}$;

в) $\frac{x+y}{y^2}\cdot\left(\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}\right)$;

г) $\left(1-\frac{m}{n}\right):\left(1+\frac{m}{n}\right)$.

1.216. Спрасціце рацыянальны выраз:

а) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{ab}{(a-b)^2}$;

б) $\left(\frac{9x}{y}-\frac{y}{x}\right):\frac{(3x+y)^2}{2xy}$;

в) $\frac{3mn}{m+n}\cdot\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$;

г) $\frac{2c-d}{cd}:\left(\frac{4c}{d^2}-\frac{1}{c}\right)$;

д) $\left(\frac{16b}{a}-\frac{a}{4b}\right)\cdot\frac{1}{a-8b}$;

е) $\left(36m^2-n^2\right):\left(\frac{1}{2m}+\frac{3}{n}\right)$;

ж) $\frac{1}{x}-\frac{x-5}{x}:(x-5)^2$;

з) $(c-4)\cdot\frac{1}{16-c^2}+\frac{3}{c}$.

1.217. Спрасціце выраз $\frac{3ab}{9b^2-a^2}\cdot\left(\frac{1}{3b}-\frac{1}{a}\right)$ і знайдзіце яго значэнне пры $a = 8\frac{1}{7}$, $b = 1\frac{2}{7}$.

1.218. Выканайце дзеянні:

а) $\left(\frac{40}{a-6}+a+6\right)\cdot\frac{a^2-12a+36}{a^2+4}$; б) $\left(x-\frac{x^2+1}{x+1}\right):\frac{1-x}{x^2+2x+1}$;

в) $\frac{1}{c^2+6c+9}\cdot\frac{c^2-9}{c}-\frac{c-9}{c^2-9}$; г) $\frac{5}{m-2}-\frac{m+2}{m^2-2m+1}:\frac{m^2-4}{5m-5}$.

1.219. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\frac{5b}{4b+2}-\frac{b}{2-4b}\right):\frac{9b^2-3b}{1-4b+4b^2}$ пры $b = 4{,}5$.

1.220. Дакажыце тоеснасць

$$\left(\frac{1}{1-2n}-2n-1\right):\left(\frac{4n^2}{2n-1}-2n\right)=-2n.$$

1.221. Спрасціце выраз:

а) $\frac{c+24}{c-5}-\frac{c}{c+5}\cdot\frac{c^2-25}{c}-\frac{6c-1}{c-5}$;

б) $\frac{2y^2-y-1}{y^2-1}+\frac{y}{y^2-1}:\frac{y}{1-y}-\frac{y-1}{y+1}$.

1.222. Пераўтварыце рацыянальны выраз:

а) $\left(\frac{1}{2a-4}-\frac{4}{a^2-4}-\frac{1}{a+2}\right)\cdot\left(a^2-4a+4\right)$;

б) $\left(\frac{2b}{b-5}+\frac{b}{b^2-10b+25}\right):\frac{2b-9}{b^2-25}-\frac{5b+25}{b-5}$;

в) $\frac{4xy}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

г) $\frac{12}{m^2-9}+\frac{6m}{9-6m+m^2}\cdot\left(\frac{3}{m^2+3m}-\frac{m}{3m+9}\right)$.

1.223. Дакажыце, што значэнне выразу не залежыць ад значэнняў зменных:

а) $\left(\frac{b^2}{ab-a^2}+\frac{a}{a-b}\right):\frac{a+b}{a}$; б) $\left(\frac{1}{y+2}-\frac{4}{4-y^2}\right)\cdot\left(y^2-2y\right)-y$;

в) $\frac{9a^2-16b^2}{7a}\cdot\left(\frac{3b-4a}{4b^2-3ab}-\frac{3b+4a}{4b^2+3ab}\right)$;

г) $\left(m^2-2m+1\right)\cdot\left(\frac{1}{(1-m)^2}-\frac{1}{1-m^2}\right)+\frac{m+3}{m+1}$.

1.224. Спрасціце дробавы рацыянальны выраз, прымяніўшы законы арыфметычных дзеянняў:

а) $\frac{4y^2-9}{2y^2-7y+3}:\frac{3+2y}{1-2y}+\frac{9-4y}{3-y}$;

б) $\left(\frac{3x-x^2}{x^2-6x+9}+\frac{2x}{2x+5}\right)\cdot\left(2x^2-x-15\right)$;

в) $\left(\frac{a}{a^2-6a+9}-\frac{a+2}{a^2-a-6}\right)\cdot\left(2a-6\right)^2$;

г) $\left(\frac{p}{3p^2+p-2}+\frac{8}{9p^2-4}\right):\frac{3p+4}{9p^2-4}-\frac{1}{p+1}$.

1.225. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам і выканайце дзеянні:

а) $\left(b^{-2}-a^{-2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}$;

б) $\left(a^{-2}+2(ab)^{-1}+b^{-2}\right)\cdot(a+b)^{-1}$;

в) $\left(a^{-1}-(a-b)^{-1}\right)\cdot\left(\frac{b}{a-b}\right)^{-2}-1$;

г) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right)^{-1}$.

1.226. Якое правіла можна выкарыстаць для скарачэння дробу:

а) $\frac{2\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}}$; б) $\frac{2\sqrt{x}-x}{x-4}$;

в) $\frac{m-6\sqrt{m}+9}{3\sqrt{m}-m}$; г) $\frac{b-2\sqrt{5b}+5}{5-b}$?

Выканайце скарачэнне ў адпаведнасці з правілам.

1.227. Выканайце адніманне

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{x+4\sqrt{xy}+4y}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}},$$

папярэдне скараціўшы дробы.

1.228. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\frac{10\sqrt{m}}{n-m}+\frac{5}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$; г) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-1}-\frac{\sqrt{b}}{b-1}$.

1.229. Устанавіце парадак дзеянняў і спрацціце выраз:

а) $\left(\sqrt{xy}-\dfrac{xy}{x+\sqrt{xy}}\right):\dfrac{x^2y}{x-y}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{m}-2}{\sqrt{m}+2}+\dfrac{8\sqrt{m}}{m-4}\right):\dfrac{\sqrt{m}+2}{m-2\sqrt{m}}$;

в) $\left(\dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{y-1}{2}$;

г) $\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-2\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)$.

1.230. Дакажыце, што значэнне выразу

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+a}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

не залежыць ад значэнняў зменнай.

1.231. Знайдзіце значэнне выразу

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ пры } x=7{,}25.$$

1.232*. Запішыце выраз у выглядзе рацыянальнага дробу:

а) $\dfrac{1-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{6x-9}{x}-x}$; б) $\dfrac{a-\dfrac{bc}{b-c}}{b-\dfrac{ac}{a-c}}$; в) $\dfrac{a-3+\dfrac{2}{a}}{a+\dfrac{1}{a}-2}$.

1.233*. Спрацціце дробавы рацыянальны выраз

$$\left(\frac{y}{xy-x^2}+\frac{x}{xy-y^2}\right):\frac{x^2+2xy+y^2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$$

і знайдзіце яго значэнне пры $x=-\dfrac{1}{7}$; $y=\dfrac{1}{3}$.

1.234*. Пераўтварыце рацыянальны выраз

$$\left(\frac{y^2-xy}{xy^2+x^3}-\frac{2y^2}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}\right)\cdot\left(1-\frac{x-1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{xy}{y+1}.$$

1.235*. Устанавіце парадак дзеянняў і спрацціце выраз:

а) $\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right):\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{1+2x+x^2}\right)^{-1}$; б) $\dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{1-\left(\dfrac{1-x}{2x}\right)^{-1}}$.

1.236*. Пераўтварыце рацыянальны выраз да нескарачальнага дробу:

а) $\frac{x^2+2x}{4x^2-1}\cdot\left(\frac{1}{x+2}:x-\left(\frac{x^2}{x+2}-x+2\right)\right);$

б) $\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{ab+b^2}+\frac{b}{a^2+ab}\right)\right):\frac{b^2}{a^2-b^2}.$

1.237*. Найбольш рацыянальным спосабам знайдзіце, пры якім значэнні зменнай a значэнне выразу

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x}{a}+1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{x}{a}+1\right)\cdot\frac{a}{x^4+x^2a^2-a^4}\ \text{роўна}\ -\frac{1}{125}.$$

1.238*. Спрасціце выраз $\frac{1}{a-\frac{3}{b+\frac{1}{c}}}\cdot\frac{3}{c+\frac{1}{b}}-\frac{3b}{abc+a-3c}.$

1.239*. Дакажыце, што значэнне выразу

$$\left(\left(\left(\frac{a-4}{a}-a+3\right)\left(\frac{1}{a+2}-\frac{a+2}{a^2-4a+4}\right)\right)^{-1}-\frac{a}{8}\right)^{-1}$$

не залежыць ад значэнняў зменнай.

1.240*. Раскладзіце лічнік дробу на множнікі і скараціце дроб $\frac{x+\sqrt{x}+y-\sqrt{y}-2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$

1.241. Запішыце ў выглядзе рацыянальнага дробу выраз:

а) $\frac{21}{m^2}\cdot\left(\frac{m}{7}+\frac{m}{2}\right);$ б) $\left(\frac{3}{a+b}-\frac{2}{a-b}\right):\frac{a-5b}{a-b}.$

1.242. Устанавіце парадак дзеянняў і спрасціце выраз:

а) $\left(\frac{x}{y}-\frac{4y}{x}\right)\cdot\frac{xy}{(x+2y)^2};$ б) $\frac{m-3n}{mn}:\left(\frac{m}{n^2}-\frac{9}{m}\right);$

в) $\left(\frac{8b}{a}-\frac{a}{2b}\right):(a+4b);$ г) $\frac{7}{b^2-4}\cdot(b-2)^2-\frac{14}{b+2}.$

1.243. Выканайце пераўтварэнне рацыянальнага выразу:

а) $\left(a-\frac{1+a^2}{a-1}\right):\frac{a^2+2a+1}{a-1};$

б) $\left(\frac{21}{m+4}+m-4\right)\cdot\frac{m^2+8m+16}{m^2+5}$;

в) $\frac{x+6}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-4}:\frac{x}{x^2+4x+4}$.

1.244. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\frac{1}{1-a}-a\right):\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$ пры $a=-8{,}1$.

1.245. Дакажыце тоеснасць

$$\left(\frac{36}{6-a}-a-6\right):\frac{a^2}{a^2-12a+36}=6-a.$$

1.246. Вызначце парадак дзеянняў і спрасціце рацыянальны выраз $\frac{5x+21}{9-x^2}+\frac{5}{x^2-9}:\frac{5}{3-x}-\frac{x+3}{3-x}$.

1.247. Выканайце пераўтварэнне рацыянальнага выразу:

а) $\left(\frac{1}{4c-16}-\frac{4}{c^2-16}-\frac{1}{2c+8}\right)\cdot\left(c^2-8c+16\right)$;

б) $\left(\frac{5a}{a+1}-\frac{3a}{a^2+2a+1}\right):\frac{5a+2}{a^2-1}+\frac{a-1}{a+1}$.

Цэлы ці дробавы выраз атрымаўся ў выніку пераўтварэнняў?

1.248. Дакажыце, што значэнне выразу не залежыць ад значэнняў зменных:

а) $\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a-b}\right)$;

б) $\left(\frac{m+n}{m-n}-\frac{m-n}{m+n}\right):\frac{4mn}{n^2-m^2}$.

1.249. Спрасціце выраз:

а) $\frac{9y^2-4}{2y^2-5y+2}\cdot\frac{2-y}{3y+2}+\frac{y}{1-2y}$;

б) $\frac{21}{4y+6}+\frac{y^2-25}{y+2}\cdot\left(\frac{6}{25-y^2}+\frac{y}{2y^2-7y-15}\right)$.

1.250. Прымяніце ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам і выканайце дзеянні:

а) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-1}$;

б) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}:\left(\frac{1}{y^{-1}}-\frac{1}{x^{-1}}\right)^{-1}$.

1.251. Запішыце выраз у выглядзе рацыянальнага дробу

$$\left(\frac{2xy}{4x^2-9y^2}+\frac{y}{3y-2x}\right)\cdot\left(1-\frac{2x-3y}{2x+3y}\right)^{-1}.$$

1.252. Скараціце дроб, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $\dfrac{b-5\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{c+5\sqrt{c}}{c-25}$;

в) $\dfrac{a+8\sqrt{a}+16}{a+4\sqrt{a}}$; г) $\dfrac{x+2\sqrt{7x}+7}{x-7}$.

1.253. Выканайце складанне $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{4a-b}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, папярэдне скараціўшы дробы.

1.254. Выканайце дзеянні, выкарыстаўшы алгарытм складання дробаў:

а) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$; б) $\dfrac{6\sqrt{a}}{a-b}-\dfrac{3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

1.255. Спрасціце выраз:

а) $\left(\sqrt{ab}+\dfrac{ab}{a-\sqrt{ab}}\right):\dfrac{a^2b}{a-b}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2}$;

в) $\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-2\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{4\sqrt{a}}{a-1}\right):\dfrac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}}$.

1.256. Дакажыце тоеснасць

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{a^2+ab}{a-b}=\frac{1}{a}.$$

1.257*. Запішыце выраз у выглядзе рацыянальнага дробу:

а) $\dfrac{1-\dfrac{4}{m}}{\dfrac{8m-16}{m}-m}$; б) $\dfrac{t-2+\dfrac{1}{t}}{t+\dfrac{3}{t}-4}$.

* * *

1.258. Запішыце лік $3{,}27\cdot10^{-4}$ у выглядзе дзесятковага дробу.

1.259. Графік функцыі $y=x^2-2x$ праходзіць праз пункт, ардыната якога роўна 15. Чаму роўна абсцыса гэтага пункта? Колькі рашэнняў мае задача?

1.260. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{x+2}{2}\leqslant\dfrac{x+2}{6},\\ \dfrac{x}{2}+x\geqslant\dfrac{3x}{4}-\dfrac{x-7}{8}.\end{cases}$

1.261. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

1.262. Рашыце ўраўненне $0{,}4\left(1{,}5x-\frac{1}{3}\right)=0{,}6x-0{,}1$.

1.263. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай мае сэнс выраз:

а) $\sqrt{5-x}$; б) $\sqrt{x^2-x-2}$.

1.264. Вядома, што колькасць дзяўчынак у класе адносіцца да колькасці хлопчыкаў як $2:1$. Выберыце ўсе правільныя сцверджанні:

а) дзяўчынак у класе ў тры разы больш, чым хлопчыкаў;

б) колькасць хлопчыкаў складае $\frac{1}{3}$ колькасці вучняў класа;

в) у класе хлопчыкаў больш, чым дзяўчынак;

г) хлопчыкаў у класе ў два разы менш, чым дзяўчынак;

д) колькасць дзяўчынак складае 50 % ад колькасці вучняў класа.

1.265. У 9.00 з горада *A* ў горад *B* выехаў аўтобус са скорасцю 60 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, а праз 40 мін па тым жа маршруце выехаў легкавы аўтамабіль са скорасцю 80 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$. Ці праўда, што легкавы аўтамабіль дагоніць аўтобус яшчэ да поўдня?

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць азначэнні цэлага рацыянальнага выразу, дробавага рацыянальнага выразу, рацыянальнага дробу;
- ведаць асноўную ўласцівасць дробу, азначэнне паняцця «скарачэнне дробу»;
- умець скарачаць рацыянальныя дробы;
- умець прымяняць асноўную ўласцівасць рацыянальнага дробу для прывядзення дробаў да новага назоўніка;
- умець прымяняць алгарытмы складання і аднімання рацыянальных дробаў для пераўтварэння рацыянальных выразаў;
- умець прымяняць алгарытм множання рацыянальных дробаў для пераўтварэння рацыянальных выразаў;
- умець выконваць дзеянне ўзвядзення ў ступень рацыянальнага дробу;

- умець выконваць дзеянне дзялення рацыянальных дробаў і прымяняць правілы дзялення рацыянальных дробаў для спрашчэння вылічэнняў;
- умець выконваць заданні на дзеянні з рацыянальнымі дробамі;
- умець прымяняць правілы і алгарытмы пераўтварэння рацыянальных выразаў для спрашчэння вылічэнняў.

Я правяраю свае веды

1. Сярод выразаў $\frac{3}{8m+n}$; $\frac{3a}{8b^3}$; $\frac{a}{b}+14$; $\frac{x^2-x+7}{3x}$; $3{,}6x^2y$; $\frac{a+1}{a-7}$; $2x-\frac{y^4}{5}$; $2\sqrt{cd}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{a^2+ac}{5}$ выберыце:

а) цэлыя рацыянальныя выразы;

б) дробавыя рацыянальныя выразы.

2. Выберыце ўсе правільныя роўнасці:

а) $\frac{2a+b}{2c}=\frac{a+b}{c}$; б) $\frac{(a-b)^2}{b-a}=\frac{-(b-a)^2}{b-a}$;

в) $\frac{1}{b}\cdot a^2=\frac{a^2}{b}$; г) $\frac{5a+5b}{a+b}=4a+4b$;

д) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{b-a}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a-b}$; е) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b}=2a-2b$.

3. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу $\frac{x^2-2x}{x+1}$ і вылічыце значэнне дадзенага дробу пры $x=9$.

4. Прывядзіце дроб $\frac{a}{x-3}$ да назоўніка:

а) $3-x$; б) x^2-3x; в) x^2-9; г) x^2-6x+9.

5. Скараціце рацыянальны дроб:

а) $\frac{18m^2n}{24mn^2}$; б) $\frac{p^2-25q^2}{10q-2p}$; в) $\frac{3y^2+24y}{y^2+16y+64}$;

г) $\frac{a^2-6a+9}{9-a^2}$; д) $\frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$; е) $\frac{2x-3}{2x^2-x-3}$.

Якімі спосабамі раскладання мнагачленаў на множнікі вы карысталіся?

6. Выканайце складанне або адніманне:

а) $\frac{2c}{c-1}+\frac{1-c}{c-1}$; б) $\frac{2a+1}{a-1}-\frac{2-a}{1-a}$;

в) $\frac{2m-1}{(m-1)^2}-\frac{3-2m}{(1-m)^2}$; г) $5x^2-\frac{15x^2-1}{3}$;

д) $\frac{5b}{b^2-1}-\frac{5}{b+1}$;
е) $\frac{c^2}{c^2-4c+4}+\frac{c}{2-c}$;

ж) $\frac{x+7}{xy-9y+5x-45}-\frac{1}{y+5}$;
з) $\frac{d^2}{d^2-5d+4}-\frac{1-d}{4-d}$.

7. Якое правіла трэба выкарыстаць, каб выканаць множанне рацыянальных дробаў; дзяленне рацыянальных дробаў; узвядзенне рацыянальнага дробу ў ступень? Выкарыстайце гэтыя правілы і выканайце дзеянні:

а) $\frac{a^6b^3}{15xy}\cdot\frac{12x^2}{a^4b^3}$;
б) $\frac{x^4}{x-y}:\frac{x^3}{2x-2y}$;

в) $\left(\frac{a^3b^2}{2c}\right)^5\cdot 16c^4$;
г) $\left(\frac{3x^2}{y^3z}\right)^2:\frac{27x^3}{y^5z^2}$;

д) $\frac{c^2-1}{c^3+2c^2}\cdot\frac{c^4+2c^3}{(2c-2)^2}$;
е) $\left(a^2+9-6a\right):\frac{(3-a)^2}{3a+1}$;

ж) $\frac{a^2-1}{4a+8b}\cdot\frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$;
з) $\frac{m^2+2m}{m^2-3x+mx-3m}:\frac{m^2-4}{m^2-5m+6}$.

8. Вызначце парадак дзеянняў і спрасціце рацыянальны выраз:

а) $\left(\frac{5}{x-2}-x-2\right)\cdot\frac{2-x}{x^2-6x+9}$;

б) $\left(\frac{a^2}{a+5}-\frac{a^3}{a^2+10a+25}\right):\left(\frac{a}{a+5}-\frac{a^2}{a^2-25}\right)$;

в) $\left(\frac{a+b}{a^2-ab}-\frac{2b}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{b^2-a^2}{1+\frac{b^2}{a^2}}$;

г) $\left(\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x^2-5x+6}+\frac{2x}{x-2}\right):\frac{2x+1}{3}-\frac{x-12}{9-3x}$.

9. Дакажыце тоеснасць $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(x+y)^2}+\frac{2x^{-1}+2y^{-1}}{(x+y)^3}=x^{-2}y^{-2}$.

10. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x)=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x^2+3x}{x}$;

б) $f(x)=\frac{x^3-5x^2+4x}{x-1}$;

в) $f(x)=\frac{12x+12}{x^2+x}$.

Практычная матэматыка

1. У некаторых краінах свету для вымярэння тэмпературы карыстаюцца шкалой Фарэнгейта. Для пераводу тэмпературы са шкалы Цэльсія ў шкалу Фарэнгейта карыстаюцца формулай $F = 1{,}8C + 32$, дзе C — тэмпература па Цэльсію, а F — тэмпература па Фарэнгейту. Выведзіце формулу, з дапамогай якой можна перавесці тэмпературу са шкалы Фарэнгейта ў шкалу Цэльсія. Ці трэба хвалявацца, калі ў дзіцяці тэмпература 100 °F? Пры якой тэмпературы колькасць градусаў па Цэльсію і па Фарэнгейту аднолькавая?

2. Гандлёвая сетка набыла партыю абутку агульным коштам 180 тыс. р. Першы тыдзень у крамах сеткі абутак прадаваўся з 25 %-й нацэнкай. Затым нацэнка была зніжана да 16 %. У выніку ўся партыя абутку была прададзена на 20 % даражэй, чым набыта. На якую суму было прададзена абутку за першы тыдзень?

Займальная матэматыка

Даследуем, абагульняем, робім высновы

Даследчае заданне.

Ці праўда, што $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$? Запішыце ў выглядзе дробу выраз

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)}.$$

Абагульніце вынік і прыдумайце аналагічнае заданне для сяброў.

Рыхтуемся да алімпіяд

1. Дакажыце, што калі $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-a}{a+b} = 1$, то $\frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} = 4$.

2. Трохзначны лік расклалі на цэлыя множнікі. Пасля гэтага некаторыя множнікі павялічылі не больш чым на 10 %, так, каб зноў атрымаўся цэлы лік. На якую найбольшую колькасць працэнтаў мог павялічыцца здабытак?

3. Скараціце дроб $\frac{x^3 + 2x^2 - 16x - 32}{(x-1)^5 + (1-x)^5 + (x-1)^2 - 9}$.

Раздзел 2

ФУНКЦЫІ

§ 6. Функцыя лікавага аргумента. Абсяг вызначэння, мноства значэнняў. Спосабы задання функцыі

2.1. Выберыце пункты, праз якія праходзіць графік функцыі $f(x) = x^2 - 4x$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(-1;\ 3)$; в) $C(5;\ 5)$.

2.2. Ці праўда, што пункт $M(2;\ 9)$ належыць графіку функцыі:

а) $f(x) = 2x + 5$; б) $g(x) = \frac{9}{x}$; в) $h(x) = 2x^2 + 1$?

2.3. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $g(x) = 1 - x^2$.

Вам вядома, што залежнасць паміж дзвюма зменнымі, пры якой кожнаму значэнню адной зменнай адпавядае адзінае значэнне другой зменнай, называецца **функцыянальнай залежнасцю** або **функцыяй**. Удакладнім азначэнне функцыі.

Гавораць, што **зададзена функцыя** $y = f(x)$, калі зададзены:

- лікавае мноства X;
- правіла (закон, залежнасць) f, па якім кожнаму элементу x з мноства X ставіцца ў адпаведнасць адзіны лік y.

Мноства X называюць **абсягам вызначэння функцыі** $y = f(x)$ і абазначаюць $D(f)$.

Значэнні зменнай x называюць значэннямі аргумента, а значэнні зменнай y — значэннямі функцыі.

Мноства $X = D(f)$ — гэта мноства ўсіх значэнняў аргумента. Мноства X можа быць лікавым прамежкам, аб'яднаннем некалькіх прамежкаў, канечным або бясконцым мноствам лікаў.

Мноства ўсіх значэнняў, якія прымае функцыя $y = f(x)$, называюць **мноствам значэнняў функцыі** і абазначаюць $E(f)$.

Функцыя $y = f(x)$

x — аргумент

$D(f)$ — абсяг вызначэння

$E(f)$ — мноства значэнняў

Каб задаць функцыю, трэба:

① пазначыць абсяг вызначэння функцыі.

② задаць правіла, з дапамогай якога па значэнні аргумента x можна знайсці адпаведнае значэнне функцыі y.

Напрыклад, разгледзім функцыі $f(x) = x^2$, калі $D(f) = \boldsymbol{R}$, і $g(x) = x^2$, калі $D(g) = [0; +\infty)$.

Залежнасць паміж зменнымі ў гэтых функцыях задаецца адным і тым жа правілам: значэнне аргумента ўзводзіцца ў квадрат, і атрымліваецца значэнне функцыі. Але, згодна з азначэннем, гэта *дзве розныя* функцыі, паколькі ў іх *розныя* абсягі вызначэння.

Калі абсяг вызначэння функцыі $y = f(x)$ не пазначаны, то маецца на ўвазе, што абсяг вызначэння функцыі складаецца з усіх тых значэнняў зменнай x, пры якіх выраз $f(x)$, што задае функцыю, мае сэнс.

Напрыклад, разгледзім функцыі $f(x) = \sqrt{x - 3}$, $g(x) = \frac{4}{x - 1}$ і $h(x) = x^2 - 4x + 3$. Выраз $\sqrt{x - 3}$ мае сэнс пры $x \in [3; +\infty)$, паколькі пры гэтых значэннях зменнай x падкарэнны выраз неадмоўны і корань з ліку мае сэнс. Значыць, $D(f) = [3; +\infty)$.

Выраз $\frac{4}{x - 1}$ мае сэнс для ўсіх значэнняў зменнай x, акрамя ліку 1. Тады $D(g) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Абсягам вызначэння функцыі $h(x) = x^2 - 4x + 3$ з’яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, г. зн. $D(h) = (-\infty; +\infty)$, паколькі выраз $x^2 - 4x + 3$ мае сэнс пры любым значэнні зменнай x.

Аналітычны спосаб задання функцыі

Калі адпаведнасць паміж значэннямі аргумента і значэннямі функцыі задаецца з дапамогай формулы, то такі спосаб задання функцыі называюць *аналітычным*.

Так, функцыі $g(x) = x^3$, $h(x) = \frac{1}{x}$ зададзены аналітычна.

Адзначым, што адна і тая ж функцыя можа быць зададзена рознымі формуламі. Напрыклад, формулы $y = |x|$ і $y = \sqrt{x^2}$ задаюць адну і тую ж функцыю.

Славесны спосаб задання функцыі

Калі адпаведнасць паміж значэннямі аргумента і значэннямі функцыі апісваецца словамі, г. зн. калі тлумачыцца, якім чынам значэнню аргумента ставіцца ў адпаведнасць значэнне функцыі, то такі спосаб задання функцыі — **славесны.**

Разгледзім прыклад функцыі, якая зададзена славесна: «Функцыя $y = g(x)$ вызначана на мностве натуральных лікаў, і кожнаму значэнню аргумента ставіцца ў адпаведнасць сума лічбаў у яго дзесятковым запісе». Вылічым некалькі значэнняў дадзенай функцыі: $g(12) = 1 + 2 = 3$; $g(325) = 3 + 2 + 5 = 10$; $g(30\,000) = 3 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3$.

Таблічны спосаб задання функцыі

Калі адпаведнасць паміж значэннямі аргумента і значэннямі функцыі задаецца з дапамогай табліцы, у першым радку якой запісваюцца значэнні аргумента, а ў другім — адпаведныя значэнні функцыі, то гавораць, што функцыя зададзена **табліцай.**

x	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	y_3	...	y_{n-1}	y_n

Напрыклад, метэаролагі складаюць табліцы, якія апісваюць розныя залежнасці паміж значэннямі назіраемых велічынь.

Табліца 1. **Сутачныя сумы сонечнай радыяцыі пры адсутнасці атмасферы (Паўночнае паўшар'е, зімовае сонцастаянне)**

Шырата, град.	20	30	40	50	60	70	80	90
Сутачныя сумы сонечнай радыяцыі, кал/см^2 сут.	624	480	327	181	51	0	0	0

Табліца 1 задае функцыю $p(x)$ залежнасці сутачнай сумы сонечнай радыяцыі ад шыраты, на якой выконваецца назіранне.

З дапамогай табліцы знойдзем $p(30)$; $p(60)$; $p(70)$ і высветлім, на якой шыраце значэнне сутачнай сумы радыяцыі роўна нулю. Для гэтага знойдзем значэнні функцыі $y = p(x)$ па значэннях аргумента: $p(30) = 480$; $p(60) = 51$; $p(70) = 0$. Затым знойдзем значэнні аргумента па значэннях функцыі: значэнне сутачной сумы радыяцыі роўна нулю на шыротах: 70°; 80°; 90°.

Графічны спосаб задання функцыі

Спосаб задання функцыі з дапамогай мноства пунктаў каардынатнай плоскасці называецца **графічным**.

Няхай крывая L (рыс. 2) — некаторае мноства пунктаў на каардынатнай плоскасці.

Напомнім, як па значэнні аргумента x знайсці значэнне функцыі $f(x)$. Возьмем на восі абсцыс адвольны пункт x_0 і правядзём праз яго прамую, паралельную восі ардынат. Яна перасячэ крывую L у некаторым пункце $A(x_0;\ y_0)$. Ардыната $y_0 = f(x_0)$ гэтага пункта з'яўляецца значэннем функцыі пры значэнні аргумента, роўным x_0.

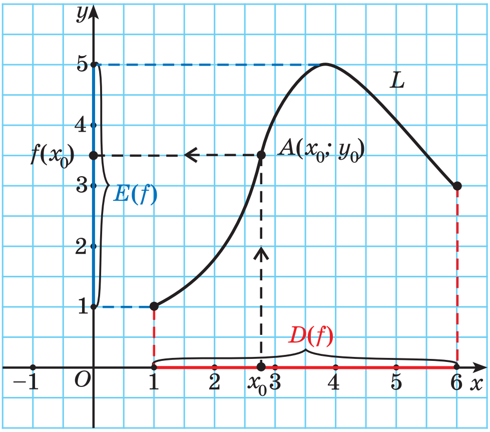
Такім чынам задаецца адпаведнасць паміж мноствам значэнняў аргумента і значэннямі функцыі.

Абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства абсцыс пунктаў крывой L, а мноствам значэнняў функцыі — мноства ардынат гэтых пунктаў.

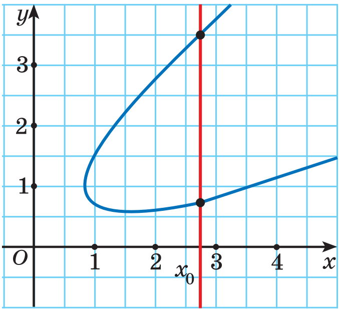
Па графіку вызначаем, што $D(f) = [1;\ 6]$, а $E(f) = [1;\ 5]$.

Важна памятаць, што не любое мноства пунктаў на каардынатнай плоскасці задае функцыю. Напрыклад, крывую, паказаную на малюнку 3, прамая $x = x_0$ перасякае ў двух пунктах, г. зн. значэнню x_0 адпавядае не адзінае значэнне y. Значыць, гэта крывая не задае функцыю.

Адвольная крывая на каардынатнай плоскасці задае функцыю, калі любая прямая, паралельная восі ардынат, мае з гэтай крывой не больш за адзін агульны пункт.



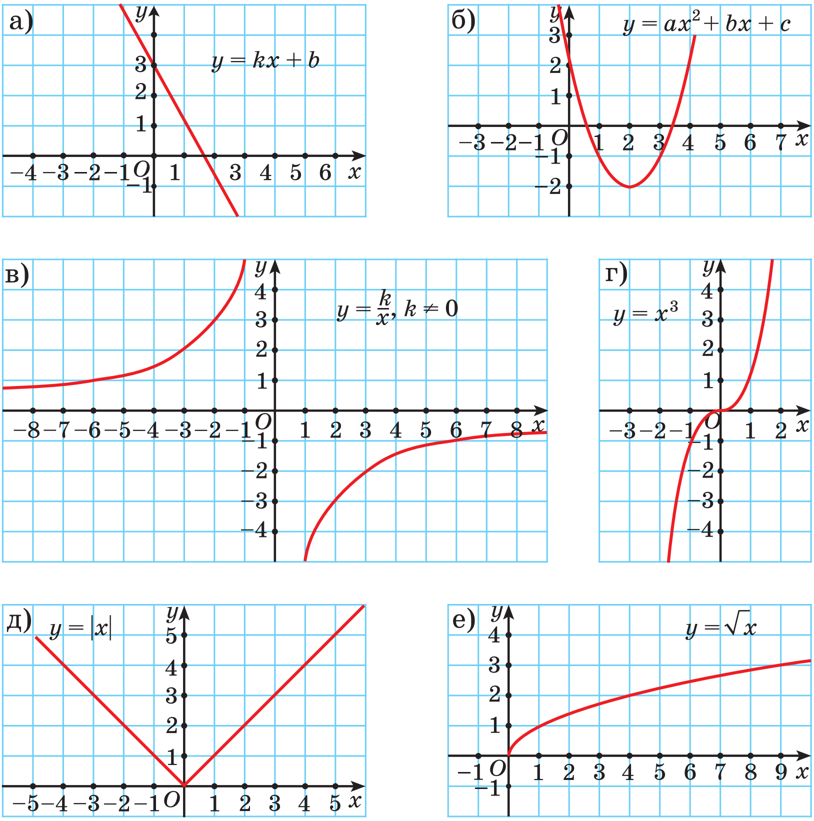
Рыс. 2



Рыс. 3

Азначэнне. Мноства ўсіх пунктаў плоскасці, абсцысы якіх роўны значэнням аргумента, а ардынаты — адпаведным значэнням функцыі, называюць **графікам функцыі**.

З уласцівасцямі і графікамі некаторых функцый вы пазнаёміліся ў 7—8-х класах. Так, вам вядома, што графікам лінейнай функцыі $y = kx + b$ з'яўляецца прамая (рыс. 4, *а*), графікам квадратычнай функцыі $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, — парабала (рыс. 4, *б*), графікам адваротнай прапарцыянальнасці $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, — гіпербала (рыс. 4, *в*). Акрамя таго, вы вывучалі ўласцівасці функцый $y = x^3$, $y = |x|$ і $y = \sqrt{x}$, графікі якіх паказаны на рысунках 4, *г*—*е*.



Рыс. 4

Функцыя лікавага аргумента

1. Знайдзіце значэнне функцыі:

а) $f(x) = -x^2 - 1$;

б) $g(x) = \dfrac{2x}{x^3 + 4}$;

в) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, — калі значэнне аргумента роўна –2.

а) Значэнне $x = -2$ падставім у формулу функцыі $f(x) = -x^2 - 1$ і атрымаем: $f(-2) = -(-2)^2 - 1 = -5$.

б) $g(-2) = \dfrac{2 \cdot (-2)}{(-2)^3 + 4} = \dfrac{-4}{-4} = 1$.

в) $h(-2) = \sqrt{(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2. Знайдзіце, пры якім значэнні аргумента значэнне функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 8$;

б) $g(x) = \dfrac{8}{x}$;

в) $h(x) = |x|$ — роўна 1.

а) $f(x) = 1$. Рэшым ураўненне:

$$x^2 - 8 = 1;\ x^2 = 9;\ \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Такім чынам, значэнне функцыі $f(x)$ роўна 1 пры значэннях аргумента, роўных –3 і 3.

б) $g(x) = 1$; $\dfrac{8}{x} = 1$; $x = 8$. Значыць, значэнне функцыі $g(x)$ роўна 1 пры значэнні аргумента, роўным 8.

в) $h(x) = 1$; $|x| = 1$; $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$ Значэнне функцыі $h(x)$ роўна 1 пры значэннях аргумента, роўных 1 і –1.

Спосабы задання функцыі. Графік функцыі

3. Функцыя $g(x) = \dfrac{4}{x - 3}$ зададзена аналітычна на мностве $D = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 7\}$. Задайце яе:

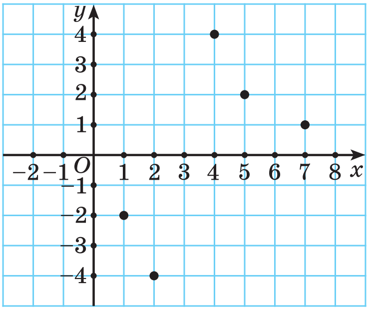
а) табліцай;

б) графічна.

а) Вылічым па зададзеных значэннях аргумента значэнні функцыі і запоўнім табліцу:

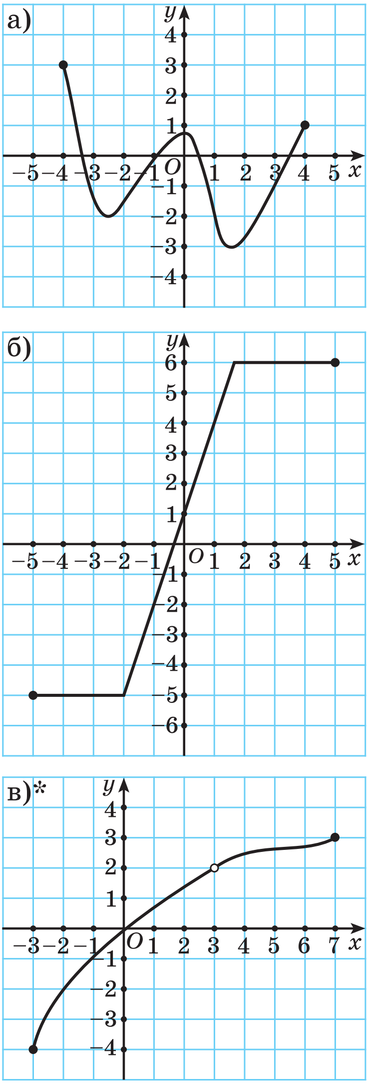
x	1	2	4	5	7
$g(x)$	–2	–4	4	2	1

б) Пабудуем пункты, каардынаты якіх зададзены табліцай.



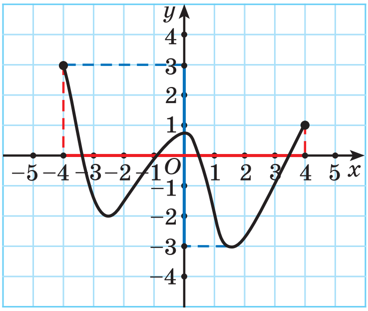
Абсяг вызначэння, мноства значэнняў функцыі

4. Знайдзіце $D(f)$ і $E(f)$ па графіку функцыі, паказанаму на рысунку 5.



Рыс. 5

а) Абсягам вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца мноства абсцыс пунктаў графіка функцыі, а мноствам значэнняў — мноства ардынат гэтых пунктаў.



Па дадзеным графіку вызначаем, што $D(f) = [-4;\ 4]$, а $E(f) = [-3;\ 3]$.

б) Абсягам вызначэння функцыі, графік якой паказаны на рысунку 5, *б*, з'яўляецца адрэзак $[-5;\ 5]$, г. зн. $D(f) = [-5;\ 5]$.

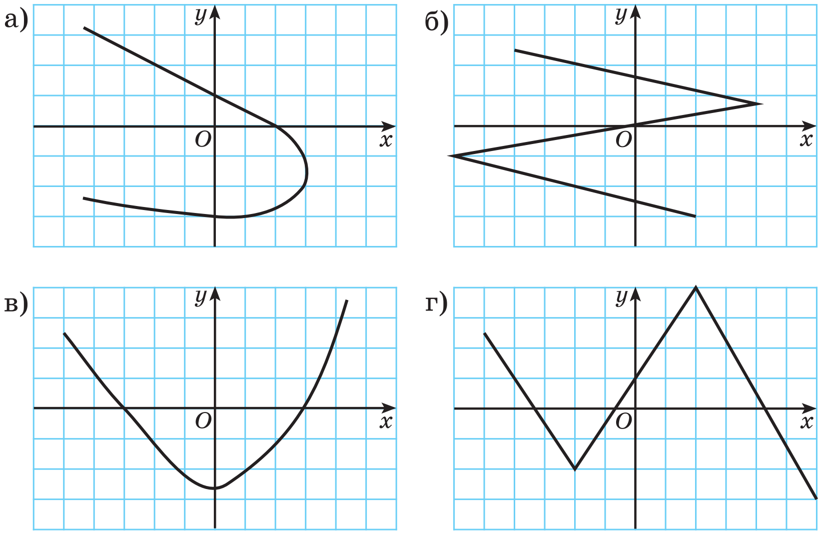
Паколькі $-5 \leqslant y \leqslant 6$, то $E(f) = [-5;\ 6]$.

в)* Паколькі на графіку функцыі няма пункта з каардынатамі (3; 2), то $D(f) = [-3;\ 3) \cup (3;\ 7]$, а $E(f) = [-4;\ 2) \cup (2;\ 3]$.

5. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі: а) $g(x)=\dfrac{5x-1}{1-3x}$; б) $p(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}+\dfrac{9x-2}{x}$; в) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$; г) $h(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x-4}}+\sqrt{13-2x}$.	а) Абсягам вызначэння дадзенай функцыі з’яўляецца мноства ўсіх лікаў, пры якіх назоўнік дробу $\dfrac{5x-1}{1-3x}$ не роўны нулю, г. зн. $1-3x\neq 0$; $x\neq\dfrac{1}{3}$. Тады $D(g)=\left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$. б) Дроб $\dfrac{2x+3}{x+2}$ мае сэнс для ўсіх значэнняў зменнай x, акрамя $x=-2$, а дроб $\dfrac{9x-2}{x}$ мае сэнс для ўсіх значэнняў зменнай x, акрамя $x=0$. Значыць, абсягам вызначэння дадзенай функцыі з’яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў -2 і 0. Такім чынам, $D(p)=(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. в) Абсягам вызначэння функцыі $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ з’яўляецца мноства ўсіх значэнняў зменнай x, пры якіх падкарэнны выраз неадмоўны, г. зн. $x^2-5x+4\geqslant 0$. Рэшым атрыманую квадратную няроўнасць. Нулямі функцыі $y=x^2-5x+4$ з’яўляюцца лікі 1 і 4. Галіны парабалы накіраваны ўверх. Неадмоўныя значэнні функцыя $y=x^2-5x+4$ прымае пры $x\in(-\infty;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$. Значыць, $D(f)=(-\infty;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$. г) Абсяг вызначэння дадзенай функцыі супадае з мноствам рашэнняў сістэмы няроўнасцей: $\begin{cases}x-4>0,\\13-2x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>4,\\2x\leqslant 13;\end{cases}$ $\begin{cases}x>4,\\x\leqslant 6{,}5;\end{cases}$ $D(h)=(4;\ 6{,}5]$.
6. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі: а) $f(x)=\lvert x\rvert+4$;	а) Паколькі па азначэнні модуля ліку $\lvert x\rvert\geqslant 0$ для любога ліку x, то $\lvert x\rvert+4\geqslant 4$. Значыць, $E(f)=[4;\ +\infty)$.

б) $g(x) = -x^2 + 6x - 2$; в) $h(x) = \sqrt{x+3} - 5$.	б) Графікам функцыі $g(x) = -x^2 + 6x - 2$ з'яўляецца парабала, галіны якой накіраваны ўніз $(a = -1 < 0)$. Значыць, мноствам значэнняў дадзенай функцыі з'яўляецца прамежак $(-\infty;\ y_в]$. Знойдзем абсцысу вяршыні парабалы: $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3.$ Тады $y_в = -3^2 + 6 \cdot 3 - 2 = -9 + 18 - 2 = 7.$ Значыць, $E(g) = (-\infty;\ 7]$. в) Па азначэнні арыфметычны квадратны корань з неадмоўнага ліку з'яўляецца неадмоўным лікам. Значыць, $\sqrt{x+3} \geqslant 0$ для ўсіх значэнняў зменнай, якія належаць абсягу вызначэння функцыі. Паколькі $\sqrt{x+3} \geqslant 0$, то $\sqrt{x+3} - 5 \geqslant -5$, г. зн. $E(h) = [-5; +\infty)$.

? Вызначце, якія з ліній (рыс. 6) з'яўляюцца відарысамі графіка функцыі.



Рыс. 6

2.4. Знайдзіце значэнне функцыі $f(x) = x^2 - 5$, калі значэнне аргумента роўна:

а) 2; б) $-\frac{1}{2}$; в) 1,6; г) $\sqrt{7}$.

2.5. Вядома, што $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $g(3)$; б) $2g(-1{,}9)$;

в) $\frac{1}{3}g(0)$; г) $3\sqrt{5} \cdot g\left(\sqrt{5} - 2\right)$.

2.6. Параўнайце значэнні $h(-3)$ і $h\left(\sqrt{2}\right)$, калі функцыя зададзена формулай:

а) $h(x) = \sqrt{x^2 + 7}$; б) $h(x) = \frac{1}{x} - 2x$;

в) $h(x) = x^4 - 3x^2$; г) $h(x) = -x^3 + 8x$.

2.7. Функцыя зададзена формулай $q(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2}$. Знайдзіце значэнне выразу $q(2) - q(-1) + 2q\left(\sqrt{3}\right)$.

2.8. Знайдзіце значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі $g(x) = 6 - 5x$ роўна:

а) 1; б) 6; в) −4; г) 0.

2.9. Вядома, што $f(x) = 3x^2 - 10x$. Колькі існуе значэнняў аргумента, пры якіх:

а) $f(x) = 0$; б) $f(x) = -3$;

в) $f(x) = -8\frac{1}{3}$; г) $f(x) = -15$?

2.10. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі роўна 5:

а) $f(x) = x^2 + 4x$; б) $g(x) = \frac{2}{x}$; в) $h(x) = |x|$.

2.11. Сярод дадзеных функцый выберыце тыя, для якіх выконваецца роўнасць $f(-2) = 8$:

а) $f(x) = x + 8$; б) $f(x) = x^2 + 4$;

в) $f(x) = -\frac{16}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{6 - x}$.

2.12. Вызначце, ці з'яўляецца залежнасць, зададзеная табліцай 2, функцыяй.

Табліца 2. **Сутачныя сумы сонечнай радыяцыі пры адсутнасці атмасферы (Паўночнае паўшар'е, летняе сонцастаянне)**

Шырата, град.	30	40	50	60	70	80	90
Сутачныя сумы сонечнай радыяцыі, кал/см^2 сут.	1005	1022	1020	1009	1043	1093	1110

У якім выпадку па даных табліцы можна вызначыць, што залежнасць не з'яўляецца функцыяй?

2.13. Функцыя $q(x) = \frac{x^2}{2}$ зададзена аналітычна на мностве $D = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Задайце яе:

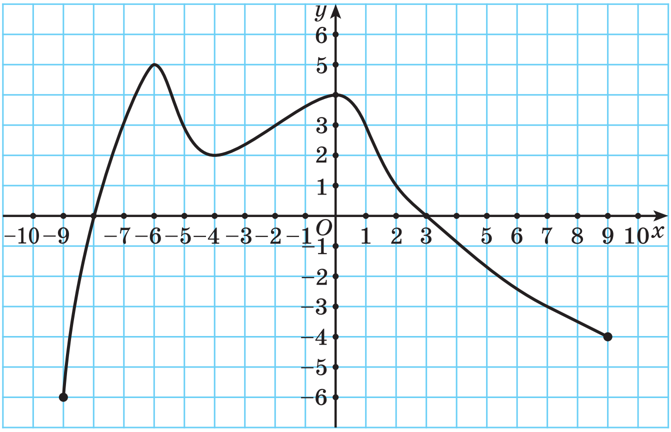
а) табліцай; б) графічна; в) славесна.

2.14. Функцыя зададзена славесна: «Функцыя $y = f(x)$ вызначана на мностве цэлых лікаў, большых за –7, але меншых за 10, і кожнаму значэнню аргумента ставіцца ў адпаведнасць лік, процілеглы значэнню аргумента». Задайце гэту функцыю:

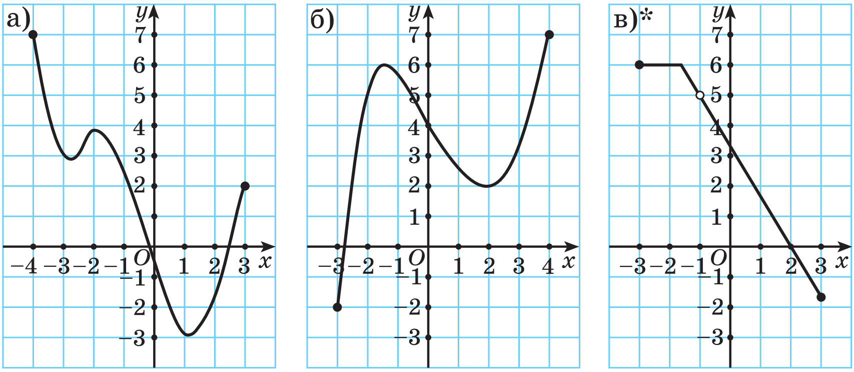
а) табліцай; б) графічна; в) аналітычна.

2.15. На рысунку 7 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Выкарыстаўшы графік, знайдзіце:

а) $f(-6)$; $f(1)$; $f(7)$; б) усе значэнні аргумента, пры якіх правільная роўнасць $f(x) = 3$; $f(x) = 0$; $f(x) = -6$; в) $D(f)$; г) $E(f)$.



Рыс. 7



Рыс. 8

2.16. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі, графік якой паказаны на рысунку 8.

2.17. Прывядзіце прыклад графіка функцыі $y = f(x)$, для якой вядома, што:

а) $D(f) = [-7;\ 5];\ \ E(f) = [-2;\ 3];\ \ f(1) = 3;$

б)* $D(f) = [-8;\ -2) \cup (-2;\ 4];\ \ E(f) = [-3;\ -1) \cup (-1;\ 5];$ $f(0) = -3;\ \ f(1) = -2.$

2.18. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \dfrac{3x-1}{x+2};$

б) $y = \dfrac{3}{8x^2+x};$

в) $y = \dfrac{x+4}{x^2-6x+9};$

г) $y = \dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{x}{9};$

д) $y = \dfrac{x-4}{x} + \dfrac{9x+1}{2x-3};$

е) $y = \dfrac{7}{x^2+5} + \dfrac{3}{x^2}.$

2.19. Вызначце, пры якіх значэннях зменнай выраз, што задае функцыю, мае сэнс:

а) $f(x) = \dfrac{7}{x^2-3x+2};$

б) $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{x-1}{3x^2-10x+3};$

в) $f(x) = \dfrac{15x+4}{x^4-13x^2+36}.$

2.20. Прывядзіце прыклад функцыі $y = f(x)$, у якой:

а) $D(f) = (-\infty;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$;

б) $D(f) = (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty);$

в) $D(f) = (-\infty;\ +\infty).$

2.21. Як знайсці абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{x+3}$; б) $y = \sqrt{5x-1}$;

в) $y = \frac{5}{\sqrt{7-0{,}1x}}$; г) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$;

д) $y = \sqrt{10x - x^2 - 9}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}$?

Знайдзіце $D(y)$. Абагульніце спосаб рашэння.

2.22. Прывядзіце прыклад функцыі $y = f(x)$, у якой:

а) $D(f) = [7; +\infty)$; б) $D(f) = (-\infty; 2)$;

в) $D(f) = [-3; 3]$; г) $D(f) = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

2.23. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{5-x}$; б) $y = \frac{8}{\sqrt{2x+3}} + \frac{1}{x+1}$;

в) $y = \frac{3x}{\sqrt{5-3x}} - \sqrt{2x+7}$; г) $y = \sqrt{x^2+x-20} + \sqrt{36-x^2}$;

д) $y = \frac{3}{\sqrt{x^2-5x}} - \sqrt{8x-x^2}$; е) $y = \sqrt{x-8} + \frac{8}{\sqrt{x^2-9x+8}}$.

2.24. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = x^2 + 5$; б) $f(x) = |x| - 2$;

в) $f(x) = \sqrt{x-4} + 7$; г) $f(x) = -x^2 + 8x + 1$.

2.25. Знайдзіце значэнне функцыі $h(x) = 2x^2 + 3$, калі значэнне аргумента роўна:

а) 1; б) $-\frac{1}{4}$; в) 0,7; г) $\sqrt{5}$.

2.26. Параўнайце $f(-1)$ і $f(\sqrt{6})$, калі:

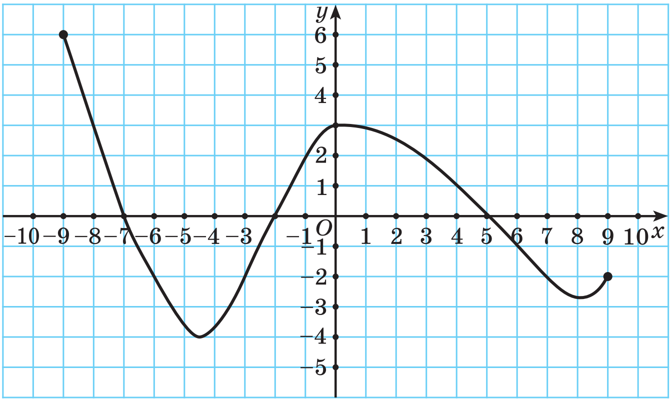
а) $f(x) = \sqrt{10-x^2}$; б) $f(x) = 5x^3 - x$;

в) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$; г) $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$.

2.27. Функцыя зададзена формулай $g(x) = 3x^4 - x^2$. Ці правільная роўнасць:

а) $g(-1) = 4$; б) $\frac{1}{5}g(\sqrt{2}) = 2$?

2.28. Знайдзіце значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі $g(x) = 3x - 2$ роўна: а) 1; б) 0; в) −4.



Рыс. 9

2.29. Вядома, што $f(x) = x^2 - x$. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх:

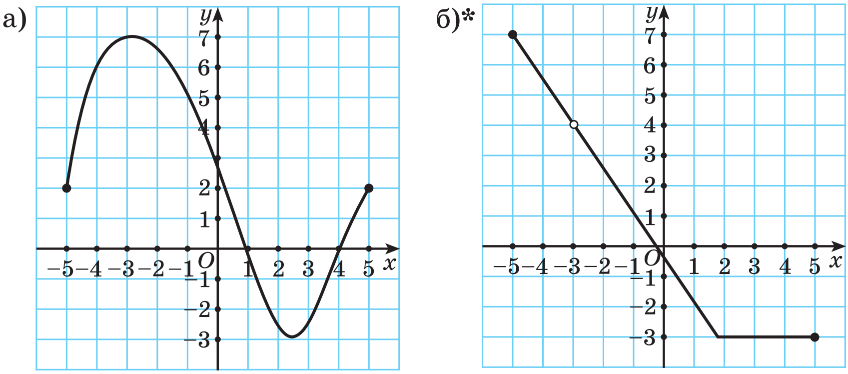
а) $f(x) = 0$; б) $f(x) = 6$; в) $f(x) = 12$.

2.30. Функцыя $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ зададзена аналітычна на мностве $D = \{0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16\}$. Задайце яе:

а) табліцай; б) графічна; в) славесна.

2.31. На рысунку 9 паказаны графік функцыі $y = f(x)$. Выкарыстаўшы графік, знайдзіце: а) $f(-9)$; $f(-2)$; $f(7)$; б) усе значэнні аргумента, пры якіх правільная роўнасць $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; в) $D(f)$; г) $E(f)$.

2.32. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі, графік якой паказаны на рысунку 10.



Рыс. 10

2.33. Прывядзіце прыклад графіка функцыі $y = f(x)$, для якой вядома, што $D(f) = [-5;\ 6]$; $E(f) = [-3;\ 4]$; $f(-2) = 2$.

2.34. Вызначце, пры якіх значэннях зменнай выраз, што задае функцыю, мае сэнс:

а) $y = \dfrac{7 - x}{x - 3}$; б) $y = \dfrac{15}{x^2 - 6x}$;

в) $y = \dfrac{7x + 2}{x^2 + 10x + 25}$; г) $y = \dfrac{8}{x^2 - 81} + \dfrac{x}{4}$;

д) $y = \dfrac{7x + 1}{x - 4} + \dfrac{5x - 7}{x + 2}$; е) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - 10} + \dfrac{5}{x}$;

ж) $y = \dfrac{2 - x}{x^2 - 5x + 6}$; з) $y = \dfrac{x}{x^2 + 8}$.

2.35. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{x - 4}$; б) $y = \dfrac{6}{\sqrt{8 - 3x}}$;

в) $y = \sqrt{2x^2 + 5x}$; г) $y = \dfrac{7}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$.

2.36. Знайдзіце $D(y)$ і запішыце адказ у выглядзе лікавага прамежку або аб’яднання лікавых прамежкаў:

а) $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{4 - x}$; б) $y = \dfrac{7x}{\sqrt{6 - x}} - \sqrt{3x + 2}$;

в) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5} + \sqrt{6 - x}$; г) $y = \sqrt{3x - x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

2.37. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 7$; б) $f(x) = |x| + 6$;

в) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 3$; г) $f(x) = -x^2 - 10x - 5$.

2.38. Запішыце выраз $\dfrac{\left(3^{-2}\right)^3}{27^{-3}}$ у выглядзе ступені з асновай 3.

2.39. Дакажыце, што пры любым значэнні зменнай правільная няроўнасць $a(a + 5) < (a + 3)(a + 2)$.

2.40. Ці праўда, што значэнне выразу

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$$

з’яўляецца рацыянальным лікам?

2.41. У сплаў уваходзяць медзь, волава і цынк у адносіне $12 : 13 : 25$. Знайдзіце, колькі працэнтаў у сплаве складае медзь.

§ 7. Уласцівасці функцыі

2.42. Функцыя $f(x)$ зададзена формулай $f(x) = 5x^2 - 3x$. Знайдзіце нулі функцыі.

2.43. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $g(x) = 4 - x^2$.

2.44. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

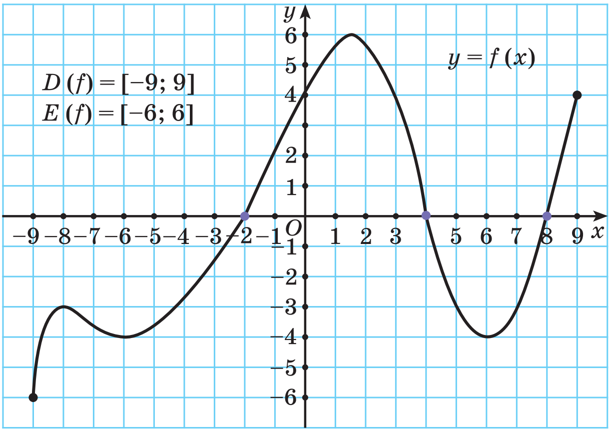
а) $f(x) = 5x^2 - 3x$; б) $g(x) = 4 - x^2$.

Пры вывучэнні функцый у 7—8-х класах вы пазнаёміліся з іх уласцівасцямі, напрыклад, такімі як нулі функцыі, прамежкі знакапастаянства функцыі, прамежкі манатоннасці функцыі. Абагульнім гэтыя ўласцівасці для функцыі лікавага аргумента $y = f(x)$, зададзенай графічна і аналітычна.

Нулі функцыі

Значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна нулю, называюць **нулём функцыі**.

Нулямі функцыі $y = f(x)$, графік якой паказаны на рысунку 11, з’яўляюцца значэнні аргумента, роўныя –2, 4 і 8, паколькі пры $x = -2$, $x = 4$, $x = 8$ значэнне функцыі роўна нулю.



Рыс. 11

У пунктах з абсцысамі –2, 4 і 8 графік функцыі $y = f(x)$ перасякае вось абсцыс.

Знойдзем нулі функцыі $h(x) = (x + 1)(x - 1)(2x - 5)$, зададзенай аналітычна. Для гэтага рэшым ураўненне $h(x) = 0$, г. зн. $(x + 1)(x - 1)(2x - 5) = 0$.

Здабытак некалькіх множнікаў роўны нулю, калі хаця б адзін з множнікаў роўны нулю, г. зн.

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ x - 1 = 0, \\ 2x - 5 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \\ x = 2{,}5. \end{array}\right.$$

Значыць, лікі –1, 1 і 2,5 з'яўляюцца нулямі функцыі

$h(x) = (x + 1)(x - 1)(2x - 5)$.

$f(x_0) = 0$,

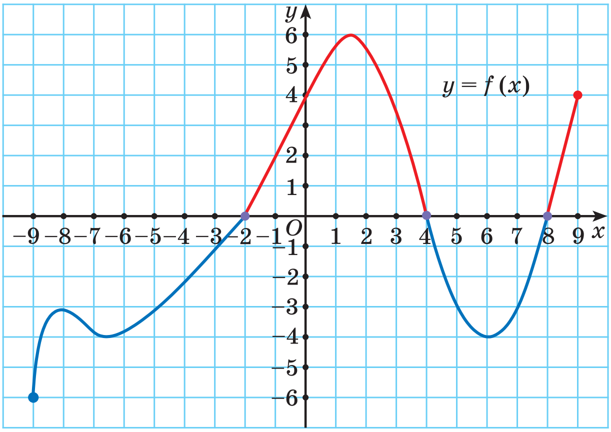
x_0 — нуль функцыі $y = f(x)$

Прамежкі знакапастаянства функцыі

Прамежак, на якім функцыя прымае значэнні толькі аднаго знака, называецца **прамежкам знакапастаянства функцыі**.

На прамежках [–9; –2) і (4; 8) графік функцыі $y = f(x)$ ляжыць ніжэй за вось абсцыс (рыс. 12), значыць, значэнні функцыі на гэтых прамежках адмоўныя, г. зн. $y < 0$ пры $x \in [-9; -2) \cup (4; 8)$.

На прамежках (–2; 4) і (8; 9] графік функцыі $y = f(x)$ ляжыць вышэй за вось абсцыс (гл. рыс. 12), такім чынам,



Рыс. 12

значэнні функцыі на гэтых прамежках дадатныя, г. зн. $y > 0$ пры $x \in (-2; 4) \cup (8; 9]$.

Прамежкі $[-9; -2)$ і $(4; 8)$, $(-2; 4)$ і $(8; 9]$ з'яўляюцца прамежкамі знакапастаянства дадзенай функцыі.

Звычайна пры вывучэнні ўласцівасцей функцый разглядаюць прамежкі знакапастаянства максімальнай даўжыні.

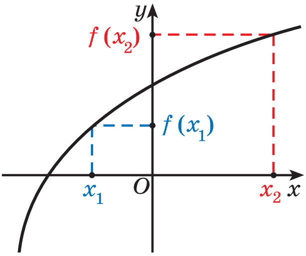
Знойдзем прамежкі знакапастаянства функцыі $g(x) = -2x + 6$, зададзенай аналітычна. Для гэтага рэшым няроўнасці $g(x) < 0$ і $g(x) > 0$, г. зн. высветлім, пры якіх значэннях аргумента значэнні дадзенай функцыі адмоўныя, а пры якіх дадатныя. Атрымаем: $-2x + 6 < 0$; $-2x < -6$; $x > 3$, г. зн. $g(x) < 0$ пры $x \in (3; +\infty)$.

Відавочна, што $g(x) > 0$ пры $x \in (-\infty; 3)$, г. зн. на прамежку $(-\infty; 3)$ значэнні функцыі дадатныя.

Прамежкі $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ з'яўляюцца прамежкамі знакапастаянства функцыі $g(x) = -2x + 6$.

Манатоннасць функцыі

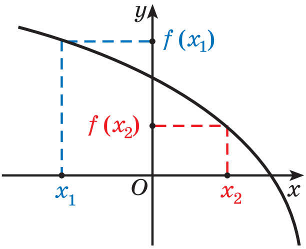
Функцыя $y = f(x)$ **нарастае** на некаторым прамежку з абсягу вызначэння, калі для любых двух значэнняў аргумента x_1 і x_2 з гэтага прамежку, такіх, што $x_2 > x_1$, выконваецца няроўнасць $f(x_2) > f(x_1)$ (рыс. 13).



Рыс. 13

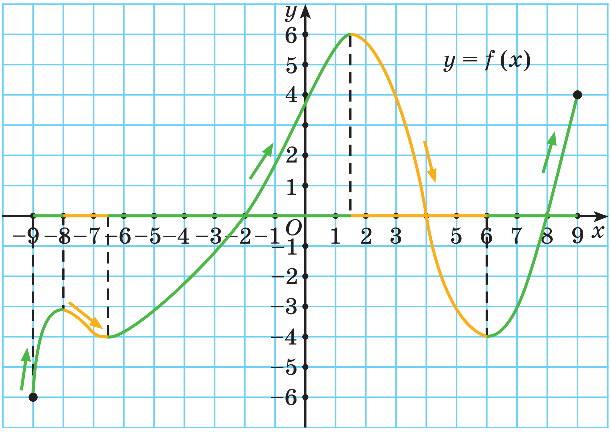
Іншымі словамі, функцыя нарастае на некаторым прамежку, калі для любых значэнняў аргумента з гэтага прамежку **большаму** значэнню аргумента адпавядае **большае** значэнне функцыі.

Функцыя $y = f(x)$ **спадае** на некаторым прамежку з абсягу вызначэння, калі для любых двух значэнняў аргумента x_1 і x_2 з гэтага прамежку, такіх, што $x_2 > x_1$, выконваецца няроўнасць $f(x_2) < f(x_1)$ (рыс. 14).



Рыс. 14

Інакш кажучы, функцыя спадае на некаторым прамежку, калі для любых значэнняў аргумента з гэтага прамежку **большаму** значэнню аргумента адпавядае **меншае** значэнне функцыі.



Рыс. 15

Прамежкі нарастання і спадання функцыі называюць **прамежкамі манатоннасці** функцыі, а функцыю называюць **манатоннай** на прамежку нарастання або спадання.

Калі функцыя нарастае на ўсім абсягу вызначэння, то яе называюць **нарастальнай функцыяй**, а калі спадае, то **спадальнай функцыяй.**

Вызначым прамежкі нарастання функцыі $y = f(x)$, зададзенай графічна (рыс. 15). Пры павелічэнні абсцысы ад −9 да −8 значэнні функцыі павялічваюцца (пункты на графіку «падымаюцца ўгору»), значыць, на адрэзку [−9; −8] функцыя $y = f(x)$ нарастае. Функцыя $y = f(x)$ нарастае яшчэ на двух прамежках: [−6,5; 1,5] і [6; 9].

Пры павелічэнні абсцысы ад −8 да −6,5 значэнні функцыі памяншаюцца (пункты на графіку «апускаюцца ўніз»), значыць, на адрэзку [−8; −6,5] функцыя $y = f(x)$ спадае. Дадзеная функцыя спадае таксама на прамежку [1,5; 6].

Прыклад. Дакажыце, што пры $k > 0$ лінейная функцыя $h(x) = kx + b$, $D(h) = \boldsymbol{R}$, нарастае на абсягу вызначэння, г. зн. з'яўляецца нарастальнай, а пры $k < 0$ лінейная функцыя спадае на абсягу вызначэння, г. зн. з'яўляецца спадальнай.

Доказ. Няхай x_1 і x_2 — адвольныя значэнні аргумента з абсягу вызначэння функцыі, прычым $x_2 > x_1$.

Тады $h(x_1) = kx_1 + b$ і $h(x_2) = kx_2 + b$. Разгледзім рознасць $h(x_2) - h(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 + b - kx_1 - b =$
$= kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$.

Паколькі $x_2 > x_1$, г. зн. $x_2 - x_1 > 0$, то знак здабытку $k(x_2 - x_1)$ залежыць ад знака ліку k.

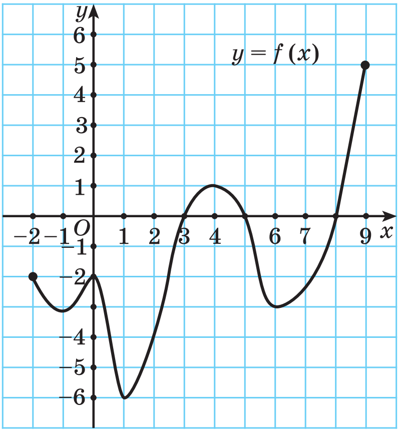
Калі $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$, тады $h(x_2) - h(x_1) > 0$, г. зн. $h(x_2) > h(x_1)$.

Значыць, для $x_2 > x_1$ пры $k > 0$ атрымаем, што $h(x_2) > h(x_1)$, г. зн. функцыя $h(x) = kx + b$ пры $k > 0$ з'яўляецца нарастальнай.

Калі $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$, тады $h(x_2) - h(x_1) < 0$, г. зн. $h(x_2) < h(x_1)$.

Значыць, для $x_2 > x_1$ пры $k < 0$ атрымаем, што $h(x_2) < h(x_1)$, г. зн. функцыя $h(x) = kx + b$ пры $k < 0$ з'яўляецца спадальнай.

Уласцівасці функцыі

1. На рысунку 16 паказаны адрыс графіка функцыі $y = f(x)$. Знайдзіце: а) нулі функцыі; б) прамежкі знакапастаянства функцыі; в) прамежкі манатоннасці функцыі.  Рыс. 16	а) Знойдзем абсцысы пунктаў перасячэння графіка з воссю абсцыс: $x = 3$, $x = 5$, $x = 8$. Пры гэтых значэннях аргумента значэнні функцыі роўны нулю, г. зн. лікі 3; 5 і 8 з'яўляюцца нулямі функцыі. б) Функцыя прымае дадатныя значэнні (графік функцыі ляжыць вышэй за вось абсцыс) на прамежках (3; 5) і (8; 9], а адмоўныя значэнні (графік функцыі ляжыць ніжэй за вось абсцыс) на прамежках [–2; 3) і (5; 8). в) Функцыя спадае (пры павелічэнні абсцыс пунктаў графіка ардынаты пунктаў графіка памяншаюцца) на прамежках: [–2; –1]; [0; 1] і [4; 6]. Функцыя нарастае (пры павелічэнні абсцыс пунктаў графіка ардынаты пунктаў графіка павялічваюцца) на прамежках: [–1; 0]; [1; 4] і [6; 9].

2. Знайдзіце нулі функцыі: а) $f(x) = 6 - 1{,}5x$; б) $g(x) = x^2 - 4x + 3$; в)* $h(x) = \lvert x \rvert + 5$.	а) Для таго каб знайсці нулі дадзенай функцыі, трэба рашыць ураўненне $f(x) = 0$, г. зн. $6 - 1{,}5x = 0$; $1{,}5x = 6$; $x = 4$. Значэнне аргумента $x = 4$ з'яўляецца нулём дадзенай функцыі. б) Нулямі дадзенай функцыі з'яўляюцца карані ўраўнення $g(x) = 0$. Рэшым квадратнае ўраўненне $x^2 - 4x + 3 = 0$. Выкарыстаем тэарэму Віета і атрымаем: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Лікі 1 і 3 з'яўляюцца нулямі функцыі $g(x) = x^2 - 4x + 3$. в)* Рэшым ураўненне $h(x) = 0$, г. зн. $\lvert x \rvert + 5 = 0$; $\lvert x \rvert = -5$. Паколькі модуль не можа быць роўны адмоўнаму ліку, то ўраўненне не мае каранёў, а значыць, функцыя $h(x) = \lvert x \rvert + 5$ не мае нулёў.
3. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі: а) $f(x) = 6 - 1{,}5x$; б) $g(x) = x^2 - 4x + 3$; в)* $h(x) = \lvert x \rvert + 5$.	а) Знойдзем, пры якіх значэннях аргумента функцыя $f(x) = 6 - 1{,}5x$ прымае дадатныя значэнні, г. зн. рэшым няроўнасць: $6 - 1{,}5x > 0$; $-1{,}5x > -6$; $1{,}5x < 6$; $x < 4$. Такім чынам, $f(x) > 0$ пры $x \in (-\infty;\ 4)$. Функцыя прымае адмоўныя значэнні, г. зн. $f(x) < 0$ пры $x \in (4;\ +\infty)$. б) Знойдзем прамежкі знакапастаянства функцыі $g(x) = x^2 - 4x + 3$: $g(x) > 0$, г. зн. $x^2 - 4x + 3 > 0$ пры $x \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$; $g(x) < 0$, г. зн. $x^2 - 4x + 3 < 0$ пры $x \in (1;\ 3)$. Такім чынам, на прамежках $(-\infty;\ 1)$ і $(3;\ +\infty)$ значэнні функцыі дадатныя, а на прамежку $(1;\ 3)$ значэнні функцыі адмоўныя.

	в)* Рэшым няроўнасць $h(x) > 0$, г. зн. $\lvert x\rvert + 5 > 0$; $\lvert x\rvert > -5$. Рашэннем атрыманай няроўнасці з'яўляецца любы рэчаісны лік ($x \in \boldsymbol{R}$). Значыць, функцыя прымае дадатныя значэнні пры любых значэннях аргумента, г. зн. $h(x) > 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$.
4*. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі $g(x) = -\frac{10}{x}$.	Пакажам, што функцыя нарастае на кожным з прамежкаў $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. Няхай x_1 і x_2 — адвольныя значэнні аргумента з прамежку $(0;\ +\infty)$, прычым $x_2 > x_1$. Па ўласцівасці лікавых няроўнасцей, калі $x_2 > x_1 > 0$, то $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$ і $-\frac{10}{x_2} > -\frac{10}{x_1}$. Значыць, функцыя $g(x)$ нарастае на прамежку $(0;\ +\infty)$. Калі x_1 і x_2 — адвольныя значэнні аргумента з прамежку $(-\infty;\ 0)$, прычым $0 > x_2 > x_1$, то па ўласцівасці лікавых няроўнасцей $\frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2}$, а $-\frac{10}{x_2} > -\frac{10}{x_1}$. Значыць, функцыя $g(x)$ нарастае на прамежку $(-\infty;\ 0)$. Такім чынам, функцыя $g(x) = -\frac{10}{x}$ нарастае на кожным з прамежкаў $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. Адзначым, што функцыя $g(x) = -\frac{10}{x}$ нарастае на кожным з прамежкаў $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$, але не нарастае на ўсім яе абсягу вызначэння $D(g) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Пакажам гэта, прывёўшы контрпрыклад. Няхай $x_1 = -5$, а $x_2 = 1$, тады $g(x_1) = g(-5) = -\frac{10}{-5} = 2$, а $g(x_2) = g(1) = -\frac{10}{1} = -10$. У дадзеным выпадку для $x_2 > x_1$ атрымалі $g(x_2) < g(x_1)$, што супярэчыць азначэнню.

1. Ці праўда, што калі функцыя не мае нулёў, то яе графік на ўсім абсягу вызначэння ляжыць:

а) вышэй за вось абсцыс;

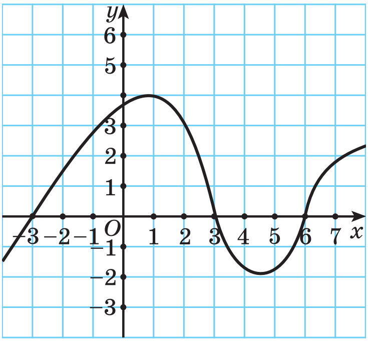
б) ніжэй за вось абсцыс;

в) з розных бакоў ад восі абсцыс?

2. На рысунку 17 функцыя $r(x)$ зададзена графічна на мностве $\boldsymbol{R}$. Ці можна, выкарыстаўшы графік, рашыць няроўнасць:

а) $r(x) > 0$;

б) $r(x) < 0$?



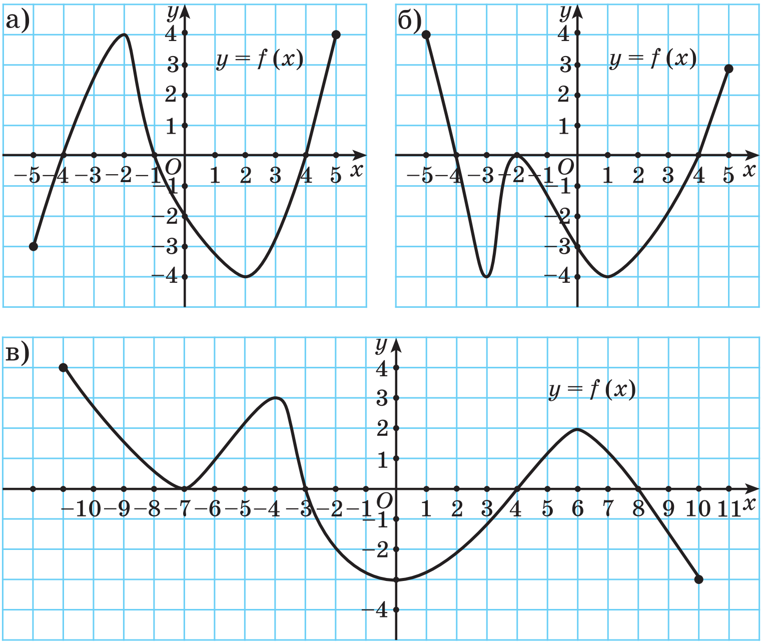
Рыс. 17

2.45. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 18). Знайдзіце:

1) нулі функцыі;

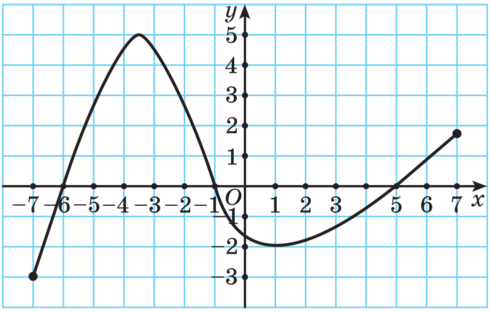
2) прамежкі знакапастаянства функцыі;

3) прамежкі манатоннасці функцыі.



Рыс. 18

2.46. На рысунку 19 паказаны графік функцыі $y = f(x)$. Выберыце няправільнае сцверджанне: а) $D = [-7; 7]$; б) $E = [-3; 5]$; в) $f(x) > 0$ пры $x \in (-6; -1) \cup (5; 7]$; г) функцыя спадае на прамежку $(-1; 5)$; д) нулямі функцыі з'яўляюцца лікі -6; -1; 5.

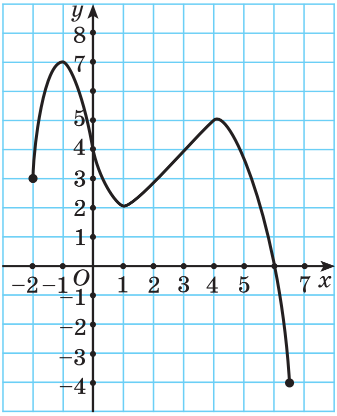


Рыс. 19

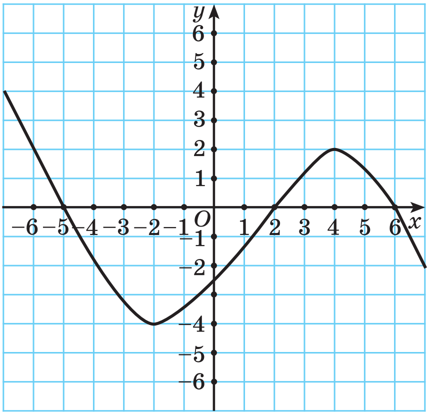
2.47. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, для якой вядома, што: а) $D(f) = [-5; 6]$; б) $E(f) = [-4; 2]$; в) нулямі функцыі з'яўляюцца лікі -3 і 4; г) функцыя спадае на прамежку $[-5; -1]$ і нарастае на прамежку $[-1; 6]$.

2.48. На рысунку 20 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Знайдзіце: а) прамежкі знакапастаянства функцыі; б) прамежкі нарастання функцыі. Колькі нулёў мае дадзеная функцыя?

2.49. На рысунку 21 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, абсягам вызначэння якой з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў. З дапамогай графіка рашыце:



Рыс. 20

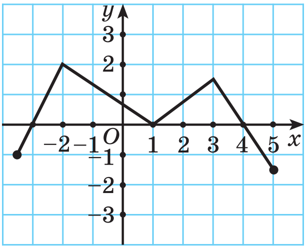


Рыс. 21

а) ураўненне $f(x) = 0$;

б) няроўнасць $f(x) < 0$;

в) няроўнасць $f(x) \geqslant 0$.



Рыс. 22

2.50. Для функцыі $y = f(x)$, відарыс графіка якой паказаны на рысунку 22, знайдзіце:

а) прамежкі, на якіх функцыя прымае дадатныя значэнні;

б) прамежкі спадання функцыі;

в) колькасць каранёў ураўнення $f(x) = 0$.

Ці праўда, што на прамежку [1; 4] функцыя нарастае; на прамежку [–2; 1] функцыя прымае адмоўныя значэнні?

2.51. Вызначце нулі функцыі, зададзенай табліцай.

x	–22	$-\sqrt{17}$	–3	–2	0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{17}$	5	43
y	–8	0	2	6	12	18	0	29	0

2.52. Якія значэнні аргумента называюць нулямі функцыі? Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f(x) = 18 - 2x$; б) $g(x) = 6x - x^2 - 5$;

в) $h(x) = x^2 + 8x$; г) $q(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Прывядзіце прыклад функцыі, якая мае адзін нуль; два нулі; тры нулі.

2.53. Ці праўда, што функцыя $g(x) = x^2 + x + 3$ не мае нулёў? Прывядзіце некалькі прыкладаў функцый, якія не маюць нулёў.

2.54. Колькі нулёў мае функцыя:

а) $y = x^3 - 2x^2$; б) $y = 8$; в) $y = 5x$;

г) $y = |x| - 4$; д) $y = x^3 + 1$; е) $y = -\frac{5}{x}$?

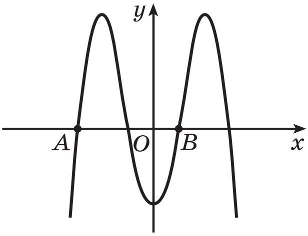
2.55. Графік функцыі, абсягам вызначэння якой з'яўляюцца ўсе рэчаісныя лікі, праходзіць праз пункты $A(-5; 7)$ і $B(8; -4)$. Ці праўда, што на прамежку (–5; 8) функцыя мае хаця б адзін нуль?

2.56. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, калі вядома, што ўраўненне $f(x) = 0$:

а) мае адзін корань;

б) мае адзін дадатны і два адмоўныя карані;

в) не мае каранёў.



Рыс. 23

2.57. На рысунку 23 паказаны відарыс графіка функцыі $y = -9x^4 + 10x^2 - 1$. Пункты $A(x_1;\ y_1)$; $B(x_2;\ y_2)$ належаць дадзенаму графіку. Знайдзіце x_1 і x_2.

2.58. Складзіце план рашэння і знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $f(x) = 8 - 3x$; б) $g(x) = x^2 - 9$;

в) $h(x) = 5x - x^2$; г)* $p(x) = |x| + 7$.

2.59. Знайдзіце, пры якіх значэннях аргумента функцыя прымае дадатныя значэнні:

а) $f(x) = 8x$; б) $f(x) = x^2 + 6x + 9$;

в) $f(x) = \frac{6}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$.

2.60. Сярод функцый $y = -x^2 - 5$; $y = -\sqrt{2}$; $y = -6x$; $y = -\sqrt{x}$ выберыце тыя, што прымаюць толькі адмоўныя значэнні для ўсіх значэнняў аргумента з абсягу вызначэння функцыі. Прывядзіце некалькі прыкладаў функцый, якія прымаюць толькі дадатныя значэнні для ўсіх значэнняў аргумента з абсягу вызначэння функцыі.

2.61. Вядома, што функцыя $y = h(x)$ нарастае на прамежку $(-2;\ 5)$. Размясціце ў парадку нарастання значэнні выразаў $h(0)$; $h\ (-1{,}2)$ і $h(4)$.

2.62. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ спадае на мностве рэчаісных лікаў і $f(5) = 4$. Выберыце правільнае сцверджанне:

а) $f(6) > 4$; б) $f(-5) < -4$;

в) $f(10) > 8$; г) $f(0) > 4$.

2.63*. Дакажыце, што функцыя:

а) $f(x) = 2x$ з'яўляецца нарастальнай;

б) $f(x) = 1 - 3x$ з'яўляецца спадальнай.

2.64*. Дакажыце, што функцыя $g(x) = \frac{3}{x}$ спадае на прамежку $(0;\ +\infty)$.

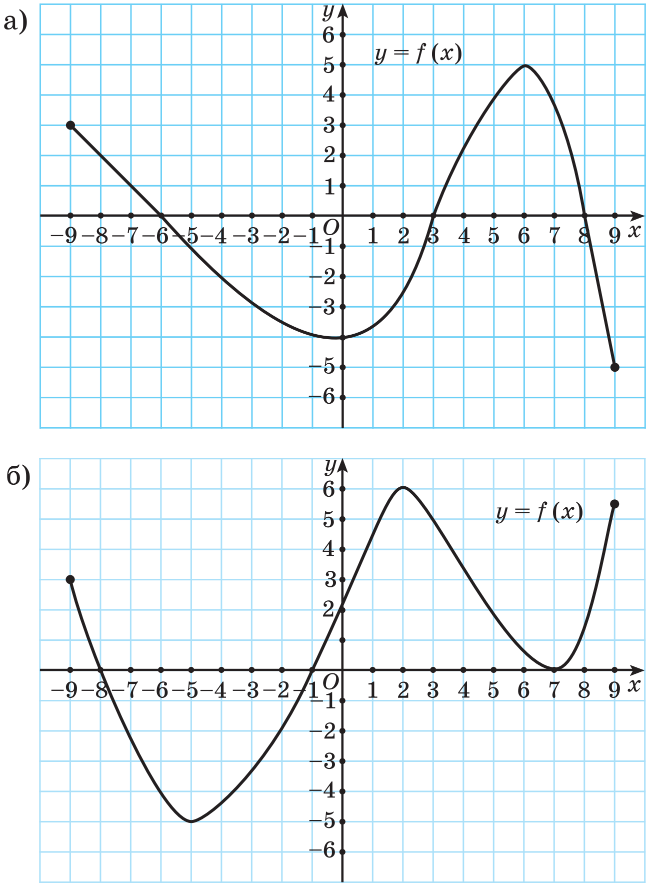
2.65*. Знайдзіце адлегласць паміж нулямі функцый $f(x) = 5x - 12$ і $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

2.66*. Знайдзіце, пры якіх значэннях ліку a функцыя $f(x) = x^2 - ax - 3a$ не мае нулёў.

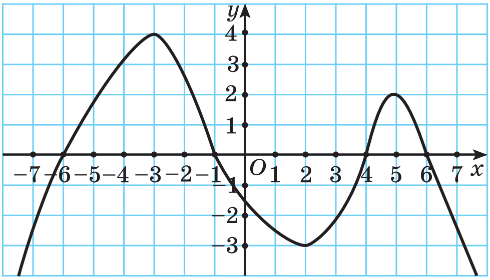
2.67*. Дакажыце, што функцыя $y = |x + 5|$ нарастае на прамежку $[-5; +\infty)$ і спадае на прамежку $(-\infty; -5]$.

2.68. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 24). Знайдзіце:

1) нулі функцыі;
2) прамежкі знакапастаянства функцыі;
3) прамежкі манатоннасці функцыі.



Рыс. 24



Рыс. 25

2.69. На рысунку 25 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, абсягам вызначэння якой з'яўляецца мноства ўсіх рэчаісных лікаў. З дапамогай графіка рашыце: а) ураўненне $f(x) = 0$; б) няроўнасць $f(x) < 0$; в) няроўнасць $f(x) \geqslant 0$.

2.70. Якія значэнні аргумента называюць нулямі функцыі? Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f(x) = 5x - 7$; б) $g(x) = 49 - x^2$;

в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$; г) $q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

2.71. Якія з дадзеных функцый не маюць нулёў:

а) $f(x) = |x| - 8$; б) $g(x) = x^2 + 5$;

в) $h(x) = \frac{7}{x}$; г) $q(x) = \sqrt{x} + 2$?

2.72. Прывядзіце прыклад лінейнай функцыі; квадратычнай функцыі, якая не мае нулёў.

2.73. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $g(x) = x^2 + 2x$;

в) $h(x) = 3x - x^2 - 2$; г) $p(x) = x^2 + 7$.

2.74. Знайдзіце, пры якіх значэннях аргумента функцыя прымае адмоўныя значэнні:

а) $f(x) = 3 - x$; б) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$; в) $f(x) = \frac{4}{x}$.

2.75. Вядома, што функцыя $y = g(x)$ спадае на прамежку $(-7; 4)$. Размясціце ў парадку нарастання значэнні выразаў $q(0)$; $q(-5)$ і $q(2)$.

2.76*. Дакажыце, што функцыя $f(x) = 2 - 3x$ з'яўляецца спадальнай.

2.77*. Дакажыце, што функцыя $g(x) = -\frac{7}{x}$ нарастае на прамежку $(0; +\infty)$.

2.78*. Дакажыце, што функцыя $y = x^2 - 8x + 16$ нарастае на прамежку $[4; +\infty)$ і спадае на прамежку $(-\infty; 4]$.

2.79. Сярод лікаў $\frac{5}{7}$; 8,(3); $\sqrt{15}$; $-\frac{4}{12}$; $\sqrt{2}$; π выберыце ўсе тыя, якія нельга запісаць у выглядзе бясконцага перыядычнага дзесятковага дробу. Якому лікаваму мноству належаць усе астатнія лікі?

2.80. Знайдзіце, на які лік трэба памножыць суму лікаў $4\frac{1}{3}$ і $3\frac{2}{3}$, каб атрымаць іх рознасць.

2.81. Дадзена: $-2 < a < 7$. Ацаніце значэнне выразу:

а) $3a$; б) $-\frac{a}{5}$; в) $a - 8$; г) $2a + 5$.

2.82. Рашыце сістэму лінейных ураўненняў

$$\begin{cases} \frac{3x-7}{4} - \frac{2y-3}{5} = 1, \\ \frac{2x-y}{2} = y - 1. \end{cases}$$

2.83. Знайдзіце значэнне выразу

$$-0{,}5^2 : 0{,}5^3 + 0{,}3^0 - 2^8 \cdot 4^{-2}.$$

2.84. Спрасціце выраз $\sqrt{(1-2x)^2} - \sqrt{(2x+1)^2}$, калі $x \in (-0{,}2; 0{,}1)$.

§ 8. Цотныя і няцотныя функцыі

2.85. Функцыя зададзена формулай $f(x) = 5x^2$. Знайдзіце $f(2)$; $f(-2)$; $f(0{,}5)$; $f(-0{,}5)$.

2.86. Вызначце каардынаты пунктаў, сіметрычных пунктам (1; 3), (1; 2), (–5; 0), (–3; –2), (4; –2) адносна: а) восі ардынат; б) восі абсцыс; в) пачатку каардынат.

2.87. Запішыце прамежкі, сіметрычныя дадзеным адносна нуля: (0; 3), (1; 2], [–1; 0), [–3; –2], (0; +∞).

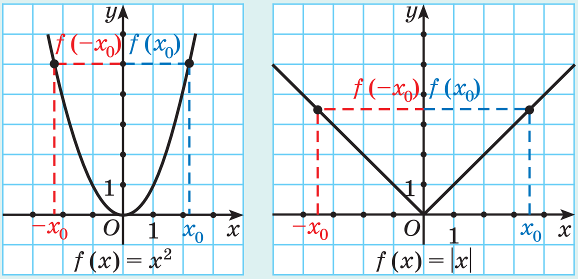
Для пабудовы графікаў функцый, рашэння ўраўненняў і няроўнасцей вы карыстаецеся ўласцівасцямі функцый. Яшчэ адной уласцівасцю, якая дазваляе знайсці рацыянальнае рашэнне, з'яўляецца ўласцівасць цотнасці (няцотнасці) функцыі.

Азначэнне. Функцыя $y = f(x)$ называецца **цотнай**, калі:

① яе абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля;

② для любога $x \in D(f)$ выконваецца ўмова $f(-x) = f(x)$.

Цотныя функцыі



$$f(-x_0) = f(x_0)$$

Разгледзім адрэзак [–5; 6]. Ён не можа быць абсягам вызначэння цотнай функцыі, паколькі значэнне аргумента, напрыклад, роўнае 6, належыць гэтаму адрэзку, а процілеглае значэнне –6 не належыць.

Умова $f(-x) = f(x)$ азначае, што значэнні функцыі пры процілеглых значэннях аргумента роўныя.

Каб даказаць, што функцыя з’яўляецца цотнай, трэба:

① Праверыць сіметрычнасць абсягу вызначэння функцыі адносна нуля. ② Запісаць выраз $f(-x)$. ③ Паказаць, што $f(-x) = f(x)$.	Дакажыце, што функцыя $f(x) = x^4 - 3x^2$ з’яўляецца цотнай. ① $D(f) = \boldsymbol{R}$ сіметрычны адносна нуля. ② $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2$. ③ $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$. Функцыя $f(x) = x^4 - 3x^2$ з’яўляецца цотнай.

Прыклад 1. Дакажыце, што функцыя з’яўляецца цотнай:
а) $f(x) = |x|$; б) $h(x) = 7x^6$.

Рашэнне. а) ① Абсяг вызначэння $D(f) = \boldsymbol{R}$ сіметрычны адносна нуля.

② $f(-x) = |-x|$.

③ $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$.

Функцыя $f(x) = |x|$ з’яўляецца цотнай.

б) ① Абсяг вызначэння $D(f) = \boldsymbol{R}$ сіметрычны адносна нуля.

② $h(-x) = 7(-x)^6$.

③ $h(-x) = 7(-x)^6 = 7x^6 = h(x)$.

Функцыя $h(x) = 7x^6$ з’яўляецца цотнай.

Прыклад 2. Высветліце, ці з'яўляецца функцыя $g(x)=\sqrt{x}$ цотнай.

Рашэнне. Абсягам вызначэння функцыі $g(x)=\sqrt{x}$ з'яўляецца прамень $[0;\ +\infty)$, ён не сіметрычны адносна нуля. Першая ўмова азначэння цотнай функцыі не выканана, значыць, дадзеная функцыя не з'яўляецца цотнай.

Прыклад 3. Вызначце, ці з'яўляецца функцыя $h(x)=\frac{x^4-1}{x^2}$ цотнай.

Рашэнне. Абсягам вызначэння дадзенай функцыі з'яўляецца мноства ўсіх лікаў, пры якіх назоўнік дробу не роўны нулю, г. зн. $x^2\neq 0$; $D(h)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. Такім чынам, абсяг вызначэння дадзенай функцыі сіметрычны адносна нуля.

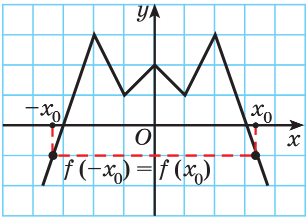
Праверым выкананне ўмовы $h(-x)=h(x)$: $h(-x)=\frac{(-x)^4-1}{(-x)^2}=$ $=\frac{x^4-1}{x^2}=h(x)$. Функцыя з'яўляецца цотнай.

Прыклад 4. Дакажыце, што функцыя $f(x)=x-1$ не з'яўляецца цотнай.

Рашэнне. Каб даказаць, што функцыя не з'яўляецца цотнай, дастаткова прывесці контрпрыклад, г. зн. знайсці хаця б адно значэнне x з яе абсягу вызначэння, для якога не выконваецца роўнасць $f(-x)=f(x)$.

Напрыклад, няхай $x=2$, тады $f(2)=1$, а $f(-2)=-3$. Атрымалі, што $f(2)\neq f(-2)$, значыць, функцыя $f(x)=$ $=x-1$ не з'яўляецца цотнай.

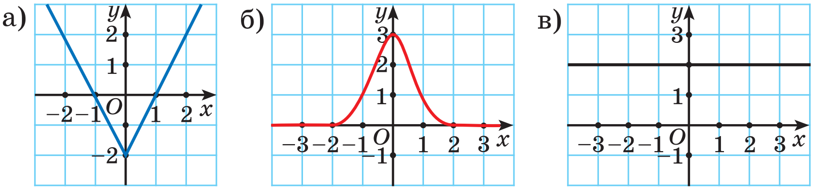
Графік цотнай функцыі сіметрычны адносна восі ардынат (рыс. 26).



Рыс. 26

На рысунку 27 паказаны графікі цотных функцый.

Калі графік некаторай функцыі сіметрычны адносна восі ардынат, то гэта функцыя з'яўляецца цотнай.

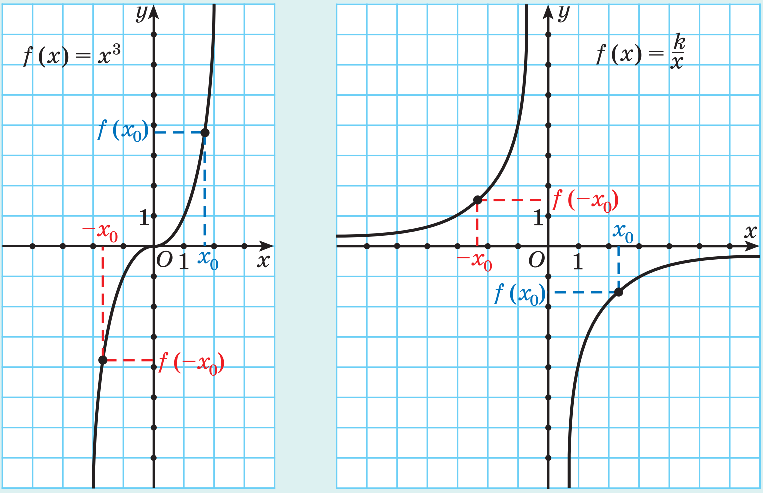


Рыс. 27

Азначэнне. Функцыя $y = f(x)$ называецца **няцотнай**, калі:
① яе абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля;
② для любога $x \in D(f)$ выконваецца ўмова $f(-x) = -f(x)$.

Умова $f(-x) = -f(x)$ азначае, што значэнні функцыі пры процілеглых значэннях аргумента процілеглыя.

Няцотныя функцыі



$$f(-x_0) = -f(x_0)$$

Каб даказаць, што функцыя з'яўляецца няцотнай, трэба:

① Праверыць сіметрычнасць абсягу вызначэння функцыі адносна нуля. ② Запісаць выраз $f(-x)$. ③ Паказаць, што $f(-x) = -f(x)$.	Дакажыце, што функцыя $f(x) = x^3 + 5x$ з'яўляецца няцотнай. ① Абсяг вызначэння $D(f) = \boldsymbol{R}$ сіметрычны адносна нуля. ② $f(-x) = (-x)^3 + 5(-x)$. ③ $f(-x) = (-x)^3 + 5(-x) = -x^3 - 5x = -(x^3 + 5x) = -f(x)$. Функцыя $f(x) = x^3 + 5x$ з'яўляецца няцотнай.

Прыклад 5. Дакажыце, што функцыя $h(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, з'яўляецца няцотнай.

Рашэнне. ① Абсяг вызначэння $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ сіметрычны адносна нуля.

② $h(-x) = \frac{k}{-x}$.

③ $h(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -h(x)$.

Функцыя $h(x) = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, з'яўляецца няцотнай.

Прыклад 6. Вызначце, ці з'яўляецца функцыя $h(x) = x^5 - x$ няцотнай.

Рашэнне. Абсяг вызначэння $D(h) = \boldsymbol{R}$ сіметрычны адносна нуля.

$h(-x) = (-x)^5 - (-x) = -x^5 + x = -(x^5 - x) = -h(x)$.

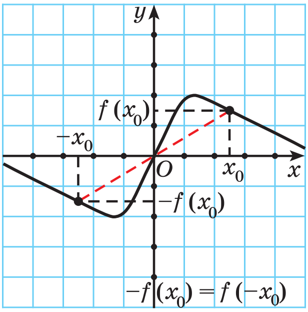
Функцыя $h(x) = x^5 - x$ з'яўляецца няцотнай.

Прыклад 7. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ няцотная і $f(3) = -7$ і $f(-4) = 3$. Знайдзіце значэнне выразу $f(-3) + f(4)$.

Рашэнне. Паколькі функцыя $y = f(x)$ няцотная, то выконваецца ўмова $f(-x) = -f(x)$.

Паколькі $f(3) = -7$, то $f(-3) = 7$. Паколькі $f(-4) = 3$, то $f(4) = -3$.

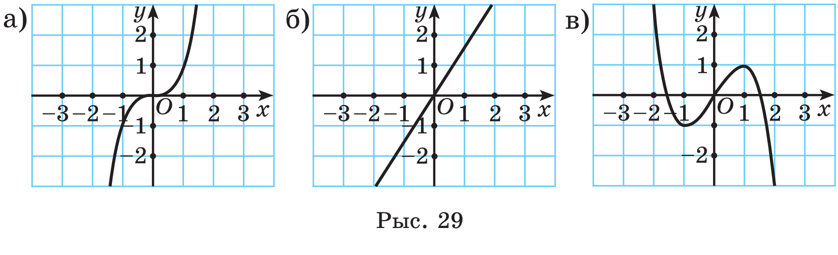
Тады $f(-3) + f(4) = 7 - 3 = 4$.



Рыс. 28

Графік няцотнай функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат (рыс. 28).

На рысунку 29 паказаны графікі няцотных функцый.



Рыс. 29

Калі графік некаторай функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат, то гэта функцыя з'яўляецца няцотнай.

Калі неабходна **даследаваць функцыю на цотнасць**, то высвятляюць, ці з'яўляецца дадзеная функцыя цотнай; няцотнай. Калі абодва адказы адмоўныя, то гавораць, што функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

Прыклад 8. Даследуйце функцыю $g(x) = 5x^2 - 2x$ на цотнасць.

Рашэнне. Паколькі $D(g) = \boldsymbol{R}$, то абсяг вызначэння дадзенай функцыі сіметрычны адносна нуля, значыць, першая ўмова цотнасці (няцотнасці) функцыі выканана.

Праверым, ці правільная хоць адна з роўнасцей: $g(-x) = g(x)$ або $g(-x) = -g(x)$.

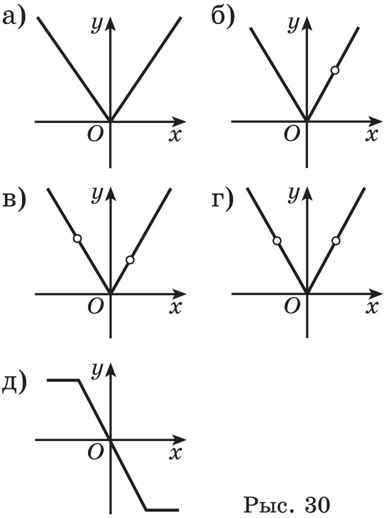
$g(-x) = 5(-x)^2 - 2(-x) = 5x^2 + 2x \neq g(x)$ для $x \in D(g)$, значыць, функцыя $g(x) = 5x^2 - 2x$ не з'яўляецца цотнай.

$g(-x) = 5x^2 + 2x \neq -g(x)$ для $x \in D(g)$, значыць, функцыя $g(x) = 5x^2 - 2x$ не з'яўляецца няцотнай.

Такім чынам, функцыя $g(x) = 5x^2 - 2x$ не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай.

Абсяг вызначэння цотнай або няцотнай функцыі	
1. Вызначце, ці можа абсягам вызначэння цотнай або няцотнай функцыі з'яўляцца мноства лікаў: а) $[-8; 8]$; б) $[-7; 7)$; в) $[-7; 0) \cup (0; 7]$; г) $[-9; 2) \cup (2; 9]$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $[-5; 10]$.	Мноствы лікаў а); в); д) сіметрычныя адносна нуля, значыць, яны могуць быць абсягам вызначэння цотнай або няцотнай функцыі. Мноствы лікаў б); г); е) не сіметрычныя адносна нуля, значыць, яны не могуць быць абсягам вызначэння цотнай або няцотнай функцыі.
Азначэнне цотнай (няцотнай) функцыі	
2. Дакажыце, што функцыя: а) $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2}$ з'яўляецца цотнай; б) $g(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 4}$ з'яўляецца няцотнай.	а) ① $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ сіметрычны адносна нуля. ② $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 2}{(-x)^2}$. ③ $f(-x) = \frac{(-x)^4 - 2}{(-x)^2} = \frac{x^4 - 2}{x^2} = f(x)$. Функцыя $f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^2}$ цотная. б) ① $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ сіметрычны адносна нуля.

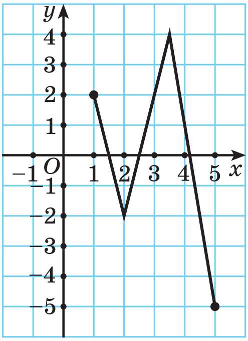
	② $g(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 4}$. ③ $g(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 - 4} =$ $= \frac{-(x^3 - 3x)}{x^2 - 4} = -\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 4} = -g(x)$. Функцыя $g(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 4}$ няцотная.
3. Якой (няцотнай; цотнай; ні цотнай, ні няцотнай) з’яўляецца функцыя: а) $f(x) = 7x^3$; б) $g(x) = \frac{x}{\lvert x \rvert}$; в) $h(x) = -\sqrt{2x}$; г) $d(x) = -6x^4 - 8$; д) $q(x) = 2x + 2$; е)* $p(x) = \lvert x - 5 \rvert + \lvert x + 5 \rvert$?	а) $D(f) = \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат; $f(-x) = 7(-x)^3 = -7x^3 = -f(x)$ — функцыя няцотная; б) $D(g) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ — абсяг вызначэння функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат; $g(-x) = \frac{-x}{\lvert -x \rvert} = -\frac{x}{\lvert x \rvert} = -g(x)$ — функцыя няцотная; в) $D(h) = [0;\ +\infty)$ — абсяг вызначэння функцыі не сіметрычны адносна пачатку каардынат, значыць, функцыя не з’яўляецца ні цотнай, ні няцотнай; г) $D(d) = \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат; $d(-x) = -6(-x)^4 - 8 = -6x^4 - 8 = d(x)$ — функцыя цотная; д) $D(q) = \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат, але функцыя не з’яўляецца ні цотнай, ні няцотнай, паколькі, напрыклад, $q(-1) = 0$, а $q(1) = 4$, г. зн. $q(-1) \neq q(1)$ і $q(-1) \neq -q(1)$; е)* $D(p) = \boldsymbol{R}$ — абсяг вызначэння функцыі сіметрычны адносна пачатку каардынат; $p(-x) = \lvert -x - 5 \rvert + \lvert -x + 5 \rvert =$ $= \lvert x + 5 \rvert + \lvert x - 5 \rvert = p(x)$ — функцыя цотная.

4. Даследуйце на цотнасць функцыю $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.	$D(f)=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. Абсяг вызначэння функцыі сіметрычны адносна нуля. $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-f(x).$ Паколькі $f(-x)=-f(x)$, то функцыя з'яўляецца няцотнай.
5. Вядома, што функцыя $y=f(x)$ з'яўляецца цотнай і $f(3)=-7$; $f(-4)=5$. Знайдзіце значэнне выразу $2f(-3)-f(4)$.	Паколькі функцыя $y=f(x)$ з'яўляецца цотнай, то выконваецца ўмова $f(-x)=f(x)$. Тады $f(-3)=f(3)=-7$ і $f(4)=f(-4)=5$. Знойдзем значэнне выразу $2f(-3)-f(4)=2\cdot(-7)-5=-19$.
6. Вядома, што функцыя $y=f(x)$ з'яўляецца няцотнай і $f(-5)=3$; $f(2)=-8$. Знайдзіце значэнне выразу $4f(5)+f(-2)$.	Паколькі функцыя $y=f(x)$ з'яўляецца няцотнай, то $f(-x)=-f(x)$. Тады $f(5)=-f(-5)=-3$ і $f(-2)=-f(2)=8$. Знойдзем значэнне выразу $4f(5)+f(-2)=4\cdot(-3)+8=-4$.
Графік цотнай (няцотнай) функцыі	
7. Вызначце выгляд функцыі (цотная; няцотная; ні цотная, ні няцотная), зададзенай графічна (рыс. 30).  Рыс. 30	На рысунках 30, *а*, *г* паказаны відарысы графікаў цотных функцый, паколькі яны сіметрычны адносна восі ардынат. Графікі функцый, паказаныя на рысунках 30, *б*, *в*, маюць несіметрычныя абсягі вызначэння, значыць, гэтыя функцыі не з'яўляюцца ні цотнымі, ні няцотнымі. На рысунку 30, *д* паказаны відарыс графіка няцотнай функцыі, паколькі ён сіметрычны адносна пачатку каардынат.

8. На рысунку 31 паказана частка графіка функцыі $y = f(x)$ з абсягам вызначэння $D(f) = [-5; -1] \cup [1; 5]$. Пакажыце відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, калі вядома, што яна з'яўляецца:

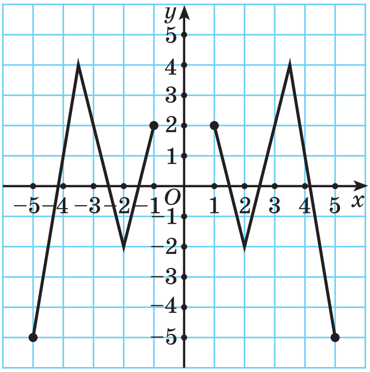
а) цотнай;

б) няцотнай.

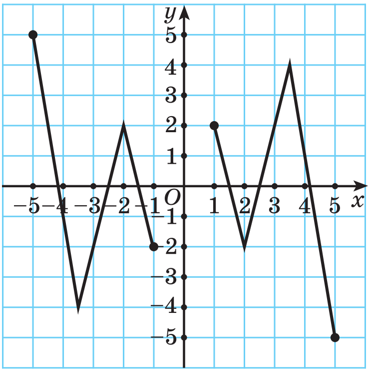


Рыс. 31

а)



б)

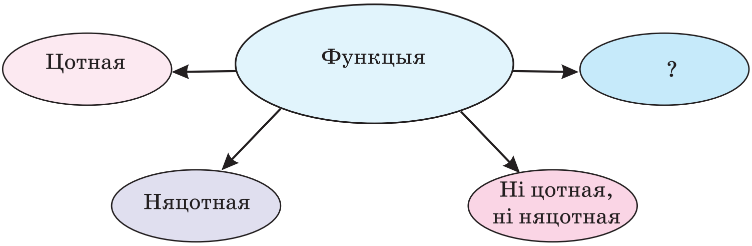


1. Ці існуюць функцыі, вызначаныя на мностве ўсіх рэчаісных лікаў, якія адначасова з'яўляюцца:

а) цотнымі і нарастальнымі;

б) няцотнымі і спадальнымі?

2. Ці можна знак «?» на схеме (рыс. 32) замяніць назвай віда функцыі? Калі можна, прывядзіце прыклад.



Рыс. 32

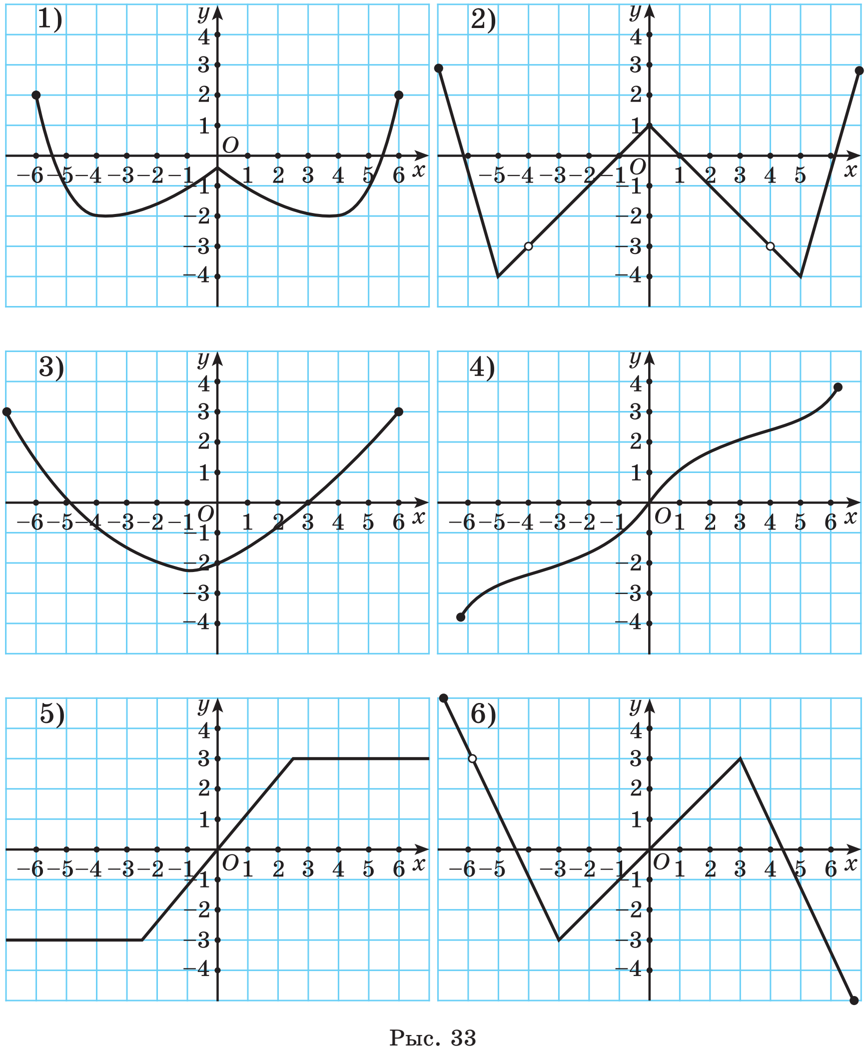
2.88. Выберыце мноства лікаў, якое не можа з’яўляцца абсягам вызначэння цотнай або няцотнай функцыі:

а) (–10; 10); б) [–5; –2) ∪ (–2; 2) ∪ (2; 5];

в) [–1; 3]; г) (–∞; 0) ∪ (0; +∞).

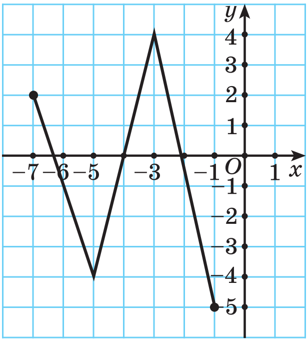
2.89. На рысунку 33 выберыце відарысы графікаў:

а) цотных функцый; б) няцотных функцый.



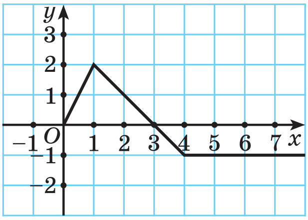
Рыс. 33

2.90. На рысунку 34 паказана частка графіка функцыі $y = f(x)$ для $x \in [-7; -1]$. Пакажыце ў сшытку відарыс часткі графіка гэтай функцыі для $x \in [1; 7]$, калі вядома, што яна з'яўляецца: а) цотнай; б) няцотнай.



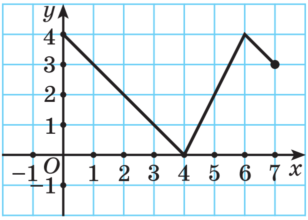
Рыс. 34

2.91. На рысунку 35 паказана частка графіка функцыі $y = f(x)$ для ўсіх x, якія задавальняюць умову $x \geqslant 0$. Пакажыце ў сшытку відарыс графіка функцыі на ўсім яе абсягу вызначэння, ведаючы, што гэта функцыя: а) цотная; б) няцотная. Для кожнага выпадку знайдзіце $f(-1)$; $f(-4)$.



Рыс. 35

2.92. На рысунку 36 паказана частка графіка цотнай функцыі $y = f(x)$, абсягам вызначэння якой з'яўляецца прамежак $[-7; 7]$. Знайдзіце значэнне выразу $f(-2) + f(-6)$.

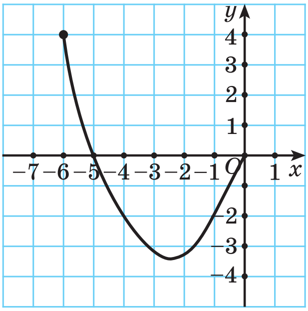


Рыс. 36

2.93. Функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай і $f(7) = -5$; $f(-8) = 3$. Знайдзіце значэнне выразу $3f(-7) + f(8)$.

2.94. Функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца няцотнай і $f(-3) = 10$; $f(1) = -2$. Знайдзіце значэнне выразу $2f(3) - 4f(-1)$.

2.95. Функцыя $y = f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў, і пункты $A(-7; 5)$ і $B(-2; 9)$ належаць графіку дадзенай функцыі. Знайдзіце значэнне выразу $f(7) + f(2)$, калі вядома, што графік функцыі сіметрычны адносна: а) восі ардынат; б) пачатку каардынат.



Рыс. 37

2.96. Функцыя $y = f(x)$ вызначана на адрэзку $[-6; 6]$ і з'яўляецца няцотнай. Яе графік для $x \leqslant 0$ паказаны на рысунку 37. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $f(x) = 0$. Рашыце няроўнасць $f(x) < 0$.

2.97. Выкарыстаўшы алгарытм, дакажыце, што функцыя з'яўляецца цотнай:

а) $f(x) = 3x^4 + 5x^2$; б) $f(x) = 5|x| - 2$;

в) $f(x) = \frac{7}{x^2}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

2.98. Прывядзіце прыклады лінейнай і квадратычнай функцый, якія з'яўляюцца цотнымі.

2.99. Выкарыстаўшы алгарытм, дакажыце няцотнасць функцыі:

а) $f(x) = x^3 + 2x$; б) $f(x) = \frac{7}{x^5}$;

в) $f(x) = x|x|$; г) $f(x) = 9x^7$.

2.100. Прывядзіце прыклад лінейнай функцыі, якая з'яўляецца няцотнай.

2.101. Дакажыце, што функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай:

а) $f(x) = 3x + 1$; б) $f(x) = x^2 + 4x$; в) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

2.102. Даследуйце функцыю на цотнасць:

а) $f(x) = -2x^5$; б) $f(x) = 3|x| + 1$;

в) $f(x) = \sqrt{x - 8}$; г)* $f(x) = |x + 7| - |x - 7|$.

З дадзеных функцый выберыце функцыі, графікі якіх сіметрычны адносна восі ардынат; адносна пачатку каардынат.

2.103. Функцыя $y = f(x)$ вызначана на адрэзку $[-7;\ 7]$ і з'яўляецца няцотнай. Частка яе графіка для $x \geqslant 0$ паказана на рысунку 38.

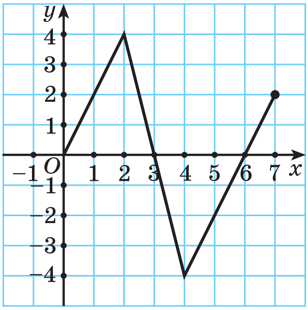
Знайдзіце:

а) мноства значэнняў функцыі;

б) нулі функцыі;

в) прамежкі знакапастаянства функцыі;

г) прамежкі манатоннасці функцыі.



Рыс. 38

2.104. Ці можа функцыя быць і цотнай, і няцотнай адначасова? Калі можа, то прывядзіце прыклад такой функцыі.

2.105*. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў, з'яўляецца цотнай і $f(a) \neq 0$. Ці праўда, што:

а) $f(a)+f(-a)=0;$ б) $\dfrac{f(a)}{f(-a)}=1;$

в) $f(a)\cdot f(-a)<0;$ г) $f(a)-f(-a)=0?$

Адкажыце на гэтыя ж пытанні, калі функцыя $y=f(x)$ з'яўляецца няцотнай.

2.106*. Вядома, што функцыя $y=f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў і з'яўляецца няцотнай. Ці можа выконвацца роўнасць $f(0)=7$?

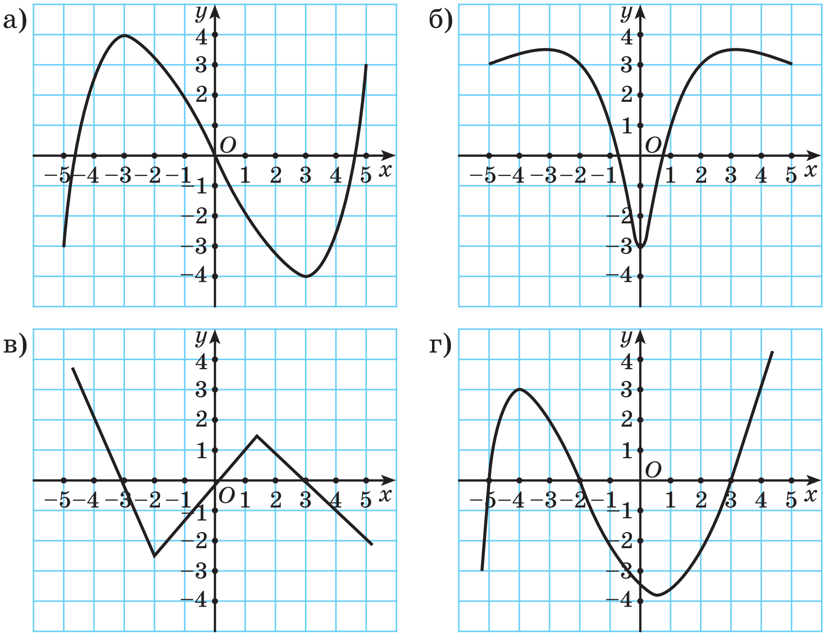
2.107*. Знайдзіце, пры якіх значэннях ліку a функцыя $f(x)=-8x^2+ax+5$ з'яўляецца цотнай.

2.108. Вызначце, ці можа абсягам вызначэння цотнай або няцотнай функцыі з'яўляцца мноства лікаў:

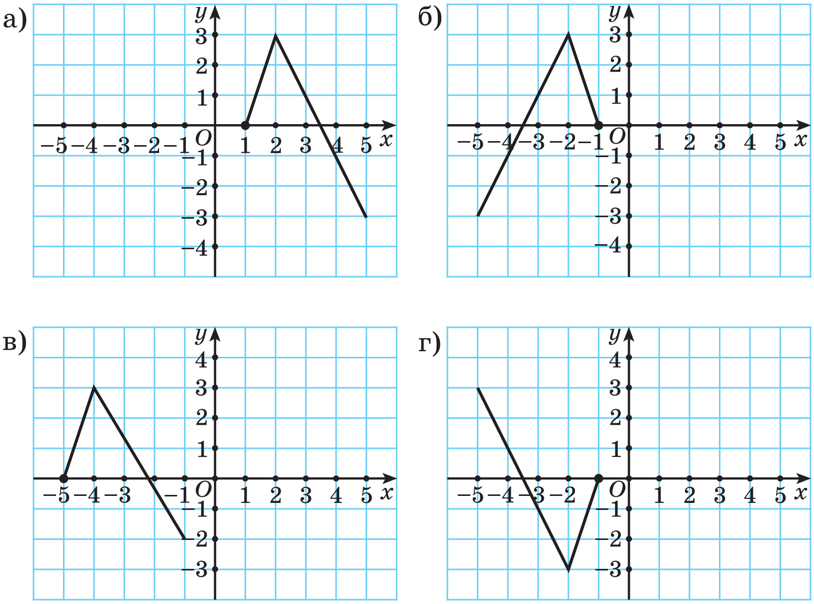
а) $[-3;\ 3]$; б) $\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$;

в) $(-4;\ 4]$; г) $\left[-7;-1\right)\cup\left(-1;1\right)\cup\left(1;7\right]$.

2.109. На адным з рысункаў 39, *а—г* паказаны відарыс графіка цотнай функцыі. Выберыце гэты рысунак.

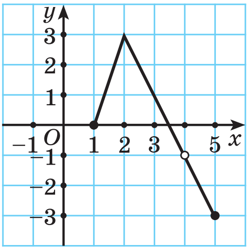


Рыс. 39



Рыс. 40

2.110. Функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца няцотнай і вызначана пры $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. На рысунку 40, *а* паказана частка графіка гэтай функцыі пры $x \geqslant 1$. Сярод рысункаў 40, *б—г* выберыце відарыс часткі графіка гэтай жа функцыі для $x \leqslant -1$.

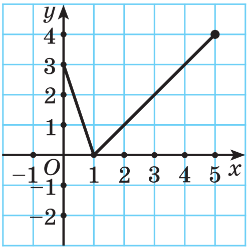


Рыс. 41

2.111. На рысунку 41 паказана частка графіка функцыі $y = f(x)$ пры $x \geqslant 1$. Пакажыце ў сшытку відарыс часткі графіка гэтай жа функцыі для $x \leqslant -1$, калі вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца:

а) цотнай; б) няцотнай.

2.112. На рысунку 42 паказана частка графіка цотнай функцыі $y = f(x)$, абсягам вызначэння якой з'яўляецца прамежак $[-5; 5]$. Знайдзіце значэнне выразу $f(-3) + f(-4)$.

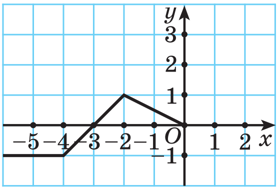


Рыс. 42

2.113. На рысунку 43 паказана частка графіка функцыі $y = f(x)$ для ўсіх x, якія задавальняюць умову $x \leqslant 0$. Пакажыце ў сшытку відарыс графіка функцыі $y = f(x)$, ведаючы, што яна: а) цотная; б) няцотная. Для кожнага выпадку знайдзіце $f(2)$; $f(5)$.

2.114. Для функцыі $y = f(x)$ вядома, што $f(-2) = -4$; $f(7) = 3$. Знайдзіце значэнне выразу $f(2) + f(-7)$, калі функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца:

а) цотнай; б) няцотнай.



Рыс. 43

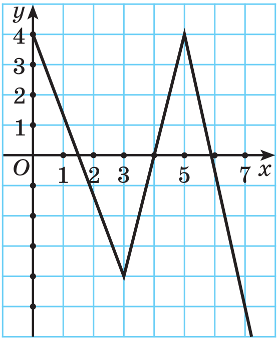
2.115. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ цотная. На рысунку 44 паказана частка графіка гэтай функцыі для $x \geqslant 0$. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $f(x) = 0$. Рашыце няроўнасць $f(x) > 0$.

2.116. Выкарыстаўшы алгарытм, дакажыце, што функцыя з'яўляецца цотнай:

а) $f(x) = 6x^4 + 3x^2$;

б) $f(x) = |3x| + x^2$;

в) $f(x) = \frac{6}{x^4}$.



Рыс. 44

2.117. Выкарыстаўшы алгарытм, дакажыце, што функцыя з'яўляецца няцотнай:

а) $f(x) = \frac{5}{x}$; б) $f(x) = 2x^3 - x$; в) $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

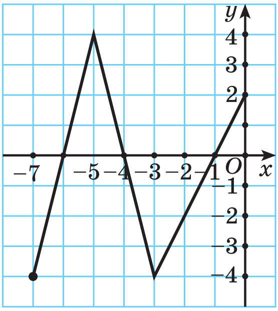
2.118. Дакажыце, што функцыя не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай:

а) $f(x) = 7 - 2x$; б) $f(x) = x^2 - 3x$; в) $f(x) = \frac{1}{x+3}$.

2.119. Функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай і вызначана на адрэзку $[-7;\ 7]$. Частка яе графіка для $x \leqslant 0$ паказана на рысунку 45.

Знайдзіце: а) мноства значэнняў функцыі; б) нулі функцыі; в) прамежкі знакапастаянства функцыі; г) прамежкі манатоннасці функцыі.

2.120*. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў і на прамежку $(0; +\infty)$ прымае толькі адмоўныя значэнні. Якія значэнні прымае гэта функцыя на прамежку $(-\infty; 0)$, калі яна з'яўляецца: а) цотнай; б) няцотнай?



Рыс. 45

2.121. Выберыце ўсе правільныя сцверджанні:

а) 3 — дзельнік ліку 26 373; б) 769 538 кратна 2;
в) 0 — дзельнік ліку 17; г) 55 556 кратна 5;
д) 12 345 678 дзеліцца на 9.

2.122. Вылічыце $10^3 : 0{,}0001 \cdot 100^{-3}$.

2.123. Рашыце двайную няроўнасць $-2 < 1 - 3x \leqslant 7$.

2.124. Ведаючы, што x_1 і x_2 — карані ўраўнення $x^2 + 4x - 7 = 0$, знайдзіце значэнне выразу:

а) $x_1 + x_2$; б) $x_1 x_2$; в) $x_1^2 + x_2^2$.

2.125. Знайдзіце значэнне выразу

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} - \frac{4}{\sqrt{6}-2}\right) \cdot \left(\sqrt{6} + 7\right).$$

2.126. З вёскі ў горад выйшаў турыст. Першую палову шляху ён ішоў пешшу са скорасцю 5 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$. Астатнюю частку шляху ён праехаў на аўтобусе. Знайдзіце сярэднюю скорасць руху турыста на ўсім маршруце, калі скорасць аўтобуса роўна 45 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

2.127. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі

$$y = (x - 3)^2 + (x + 1)^2.$$

2.128. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{a - b}{a^2 + ab} - \frac{1}{a^2 - b^2} : \frac{a + b}{b^2 - 2ab + a^2}\right) \cdot \frac{a^2 + ab}{a - b}.$$

§ 9. Пабудова графікаў функцый $y = f(x) \pm b$, $y = f(x \pm a)$

2.129. Знайдзіце каардынаты пункта перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ з воссю ардынат:

а) $f(x) = -3x + 5$; б) $f(x) = x^2 + 3x - 5$.

2.130. Параўнайце значэнні функцый $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 3$ і $h(x) = x^2 + 5$ пры значэнні аргумента, роўным 2.

2.131. Пабудуйце ў адной сістэме каардынат графікі функцый $f(x) = x^2$; $f(x) = (x - 1)^2$; $f(x) = x^2 - 3$.

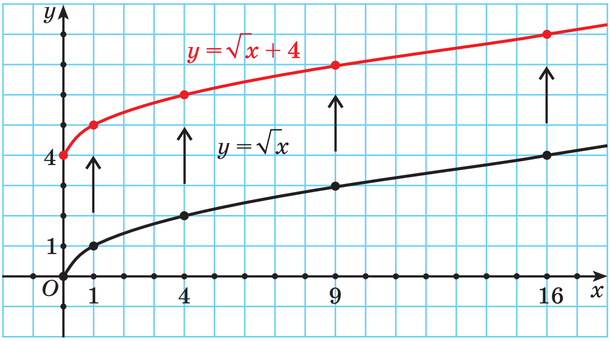
Раней вы разглядалі такія пераўтварэнні геаметрычных фігур, як сіметрыю адносна пункта, сіметрыю адносна прамой і інш.

Вам вядома, што графікі цотных функцый сіметрычны адносна восі ардынат (напрыклад, $y = x^2$), а няцотных — адносна пачатку каардынат (напрыклад, $y = x^3$).

Геаметрычныя веды можна прымяняць для пабудовы графікаў адных функцый, выкарыстоўваючы графікі другіх, ужо вядомых функцый.

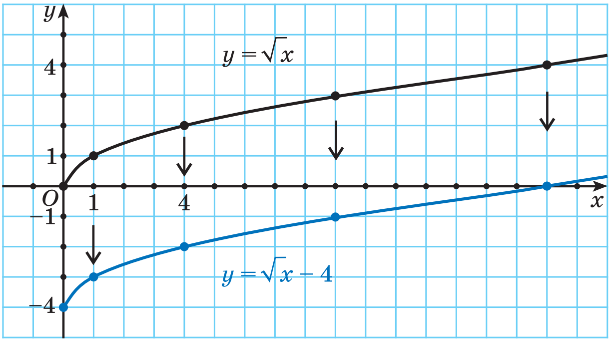
Разгледзім функцыі $y = \sqrt{x}$ і $y = \sqrt{x} + 4$. Складзём табліцу некаторых значэнняў гэтых функцый і пабудуем іх графікі (рыс. 46).

x	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} + 4$	4	5	6	7	8



Рыс. 46

Параўнаем размяшчэнне пунктаў графікаў гэтых функцый, якія маюць аднолькавыя абсцысы. Напрыклад, разгледзім пункт (1; 1) на першым графіку і пункт (1; 5) на другім. Гэтыя пункты ляжаць на прамой, паралельнай восі ардынат, прычым пункт (1; 5) знаходзіцца на 4 адзінкі вышэй за пункт (1; 1). Пункт (4; 6) ляжыць на 4 адзінкі вышэй за пункт (4; 2). Гэтаксама размешчаны ўсе іншыя пункты гэтых графікаў, якія маюць аднолькавыя абсцысы. Можна зрабіць выснову, што графік функцыі $y = \sqrt{x} + 4$ атрыманы зрухам (паралельным пераносам) графіка $y = \sqrt{x}$ на 4 адзінкі ўгору ўздоўж восі ардынат.



Рыс. 47

Разглядзеўшы пункты графікаў функцый $y = \sqrt{x} - 4$ і $y = \sqrt{x}$ з аднолькавымі абсцысамі (рыс. 47), заўважым, што графік функцыі $y = \sqrt{x} - 4$ атрыманы зрухам (паралельным пераносам) графіка $y = \sqrt{x}$ на 4 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат.

Графік функцыі

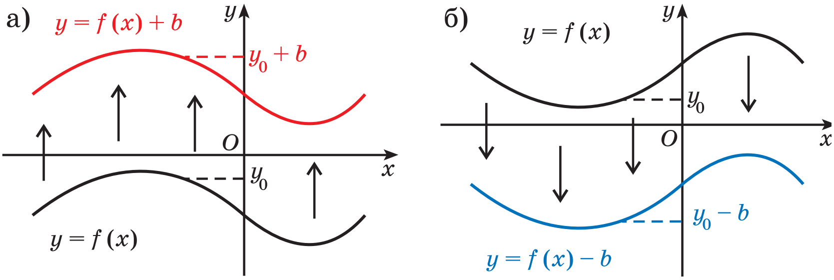
$y = f(x) + b$

можна атрымаць зрухам графіка функцыі $y = f(x)$ уздоўж восі ардынат на b адзінак угору, калі $b > 0$ (рыс. 48, *а*).

Графік функцыі

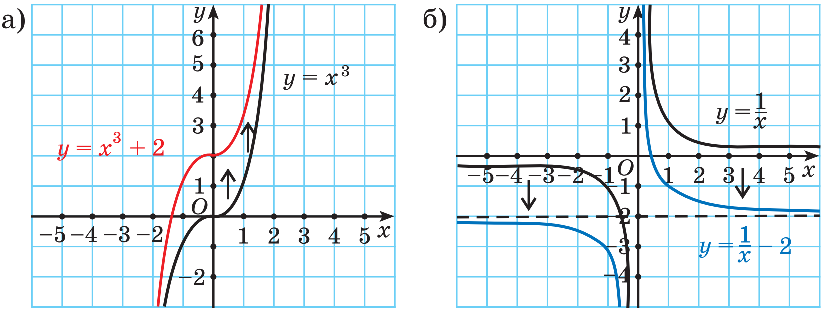
$y = f(x) - b$

можна атрымаць зрухам графіка функцыі $y = f(x)$ уздоўж восі ардынат на b адзінак уніз, калі $b > 0$ (рыс. 48, *б*).



Рыс. 48

Напрыклад, на рысунку 49 паказана пабудова графікаў функцый $y = x^3 + 2$ і $y = \frac{1}{x} - 2$.



Рыс. 49

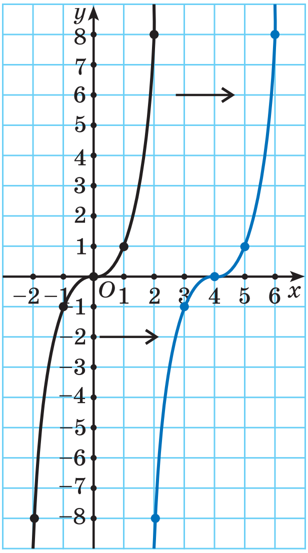
Разгледзім функцыі $y = x^3$ і $y = (x - 4)^3$. Складзём табліцу некаторых значэнняў гэтых функцый і пабудуем іх графікі (рыс. 50).

x	–2	0	1	2	4	5
$y = x^3$	–8	0	1	8	64	125
$y = (x - 4)^3$	–216	–64	–27	–8	0	1

Вызначым значэнні аргумента, пры якіх абедзве функцыі прымаюць аднолькавыя значэнні. Напрыклад, значэнне $y = 0$ першая функцыя прымае пры $x = 0$, а другая — пры $x = 4$. Значэнне $y = 1$ першая функцыя прымае пры $x = 1$, а другая — пры $x = 5$.

Можна заўважыць, што функцыя $y = (x - 4)^3$ прымае тыя ж значэнні, што і функцыя $y = x^3$, на 4 адзінкі «пазней».

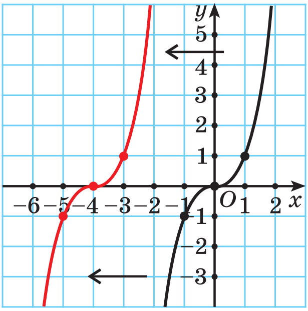
Графічна гэта азначае, што графік функцыі $y = (x - 4)^3$ атрыманы зрухам (паралельным пераносам) графіка функцыі $y = x^3$ на 4 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс (гл. рыс. 50).



Рыс. 50

Разглядзеўшы графікі функцый $y = x^3$ і $y = (x + 4)^3$, заўважым, што другая функцыя прымае тыя ж значэнні, што і першая, на 4 адзінкі «раней».

Графічна гэта азначае, што для атрымання графіка функцыі $y = (x + 4)^3$ пункты графіка функцыі $y = x^3$ зрушваюць на 4 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс (рыс. 51).



Рыс. 51

Графік функцыі

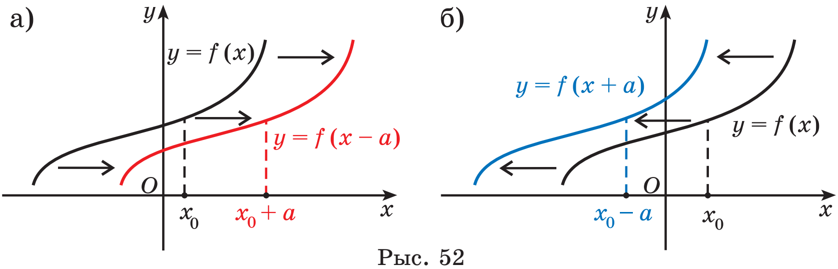
$y = f(x - a)$

можна атрымаць зрухам графіка функцыі $y = f(x)$ уздоўж восі абсцыс на a адзінак управа, калі $a > 0$ (рыс. 52, *а*).

Графік функцыі

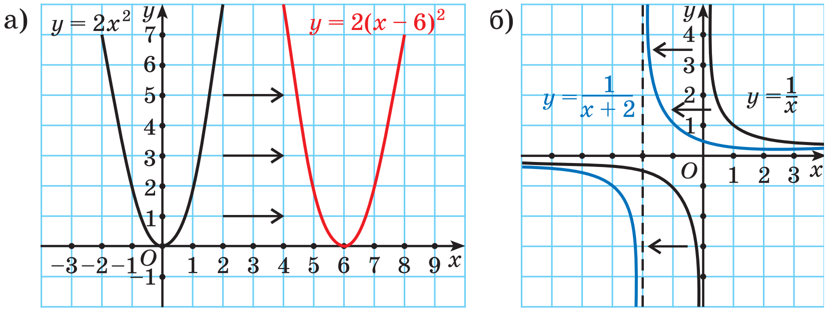
$y = f(x + a)$

можна атрымаць зрухам графіка функцыі $y = f(x)$ уздоўж восі абсцыс на a адзінак улева, калі $a > 0$ (рыс. 52, *б*).



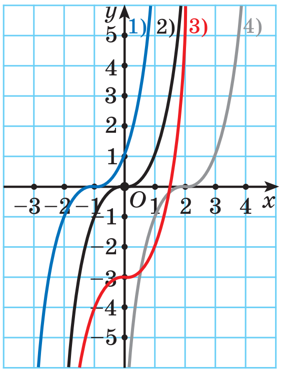
Рыс. 52

Напрыклад, на рысунку 53 паказана пабудова графікаў функцый $y = 2(x - 6)^2$ і $y = \frac{1}{x+2}$.



Рыс. 53

Пабудова графікаў функцый $y = f(x) \pm b$, $y = f(x \pm a)$

1. Графік функцыі $y = f(x) - 3$ атрыманы з графіка функцыі $y = f(x)$ зрухам уздоўж восі: а) ардынат на 3 адзінкі ўгору; б) абсцыс на 3 адзінкі ўправа; в) абсцыс на 3 адзінкі ўлева; г) ардынат на 3 адзінкі ўніз. Выберыце правільны адказ.	Паколькі разглядаюцца функцыі $y = f(x)$ і $y = f(x) - b$ пры $b = 3$, то графік функцыі $y = f(x) - 3$ атрыманы зрухам графіка функцыі $y = f(x)$ уздоўж восі ардынат на 3 адзінкі ўніз. Правільны адказ г).
2. Графік якой з функцый атрыманы з графіка функцыі $y = 2x^2$ яго зрухам уздоўж восі абсцыс на 3 адзінкі ўправа: а) $y = 2x^2 + 3$; б) $y = (2x + 3)^2$; в) $y = (2x - 3)^2$; г) $y = 2(x - 3)^2$?	Разглядаюцца функцыі $y = f(x)$ і $y = f(x - a)$ пры $a = 3 > 0$. Зрухам графіка функцыі $y = 2x^2$ уздоўж восі абсцыс на 3 адзінкі ўправа атрыманы графік функцыі $y = 2(x - 3)^2$. *Адказ*: г).
3. Устанавіце залежнасць паміж графікамі функцый (рыс. 54) і іх аналітычным запісам: а) $y = x^3$; б) $y = (x + 1)^3$; в) $y = (x - 2)^3$; г) $y = x^3 - 3$.  Рыс. 54	а) Графікам функцыі $y = x^3$ з'яўляецца кубічная парабала 2). б) Паколькі графік функцыі $y = (x + 1)^3$ атрымліваецца з графіка функцыі $y = x^3$ зрухам яго на 1 адзінку ўлева ўздоўж восі абсцыс, то графікам функцыі $y = (x + 1)^3$ з'яўляецца кубічная парабала 1). в) Функцыі $y = (x - 2)^3$ адпавядае графік 4), паколькі графік функцыі $y = (x - 2)^3$ атрымліваецца зрухам графіка функцыі $y = x^3$ на 2 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс. г) Функцыі $y = x^3 - 3$ адпавядае графік 3), паколькі графік функцыі $y = x^3 - 3$ атрымліваецца зрухам графіка функцыі $y = x^3$ на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат.

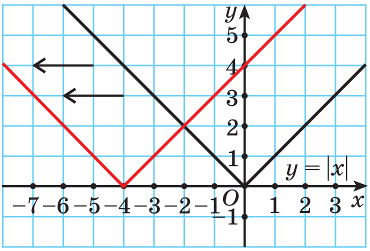
4. З дапамогай пераўтварэння графіка функцыі $y = |x|$ пабудуйце графік функцыі:

а) $y = |x + 4|$;

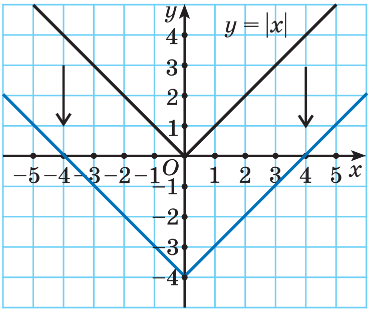
б) $y = |x| - 4$;

в) $y = |x - 3| + 2$.

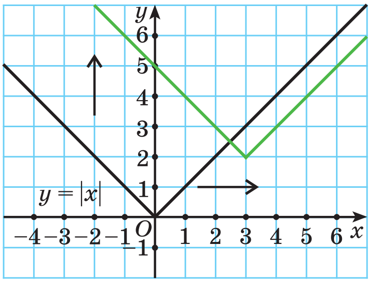
а) Выканаем зрух графіка функцыі $y = |x|$ на 4 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і атрымаем графік функцыі $y = |x + 4|$.



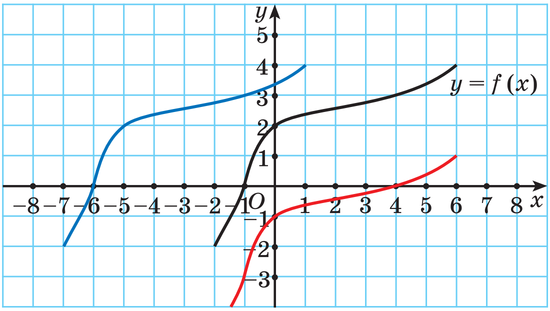
б) Выканаем зрух графіка функцыі $y = |x|$ на 4 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат і атрымаем графік функцыі $y = |x| - 4$.



в) Выканаем зрух графіка функцыі $y = |x|$ на 3 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўгору ўздоўж восі ардынат і атрымаем графік функцыі $y = |x - 3| + 2$.



? Запішыце формулы, якія адпавядаюць графікам функцый, атрыманым зрухамі графіка функцыі $y = f(x)$ (рыс. 55).



Рыс. 55

2.132. Графік функцыі $y = (x + 2)^3$ атрыманы з графіка функцыі $y = x^3$ зрухам уздоўж восі:

а) ардынат на 2 адзінкі ўгору;

б) абсцыс на 2 адзінкі ўправа;

в) абсцыс на 2 адзінкі ўлева;

г) ардынат на 2 адзінкі ўніз.

Выберыце правільны адказ.

2.133. Графік якой з дадзеных функцый атрыманы з графіка функцыі $y = \sqrt{x}$ яго зрухам уздоўж восі ардынат на 5 адзінак угору:

а) $y = \sqrt{x - 5}$; б) $y = \sqrt{x} + 5$;

в) $y = \sqrt{x + 5}$; г) $y = \sqrt{x} - 5$?

2.134. Выкарыстайце правілы пераўтварэння графікаў і запішыце ўраўненне парабалы, якую можна атрымаць зрухам парабалы $y = x^2$ уздоўж восі:

а) абсцыс на 7 адзінак улева;

б) ардынат на 4 адзінкі ўніз;

в) ардынат на 9 адзінак угору;

г) абсцыс на 1 адзінку ўправа;

д) абсцыс на 2 адзінкі ўлева і ўздоўж восі ардынат на 3 адзінкі ўгору;

е) абсцыс на 5 адзінак ўправа і ўздоўж восі ардынат на 6 адзінак уніз.

2.135. Графік якой з функцый: $y = 3(x - 1)^2$ або $y = (3x - 1)^2$ — атрыманы з графіка функцыі $y = 3x^2$ зрухам яго на 1 адзінку ўправа ўздоўж восі абсцыс?

2.136. Выберыце функцыю, графік якой атрыманы з графіка функцыі $y = -5x^2$ зрухам яго на 3 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат:

а) $y = -5x^2 + 3$;   б) $y = -5(x + 3)^2$;

в) $y = -5x^2 - 3$;   г) $y = -(5x + 3)^2$.

2.137. Графікі функцый, паказаных на рысунку 56, атрыманы з графіка функцыі $y = |x|$ зрухамі яго ўздозж каардынатных восей. Запішыце формулы гэтых функцый.

2.138. Як трэба пераўтварыць графік функцыі $y = \frac{4}{x}$, каб атрымаць графік функцыі:

а) $y = \frac{4}{x} + 2$;   б) $y = \frac{4}{x} - 5$;

в) $y = \frac{4}{x + 3}$;   г) $y = \frac{4}{x - 7}$;

д) $y = \frac{4}{x + 1} - 6$;   е) $y = \frac{4}{x - 5} + 8$?

2.139. Выкарыстайце правілы пераўтварэння графікаў і вызначце, графіка якой з дадзеных функцый няма на рысунку 57:

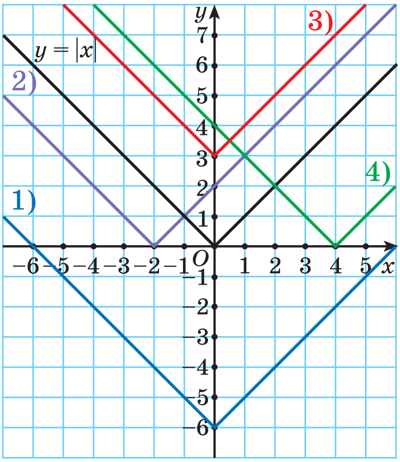
а) $y = \sqrt{x}$;   б) $y = \sqrt{x + 2} - 3$;

в) $y = \sqrt{x - 3} - 2$;   г) $y = \sqrt{x - 3} + 2$.

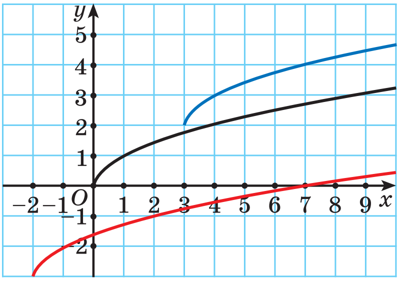
2.140. З дапамогай якіх пераўтварэнняў графіка функцыі $y = x^2$ можна пабудаваць графік функцыі:

а) $y = (x - 2)^2$;

б) $y = (x + 4)^2$;



Рыс. 56



Рыс. 57

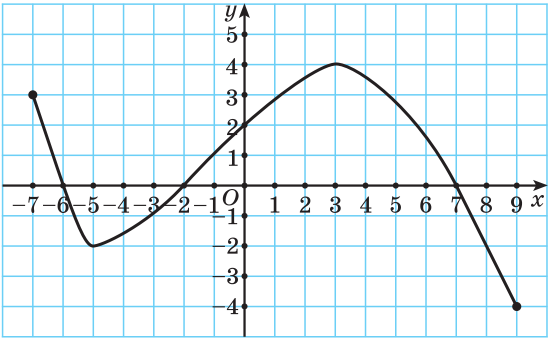
в) $y = x^2 - 3$; г) $y = x^2 + 1$;
д) $y = (x - 4)^2 - 5$; е) $y = (x + 3)^2 + 1$?
Пабудуйце гэтыя графікі.

2.141. Запішыце функцыю $y = x^2 + 8x + 10$ у выглядзе $y = (x - m)^2 + n$ і пабудуйце яе графік.

2.142. З дапамогай пераўтварэнняў графіка функцыі $y = x^3$ пабудуйце графік функцыі:
а) $y = (x - 2)^3$; б) $y = x^3 - 3$;
в) $y = (x + 1)^3 - 2$; г) $y = (x - 3)^3 + 1$.

2.143. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:
а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x - 2|$; в) $f(x) = |x + 3|$;
г) $f(x) = |x| - 4$; д) $f(x) = |x| + 1$; е) $f(x) = |x - 4| + 3$.

2.144. На рысунку 58 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Пабудуйце графік функцыі:
а) $y = f(x - 2)$; б) $y = f(x + 3)$;
в) $y = f(x) - 1$; г) $y = f(x) + 4$.

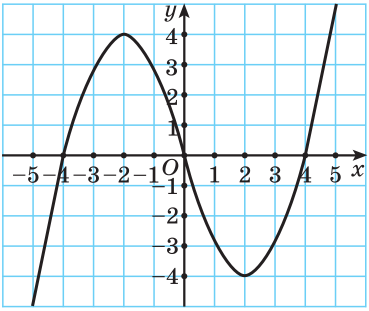


Рыс. 58

2.145. З дапамогай пераўтварэння графіка функцыі $y = f(x)$, паказанага на рысунку 59, пабудуйце графік функцыі:

а) $y = f(x + 4) - 3$;

б) $y = f(x - 2) + 5$.



Рыс. 59

2.146. Выберыце функцыю, графік якой атрыманы з графіка функцыі $y = \frac{8}{x}$ зрухам яго на 2 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 3 адзінкі ўгору ўздоўж восі ардынат:

а) $y = \frac{8}{x+2} + 3$; б) $y = \frac{8}{x-2} + 3$; в) $y = \frac{8}{x+3} - 2$;

г) $y = \frac{8}{x+2} - 3$; д) $y = \frac{8}{x-3} + 2$.

Пабудуйце графік гэтай функцыі.

2.147. З дапамогай пераўтварэнняў графіка функцыі $y = -x^2$ пабудуйце графікі функцый, папярэдне запісаўшы іх у выглядзе $y = -(x - m)^2 + n$:

а) $y = -x^2 + 6x - 9$; б) $y = -x^2 - 10x - 23$;
в) $y = -x^2 + 2x + 6$; г) $y = -x^2 - 4x + 1$.

2.148*. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = 2x^2$ зрухам яго на 3 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ і прамой $x = 15$.

2.149*. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g_1(x) = -3x^2$ зрухам яго на 3 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўгору ўздоўж восі ардынат. А графік функцыі $y = h(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g_2\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2$ зрухам яго на 4 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і на 1 адзінку ўніз уздоўж восі ардынат. Ці маюць агульныя пункты графікі функцый $y = f(x)$ і $y = h(x)$?

2.150*. Функцыя $y = f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў і $E(f) = [-1;\ 7]$. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = f(x - 2)$; б) $y = f(x) + 4$;

в) $y = f(x - 1) - 3$; г) $y = f(x - 3) + 5$.

2.151*. Функцыя $y = f(x)$ на прамежку $\left(-\infty;\ 4\right]$ нарастае, а на прамежку $\left[4;\ +\infty\right)$ спадае. Знайдзіце прамежак нарастання функцыі:

а) $y = f(x + 1)$; б) $y = f(x) - 7$;
в) $y = f(x - 3)$; г) $y = f(x + 2) - 4$.

2.152*. Як можна вызначыць, ці з’яўляецца функцыя:

а) $y = f(x) + 8$; б) $y = f(x) - 3$;
в) $y = f(x + 7)$; г) $y = f(x - 2)$ — цотнай, калі вядома, што функцыя $y = f(x)$ з’яўляецца цотнай?

2.153*. Графік функцыі $y = f(x)$ сіметрычны адносна прамой $x = 3$. Вызначце, якая з дадзеных функцый з'яўляецца цотнай:

а) $y = f(x - 3)$; б) $y = f(x) - 3$;
в) $y = f(x) + 3$; г) $y = f(x + 3)$.

2.154. Графік функцыі $y = x^2 - 4$ атрыманы з графіка функцыі $y = x^2$ зрухам уздоўж восі:

а) ардынат на 4 адзінкі ўгору; б) абсцыс на 4 адзінкі ўправа; в) абсцыс на 4 адзінкі ўлева; г) ардынат на 4 адзінкі ўніз. Выберыце правільны адказ.

2.155. Вызначце, графік якой з дадзеных функцый атрыманы з графіка функцыі $y = |x|$ зрухам яго ўздоўж восі абсцыс на 3 адзінкі ўлева:

а) $y = |x - 3|$; б) $y = |x| + 3$;

в) $y = |x + 3|$; г) $y = |x| - 3$.

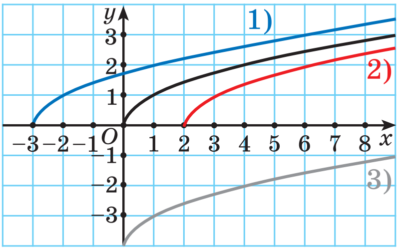
2.156. Запішыце формулу функцыі, графік якой можна атрымаць зрухам кубічнай парабалы $y = x^3$ уздоўж восі:

а) абсцыс на 2 адзінкі ўправа; б) ардынат на 3 адзінкі ўніз; в) ардынат на 5 адзінак угору; г) абсцыс на 9 адзінак улева; д) абсцыс на 3 адзінкі ўлева і ўздоўж восі ардынат на 5 адзінак угору; е) абсцыс на 6 адзінак управа і ўздоўж восі ардынат на 7 адзінак уніз.

2.157. Выберыце функцыю, графік якой атрыманы з графіка функцыі $y = 4x^2$ зрухам яго на 2 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс:

а) $y = 4(x + 2)^2$; б) $y = 4x^2 - 2$;
в) $y = 4(x - 2)^2$; г) $y = (4x - 2)^2$.

2.158. Выкарыстайце правілы пераўтварэння графікаў і запішыце формулы функцый, графікі якіх паказаны на рысунку 60, калі яны атрыманы з графіка функцыі $y = \sqrt{x}$ зрухам яго ўздоўж каардынатных восей.



Рыс. 60

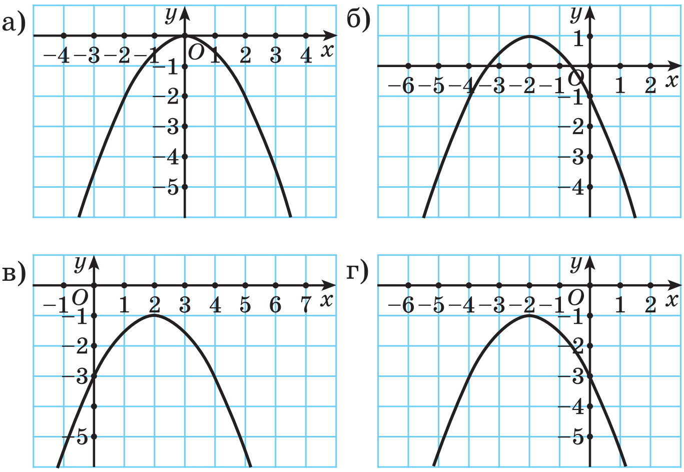
2.159. З дапамогай якіх пераўтварэнняў графіка функцыі $y = -\frac{2}{x}$ можна атрымаць графік функцыі:

а) $y = -\frac{2}{x} - 1$; б) $y = -\frac{2}{x+5}$;

в) $y = -\frac{2}{x} + 7$; г) $y = -\frac{2}{x-8}$?

Запішыце формулу функцыі, графік якой можна атрымаць з графіка функцыі $y = -\frac{2}{x}$ зрухам яго на 3 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і на 5 адзінак уніз уздоўж восі ардынат.

2.160. На рысунку 61, *а* паказаны відарыс графіка функцыі $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Сярод рысункаў 61, *б*—*г* выберыце відарыс графіка функцыі $y = a(x-2)^2 - 1$.



Рыс. 61

2.161. Выкарыстайце правілы пераўтварэння да графіка функцыі $y = x^2$ і пабудуйце графік функцыі:

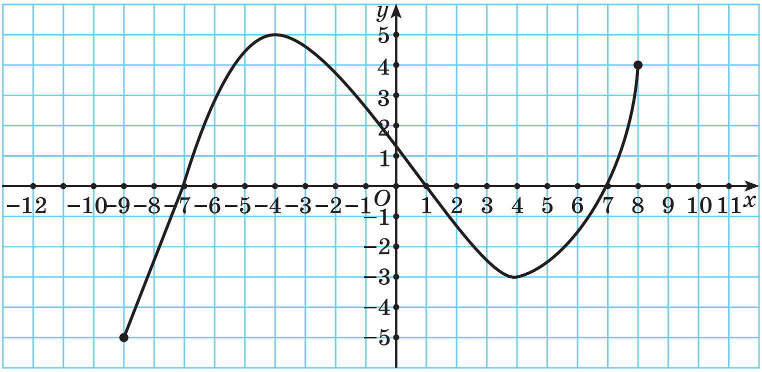
а) $y = (x-3)^2$; б) $y = x^2 + 4$; в) $y = (x+2)^2 - 1$.

2.162. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x+2}$; в) $y = \sqrt{x} - 3$;

г) $y = \sqrt{x+1} - 4$; д) $y = \sqrt{x-5} + 1$.

2.163. На рысунку 62 паказаны графік функцыі $y = f(x)$. Перанясіце рысунак у сшытак і пабудуйце графік функцыі:



Рыс. 62

а) $y = f(x + 4)$; б) $y = f(x - 2)$;

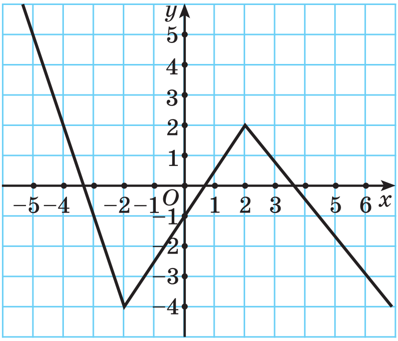
в) $y = f(x) + 3$; г) $y = f(x) - 5$.

2.164. З дапамогай пераўтварэнняў графіка функцыі $y = f(x)$, паказанага на рысунку 63, пабудуйце графік функцыі:

а) $y = f(x - 3) + 2$;

б) $y = f(x + 4) - 1$.

2.165. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{6}{x+3} - 2$, пераўтварыўшы графік функцыі $y = \frac{6}{x}$.



Рыс. 63

2.166. З дапамогай пераўтварэнняў графіка функцыі $y = x^2$ пабудуйце графікі функцый, папярэдне запісаўшы іх у выглядзе $y = (x - m)^2 + n$:

а) $y = x^2 - 4x + 4$; б) $y = x^2 - 10x + 20$;

в) $y = x^2 + 6x + 10$; г) $y = x^2 - 8x + 1$.

2.167*. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = x^3$ зрухам яго на 5 адзінак уніз уздоўж восі ардынат. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ і прамой $x = -4$.

2.168*. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = -2x^2$ зрухам яго на 6 адзінак управа ўздоўж восі абсцыс і на 8 адзінак угору ўздоўж восі ардынат. Знайдзіце нулі функцыі $y = f(x)$.

2.169*. Функцыя $y=f(x)$ вызначана на мностве рэчаісных лікаў і $E(f)=[0;\ 8]$. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y=f(x+3)$; б) $y=f(x)-5$;

в) $y=f(x+6)+9$; г) $y=f(x-7)-1$.

2.170*. Вядома, што функцыя $y=f(x)$ з'яўляецца цотнай. Ці праўда, што цотнай з'яўляецца функцыя $y=f(x)+b$, дзе $b\neq 0$?

2.171. Знайдзіце лік, адваротны ліку 3,5.

2.172. Двухтомнік каштуе 25,6 р. Першы том таннейшы за другі на 40 %. Колькі рублёў каштуе першы том?

2.173. Ацаніце перыметр прамавугольніка (P) са старанамі a і b, калі вядома, што $7\leqslant a<8$; $14<b\leqslant 15$.

2.174. Спрасціце выраз $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}+\sqrt{4a^2}$ пры $a<0$, $b>0$.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць азначэнне функцыі, яе абсягу вызначэння і мноства значэнняў, спосабы задання функцый;
- умець знаходзіць значэнні функцыі па значэннях аргумента; значэнні аргумента па значэннях функцыі; абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцый, зададзеных рознымі спосабамі;
- ведаць азначэнне нулёў функцыі, прамежкаў знакапастаянства функцыі;
- умець знаходзіць нулі функцыі, прамежкі знакапастаянства функцыі, зададзенай рознымі спосабамі;
- ведаць азначэнні нарастальнай і спадальнай функцыі на прамежку, азначэнне манатоннай функцыі на прамежку;
- умець знаходзіць прамежкі манатоннасці функцыі, зададзенай рознымі спосабамі;
- ведаць азначэнне цотнай і няцотнай функцыі;
- умець прымяняць алгарытм даследавання функцыі на цотнасць (няцотнасць);
- умець выконваць пабудову графіка функцыі $y=f(x)\pm b$, ведаючы графік функцыі $y=f(x)$;
- умець выконваць пабудову графіка функцыі $y=f(x\pm a)$, ведаючы графік функцыі $y=f(x)$.

Я правяраю свае веды

1. Знайдзіце $f(-2)$, калі:

а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = -x^2 - 1$;

в) $f(x) = \frac{1}{2-x}$; г) $f(x) = \sqrt{7-x}$.

2. Выберыце функцыі, графікам якіх належыць пункт $N(-12;\ 1)$:

а) $y = -12x$; б) $y = -x + 12$; в) $y = -\frac{12}{x}$;

г) $y = x + 13$; д) $y = x^2 + 145$.

3. Выберыце функцыю, відарыс графіка якой паказаны на рысунку 64:

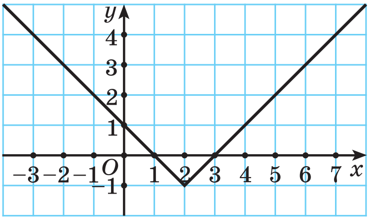
а) $y = |x + 2| + 1$;

б) $y = -|x - 2| - 1$;

в) $y = |x - 2| - 1$;

г) $y = |x + 2| - 1$;

д) $y = |x - 1| - 2$.



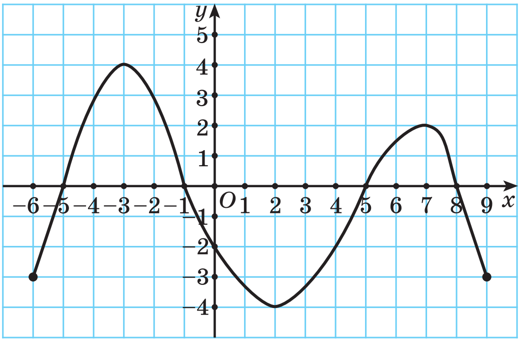
Рыс. 64

4. Якую ўласцівасць мае графік цотнай функцыі? Няцотнай функцыі? Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай, а функцыя $y = q(x)$ — няцотнай, і $f(5) = 7$, $q(-1) = 6$. Знайдзіце значэнне выразу $2f(-5) + q(1)$.

5. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $f(x) = 5x - 9$; б) $g(x) = x^2 - 11x + 30$; в) $h(x) = \frac{9}{x}$.

6. Па графіку функцыі, паказанаму на рысунку 65, знайдзіце: а) абсяг вызначэння функцыі; б) мноства значэнняў функцыі; в) нулі функцыі; г) прамежкі знакапастаянства функцыі; д) прамежкі манатоннасці функцыі.



Рыс. 65

7. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі, зададзенай формулай:

а) $y = \frac{8x}{x-4}$; б) $y = \frac{2}{x^2+6x+5}$;

в) $y = \frac{x}{\sqrt{9-0{,}01x}}$; г) $y = \sqrt{8x - x^2}$;

д) $y = \frac{x+2}{x-4} - \sqrt{16 - x^2}$; е) $y = \sqrt{x-7} + \frac{8}{\sqrt{x^2-9x+14}}$.

8. Прааналізуйце ўмову і знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = x^2 - 6$; б) $f(x) = |x| + 9$;

в) $f(x) = \sqrt{x+2} - 8$; г) $f(x) = -x^2 - 6x + 19$.

9. Дакажыце, што функцыя $y = (x-4)^2$ нарастае на прамежку $[4; +\infty)$ і спадае на прамежку $(-\infty; 4]$.

10. Знайдзіце, пры якіх значэннях ліку a функцыя $f(x) = 5x^2 + 6ax - a$ не мае нулёў.

Практычная матэматыка

1. На рысунку 66 паказаны відарыс графіка, які адлюстроўвае залежнасць колькасці бензіну n у баку аўтамабіля кур'ера ад часу t.

а) Што адбылося каля 12.00?

б) Колькі прыблізна часу аўтамабіль кур'ера стаяў у перыяд з 9.00 да 19.00?

Рыс. 66

в) Якая магчымая частка рабочага дня кур’ера адлюстравана на графіку з 13.00 да 14.00?

г) Назавіце праўдападобную прычыну, па якой графік становіцца «больш крутым» пасля 17.00.

2. Цана білета на стадыён складала 10 р. Кіраўніцтва стадыёна вырашыла знізіць цану білета так, каб выручка ўзрасла на 12,5 % за кошт будучага павелічэння колькасці гледачоў. На які працэнт павелічэння колькасці гледачоў разлічвае кіраўніцтва стадыёна, калі білет пасля зніжэння цаны стаў каштаваць 6 р.?

3. Тарыфны аклад работніка прадпрыемства складае x р. Надбаўка за стаж складае n % за кожныя адпрацаваныя на прадпрыемстве n гадоў. Па выніках працы за месяц работнік можа быць заахвочаны прэміяй у памеры y р. З атрыманай сумы вылічваецца ўзнос у пенсійны фонд у памеры 1 % і прафсаюзны ўзнос у памеры 1 %, калі работнік з’яўляецца членам прафсаюза. Заработная плата абкладаецца таксама 13 %-м падаходным падаткам. Складзіце формулу для вылічэння сумы, якую атрымае работнік. Па формуле знайдзіце, колькі атрымае работнік, які адпрацаваў на прадпрыемстве 10 гадоў, калі $x = 400$ р., а y складае 15 % ад x.

Займальная матэматыка

Даследуем, абагульняем, робім вывады

Даследчае заданне. Ці заўсёды па графіках ураўненняў сістэмы можна знайсці рашэнні сістэмы ўраўненняў? Вызначце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2. \end{cases}$

Паспрабуйце прывесці прыклад, калі колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў нельга вызначыць па графіках ураўненняў.

Рыхтуемся да алімпіяд

1. Для функцый $f(x) = \frac{x-2}{3x+4}$, $g(x) = \frac{2x+3}{5x-1}$ знайдзіце $f(g(x))$; $g(f(x))$.

2. Знайдзіце ўсе функцыі f, якія задавальняюць ураўненне $f(x) + (x-2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2$, $x \in \boldsymbol{R}$.

3. Функцыя $f(x)$ вызначана для ўсіх $x \neq 0$ і задавальняе ўраўненне $f(2x) + 3f\left(\frac{1}{2x}\right) = x^2$. Знайдзіце $f(x)$.

Раздзел 3

ДРОБАВА-РАЦЫЯНАЛЬНЫЯ ЎРАЎНЕННІ І НЯРОЎНАСЦІ

§ 10. Дробава-рацыянальныя ўраўненні

3.1. Рашыце ўраўненне $(3x - 2)(x + 4) = 0$.

3.2. Знайдзіце абсяг вызначэння рацыянальнага дробу $\frac{2x}{x - 6}$.

3.3. Пры якім значэнні зменнай:

а) назоўнік дробу $\frac{2x - 1}{x^2 - 36}$ роўны нулю;

б) назоўнік дробу $\frac{2x - 1}{x^2 - 36}$ роўны нулю?

Разгледзім задачу. У дробе лічнік на 2 большы за назоўнік. Калі лічнік гэтага дробу паменшыць на 3, а назоўнік павялічыць на 3, то новы дроб будзе роўны $\frac{1}{2}$. Знайдзіце назоўнік першапачатковага дробу.

Рашэнне. Абазначым назоўнік першапачатковага дробу праз x, тады яго лічнік роўны $(x + 2)$.

Калі лічнік дробу паменшыць на 3, то атрымаецца лічнік новага дробу: $(x + 2) - 3 = x - 1$. Назоўнік новага дробу пасля павелічэння на 3 будзе роўны $(x + 3)$, а новы дроб будзе мець выгляд $\frac{x - 1}{x + 3}$. Паколькі па ўмове задачы ён роўны $\frac{1}{2}$, то атрымаем ураўненне $\frac{x - 1}{x + 3} = \frac{1}{2}$. У левай частцы гэтага ўраўнення запісаны дробавы рацыянальны выраз.

Рашэнне многіх задач прыводзіць да ўраўненняў, у якіх у левай або правай (або ў той і другой) частках запісаны дробавыя рацыянальныя выразы. Такія ўраўненні называюць **дробава-рацыянальнымі ўраўненнямі.**

Дробава-рацыянальныя ўраўненні

$$\frac{x}{x - 6} = 2$$

$$x - 4 = \frac{5}{x^2 + 2}$$

$$\frac{x + 6}{x - 8} = 7 - \frac{x + 1}{x + 5}$$

Напрыклад, ураўненні $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$; $\frac{x + 2}{x - 2} - \frac{x + 1}{x - 1} = 3$; $x^2 + 3x + \frac{6}{2 - 3x - x^2} = 1$ з'яўляюцца дробава-рацыянальнымі.

Разгледзім дробава-рацыянальнае ўраўненне $\frac{x^2-3x+2}{x-2}=0.$ Гэта ўраўненне можна рашыць, выкарыстаўшы **ўмову роўнасці рацыянальнага дробу нулю.**

Рацыянальны дроб роўны нулю тады і толькі тады, калі лічнік дробу роўны нулю, а назоўнік не роўны нулю.

$$\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0, \\ B\neq 0 \end{cases}$$

Такім чынам, атрымаем:

$$\frac{x^2-3x+2}{x-2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x\neq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Адказ: 1.

Вернемся да ўраўнення $\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{2}$. Выканаем тоесныя пераўтварэнні ўраўнення.

1) Перанясём усе складаемыя з правай часткі ўраўнення ў левую: $\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+3}-\frac{1}{2}=0.$

2) Пераўтворым левую частку ўраўнення да рацыянальнага дробу: $\frac{x-1}{x+3}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{2x-2-x-3}{2(x+3)}=0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{2(x+3)}=0.$

3) Прыменім умову роўнасці дробу нулю:

$$\frac{x-5}{2(x+3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0, \\ 2(x+3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Адказ: 5.

Каб рашыць дробава-рацыянальнае ўраўненне, трэба:

① Перанесці ўсе складаемыя з правай часткі ўраўнення ў левую. ② Пераўтварыць левую частку ўраўнення да рацыянальнага дробу. ③ Прымяніць умову роўнасці дробу нулю. ④ Запісаць адказ.	Рашыце ўраўненне $\frac{9x^2-4}{x-1}=\frac{5-10x}{1-x}$. ① $\frac{9x^2-4}{x-1}-\frac{5-10x}{1-x}=0.$ ② $\frac{9x^2-4}{x-1}+\frac{5-10x}{x-1}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{9x^2-4+5-10x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{9x^2-10x+1}{x-1}=0.$ ③ $\begin{cases} 9x^2-10x+1=0, \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{9}, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x\neq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}.$ ④ *Адказ*: $\frac{1}{9}$.

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне

$$\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}=3.$$

Рашэнне. ① $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+1}{x-1}-3=0.$

② $\frac{(x+2)(x-1)-(x+1)(x-2)-3(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-11x+6}{(x-2)(x-1)}=0.$

③ $\begin{cases} 3x^2-11x+6=0, \\ (x-2)(x-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=\frac{2}{3}, \end{array}\right. \\ x\neq 1,\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3; \\ x=\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

④ *Адказ*: $\frac{2}{3}$; 3.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне

$$\frac{2}{a-3}=\frac{15}{a^2-6a+9}-1.$$

Рашэнне. ① $\frac{2}{a-3}-\frac{15}{a^2-6a+9}+1=0.$

② $\frac{2}{a-3}-\frac{15}{(a-3)^2}+1=0 \Leftrightarrow \frac{2(a-3)-15+(a-3)^2}{(a-3)^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2a-6-15+a^2-6a+9}{(a-3)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{a^2-4a-12}{(a-3)^2}=0.$

③ $\begin{cases} a^2-4a-12=0, \\ (a-3)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=6, \\ a=-2, \end{array}\right. \\ a\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6, \\ a=-2. \end{array}\right.$

④ *Адказ*: –2; 6.

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне $x^2+3x+\frac{6}{2-3x-x^2}=1.$

Рашэнне. Выканаем замену зменнай $x^2+3x=t$ і атрымаем ураўненне $t+\frac{6}{2-t}=1$, якое з'яўляецца дробава-рацыянальным. Рэшым яго, прымяніўшы алгарытм:

$t+\frac{6}{2-t}-1=0 \Leftrightarrow \frac{t(2-t)+6-(2-t)}{2-t}=0 \Leftrightarrow \frac{-t^2+3t+4}{2-t}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 3t - 4 = 0, \\ t \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = -1, \end{array}\right. \\ t \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = -1. \end{array}\right.$$

Падставім знойдзеныя значэнні t у роўнасць $x^2 + 3x = t$ і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x = 4, \\ x^2 + 3x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1, \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Адказ: -4; 1; $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Дробава-рацыянальныя ўраўненні выкарыстоўваюць як матэматычныя мадэлі для рашэння задач, якія апісваюць рэальныя сітуацыі.

Напрыклад, разгледзім задачу. На тушэнне лясных пажараў плошчай 200 га адпраўлена некалькі верталётаў з вадазліўнымі прыладамі. Паводле інфармацыі метэаролагаў мяркуецца ўзмацненне ветру, таму было адпраўлена яшчэ 5 верталётаў, у сувязі з чым плошча для скідвання вады кожным верталётам паменшылася на 20 га. Колькі верталётаў удзельнічала ў тушэнні пажараў першапачаткова?

Рашэнне.

① *Высветлім, аб якіх велічынях і залежнасцях паміж імі ідзе размова ў задачы.* У задачы размова ідзе аб плошчы лясных пажараў і колькасці верталётаў для тушэння пажараў.

② *Высветлім, якія значэнні велічынь і залежнасці паміж імі вядомы.* Вядома залежнасць паміж колькасцю верталётаў і плошчай для скідвання вады.

③ *Высветлім, якія значэнні велічынь і залежнасці паміж імі не вядомыя.* Невядома, колькі спатрэбілася верталётаў.

④ *Абазначым невядомае значэнне адной велічыні праз x, а астатнія выразім праз x і залежнасці паміж велічынямі.* Абазначым праз x першапачатковую колькасць верталётаў і атрымаем, што $(x + 5)$ верталётаў адпраўлена на тушэнне пажараў пасля паведамлення метэаролагаў. Складзём табліцу залежнасцей паміж велічынямі.

Велічыні	**Колькасць верталётаў, шт.**	**Агульная плошча лясных пажараў, га**	**Плошча скідвання вады верталётам, га**
Першапачатковае значэнне	x	200	$\frac{200}{x}$
Значэнне пасля паведамлення метэаролагаў	$x+5$	200	$\frac{200}{x+5}$

⑤ *Выкарыстаўшы залежнасці паміж вядомымі і невядомымі значэннямі велічынь, складзём ураўненне (матэматычную мадэль задачы) і рэшым яго.*

Па ўмове задачы $\frac{200}{x+5}$ га на 20 га менш, чым $\frac{200}{x}$ га. Значыць, рознасць паміж большым і меншым лікамі роўна 20, г. зн.

$$\frac{200}{x}-\frac{200}{x+5}=20 \Leftrightarrow \frac{200}{x}-\frac{200}{x+5}-20=0 \Leftrightarrow \frac{10}{x}-\frac{10}{x+5}-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{50-x^2-5x}{(x+5)x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-50=0, \\ x(x+5)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-10, \\ x=5, \end{array}\right. \\ x\neq 0,\ x\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-10, \\ x=5. \end{array}\right.$$

⑥ *Запішам адказ у адпаведнасці з сэнсам задачы.* Паколькі x — колькасць верталётаў, то выбіраем лік 5.

Адказ: 5 верталётаў.

Многія задачы, якія апісваюць рэальныя працэсы, маюць адну і тую ж матэматычную мадэль. Да такіх адносяцца, напрыклад, задачы на рух, работу і да т. п.

Разгледзім дзве задачы.

Задача 1. Два веласіпедысты выехалі адначасова з пасёлка A ў пасёлак B. Скорасць першага веласіпедыста на 2 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ большая за скорасць другога, таму ён прыехаў у пасёлак B на 0,5 г раней. З якімі скарасцямі рухаліся веласіпедысты, калі адлегласць паміж пасёлкамі роўна 30 км?

Задача 2. Для запаўнення вадой рэзервуара аб'ёмам 30 м^3 выкарыстоўваюць два краны: першы кран запаўняе рэзервуар на 0,5 г хутчэй другога, паколькі за 1 г праз яго наліваецца на 2 м^3 вады больш, чым праз другі. Знайдзіце скорасць запаўнення рэзервуара вадой праз кожны кран.

У абедзвюх задачах размова ідзе аб працэсах: у першай — аб працэсе руху, у другой — аб працэсе запаўнення рэзервуара вадой.

Складзём табліцу залежнасцей паміж велічынямі.

Працэс	**Скорасць**	**Вынік (пройдзены шлях, аб'ём вады ў рэзервуары)**	**Час**
Рух першага веласіпедыста	$x\ \frac{\text{км}}{\text{г}}$	30 км	$\frac{30}{x}$ г
Рух другога веласіпедыста	$(x-2)\ \frac{\text{км}}{\text{г}}$	30 км	$\frac{30}{x-2}$ г
Запаўненне рэзервуара вадой праз першы кран	$x\ \frac{\text{м}^3}{\text{г}}$	30 м^3	$\frac{30}{x}$ г
Запаўненне рэзервуара вадой праз другі кран	$(x-2)\ \frac{\text{м}^3}{\text{г}}$	30 м^3	$\frac{30}{x-2}$ г

Паколькі першы веласіпедыст прыбыў у пасёлак на 0,5 г раней другога, а адзін кран запаўняе рэзервуар на 0,5 г хутчэй другога, то ўраўненне $\frac{30}{x-2}-\frac{30}{x}=0{,}5$ з'яўляецца **матэматычнай мадэллю кожнай з прапанаваных задач**. Рэшым атрыманае ўраўненне:

$$\frac{30}{x-2}-\frac{30}{x}=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{60-0{,}5x^2+x}{(x-2)x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}5x^2-x-60=0,\\(x-2)x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=12,\\x=-10,\end{array}\right.\\x\neq 2,\ x\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=12,\\x=-10.\end{array}\right.$$

Па ўмове кожнай задачы падыходзіць лік 12.

Адказ: скорасць першага веласіпедыста 12 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, скорасць другога веласіпедыста 10 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

Адказ: скорасць запаўнення рэзервуара вадой праз першы кран 12 $\frac{\text{м}^3}{\text{г}}$, праз другі кран — 10 $\frac{\text{м}^3}{\text{г}}$.

Дробава-рацыянальныя ўраўненні. Умова роўнасці дробу нулю

1. Ці з'яўляецца дробава-рацыянальным ураўненне: а) $\frac{x}{3}+1=x$; б) $\frac{x-5}{x+5}=1$; в) $\frac{x^2-25}{x-5}=2x$; г) $\frac{x+5}{x-5}=\frac{1}{2}$?	Ураўненне а) не з'яўляецца дробава-рацыянальным, паколькі яго левая і правая часткі — цэлыя рацыянальныя выразы. Ураўненні б)—г) з'яўляюцца дробава-рацыянальнымі, паколькі левыя часткі гэтых ураўненняў — дробава-рацыянальныя выразы.
2. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўмову роўнасці дробу нулю: а) $\frac{x-6}{x+6}=0$; б) $\frac{x^2-36}{x-6}=0$; в) $\frac{x^2-6x}{x+6}=0$; г) $\frac{x+6}{x^2-36}=0$.	а) $\frac{x-6}{x+6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=0, \\ x+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ x\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$ *Адказ*: 6. б) $\frac{x^2-36}{x-6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-36=0, \\ x-6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6, \end{array}\right. \\ x\neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=-6.$ *Адказ*: –6. в) $\frac{x^2-6x}{x+6}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x=0, \\ x+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6, \end{array}\right. \\ x\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=6. \end{array}\right.$ *Адказ*: 0; 6. г) $\frac{x+6}{x^2-36}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=0, \\ x^2-36\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6, \\ x\neq 6, \\ x\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in\varnothing.$ *Адказ*: няма каранёў.
3. Якія з ураўненняў: а) $x+5=0$; б) $\frac{x-5}{x+5}=0$; в) $\frac{x^2-25}{x-5}=0$; г) $\frac{x+5}{x-5}=0$ — раўназначныя?	а) $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$; б) $\frac{x-5}{x+5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5, \\ x\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$; в) $\frac{x^2-25}{x-5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-5, \end{array}\right. \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5$; г) $\frac{x+5}{x-5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5, \\ x\neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5.$ *Адказ*: ураўненні а), в), г) маюць адзін і той жа корань (ураўненні раўназначныя).

Рашэнне дробава-рацыянальных ураўненняў і ўраўненняў, якія зводзяцца да іх	
4. Рашыце ўраўненне: а) $\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x(x-3)}=\frac{3}{2x+6}$; б) $\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}$.	а) ① $\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x(x-3)}-\frac{3}{2x+6}=0.$ ② $\frac{1}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{x(x-3)}-\frac{3}{2(x+3)}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2x-2x-6-3x^2+9x}{2x(x-3)(x+3)}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{3x^2-9x+6}{2x(x-3)(x+3)}=0.$ ③ $\begin{cases}3x^2-9x+6=0,\\2x(x-3)(x+3)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=2,\end{array}\right.\\2x(x-3)(x+3)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\x=2.\end{array}\right.$ ④ *Адказ*: 1; 2. б) $\frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-5x+6}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}=0.$ Раскладзём на множнікі квадратны трохчлен у назоўніку першага дробу і атрымаем: $\frac{x}{(x-2)(x-3)}+\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{x+3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{2x-5}{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-5=0,\\(x-2)(x-3)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases}x=2{,}5,\\(x-2)(x-3)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=2{,}5.$ *Адказ*: 2,5.
5. Знайдзіце нулі функцыі $f(x)=\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}$.	Паколькі нулі функцыі — гэта значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі роўна нулю, то для рашэння задачы трэба рашыць ураўненне $\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}=0.$

	Выкарыстаем умову роўнасці дробу нулю: $\frac{x^3-7x^2+12x}{x-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-7x^2+12x=0, \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2-7x+12\right)=0, \\ x-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x\neq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$ *Адказ*: 0; 3.
6*. Знайдзіце карані ўраўнення $\frac{2x-1}{x}+\frac{x}{2x-1}=4{,}25.$	Выканаем замену зменнай у дадзеным ураўненні: $\frac{2x-1}{x}=t$. Атрымаем ураўненне $t+\frac{1}{t}=4\frac{1}{4}$, якое з’яўляецца дробава-рацыянальным. Рэшым яго: $t+\frac{1}{t}-4\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow t+\frac{1}{t}-\frac{17}{4}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{4t^2-17t+4}{4t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2-17t+4=0, \\ 4t\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=\frac{1}{4}, \end{array}\right. \\ t\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4, \\ t=\frac{1}{4}. \end{array}\right.$ Выканаем падстаноўку знойдзеных значэнняў зменнай t і атрымаем: $\left[\begin{array}{l} \frac{2x-1}{x}=4, \\ \frac{2x-1}{x}=\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}, \\ x=\frac{4}{7}. \end{array}\right.$ *Адказ*: $-\frac{1}{2}$; $\frac{4}{7}$.
Мадэляванне рэальных працэсаў з дапамогай дробава-рацыянальных ураўненняў	

Задача. Катар прайшоў 15 км па цячэнні ракі і 4 км па возеры, затраціўшы на ўвесь шлях 1 г. Чаму роўна скорасць катара пры руху па возеры, калі скорасць цячэння ракі 4 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$?

Рашэнне. У задачы ідзе размова аб працэсах руху катара па рацэ і па возеры. Складзём табліцу залежнасцей паміж велічынямі.

Працэс	**Скорасць, $\frac{\text{км}}{\text{г}}$**	**Адлегласць, км**	**Час, г**
Рух па возеры	x	4	$\frac{4}{x}$
Рух па рацэ	$x+4$	15	$\frac{15}{x+4}$

Паколькі па ўмове задачы на ўвесь шлях затрачана 1 г, то складзём ураўненне: $\frac{4}{x}+\frac{15}{x+4}=1$. Рэшым яго: $\frac{4}{x}+\frac{15}{x+4}=1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-15x-16=0, \\ x(x+4)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=16, \\ x=-1. \end{array}\right.$ Па ўмове падыходзіць лік 16.

Адказ: 16 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

1. Ці праўда, што $x=1$ — корань ураўнення:

а) $\frac{x-1}{x+1}=0$; б) $\frac{x^2-1}{x-1}=0$?

2. Выберыце правільныя сцверджанні:

а) калі назоўнік дробу роўны нулю, то дроб роўны нулю;
б) калі дроб роўны нулю, то яго лічнік роўны нулю;
в) калі дроб не роўны нулю, то яго лічнік не роўны нулю;
г) калі назоўнік дробу не роўны нулю, то дроб не роўны нулю.

* * *

3.4. З дадзеных ураўненняў выберыце ўсе дробава-рацыянальныя ўраўненні:

а) $\frac{x-2}{x+5}=0$; б) $\frac{x+4}{7}=12x$;

в) $9-x=\frac{x+8}{x^2-7}$; г) $\frac{3x}{x-1}=\frac{x+2}{x}$.

3.5. Рашыце ўраўненне, прымяніўшы ўмову роўнасці дробу нулю:

а) $\frac{x+2}{x-2}=0$; б) $\frac{3x-1}{x}=0$;

в) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$; г) $\frac{x-7}{x^2-49}=0$;

д) $\frac{x^2-6x}{2x-12}=0$; е) $\frac{x^2+7x}{x^2}=0$;

ж) $\frac{x^2-6x+5}{x-1}=0$; з) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$.

3.6. Якія з дадзеных ураўненняў раўназначны ўраўненню $\frac{9-x^2}{x-3}=0$:

а) $5x+15=0$; б) $\frac{x^2+4x+3}{x+1}=0$;

в) $x^2+3x=0$; г) $\frac{x^2-6x+9}{x+3}=0$?

3.7. Прыдумайце два дробава-рацыянальныя ўраўненні, раўназначныя ўраўненню $8x-16=0$.

3.8. Прымяніце ўмову роўнасці дробу нулю і знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх дроб $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}$ роўны нулю.

3.9. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $\frac{x-6}{x}=4$; б) $\frac{3x}{x+7}=1$; в) $\frac{9-x}{x}=-3$;

г) $\frac{3x-1}{x-6}=\frac{1}{5}$; д) $\frac{x^2+3}{x}=4$; е) $\frac{6x^2-4}{x}=5x$;

ж) $2x=\frac{x^2+x}{x-3}$; з) $\frac{25-7x^2}{6x}=-x$; і) $\frac{3x-20}{x-2}=x$;

к) $x+2=\frac{15}{x}$; л) $x-3=\frac{4}{x}$; м) $x=1+\frac{2}{x}$.

3.10. У звычайным дробе лічнік на 5 меншы за назоўнік. Калі лічнік гэтага дробу паменшыць на 3, а назоўнік павялічыць на 7, то атрымаецца дроб $\frac{4}{19}$. Знайдзіце зыходны дроб.

3.11. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх роўныя значэнні выразаў:

а) $\frac{4}{x+4}$ і $4-x$; б) $x+3$ і $\frac{1}{x+3}$.

3.12. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\frac{x^2}{x-4}=\frac{16}{x-4}$; б) $\frac{x^2-x}{x-6}=\frac{5x}{x-6}$;

в) $\frac{x^2-7x}{x+10}=\frac{30}{x+10}$; г) $\frac{x^2-2x}{x-4}=\frac{4-3x}{4-x}$;

д) $\frac{x^2-2x}{2x-1}=\frac{5x-4}{1-2x}$; е) $\frac{x^2+2x}{x^2-3x}=\frac{x-18}{3x-x^2}$.

3.13. Складзіце план рашэння і знайдзіце нулі функцыі:

а) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2-5x}-\frac{7x+50}{x(x-5)}$; б) $f(x)=\frac{x^2-8x}{x^2-9}-\frac{18-x}{9-x^2}$.

3.14. Рашыце дробава-рацыянальнае ўраўненне, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $\frac{x}{x+3} = \frac{1}{x-1}$;   б) $\frac{x+10}{2-x} = \frac{x-2}{x}$;

в) $\frac{3x+4}{x-3} = \frac{2x-9}{x+1}$;   г) $\frac{2x-1}{3-2x} = \frac{x-1}{2x+3}$.

3.15. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі:

а) $y = \frac{2x^2+x-1}{2x-1}$ роўна 2;   б) $y = 3x - \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ роўна 4.

3.16. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\frac{2}{x-2} - \frac{5}{x+2} = 1$;   б) $\frac{x+5}{2x} + \frac{2x}{x+5} = 2$;

в) $\frac{3x-9}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 3$;   г) $\frac{3x-1}{2x-3} - 4 = \frac{7}{2x+3}$;

д) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{6}{x+3}$;   е) $\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x+3} = \frac{8x+3}{x+1}$.

3.17. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

а) сума дробаў $\frac{1}{x}$ і $\frac{2}{x+2}$ роўна 1;

б) рознасць дробаў $\frac{1}{x}$ і $\frac{1}{x+4}$ роўна $\frac{1}{3}$;

в) значэнне дробу $\frac{x-4}{5-x}$ на 2 меншае за значэнне дробу $\frac{x-6}{x+5}$.

3.18. Рыхтуючыся да ўступных экзаменаў, абітурыент павінен быў рашыць 180 задач. Штодзень ён рашаў на 2 задачы больш, чым планаваў, і таму скончыў падрыхтоўку на 1 дзень раней за запланаваны тэрмін. За колькі дзён абітурыент рашыў усе задачы?

3.19. Рашыце задачу:

а) Пры патруляванні катар МНС прайшоў 56 км супраць цячэння ракі і 32 км па цячэнні, затраціўшы на ўвесь шлях 3 г. Знайдзіце скорасць цячэння ракі, калі ўласная скорасць катара складае 30 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

б) Студэнт першага і студэнт другога курса летам працавалі ў будаўнічым атрадзе. Працуючы разам, яны пафарбавалі сцяну за 12 г. Вядома, што другакурснік можа пафарбаваць такую ж сцяну на 7 г хутчэй, чым першакурснік. Ці паспее першакурснік пафарбаваць такую сцяну за тры дні, калі будзе працаваць адзін і не больш за 9 г у дзень?

3.20. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{x+4}{x-2}-\frac{x-3}{x^2-2x}=\frac{x-2}{x}$;

б) $\frac{1}{x}-\frac{x-7}{x-6}+\frac{6}{6x-x^2}=0$;

в) $\frac{x+1}{x-5}+\frac{12}{x^2-25}=1$;

г) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{7x}{x^2-1}$;

д) $\frac{x}{3x+7}-\frac{3}{3x-7}=\frac{9x+21}{49-9x^2}$;

е) $\frac{6}{x^2-36}+\frac{x-12}{x^2+6x}=\frac{3}{x^2-6x}$.

3.21. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі з воссю Ox:

а) $f(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$;

б) $f(x)=\frac{1}{9x^2-1}-\frac{4}{3x+1}-\frac{5}{x-3x^2}$.

3.22. Рашыце задачу:

а) Працягласць шашы паміж двума гарадамі складае 300 км. З аднаго горада ў другі адначасова выехалі маршрутнае таксі і рэйсавы аўтобус. Аўтобус рухаўся са скорасцю, на 10 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ меншай, чым маршрутнае таксі, і прыбыў у пункт прызначэння на 1 г пазней за таксі. Знайдзіце скорасць аўтобуса.

б) У аздараўленчым цэнтры два басейны: аб'ёмам 360 м^3 і 480 м^3. Пасля планавай чысткі іх неабходна напоўніць вадой. З трубы, якая напаўняе меншы басейн, выцякае за 1 г на 10 м^3 вады менш, чым з трубы, якая напаўняе большы басейн. Для напаўнення меншага басейна спатрэбілася на 2 г больш, чым для напаўнення большага басейна. Знайдзіце, колькі кубічных метраў вады выцякае за 1 г з кожнай трубы.

3.23. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\frac{2}{x-3}+1=\frac{15}{x^2-6x+9}$;

б) $\frac{5}{x^2+2x+1}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{x-1}$;

в) $\frac{x+3}{x^2-4x+4}-\frac{x}{x^2-2x}=\frac{5}{x}$;

г) $\frac{3}{x^2+4x+4}+\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$;

д) $\frac{4}{x^2-10x+25}+\frac{10}{25-x^2}=\frac{1}{x+5}$;

е) $\frac{4}{9x^2-1}=\frac{1}{9x^2+6x+1}-\frac{1}{3x^2+x}$.

Якія пераўтварэнні вы выконвалі ва ўсіх ураўненнях?

3.24. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі $y=\frac{14}{x-4}-\frac{45}{x^2-8x+16}$ роўна 1.

3.25. Рашыце задачу:

а) Біятланісту на трэніроўцы неабходна было прабегчы 30 км. Пачаўшы бег на 3 мін пазней вызначанага тэрміну, біятланіст бег са скорасцю, большай за запланаваную на 1 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, і прыбег да месца прызначэння своечасова. Знайдзіце скорасць, з якой бег біятланіст.

б) З аднаго горада ў другі да вызначанага часу грузавы аўтамабіль павінен быў даставіць груз. Першыя 200 км шляху аўтамабіль рухаўся з запланаванай скорасцю. Затым метэаралагічныя ўмовы пагоршыліся, і апошнія 150 км грузавіку прыйшлося рухацца са скорасцю, на 20 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ меншай за запланаваную. На ўвесь шлях паміж гарадамі спатрэбілася 5 г. Знайдзіце час, на які спазніўся вадзіцель з дастаўкай грузу.

в) Прагулка па рацэ на турыстычным катары доўжыцца 3 г. За гэты час катар праплывае 40 км па цячэнні ракі і вяртаецца назад да прыстані. Знайдзіце ўласную скорасць катара, калі скорасць цячэння ракі складае 3 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

3.26. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{5}{x+1}+\frac{4x-6}{(x+1)(x+3)}=3$;

б) $\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{13-7x}{x-1}=\frac{3}{x-3}$;

в) $\frac{x+4}{x+5}+\frac{9+2x}{x-2}=\frac{7}{x^2+3x-10}$;

г) $\frac{2x^2}{x^2+x-6}-\frac{x+1}{x-2}=1$;

д) $5-\frac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\frac{3x}{x-4}$;

е) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

3.27. Цягнік адправіўся са станцыі па раскладзе і да наступнага прыпынку павінен быў прайсці 64 км. Калі ён праехаў 24 км, то па ўказанні дыспетчара быў затрыманы каля семафора на 12 мін. Пасля гэтага цягнік павялічыў скорасць на 10 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ і прыбыў у пункт прызначэння са спазненнем на 4 мін. Знайдзіце першапачатковую скорасць цягніка.

3.28. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай:

а) сума дробаў $\frac{2x^2}{x^2+4x}$ і $\frac{27}{2x^2+7x-4}$ роўна дробу $\frac{7-2x}{2x-1}$;

б) рознасць дробаў $\frac{5x-1}{2x-1}$ і $\frac{1}{x+2}$ роўна дробу $\frac{3}{2-3x-2x^2}$.

3.29*. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^2+2}=\frac{3}{x^3-x^2+2x-2}$;

б) $\frac{4}{x^2-16}-\frac{1}{x^2+8x+16}=\frac{10}{x^3-16x-4x^2+64}$.

3.30*. Выканайце замену зменнай і рашыце ўраўненне:

а) $3x^2-2+\frac{1}{3x^2-2}=2$;

б $\frac{x^2+2}{x}+\frac{x}{x^2+2}=3\frac{1}{3}$;

в) $x^2-4x-\frac{15}{x^2-4x}=2$;

г) $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$;

д) $\frac{x^2+x-10}{2}-\frac{3}{2x^2+2x-20}=1$;

е) $\frac{1}{x^2+6x}-\frac{1}{(x+3)^2}=\frac{9}{10}$.

3.31*. Знайдзіце колькасць цэлых каранёў ураўнення $\frac{2}{x^2-6x+8}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-2}$ на прамежку [–1; 7].

3.32*. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\frac{x^{19}-1}{1-x^{17}}=\frac{1-x^{17}}{x^{15}-1}$.

3.33*. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення

$$\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1.$$

3.34*. Знайдзіце найменшы корань ураўнення

$$\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{x}\right)-12=0.$$

3.35. Рашыце ўраўненне, прымяніўшы ўмову роўнасці дробу нулю:

а) $\frac{2x-5}{x+3}=0$;

б) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$;

в) $\frac{3x+18}{x^2-36}=0$;

г) $\frac{4x^2 - x}{x} = 0$; д) $\frac{x^2 - 10x + 16}{x - 8} = 0$; е) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10} = 0.$

3.36. Ці праўда, што ўраўненні $\frac{x^2 - 81}{x - 9} = 0$ і $\frac{x^2 + 11x + 18}{x + 2} = 0$ раўназначныя? Прыдумайце прыклад лінейнага ўраўнення, раўназначнага дадзеным.

3.37. Рашыце ўраўненне, прымяніўшы алгарытм:

а) $\frac{x + 10}{x} = 7$; б) $\frac{x}{2x - 1} = -\frac{3}{7}$;

в) $\frac{7x^2 + 4}{4x} = 2x$; г) $\frac{3x^2 + 5}{1 - x^2} = -4.$

3.38. У звычайным дробе лічнік на 3 меншы за назоўнік. Калі лічнік гэтага дробу паменшыць на 5, а назоўнік павялічыць на 3, то атрымаецца дроб $\frac{8}{19}$. Знайдзіце зыходны дроб.

3.39. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнне дробу $\frac{4}{x + 4}$ роўна значэнню выразу $x + 4$.

3.40. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $\frac{x^2}{x - 7} = \frac{49}{x - 7}$; б) $\frac{x^2 - 2x}{x - 4} = \frac{2x}{x - 4}$;

в) $\frac{x^2}{x - 6} = \frac{7x - 6}{x - 6}$; г) $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x} = \frac{16 - 7x}{2x - x^2}$.

3.41. Знайдзіце нулі функцыі $f(x) = \frac{x^2 - 14}{x^2 - 4} + \frac{5x}{4 - x^2}$.

3.42. Ці з'яўляюцца наступныя ўраўненні дробава-рацыянальнымі? Рашыце ўраўненне, прымяніўшы алгарытм:

а) $\frac{x}{x + 4} = \frac{1}{x - 2}$; б) $\frac{x + 7}{2 - x} = \frac{x - 1}{x}$;

в) $\frac{5x + 2}{x - 1} = \frac{4x + 13}{x + 7}$; г) $\frac{x - 5}{x + 3} = \frac{2x + 3}{2x - 1}$.

3.43. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі $y = 2x - \frac{3x^2 - 4x - 20}{x + 2}$ роўна 5.

3.44. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\frac{12}{x - 1} - \frac{8}{x + 1} = 1$; б) $\frac{x + 12}{x + 2} + \frac{9}{x} = 2$;

в) $\frac{5x + 12}{x + 2} - 5 = \frac{x - 7}{2 - x}$; г) $\frac{x + 1}{x - 2} + \frac{7}{x + 2} = \frac{x + 10}{x}$.

3.45. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

а) сума дробаў $\frac{x-3}{4x}$ і $\frac{5x-3}{x-3}$ роўна 3;

б) рознасць дробаў $\frac{x}{2x-5}$ і $\frac{4}{x}$ роўна $\frac{1}{3}$.

3.46. Рашыце задачу, выканаўшы аналіз залежнасцей паміж значэннямі велічынь:

а) Дзевяцікласнік павінен быў за пэўны час вывучыць 160 новых замежных слоў. Штодзень ён вучыў на 4 словы больш, чым планаваў, таму ён справіўся з заданнем на 2 дні раней запланаванага тэрміну. Колькі слоў у дзень вучыў дзевяцікласнік?

б) На аптовы склад гандлёвай сеткі штомесяц паступае 180 т садавіны. У мінулым месяцы атрыманая садавіна была размеркавана пароўну паміж некалькімі крамамі сеткі. У бягучым месяцы было вырашана задзейнічаць на 3 крамы менш. У кожную краму было пастаўлена на 3 т садавіны больш. Колькі крамаў сеткі было задзейнічана ў папярэднім месяцы?

в) Праграма экскурсіі па маляўнічых месцах прадугледжвае двухгадзінную прагулку на цеплаходзе. За гэты час цеплаход праходзіць 21 км супраць цячэння ракі і 8 км па цячэнні. Знайдзіце скорасць цячэння ракі, калі ўласная скорасць цеплахода складае 15 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

г) Два тэсціроўшчыкі праграмнага забеспячэння, працуючы разам, выканалі заданне за 8 г. За колькі гадзін можа выканаць гэта заданне кожны тэсціроўшчык самастойна, калі аднаму з іх на гэта трэба на 12 г больш, чым другому?

3.47. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{x+1}{x}+\frac{2}{x-5}=\frac{10}{x^2-5x}$;

б) $\frac{4}{x^2-9}+\frac{x+1}{x-3}=1$;

в) $\frac{2x+3}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}$;

г) $\frac{x}{3x+2}+\frac{5}{2-3x}=\frac{15x+10}{4-9x^2}$.

3.48. Складзіце мадэль умовы і рашыце задачу:

а) Працягласць шашы паміж двума гарадамі складае 240 км. Для дастаўкі грузу з аднаго горада ў другі адначасова выехалі два аўтамабілі. Адзін з іх рухаўся са скорасцю, на 20 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ большай, чым другі, і прыбыў у пункт прызначэння на 1 г раней другога. Знайдзіце скорасці аўтамабіляў.

б) Першая труба запаўняе вадой акварыум аб'ёмам 10 м^3 на 5 мін хутчэй, чым другая труба. Знайдзіце, колькі кубічных метраў вады выцякае за 1 г з кожнай трубы, калі з першай трубы за 1 г выцякае на 10 м^3 вады больш, чым з другой.

3.49. Знайдзіце карані ўраўнення:

а) $\frac{3}{x+2}+1=\frac{4}{x^2+4x+4}$;

б) $\frac{3}{x^2-6x+9}+\frac{6}{9-x^2}=\frac{1}{x+3}$;

в) $\frac{4}{2x^2+x}=\frac{3}{4x^2+4x+1}-\frac{3}{1-4x^2}$.

3.50. Турысты ішлі ўздоўж ракі да аўтобуснага прыпынку. Не дайшоўшы да прыпынку 3 км, яны рашылі выкупацца і патрацілі на гэта 15 мін. Каб паспець на аўтобус своечасова, ім прыйшлося павялічыць скорасць на 2 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$. Знайдзіце, з якой скорасцю ішлі турысты пасля купання.

3.51. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x-2}=\frac{13}{(x-1)(x-2)}$;

б) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+3}=\frac{15}{(x-2)(x+3)}$;

в) $\frac{1-9x}{x^2+2x-3}+\frac{3x-1}{x-1}=\frac{2x}{x+3}$;

г) $\frac{7-2x}{x^2-5x-6}+\frac{3}{x^2-9x+18}=\frac{1}{3-x}$.

3.52*. Знайдзіце карані ўраўнення

$$\frac{x}{x^2+6x+5}+\frac{3x+1}{2x^2+8x-10}=\frac{2x+68}{x^3+5x^2-x-5}.$$

3.53*. Выканайце замену зменнай і рашыце ўраўненне:

а) $x^2-15+\frac{1}{x^2-15}=2$;

б) $\frac{x^2-3}{x}+\frac{x}{x^2-3}=2\frac{1}{2}$;

в) $x^2+x+\frac{8}{x^2+x}=6$;

г) $\frac{3}{x^2+x+1}=3-x^2-x$;

д) $\frac{x^2+x-4}{2}-\frac{3}{2x^2+2x-8}=1$;

е) $\frac{1}{x^2+4x}-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{4}{5}$.

3.54*. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-7\left(x-\frac{2}{x}\right)=4.$$

3.55. Знайдзіце колькасць простых лікаў на прамежку [1; 27].

3.56. Выберыце ўсе правільныя роўнасці:

а) $3\ \% = 0{,}3$; б) $75\ \% = \frac{3}{4}$; в) $12{,}5\ \% = 1{,}25$;

г) $280 = 2{,}8\ \%$; д) $43\ \% = 0{,}43$.

3.57. Вылічыце:

а) $\left(125 \cdot 5^{-4}\right)^2$; б) $\frac{3^{-4} \cdot 3^{-9}}{3^{-12}}$; в) $1000^{-6} \cdot \left(10^2\right)^9$.

3.58. З роўнасці $2m - 5n = 10$ выразіце:

а) m праз n; б) n праз m.

3.59. Дакажыце, што $\sqrt{26} + \sqrt{82} > 14$.

3.60. Рашыце графічна сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

3.61. Скараціце дроб $\frac{a^2 - a - 12}{16 - a^2}$.

3.62. Знайдзіце значэнне выразу $|-3{,}21| - |-2{,}2| + |-7|$.

3.63. Дакажыце, што функцыя $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ з'яўляецца цотнай.

3.64. Знайдзіце адлегласць ад пачатку каардынат да пункта перасячэння прамой $3x + 7y + 21 = 0$ з воссю абсцыс.

§ 11. Сістэмы нелінейных ураўненняў

3.65. Рашыце спосабам падстаноўкі сістэму ўраўненняў

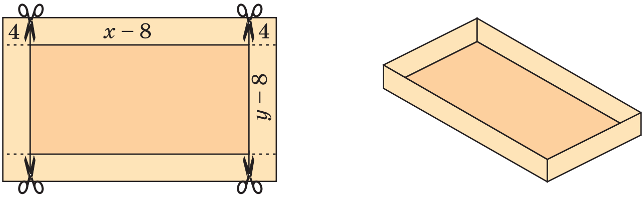
$$\begin{cases} x - 5y = -1, \\ 2x - 7y = 6. \end{cases}$$

3.66. Рашыце спосабам складання сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} 2x - 5y = -12, \\ -2x - 7y = 36. \end{cases}$$

3.67. Пабудуйце графікі ўраўненняў сістэмы $\begin{cases} 2x + y = -1, \\ -2x + y = 1 \end{cases}$ і вызначце колькасць рашэнняў сістэмы.

Разгледзім задачу. З аркуша кардону прамавугольнай формы трэба вырабіць скрынку без крышкі, зрабіўшы надрэзы ў вуглах даўжынёй 4 см (рыс. 67). Знайдзіце даўжыню і шырыню аркуша, ведаючы, што яго перыметр роўны 60 см, а аб'ём скрынкі павінен быць роўны 160 см^3.



Рыс. 67

Рашэнне. Абазначым даўжыню і шырыню аркуша адпаведна x см і y см. Паколькі ў вуглах аркуша зроблены надрэзы даўжынёй 4 см, то вышыня скрынкі роўна 4 см, а даўжыня і шырыня скрынкі роўны $(x-8)$ см і $(y-8)$ см адпаведна.

Па ўмове задачы перыметр аркуша прамавугольнай формы роўны 60 см, а аб'ём скрынкі роўны 160 см^3, значыць, $(x+y)\cdot 2=60$ і $(x-8)\cdot(y-8)\cdot 4=160$. Абедзве атрыманыя ўмовы павінны быць выкананы, таму аб'яднаем іх у сістэму ўраўненняў $\begin{cases}(x+y)\cdot 2=60,\\(x-8)\cdot(y-8)\cdot 4=160.\end{cases}$

Атрыманая сістэма ўраўненняў змяшчае **нелінейнае рацыянальнае ўраўненне** $(x-8)\cdot(y-8)\cdot 4=160$. Такія сістэмы называюць **сістэмамі нелінейных ураўненняў.** Разгледзім спосабы рашэння сістэм нелінейных ураўненняў.

Спосаб падстаноўкі

Рэшым атрыманую ў задачы сістэму ўраўненняў спосабам падстаноўкі: $\begin{cases}(x+y)\cdot 2=60,\\(x-8)\cdot(y-8)\cdot 4=160\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=30,\\(x-8)(y-8)=40.\end{cases}$

З першага ўраўнення сістэмы выразім зменную x і атрымаем $x=30-y$.

Заменім у другім ураўненні зменную x на $30-y$ і атрымаем ураўненне $(30-y-8)(y-8)=40$. Рэшым гэта ўраўненне:

$$(22-y)(y-8)=40 \Leftrightarrow 22y-176-y^2+8y=40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2-30y+216=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=12,\\y=18.\end{array}\right.$$

Атрыманыя значэнні y падставім у выраз $x=30-y$. Тады калі $y=12$, то $x=30-12=18$, а калі $y=18$, то $x=30-18=12$.

Рашэннямі сістэмы ўраўненняў з'яўляюцца пары лікаў (12; 18) і (18; 12). Такім чынам, памер прамавугольнага аркуша кардону 12×18 см.

Каб рашыць сістэму ўраўненняў спосабам падстаноўкі, трэба:

① З аднаго ўраўнення сістэмы выразіць адну са зменных.

② Замяніць у другім ураўненні гэту зменную на яе выраз.

③ Рашыць атрыманае ўраўненне.

④ Знойдзеныя значэнні адной зменнай падставіць у выраз для другой зменнай і знайсці значэнне другой зменнай.

⑤ У выглядзе ўпарадкаваных пар лікаў запісаць адказ.

Рашыце сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x - 4y = 0. \end{cases}$$

① З другога ўраўнення сістэмы выразім зменную x:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x = 4y. \end{cases}$$

② Заменім у першым ураўненні зменную x на $4y$: $\begin{cases} (4y)^2 + y^2 = 17, \\ x = 4y. \end{cases}$

③ Рэшым ураўненне $(4y)^2 + y^2 = 17$ і атрымаем: $16y^2 + y^2 = 17$; $17y^2 = 17$; $y^2 = 1$; $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

④ Знойдзеныя значэнні y падставім у выраз $x = 4y$.

Калі $y_1 = 1$, то $x_1 = 4 \cdot 1 = 4$.

Калі $y_2 = -1$, то $x_2 = 4 \cdot (-1) = -4$.

⑤ *Адказ*: (4; 1), (–4; –1).

Спосаб складання

Каб рашыць сістэму ўраўненняў спосабам складання, трэба:

① Адно з ураўненняў сістэмы пакінуць без змяненняў, а другое замяніць сумай ураўненняў сістэмы.

② З атрыманага ўраўнення (сумы) знайсці значэнні адной са зменных.

③ Падставіць гэтыя значэнні зменнай у пакінутае без змяненняў ураўненне сістэмы і знайсці значэнні другой зменнай.

④ Запісаць адказ.

Рашыце сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2x^2 = 8. \end{cases}$

② $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$

③ Пры $x = 2$ атрымаем:

$4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -1. \end{array}\right.$

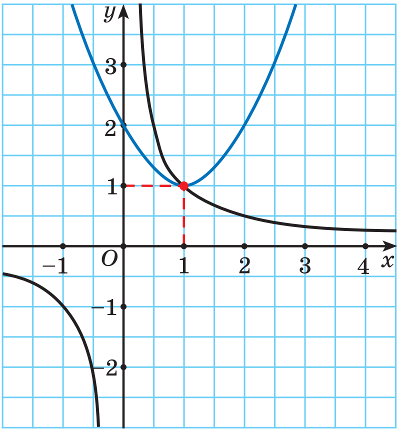
Пры $x = -2$ атрымаем:

$4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = -1. \end{array}\right.$

④ *Адказ*: (2; 1), (2; –1), (–2; 1), (–2; –1).

Графічны метад рашэння сістэм нелінейных ураўненняў

Рэшым сістэму ўраўненняў $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ графічным метадам. Для гэтага пабудуем у адной сістэме каардынат графікі кожнага з ураўненняў сістэмы.



Рыс. 68

Першае ўраўненне сістэмы раўназначна ўраўненню $y = \frac{1}{x}$, графікам якога з'яўляецца гіпербала, што праходзіць праз пункты (1; 1), (0,5; 2) (рыс. 68).

Графікам другога ўраўнення сістэмы $y = x^2 - 2x + 2$ з'яўляецца парабала з вяршыняй у пункце (1; 1), якая перасякае вось ардынат у пункце (0; 2).

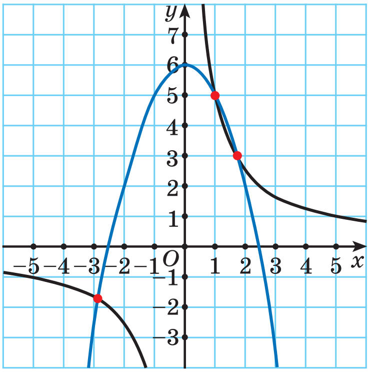
Адзіны пункт перасячэння гіпербалы $y = \frac{1}{x}$ і парабалы $y = x^2 - 2x + 2$ мае каардынаты (1; 1).

Паколькі графічны метад рашэння сістэм ураўненняў не з'яўляецца дакладным, атрыманы вынік неабходна праверыць.

Падставім пару лікаў (1; 1) у кожнае з ураўненняў сістэмы $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ і атрымаем правільныя роўнасці. Такім чынам, дадзеная сістэма мае адзінае рашэнне (1; 1).

У разгледжанай сістэме рашэннем аказалася пара цэлых лікаў, якую лёгка было знайсці з дапамогай пабудаваных графікаў. У іншых выпадках знайсці дакладныя значэнні зменных па графіку можа быць цяжка. Але, як правіла, з дапамогай графічнага метаду можна вызначыць колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў.

Напрыклад, вызначым колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} xy = 5, \\ y = -x^2 + 6. \end{cases}$ Пабудуем у адной сістэме каардынат



Рыс. 69

графікі кожнага з ураўненняў сістэмы (рыс. 69). Графікам першага ўраўнення сістэмы з'яўляецца гіпербала, якая праходзіць праз пункты (1; 5), (5; 1). Графік другога ўраўнення — парабала, галіны якой накіраваны ўніз, з вяршыняй у пункце (0; 6). Графікі перасякаюцца ў трох пунктах, значыць, сістэма ўраўненняў мае тры рашэнні.

Мадэляванне рэальных працэсаў з дапамогай сістэм нелінейных ураўненняў

Сістэмы нелінейных ураўненняў таксама з'яўляюцца матэматычнымі мадэлямі пры рашэнні задач.

Напрыклад, рэшым задачу. Лекавымі травамі было вырашана засеяць прамавугольны ўчастак плошчай 180 м^2. Пры ўзворванні ўчастка адну яго старану паменшылі на 3 м, а другую — на 2 м. Яго плошча стала роўна 120 м^2. Якімі былі першапачатковыя памеры ўчастка?

Рашэнне. У задачы размова ідзе аб даўжыні і шырыні прамавугольнага ўчастка і яго плошчы.

Калі адну старану ўчастка абазначыць праз x, а другую — праз y, то плануемая плошча ўчастка роўна xy м^2. Па ўмове яна роўна 180 м^2, значыць, атрымаецца ўраўненне $xy = 180$.

Пасля памяншэння памераў участка плошча стане роўна $(x-3)(y-2)$ м^2. Па ўмове задачы складзём ураўненне $(x-3)(y-2) = 120$.

Аб'яднаем абодва ўраўненні ў сістэму $\begin{cases} xy = 180, \\ (x-3)(y-2) = 120. \end{cases}$

Атрымалі матэматычную мадэль задачы ў выглядзе сістэмы нелінейных ураўненняў. Рэшым яе спосабам падстаноўкі:

$$\begin{cases} xy = 180, \\ (x-3)(y-2) = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ xy - 2x - 3y + 6 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ 3y + 2x = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 180, \\ x = 33 - 1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow$$

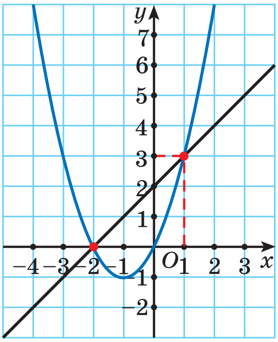
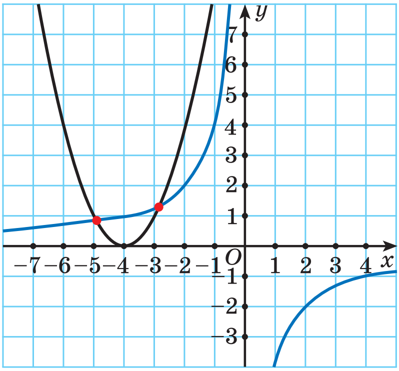
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5y^2 - 33y + 180 = 0, \\ x = 33 - 1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 12, \\ y = 10, \end{array}\right. \\ x = 33 - 1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 15, \\ y = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 18, \\ y = 10. \end{cases} \end{array}\right.$$

Умову задачы задавальняюць знойдзеныя рашэнні сістэмы: стораны ўчастка роўны або 15 м і 12 м, або 18 м і 10 м.

Адказ: 15 м, 12 м або 18 м, 10 м.

Рашэнне сістэм нелінейных ураўненняў

1. Рашыце сістэму ўраўненняў: а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 + xy = -10, \\ 5y - 2xy = 17. \end{cases}$	а) Рэшым сістэму спосабам падстаноўкі: $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ (3 - y)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ -6y + 2y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 3. \end{cases} \end{array}\right.$ *Адказ*: (3; 0), (0; 3). б) Прыменім спосаб складання. Памножым першае ўраўненне на 2, складзём з другім і атрымаем: $\begin{cases} 2y^2 + 2xy = -20, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 5y = -3, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 5y + 3 = 0, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -1, \\ y = -1{,}5, \end{array}\right. \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ 5y - 2xy = 17, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1{,}5, \\ 5y - 2xy = 17 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1, \\ x = 11, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -1{,}5, \\ x = 8\frac{1}{6}. \end{cases} \end{array}\right.$ *Адказ*: $(11; -1)$, $\left(8\frac{1}{6}; -1{,}5\right)$.
2. Рашыце графічна сістэму ўраўненняў $\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ y - (x + 1)^2 = -1. \end{cases}$	Пабудуем графікі ўраўненняў сістэмы $\begin{cases} y - x - 2 = 0, \\ y - (x + 1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2, \\ y = (x + 1)^2 - 1. \end{cases}$

	Графік першага ўраўнення — прамая, якая праходзіць праз пункты (–2; 0), (1; 3). Графік другога ўраўнення — парабала з вяршыняй у пункце (–1; –1), якая перасякае вось абсцыс у пунктах (–2; 0) і (0; 0) і праходзіць праз пункт (1; 3).  Прамая перасякаецца з парабалай у пунктах з каардынатамі (–2; 0), (1; 3). З дапамогай праверкі пераконваемся, што пары лікаў (–2; 0) і (1; 3) з'яўляюцца рашэннямі дадзенай сістэмы. *Адказ*: (–2; 0), (1; 3).
3. Колькі рашэнняў мае сістэма ўраўненняў $\begin{cases} xy = -4, \\ y = (x + 4)^2 \end{cases}$?	Пабудуем у адной сістэме каардынат графікі ўраўненняў сістэмы. Графікам першага ўраўнення сістэмы з'яўляецца гіпербала, якая праходзіць праз пункты (–1; 4), (–4; 1). Графік другога ўраўнення — парабала з вяршыняй у пункце (–4; 0), якая перасякае вось ардынат у пункце (0; 16). 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>На рысунку бачны толькі два пункты перасячэння графікаў. Але, улічыўшы тое, што парабала перасякае вось ардынат, а гіпербала не перасякае, робім вывад, што графікі перасякаюцца яшчэ ў адным пункце. Такім чынам, графікі перасякаюцца ў трох пунктах, а, значыць, сістэма мае тры рашэнні.</td>
</tr>
<tr>
<td>4*. Рашыце сістэму ўраўненняў
$\begin{cases}(x+y)xy=20;\\ x+y-xy=1.\end{cases}$</td>
<td>Рэшым сістэму метадам замены зменных. Увядзём новыя зменныя: $x+y=t$, $xy=k$.
Тады сістэма прыме выгляд $\begin{cases}tk=20,\\ t-k=1.\end{cases}$
Рэшым яе спосабам падстаноўкі:
$\begin{cases}tk=20,\\ t-k=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(k+1)k=20,\\ t=k+1\end{cases}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\begin{cases}k^2+k-20=0,\\ t=k+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}k=-5,\\ k=4,\end{array}\right.\\ t=k+1\end{cases}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=-5,\\ t=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}k=4,\\ t=5.\end{cases}\end{array}\right.$
Падставім $x+y=t$, $xy=k$ і атрымаем:
$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=-5,\\ x+y=-4,\end{cases}\\ \begin{cases}xy=4,\\ x+y=5.\end{cases}\end{array}\right.$
Рашыўшы кожную з дзвюх сістэм сукупнасці спосабам падстаноўкі, атрымаем наступныя рашэнні зыходнай сістэмы ўраўненняў: (–5; 1); (1; –5); (4; 1); (1; 4).
<i>Адказ</i>: (–5; 1); (1; –5); (4; 1); (1; 4).</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Мадэляванне рэальных працэсаў
з дапамогай сістэм нелінейных ураўненняў</td>
</tr>
</table>

Задача 1. Сума квадратаў лічбаў двухзначнага ліку роўна 13. Калі ад гэтага ліку адняць 9, то атрымаецца лік, запісаны тымі ж лічбамі, але ў адваротным парадку. Знайдзіце дадзены лік.

Рашэнне. Абазначым лічбу дзясяткаў дадзенага ліку праз x, а лічбу адзінак праз y, тады дадзены лік будзе мець выгляд $10x+y$. Лікам, запісаным тымі ж лічбамі, але ў адваротным парадку, будзе $10y+x$. Па ўмове задачы: $x^2+y^2=13$ і $10x+y-9=10y+x$. Складзём і рэшым сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 10x+y-9=10y+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-3, \\ y=2, \end{array}\right. \\ x=y+1. \end{cases}$$

Па ўмове задачы падыходзіць толькі $y=2$, $x=3$.

Адказ: 32.

*Задача 2**. З пасёлка A ў пасёлак B выйшаў пешаход. Адначасова з ім з пасёлка B у пасёлак A выехаў веласіпедыст. Праз 50 мін яны сустрэліся. Колькі часу спатрэбілася б пешаходу для таго, каб прайсці ўвесь шлях з A ў B, калі вядома, што веласіпедыст пераадолеў бы той жа шлях на 4 г хутчэй, чым пешаход?

Рашэнне. Складзём табліцу залежнасцей паміж велічынямі.

Працэс	**Скорасць руху**	**Пройдзены шлях**	**Час руху**
Рух пешахода з пасёлка A ў пасёлак B	v_1	1	$t_1=\frac{1}{v_1}$
Рух веласіпедыста з пасёлка B у пасёлак A	v_2	1	$t_2=\frac{1}{v_2}$
Рух пешахода і веласіпедыста насустрач адзін аднаму	v_1+v_2	1	$\frac{1}{v_1+v_2}$

Па ўмове задачы веласіпедыст пераадолеў бы той жа шлях на 4 г хучтэй за пешахода, таму атрымаем ураўненне $\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}=4$.

Пры руху насустрач адзін аднаму пешаход і веласіпедыст сустрэліся праз $50\text{ мін}=\frac{5}{6}$ г, г. зн. $\frac{1}{v_1+v_2}=\frac{5}{6}$.

Складзём і рэшым сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} = 4, \\ \frac{1}{v_1 + v_2} = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2} = 4, \\ v_1 + v_2 = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{5}, \\ v_2 = 1, \end{cases} \text{адкуль} \begin{cases} t_1 = 5, \\ t_2 = 1. \end{cases}$$

Адказ: 5 г.

*Задача 3**. Дзве брыгады, працуючы разам, рамантавалі дарогу на працягу 6 дзён, а затым другая брыгада асобна скончыла рамонт за 10 дзён. За колькі дзён магла б адрамантаваць дарогу адна першая брыгада, калі яна можа выканаць гэту працу на 6 дзён хутчэй, чым адна другая?

Рашэнне. Складзём табліцу залежнасцей паміж велічынямі.

Працэс	**Скорасць працы**	**Час**	**Вынік**
Праца першай брыгады	v_1	6	$6v_1$
Праца другой брыгады	v_2	16	$16v_2$
Праца першай брыгады па рамонце ўсёй дарогі	v_1	$t_1 = \frac{1}{v_1}$	1
Праца другой брыгады па рамонце ўсёй дарогі	v_2	$t_2 = \frac{1}{v_2}$	1

Абазначым аб'ём усёй працы праз 1, тады атрымаем ураўненне $6v_1 + 16v_2 = 1$.

Ведаючы, што адна першая брыгада можа выканаць гэту працу на 6 дзён хутчэй, чым адна другая, запішам ураўненне $\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 6$.

Складзём і рэшым сістэму ўраўненняў: $\begin{cases} \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 6, \\ 6v_1 + 16v_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} = 6, \\ 6v_1 + 16v_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{18}, \\ v_2 = \frac{1}{24}, \end{cases} \text{адкуль} \begin{cases} t_1 = 18, \\ t_2 = 24. \end{cases}$$

Адказ: 18 г.

1. Якія з наступных сістэм ураўненняў:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 1, \\ -3xy = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x = -5y + 20, \\ y^2 = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 5 \end{cases}$ — з'яўляюцца сістэмамі нелінейных ураўненняў?

2. Якая пара лікаў з'яўляецца рашэннем сістэмы ўраўненняў

$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x^2 - y^2 = 5: \end{cases}$ а) (–3; –2); б) (3; 2); в) (3; –2); г) (–3; 2)?

3.68. Прымяніце алгарытм і рашыце сістэму ўраўненняў спосабам падстаноўкі:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = y - 4, \\ y^2 + 3x = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 21, \\ x + y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$

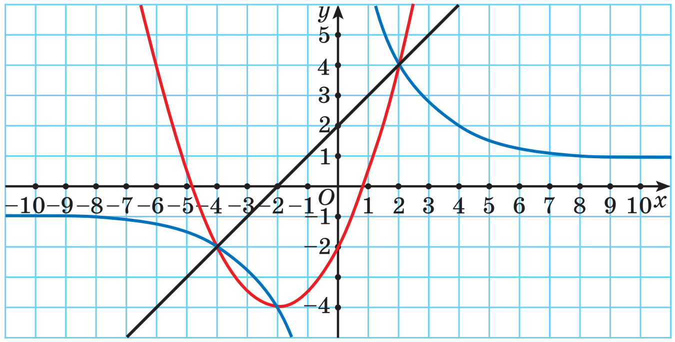
3.69. Рашыце сістэму ўраўненняў спосабам складання:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ 2x + y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y = 18, \\ x^2 + y = -16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y = 7, \\ x^2 - y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 6, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$

3.70. Здабытак двух натуральных лікаў роўны 143, а іх рознасць роўна 2. Знайдзіце гэтыя лікі.

3.71. На рысунку 70 паказаны відарысы графікаў функцый $y = \frac{8}{x}$, $y = x + 2$ і $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$.



Рыс. 70

З дапамогай рысунка рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} xy = 8, \\ y = x + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4, \\ y - x = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4, \\ xy = 8. \end{cases}$

3.72. Рашыце графічна сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ xy = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + x^2 = 6x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^3, \\ y - 4x = 0. \end{cases}$

3.73. Сярэдняе арыфметычнае двух лікаў роўна 7, а рознасць квадратаў гэтых лікаў роўна 14. Знайдзіце гэтыя лікі.

3.74. Выкарыстайце сістэму ўраўненняў для рашэння задачы. Дачны ўчастак мае форму прамавугольніка і абгароджаны плотам даўжынёй 120 м. Знайдзіце памеры ўчастка, калі яго плошча роўна 8 а.

3.75. Здабытак лічбаў двухзначнага ліку ў тры разы меншы за сам лік. Калі да гэтага ліку дадаць 18, то атрымаецца лік, запісаны тымі ж лічбамі, але ў адваротным парадку. Знайдзіце гэты лік.

3.76. Выберыце спосаб і рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1{,}5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4. \end{cases}$

3.77. Рашыце задачу, выкарыстаўшы залежнасці паміж значэннямі велічынь для складання сістэмы ўраўненняў.

а) Першы веласіпедыст пераадольвае адлегласць 60 км на 1 г хутчэй, чым другі. Калі б першы веласіпедыст паменшыў скорасць на 2 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, а другі павялічыў сваю скорасць на 20 %, то яны затрацілі б на той жа шлях аднолькавы час. Знайдзіце скорасці веласіпедыстаў.

б) Працягласць шашы паміж гарадамі *A* і *B* складае 120 км. З горада *A* выехаў грузавы аўтамабіль, а праз 1 г 40 мін пасля гэтага ў тым жа напрамку выехаў рэйсавы аўтобус, які прыбыў у горад *B* адначасова з грузавым аўтамабілем. Знайдзіце скорасці грузавога аўтамабіля і аўтобуса, калі вядома, што грузавы аўтамабіль за 2 г праязджае на 10 км менш, чым аўтобус за 1 г.

в) Дзве лініі па вытворчасці сокаў павінны былі выканаць заказ за 12 дзён. Пасля 8 дзён сумеснай працы першая лінія была спынена па тэхнічных прычынах, таму другая лінія скончыла астатнюю частку заказу за 7 дзён. Знайдзіце, за колькі дзён быў бы выкананы заказ, калі б працавала толькі другая лінія.

г) На выраб партыі прадукцыі першай брыгадзе патрабуецца на 6 г больш, чым другой. Калі спачатку першая брыгада адпрацуе 3 г, а затым, змяніўшы яе, другая брыгада адпрацуе 4 г, то будзе выраблена толькі палова партыі прадукцыі. Ці будзе за 8-гадзінную змену выраблена ўся партыя прадукцыі, калі абедзве брыгады будуць працаваць адначасова?

3.78. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 2y - x = 2, \\ 2xy = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2 + 2x - 4y = 0, \\ 2y = x + 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 40, \\ 3x - y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 3x - y = 15. \end{cases}$

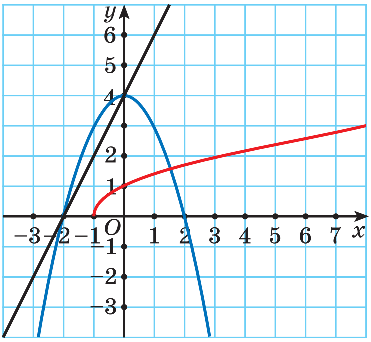
3.79. Пасля дзялення двухзначнага ліку на суму яго лічбаў у дзелі атрымліваецца 7 і ў астачы 6. Пасля дзялення гэтага ж двухзначнага ліку на здабытак яго лічбаў у дзелі атрымліваецца 3 і ў астачы 11. Знайдзіце гэты двухзначны лік.

3.80. З дапамогай паказаных на рысунку 71 графікаў функцый $y = 4 - x^2$, $y = 2x + 4$ і $y = \sqrt{x+1}$ складзіце сістэму ўраўненняў, якая:

а) мае два рашэнні;

б) мае адно рашэнне;

в) не мае рашэнняў.



Рыс. 71

3.81. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} xy = 12, \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ графічна і аналітычна.

3.82. Першы ўпакоўшчык сабраў 60 святочных набораў на 3 г хутчэй, чым другі. Вядома, што, працуючы разам, яны збіраюць 30 набораў за 1 г. Высветліце, ці паспее другі ўпакоўшчык сабраць 150 набораў за 3 працоўныя дні, калі ён працуе па 4 г у дзень.

3.83. Выканайце аналіз умовы і рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} xy - x^2 = 1, \\ y + 4x = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x = 5, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 17; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + y^2 - xy = 16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0, \\ x + y = -8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x^2 + x = 2xy - 9, \\ 2y - 3x = 1. \end{cases}$

3.84. Знайдзіце два лікі, сума, рознасць і здабытак якіх знаходзяцца ў адносіне $5 : 1 : 18$.

3.85. Школьны басейн можна напаўняць вадой праз два краны. Калі іх адкрыць адначасова, басейн напоўніцца за 4 г 30 мін. Калі ж палову басейна напоўніць праз першы кран, а затым адкрыць толькі другі, то для напаўнення басейна спатрэбіцца 12 г. За які час басейн напаўняецца праз першы кран, калі вядома, што прадукцыйнасць першага крана большая?

3.86. З дапамогай графічнага метаду вызначце, колькі рашэнняў мае сістэма ўраўненняў:

а) $\begin{cases} xy = -4, \\ y = x^2 - 2x + 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^3, \\ y - (x+2)^2 = -7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ xy = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y - |x - 1| = 0, \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$

3.87. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x^2 - 4xy + y^2 = 2x + 2y \end{cases}$ двума спосабамі.

3.88. Не выконваючы пабудовы, знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння:

а) парабалы $y = x^2 + 1$ і прамой $x + 2y = 5$;
б) парабалы $y = 3x^2 + 1$ і прамой $y - 2x = 2$;
в) гіпербалы $xy = -20$ і прамой $x + y = 8$;
г) гіпербалы $xy = 12$ і прамой $3x + 2y = 12$.

3.89. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2xy = 6, \\ y - 2xy = -15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 = 2, \\ x^2 + 3x - y^2 = -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 2x - y = 5, \\ 2x^2 - 3xy - 2x + 3y = 1. \end{cases}$

3.90*. Прымяніце метад замены зменных і рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{4x}{y} + \dfrac{y}{x} = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) = 15, \\ x + xy + y = 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 + y^2 + xy = 19. \end{cases}$

3.91*. Выкарыстайце залежнасць паміж велічынямі ва ўмове для рашэння задачы з дапамогай сістэмы ўраўненняў. Два веласіпедысты рухаюцца па замкнутай дарожцы велатрэка ў адным напрамку. Першы даганяе другога кожныя 12 мін. Вядома, што першы веласіпедыст праходзіць круг велатрэка на 10 с хутчэй, чым другі. Знайдзіце, колькі секунд патрабуецца другому веласіпедысту, каб прайсці круг велатрэка.

3.92*. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 4x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ 6x^2 - 3xy - y^2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$

3.93*. Рашыце ўраўненне $x^2 + 4y^2 + |3x - y + 10| = 4xy$.

3.94. Рашыце сістэму ўраўненняў спосабам падстаноўкі:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 15, \\ y = x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = y - 1, \\ y^2 + 2x = 6; \end{cases}$

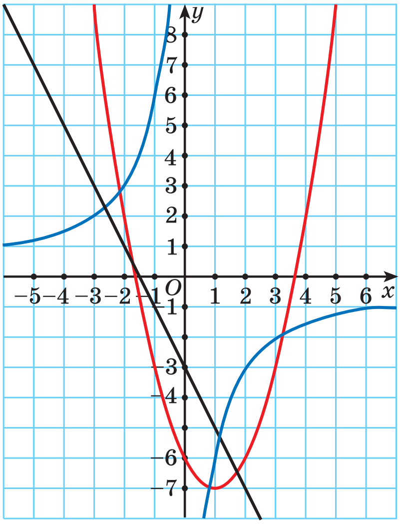
в) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + xy = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} xy = 18, \\ x + y = 9. \end{cases}$

3.95. Рашыце сістэму ўраўненняў спосабам складання:

а) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ 2x - y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y = 30, \\ x^2 - y = -22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 + y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 + 4x = 18, \\ y - 2x = -9. \end{cases}$

3.96. На рысунку 72 паказаны графікі функцый $y = -\frac{6}{x}$, $y = -2x - 3$ і $y = (x - 1)^2 - 7$. З дапамогай графікаў вызначце, колькі рашэнняў мае сістэма ўраўненняў:



Рыс. 72

а) $\begin{cases} xy = -6, \\ y = -2x - 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = (x - 1)^2 - 7, \\ y + 2x = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = (x - 1)^2 - 7, \\ xy = -6. \end{cases}$

3.97. Рашыце графічна сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ xy = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y - x = 6. \end{cases}$

Выканайце праверку.

3.98. Здабытак двух натуральных лікаў роўны 180, а іх рознасць роўна 3. Знайдзіце гэтыя лікі.

3.99. Будаўнічая пляцоўка прамавугольнай формы абгароджана плотам даўжынёй 1 км. Знайдзіце памеры пляцоўкі, калі яе плошча роўна 60 000 м^2.

3.100. Сума квадратаў лічбаў двухзначнага ліку роўна 25. Калі ад гэтага ліку адняць 9, то атрымаецца лік, запісаны тымі ж лічбамі, але ў адваротным парадку. Знайдзіце гэты лік.

3.101. Спосабам падстаноўкі рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x - y = -1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12. \end{cases}$

3.102. Рашыце задачу, выкарыстаўшы залежнасці паміж велічынямі для складання сістэмы ўраўненняў:

а) Працягласць шашы паміж пунктамі A і B роўна 20 км. З пункта A выехаў веласіпедыст, а праз 45 мін пасля гэтага ў тым жа напрамку з пункта A выехаў матацыкліст, які дагнаў веласіпедыста, не даехаўшы 5 км да пункта B. Знайдзіце скорасці веласіпедыста і матацыкліста, калі за 1 г веласіпедыст праязджае на 48 км менш, чым матацыкліст за 2 г.

б) Дзве студэнцкія брыгады выканалі заданне за 2 дні. У першы дзень яны выканалі $\frac{1}{3}$ задання, прычым першая брыгада працавала 2 г, а другая — на 1 г больш. У другі дзень першая брыгада працавала 5 г, а другая — на 30 мін менш. Знайдзіце, за колькі гадзін магла б выканаць заданне другая брыгада, калі б працавала адна.

3.103. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 24, \\ x + 2y = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 2; \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

3.104. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5y = 0, \\ 3x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 - xy = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ 2x = y - 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x - 2)(y + 2) = -1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

3.105. З дапамогай графічнага метаду вызначце, колькі рашэнняў мае сістэма ўраўненняў $\begin{cases} xy = 12, \\ y - (x + 5)^2 = -3. \end{cases}$

3.106. Не выконваючы пабудовы, знайдзіце каардынаты пунктаў перасячэння:

а) парабалы $y = 2x^2 + 2$ і прамой $2x + y = 14$;

б) гіпербалы $xy = -2$ і прамой $x - y = 3$.

3.107. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4. \end{cases}$

3.108*. Прымяніце метад замены зменных і рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} \dfrac{3x}{y} - \dfrac{y}{x} = -2, \\ y^2 - x^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + xy = 10, \\ x^2y - xy^2 = 24. \end{cases}$

* * *

3.109. З дадзеных дробаў выберыце дроб, які нельга запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу:

а) $\frac{3}{40}$; б) $\frac{1}{625}$; в) $\frac{5}{32}$;

г) $\frac{7}{100}$; д) $\frac{1}{24}$; е) $\frac{7}{20}$.

3.110. Знайдзіце рашэнне сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 5, \\ x - 2 > -1. \end{cases}$$

3.111. Знайдзіце рашэнне сукупнасці няроўнасцей

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 \geqslant 5, \\ x - 2 > -1. \end{array}\right.$$

3.112. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу $m^2 - 2m\sqrt{5} + 2$ пры $m = \sqrt{5} - 3$.

3.113. Знайдзіце НАД і НАК лікаў 175 і 280.

3.114. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{4}{b^2 + b} - \frac{2}{b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 - b}\right) \cdot \left(1 + 2b + b^2\right).$$

3.115. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $2^{12} \cdot 0{,}5^{13}$; б) $3^7 : 0{,}3^6$.

3.116. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы з графіка функцыі $g(x) = -5x^2$ зрухам яго на 4 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат. А графік функцыі $y = h(x)$ атрыманы з графіка функцыі $p(x) = 0{,}1x^2$ зрухам яго на 3 адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і на 1 адзінку ўгору ўздоўж восі ардынат. Ці маюць агульныя пункты графікі функцый $y = f(x)$ і $y = h(x)$?

§ 12. Формула даўжыні адрэзка з зададзенымі каардынатамі яго канцоў. Ураўненне акружнасці

3.117. Якое з наступных ураўненняў не з'яўляецца ўраўненнем прамой:

а) $3x - 7y - 5 = 0$; б) $4x - 5 = 0$;

в) $6x^2 + 5y + 2 = 0$; г) $2y = 0$?

3.118. Вызначце, графікам якіх з дадзеных функцый належыць пункт (1; 1):

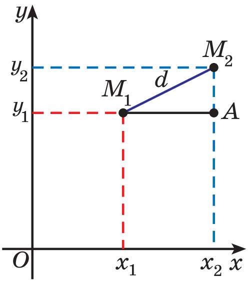
а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $h(x) = x^2$;

в) $g(x) = x^3$; г) $g(x) = 2x - 1$.

3.119. Знайдзіце з дапамогай графікаў функцый $f(x) = \sqrt{x}$ і $h(x) = x^2$ карані ўраўнення $\sqrt{x} = x^2$.

Для прымянення графічнага метаду рашэння сістэм неабходна ведаць графікі розных ураўненняў. Многія з іх вам ужо знаёмы. Гэта, напрыклад, прамая, гіпербала, парабала.

Пашырым магчымасці прымянення графічнага метаду рашэння сістэм нелінейных ураўненняў і выведзем ураўненне акружнасці з цэнтрам у зададзеным пункце з зададзеным радыусам. Для гэтага спачатку выведзем формулу для вылічэння даўжыні адрэзка з зададзенымі каардынатамі яго канцоў, г. зн. для вылічэння адлегласці паміж двума пунктамі, зададзенымі сваімі каардынатамі.



Рыс. 73

Разгледзім пункты $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ (рыс. 73). Знойдзем адлегласць d паміж гэтымі пунктамі (даўжыню адрэзка M_1M_2). Разгледзім прамавугольны трохвугольнік AM_1M_2, у якім $M_1A = |x_2 - x_1|$, $M_2A = |y_2 - y_1|$. Па тэарэме Піфагора знойдзем гіпатэнузу трохвугольніка M_1M_2A:

$$M_1M_2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Атрымалі формулу даўжыні адрэзка з зададзенымі каардынатамі яго канцоў, або формулу адлегласці паміж двума пунктамі з каардынатамі $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Прыклад 1. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі $A(-1;\ 3)$ і $B(2;\ 5)$.

Рашэнне. Падставім каардынаты пунктаў $A(-1;\ 3)$ і $B(2;\ 5)$ у формулу адлегласці паміж двума пунктамі $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ і атрымаем, што

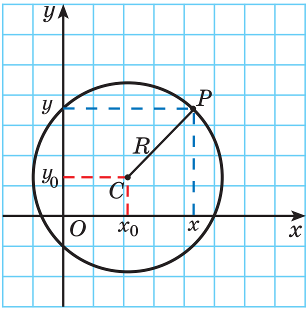
$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Разгледзім акружнасць на каардынатнай плоскасці. Акружнасць — гэта мноства пунктаў плоскасці, адлегласць ад кожнага з якіх да аднаго дадзенага пункта (цэнтра акружнасці) з'яўляецца пастаяннай велічынёй, роўнай радыусу акружнасці R.

Па формуле адлегласці паміж двума пунктамі знойдзем адлегласць ад дадзенага пункта $C(x_0;\ y_0)$ (цэнтра акружнасці) да адвольнага пункта акружнасці $P(x;\ y)$ (рыс. 74):

$$R = CP = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \text{ або}$$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$



Рыс. 74

Такім чынам, калі пункт належыць акружнасці з цэнтрам $C(x_0;\ y_0)$ і радыусам R, то яго каардынаты задавальняюць ураўненне $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Ураўненне $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ з'яўляецца ўраўненнем акружнасці з цэнтрам у пункце $(x_0;\ y_0)$ і радыусам R.

Калі каардынаты пункта задавальняюць ураўненне $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, то гэты пункт належыць акружнасці з цэнтрам $C(x_0;\ y_0)$ і радыусам R.

Пакажам, што калі пункт $(x;\ y)$ не належыць акружнасці з цэнтрам $(x_0;\ y_0)$ і радыусам R, то яго каардынаты не задавальняюць ураўненне $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Сапраўды, калі пункт ляжыць па-за акружнасцю, то адлегласць ад яго да цэнтра акружнасці большая за радыус, г. зн. $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} > R$, а калі пункт ляжыць унутры акружнасці, то меншая, г. зн. $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R$.

Каб скласці ўраўненне акружнасці, трэба:

① Вызначыць каардынаты цэнтра акружнасці $(x_0; y_0)$. ② Вызначыць радыус акружнасці R. ③ Падставіць вызначаныя значэнні x_0, y_0 і R ва ўраўненне акружнасці $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.	Складзіце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце (–8; 2) і радыусам 5. ① $x_0=-8$, $y_0=2$. ② $R=5$. ③ $(x-(-8))^2+(y-2)^2=5^2$; $(x+8)^2+(y-2)^2=25$.

Прыклад 2. Складзіце ўраўненне акружнасці:

а) з цэнтрам у пункце (4; –1) і радыусам $\sqrt{3}$;

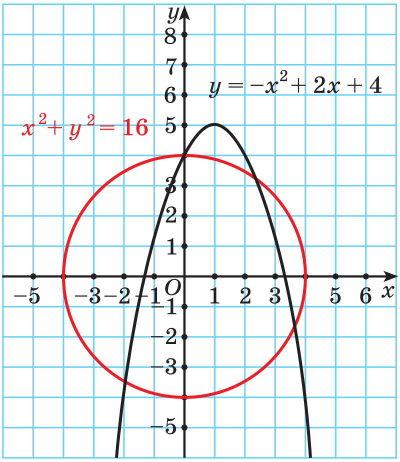
б) з цэнтрам у пункце (0; 0) і радыусам 4.

Рашэнне. а) Падставім каардынаты цэнтра акружнасці $x_0=4$, $y_0=-1$ і значэнне радыуса $R=\sqrt{3}$ ва ўраўненне акружнасці $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ і атрымаем $(x-4)^2+(y+1)^2=3$.

б) Каардынаты цэнтра акружнасці: $x_0=0$, $y_0=0$, радыус акружнасці $R=4$. Тады ўраўненне дадзенай акружнасці $x^2+y^2=16$.

Калі цэнтрам акружнасці радыуса R з'яўляецца пачатак каардынат, то яе ўраўненне мае выгляд $\boldsymbol{x^2+y^2=R^2}$.

Прыклад 3. Вызначце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=-x^2+2x+4. \end{cases}$



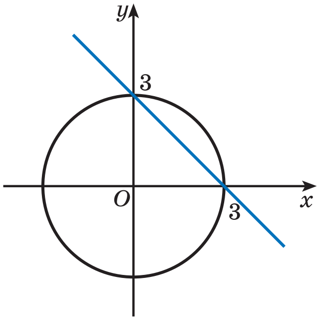
Рыс. 75

Рашэнне. Пабудуем графікі ўраўненняў сістэмы. Першае ўраўненне — гэта ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным 4. Графікам другога ўраўнення з'яўляецца парабала з вяршыняй у пункце (1; 5), якая перасякае вось ардынат у пункце (0; 4).

Пабудаваныя графікі перасякаюцца ў чатырох пунктах (рыс. 75). Значыць, дадзеная сістэма ўраўненняў мае 4 рашэнні.

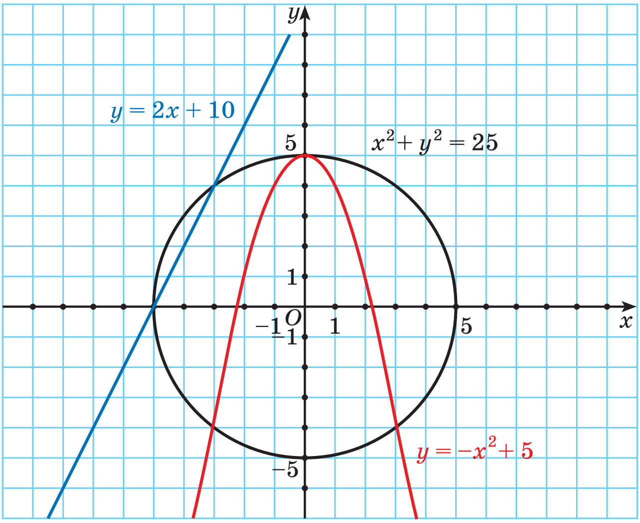
Адказ: 4 рашэнні.

Формула даўжыні адрэзка з зададзенымі каардынатамі яго канцоў	
1. Знайдзіце даўжыню адрэзка MN, калі $M(3; -6)$, $N(-1; 4)$.	Па формуле даўжыні адрэзка $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ атрымаем: $MN = \sqrt{(-1-3)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{116}$.
2. Знайдзіце даўжыню дыяганалі прамавугольніка, калі зададзены яго вяршыня $A(-7; 1)$ і пункт перасячэння яго дыяганалей $O(-3; -2)$.	Знойдзем даўжыню адрэзка AO: $AO = \sqrt{(-7+3)^2 + (1+2)^2} = 5$. Даўжыня адрэзка AO роўна палавіне дыяганалі прамавугольніка, значыць, даўжыня дыяганалі роўна 10.
Ураўненне акружнасці	
3. Вызначце каардынаты цэнтра і радыус акружнасці: а) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$; б) $x^2 + (y+7)^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 8$.	а) $C(-1; 1)$, $R = 1$; б) $C(0; -7)$, $R = 2$; в) $C(0; 0)$, $R = 2\sqrt{2}$.
4. Якія з дадзеных пунктаў ляжаць на акружнасці $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$: а) $A(4; 3)$; б) $B(4; -3)$; в) $C(-3; 4)$; г) $D(-3; -4)$?	Падставім каардынаты пунктаў ва ўраўненне акружнасці: а) $(4-1)^2 + (3+1)^2 = 25$, роўнасць правільная, значыць, пункт A ляжыць на акружнасці; б) $(4-1)^2 + (-3+1)^2 = 13 \neq 25$, значыць, пункт B не ляжыць на акружнасці; в) $(-3-1)^2 + (4+1)^2 = 41 \neq 25$, значыць, пункт C не ляжыць на акружнасці; г) $(-3-1)^2 + (-4+1)^2 = 25$, роўнасць правільная, значыць, пункт D ляжыць на акружнасці.
5. Запішыце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце $(-1; 1)$ і радыусам $\sqrt{2}$.	$x_0 = -1$, $y_0 = 1$, $R = \sqrt{2}$, $R^2 = 2$, $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ — ураўненне акружнасці.
6. Запішыце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце A, для якой адрэзак AB з'яўляецца радыусам, калі $A(2; 4)$, $B(5; 7)$.	$x_0 = 2$, $y_0 = 4$, радыус знойдзем па формуле адлегласці паміж двума пунктамі: $AB = \sqrt{(2-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$. Ураўненне акружнасці $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$.

7. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9, \end{cases}$ прымяніўшы графічны метад.	Графік першага ўраўнення — прамая, якая праходзіць праз пункты (3; 0), (0; 3). Графік другога ўраўнення — акружнасць з цэнтрам у пачатку каардынат і радыусам, роўным 3.  Каардынаты пунктаў перасячэння (3; 0), (0; 3) — рашэнні сістэмы.

1. Калі ў сістэме двух ураўненняў адно ўраўненне — ураўненне акружнасці, а другое — ураўненне прамой, то колькі рашэнняў можа мець гэта сістэма?

2. Выкарыстаўшы рысунак 76, запішыце дзве розныя сістэмы, адно з ураўненняў якіх — ураўненне акружнасці. Запішыце рашэнні гэтых сістэм.



Рыс. 76

3.120. Вылічыце даўжыню адрэзка AB, калі:

а) $A(2;\ 7)$, $B(8;\ -1)$; б) $A(-9;\ 5)$, $B(3;\ 0)$;

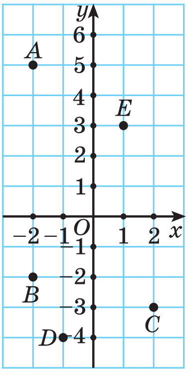
в) $A(0;\ -5)$, $B(2;\ 3)$; г) $A\left(\sqrt{3};\ 4\right)$, $B(0;\ 2)$.

Якой формулай вы карысталіся?

3.121. На каардынатнай плоскасці пазначаны пункты A, B, C, D і E (рыс. 77). Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі:

а) A і E; б) B і D;

в) D і E; г) B і C.



Рыс. 77

3.122. Знайдзіце адлегласць ад пачатку каардынат да пункта з каардынатамі:

а) $(3;\ 4)$; б) $(-2;\ 0)$; в) $(-6;\ 2)$; г) $\left(\sqrt{2};\ 5\right)$.

3.123. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, калі яго вяршынямі з'яўляюцца пункты $A(-1;\ 0)$, $B(5;\ 0)$ і $C(2;\ 4)$.

3.124. Складзіце план рашэння і знайдзіце адлегласць ад пункта $K(-2;\ 7)$ да:

а) восі абсцыс; б) восі ардынат;

в) пачатку каардынат; г) пункта $P(-1;\ 3)$.

3.125. Знайдзіце адлегласць ад пункта $T(6;\ 8)$ да пункта, сіметрычнага дадзенаму пункту адносна:

а) восі абсцыс;

б) восі ардынат;

в) пачатку каардынат.

Абагульніце атрыманы вынік.

3.126. Пункты $A(-3;\ y)$ і $B(x;\ 5)$ сіметрычныя адносна восі ардынат. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB.

3.127. Выкарыстайце ўраўненне акружнасці і вызначце каардынаты цэнтра і радыус акружнасці:

а) $(x-3)^2+(y+4)^2=36$; б) $x^2+(y+7)^2=25$;

в) $(x-5)^2+y^2=32$; г) $x^2+y^2=17$.

3.128. Вызначце, ці праўда, што:

а) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $(x-5)^2+(y+9)^2=16$, з'яўляецца пункт $(5;\ -9)$;

б) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $x^2+(y+10)^2=36$, з'яўляецца пункт (0; 10);

в) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $x^2+y^2=3$, з'яўляецца пункт (0; 0);

г) радыус акружнасці, зададзенай ураўненнем $(x-8)^2+y^2=25$, роўны 5.

3.129. Вызначце, якія з дадзеных пунктаў ляжаць на акружнасці $x^2+(y+2)^2=9$:

а) $A(0;\ 1)$; б) $B\left(-2\sqrt{2};\ -1\right)$;

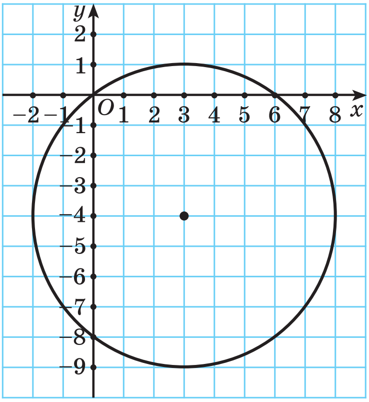
в) $C(2;\ -1)$; г) $D\left(\sqrt{3};\ 0\right)$.

3.130. Прымяніце алгарытм і запішыце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце A і радыусам R, калі:

а) $A(2;\ 7)$, $R=3$; б) $A(-1;\ 3)$, $R=1$;

в) $A(0;\ -2)$, $R=\sqrt{3}$; г) $A(0;\ 0)$, $R=2\sqrt{3}$.

3.131. Запішыце ўраўненне акружнасці, графік якой паказаны на рысунку 78. Якое ўраўненне мае акружнасць, сіметрычная дадзенай акружнасці адносна прамой $y=2$? $x=-1$?



Рыс. 78

3.132. Дадзена акружнасць $(x-1)^2+(y+2)^2=36$. Запішыце ўраўненне акружнасці, цэнтр якой сіметрычны цэнтру дадзенай акружнасці адносна:

а) пачатку каардынат, а радыус якой роўны радыусу дадзенай акружнасці;

б) восі ардынат, а радыус якой у тры разы меншы за радыус дадзенай акружнасці;

в) восі абсцыс, а радыус якой у два разы большы за радыус дадзенай акружнасці.

3.133. Дадзены пункты $A(-4;\ 0)$ і $B(0;\ 6)$. Запішыце ўраўненне акружнасці, для якой адрэзак AB з'яўляецца радыусам, а цэнтрам з'яўляецца пункт: а) A; б) B.

3.134. Дадзены пункты $F(5; -8)$ і $P(-2; 6)$. Запішыце ўраўненне акружнасці: а) з цэнтрам у пункце F, якая праходзіць праз пачатак каардынат; б) з цэнтрам у пункце P, якая праходзіць праз пункт $N(0; 7)$.

3.135. У адной сістэме каардынат пабудуйце акружнасці, зададзеныя ўраўненнямі $(x-3)^2+(y+2)^2=4$; $(x+4)^2+y^2=25$, $x^2+y^2=9$. Колькі пунктаў перасячэння маюць кожныя дзве з іх?

3.136. Вызначце радыус і запішыце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце $M(2; 7)$, якая:

а) датыкаецца да восі абсцыс;

б) датыкаецца да восі ардынат;

в) датыкаецца да прамой $y=5$;

г) праходзіць праз пачатак каардынат.

3.137. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей, зададзеных ураўненнямі $x^2+y^2=4$ і $(x-6)^2+(y+8)^2=64$.

3.138. Рашыце сістэму ўраўненняў, выкарыстаўшы графічны метад:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=x^2+3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ (x-2)^2+y^2=36. \end{cases}$

Выканайце праверку.

3.139. Вызначце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ xy=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+(y+3)^2=25, \\ y=x^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=-x^2+3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ (x-5)^2+(y-4)^2=1. \end{cases}$

3.140*. Знайдзіце, пры якіх значэннях ліку a сістэма ўраўненняў $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y=|x|+a: \end{cases}$

а) мае адно рашэнне; б) мае два рашэнні;

в) мае тры рашэнні; г) мае чатыры рашэнні;

д) не мае рашэнняў.

3.141. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB, калі:

а) $A(4; -8)$, $B(-1; 4)$; б) $A(7; 0)$, $B(1; -5)$.

3.142. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі:

а) $M(-1; -2)$ і $N(3; 4)$;

б) $F(-5; 0)$ і $K(-6; 1)$;

в) $B\left(3; \sqrt{7}\right)$ і $D(0; 0)$.

3.143. Складзіце план рашэння і знайдзіце адлегласць ад пункта $A(3; -4)$ да:

а) восі абсцыс; б) восі ардынат;

в) пачатку каардынат; г) пункта $B(4; -3)$.

3.144. Вызначце каардынаты цэнтра і радыус акружнасці:

а) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$; б) $x^2+(y-5)^2=49$;

в) $(x+4)^2+y^2=18$; г) $x^2+y^2=19$.

3.145. Вызначце, ці праўда, што:

а) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $(x-3)^2+(y+7)^2=16$, з'яўляецца пункт $(-3; 7)$;

б) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $x^2+(y-5)^2=36$, з'яўляецца пункт $(5; 0)$;

в) цэнтрам акружнасці, зададзенай ураўненнем $x^2+y^2=1$, з'яўляецца пункт $(0; 0)$;

г) радыус акружнасці, зададзенай ураўненнем $(x+2)^2+y^2=4$, роўны 4?

3.146. Выберыце пункты, якія ляжаць на акружнасці

$$(x-1)^2+y^2=16:$$

а) $A(5; 0)$; б) $B(-1; -2)$;

в) $C\left(-2; \sqrt{7}\right)$; г) $D(3; 3)$.

3.147. Запішыце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пункце A і радыусам R, калі:

а) $A(6; 3)$, $R=7$; б) $A(2; -4)$, $R=5$;

в) $A(-3; 0)$, $R=\sqrt{2}$; г) $A(0; 0)$, $R=3\sqrt{5}$.

3.148. Дадзена акружнасць $(x+5)^2+(y-3)^2=16$. Запішыце ўраўненне акружнасці, цэнтр якой сіметрычны цэнтру дадзенай акружнасці адносна:

а) пачатку каардынат, а радыус якой роўны радыусу дадзенай акружнасці;

б) восі ардынат, а радыус якой у два разы меншы за радыус дадзенай акружнасці;

в) восі абсцыс, а радыус якой у тры разы большы за радыус дадзенай акружнасці.

3.149. Дадзены пункты $A(5;\ 0)$ і $B(0;\ -2)$. Запішыце ўраўненне акружнасці, для якой пункт B з'яўляецца цэнтрам, а адрэзак AB з'яўляецца радыусам.

3.150. Ці праўда, што акружнасці, зададзеныя ўраўненнямі $(x-1)^2+(y+5)^2=36$ і $(x-4)^2+y^2=9$, не маюць агульных пунктаў?

3.151. Выберыце ўсе правільныя сцверджанні:

а) акружнасць, зададзеная ўраўненнем $x^2+(y-2)^2=4$, праходзіць праз пункт $A(-1;\ 1)$;

б) прамая $y=10$ з'яўляецца датычнай да акружнасці $(x-9)^2+y^2=100$;

в) цэнтры акружнасцей, зададзеных ўраўненнямі $(x+3)^2+(y-7)^2=15$ і $(x-3)^2+(y+7)^2=13$, сіметрычны адносна восі ардынат.

3.152. Рашыце сістэму ўраўненняў, прымяніўшы графічны метад:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x-4)^2+y^2=25. \end{cases}$

Выканайце праверку.

3.153. Выкарыстайце графікі ўраўненняў і вызначце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ xy=-8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+(y+2)^2=16, \\ y=x^2-5. \end{cases}$

3.154. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} x^2\leqslant 1, \\ x^2+5x+4\leqslant 0. \end{cases}$

3.155. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} x^2\leqslant 1, \\ x^2+5x+4\leqslant 0. \end{array}\right.$

3.156. Даўжыню ўчастка павялічылі на 10 %, а шырыню паменшылі на некалькі працэнтаў. У выніку плошча ўчастка паменшылася на 1 %. Знайдзіце, на колькі працэнтаў паменшылі шырыню ўчастка.

3.157. Знайдзіце значэнне выразу

$$\left(\sqrt{17}+2\right)^2-\left(5-\sqrt{17}\right)^2-14\sqrt{17}.$$

3.158. Скараціце дроб $\frac{(1-2a)^2}{2a^2+9a-5}$.

3.159. Функцыя зададзена формулай $y=-7x+2$. Запішыце ўраўненне няцотнай функцыі, графік якой паралельны графіку дадзенай функцыі.

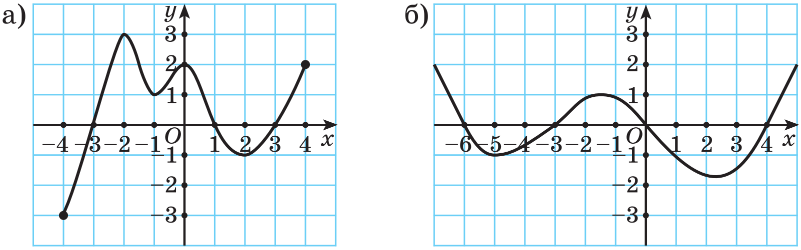
§ 13. Дробава-рацыянальныя няроўнасці. Метад інтэрвалаў для рашэння рацыянальных няроўнасцей

3.160. Рашыце няроўнасць $x^2-1<0$.

3.161. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$y=\sqrt{x^2-5x+6}.$$

3.162. Вызначце прамежкі знакапастаянства функцыі $y=f(x)$, зададзенай графічна (рыс. 79).



Рыс. 79

Разгледзім задачу. Лодка прайшла па цячэнні ракі 5 км і вярнулася назад, затраціўшы на ўвесь шлях не больш за 1 г. Якая найменшая магчымая скорасць лодкі, калі скорасць цячэння ракі роўна 3 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$?

Рашэнне. Абазначым праз x $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ уласную скорасць лодкі. Складзём табліцу залежнасцей паміж велічынямі.

Працэс	**Скорасць, $\frac{\text{км}}{\text{г}}$**	**Адлегласць, км**	**Час, г**
Рух лодкі па цячэнні ракі	$x + 3$	5	$t_1 = \frac{5}{x+3}$
Рух лодкі супраць цячэння ракі	$x - 3$	5	$t_2 = \frac{5}{x-3}$

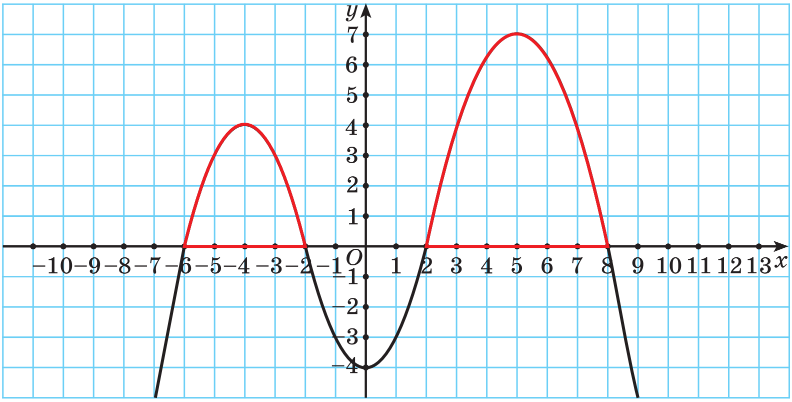
Па ўмове задачы на ўвесь шлях лодка затраціла не больш за 1 г. Складзём матэматычную мадэль: $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leqslant 1.$

Атрыманая ў ходзе рашэння задачы няроўнасць $\frac{5}{x+3} + \frac{5}{x-3} \leqslant 1$ з'яўляецца рацыянальнай.

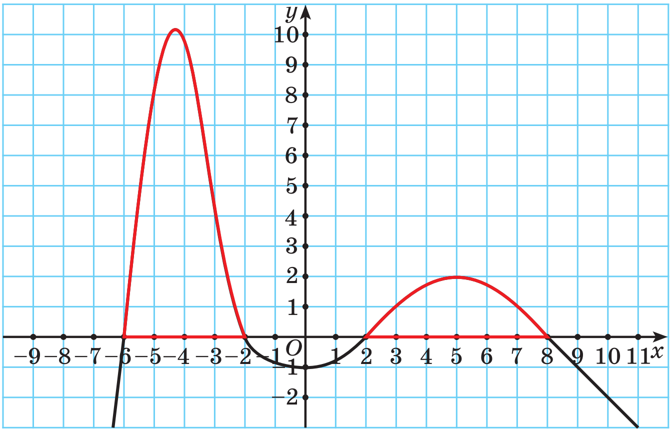
Рацыянальнай называецца няроўнасць, у левай і правай частках якой — рацыянальныя выразы.

Разгледзім адзін з метадаў рашэння рацыянальных няроўнасцей — метад інтэрвалаў. Гэты метад заснаваны на выкарыстанні графіка функцыі.

Няхай трэба рашыць няроўнасць $f(x) \geqslant 0$, дзе $y = f(x)$ — функцыя, графік якой паказаны на рысунку 80. Для рашэння няроўнасці $f(x) \geqslant 0$ дастаткова знайсці значэнні аргумента, пры якіх значэнні функцыі $f(x)$ неадмоўныя, г. зн. пры якіх графік функцыі ляжыць не ніжэй за вось абсцыс. Гэта прамежкі [–6; –2] і [2; 8]. Значыць, усе рашэнні няроўнасці



Рыс. 80



Рыс. 81

$f(x) \geqslant 0$ — гэта ўсе значэнні зменнай x, што належаць аб'яднанню мностваў $x \in [-6; -2] \cup [2; 8]$.

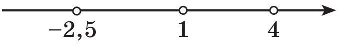
Заўважым, што такія ж рашэнні мае няроўнасць $g(x) \geqslant 0$, дзе $y = g(x)$ — функцыя, графік якой паказаны на рысунку 81, паколькі значэнні функцыі $y = g(x)$ неадмоўныя пры тых жа значэннях зменнай, што ў функцыі $y = f(x)$.

Такім чынам, для прымянення метаду інтэрвалаў да рашэння няроўнасці дастаткова пабудаваць схему графіка функцыі, на якой адлюстраваны толькі некаторыя (неабходныя для рашэння няроўнасці) уласцівасці функцыі: яе абсяг вызначэння, нулі і прамежкі знакапастаянства.

Прыклад 1. Рашыце няроўнасць

$$(x-1)(x+2{,}5)(x-4) < 0.$$

Рашэнне. Разгледзім функцыю $f(x) = (x-1)(x+2{,}5)(x-4)$. Пабудуем схему графіка гэтай функцыі, па якой вызначым яе прамежкі знакапастаянства. Для гэтага знойдзем пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс, г. зн. нулі гэтай функцыі: $(x-1)(x+2{,}5)(x-4) = 0$ пры $x = 1$; $x = -2{,}5$; $x = 4$.



Рыс. 82

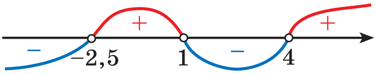
Адзначым нулі функцыі на восі абсцыс (рыс. 82). Паколькі дадзеная няроўнасць строгая, то нулі функцыі адзначым на восі пустымі пунктамі.

Нулі функцыі падзялілі вось на чатыры прамежкі. Вызначым, вышэй ці ніжэй за вось абсцыс ляжыць графік функцыі ў кожным з атрыманых прамежкаў.

Паколькі справа ад пункта 4 кожны з трох множнікаў здабытку $(x-1)(x+2{,}5)(x-4)$ прымае дадатныя значэнні, то пры $x \in (4;\ +\infty)$ графік функцыі $f(x)=(x-1)(x+2{,}5)(x-4)$ ляжыць вышэй за вось абсцыс.

Пры пераходзе праз кожны з адзначаных пунктаў знак функцыі $f(x)$, а значыць, і становішча графіка адносна восі абсцыс змяняецца, паколькі змяняецца знак аднаго з множнікаў.

Пабудуем схему графіка функцыі $f(x) = (x - 1)(x + 2{,}5)(x - 4)$ (рыс. 83).



Рыс. 83

Пры $x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4)$ пабудаваная крывая ляжыць ніжэй за вось абсцыс. Гэта аб'яднанне інтэрвалаў з'яўляецца мноствам рашэнняў дадзенай няроўнасці.

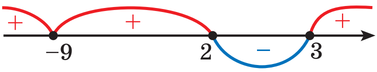
Адказ: $x \in (-\infty;\ -2{,}5) \cup (1;\ 4)$.

Прыклад 2. Рашыце няроўнасць

$$(x+9)^2(x-2)(x-3) \leqslant 0.$$

Рашэнне. Разгледзім функцыю $h(x)=(x+9)^2(x-2)(x-3)$. Знойдзем яе нулі: $(x+9)^2(x-2)(x-3)=0$ пры $x=-9$; $x=2$; $x=3$. Паколькі няроўнасць нястрогая, то нулі функцыі з'яўляюцца рашэннямі дадзенай няроўнасці, таму ўключым іх у мноства рашэнняў няроўнасці і адзначым на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі (рыс. 84).

Затым вызначым становішча графіка функцыі ў кожным з чатырох атрыманых прамежкаў. Справа ад пункта 3 кожны з трох множнікаў здабытку $(x+9)^2(x-2)(x-3)$ прымае дадатныя значэнні, значыць, графік функцыі ляжыць вышэй за вось абсцыс. Пры пераходзе праз пункты 3 і 2 становішча графіка змяняецца, паколькі змяняецца знак аднаго з множнікаў $(x-3)$ або $(x-2)$. Пры пераходзе праз пункт –9 становішча графіка не змяняецца, паколькі множнік $(x+9)^2$ прымае неадмоўныя значэнні пры ўсіх $x \in \boldsymbol{R}$.



Рыс. 84

Пабудуем схему графіка функцыі (гл. рыс. 84) і запішам рашэнне няроўнасці ў адпаведнасці з яе знакам: $x \in \{-9\} \cup [2;\ 3]$.

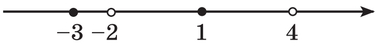
Адказ: $\{-9\} \cup [2;\ 3]$.

Калі ў множніку $(x-a)^n$ лік n — цотны, то пры пераходзе праз пункт a становішча графіка адносна восі абсцыс не змяняецца, а калі лік n — няцотны, то змяняецца.

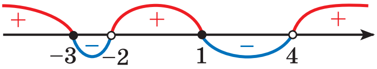
Прыклад 3. Рашыце няроўнасць $\frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)} \geqslant 0.$

Рашэнне. Разгледзім функцыю $g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}.$

Адзначым на восі абсцыс нулі гэтай функцыі (лікі –3 і 1) і тыя значэнні зменнай, якія не ўваходзяць у абсяг вызначэння функцыі $g(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-4)(x+2)}$ (гэта лікі –2 і 4 — значэнні зменнай, пры якіх назоўнік дробу ператвараецца ў нуль (нулі назоўніка) (рыс. 85).



Рыс. 85



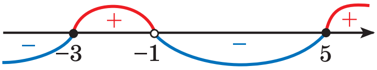
Рыс. 86

Паколькі няроўнасць нястрогая, то нулі функцыі з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці (на восі абсцыс — зафарбаваныя пункты –3 і 1). Нулі назоўніка не з'яўляюцца рашэннямі няроўнасці (на восі абсцыс — пустыя пункты –2 і 4).

Пабудуем схему графіка (рыс. 86). Становішча графіка адносна восі абсцыс змяняецца пры пераходзе праз кожны пункт. Па схеме графіка ў адпаведнасці са знакам няроўнасці запішам яе рашэнне: $x \in (-\infty;\ -3] \cup (-2;\ 1] \cup (4;\ +\infty)$.

Адказ: $(-\infty;\ -3] \cup (-2;\ 1] \cup (4;\ +\infty)$.

Для таго каб рашыць рацыянальную няроўнасць метадам інтэрвалаў, трэба:

① Прывесці няроўнасць да выгляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geqslant 0$ або $f(x) \leqslant 0$.	Рашыце няроўнасць $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \geqslant 0.$ ① Няроўнасць мае выгляд $f(x) \geqslant 0$, дзе $f(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{x+1}.$
② Знайсці і адзначыць на восі абсцыс нулі функцыі і значэнні зменнай, пры якіх значэнні функцыі не існуюць (нулі назоўніка).	② 
③ Пабудаваць схему графіка функцыі.	③ 
④ Запісаць адказ у адпаведнасці са знакам няроўнасці.	④ *Адказ*: $x \in [-3;\ -1) \cup [5;\ +\infty)$.

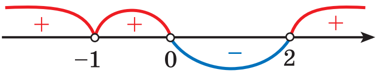
Прыклад 4. Рашыце няроўнасць $\frac{x(x-2)}{(x+1)^4} > 0.$

Рашэнне.

① Няроўнасць мае выгляд $f(x) > 0$, дзе $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^4}$.

② Знойдзем нулі функцыі (лікі 0; 2) і, паколькі знак няроўнасці строгі, адзначым іх на восі абсцыс пустымі пунктамі. Знойдзем значэнне зменнай, пры якім значэнні функцыі не існуюць, — нульназоўніка (лік –1) і адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам (рыс. 87).

Рыс. 87



Рыс. 88

③ Пабудуем схему графіка функцыі, пры гэтым улічым, што пры пераходзе праз пункт –1 становішча графіка адносна восі не змяняецца, а пры пераходзе праз пункты 0 і 2 змяняецца (рыс. 88).

④ *Адказ*: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

Для таго каб графік у першым правым прамежку ляжаў вышэй за вось абсцыс, трэба множаннем абедзвюх частак няроўнасці на –1 атрымаць дадатныя каэфіцыенты перад зменнай у лінейных множніках.

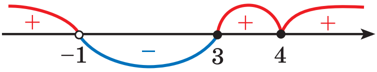
Прыклад 5. Рашыце няроўнасць $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geqslant 0.$

Рашэнне. Для таго каб усе каэфіцыенты перад зменнымі ў лінейных множніках былі дадатнымі, памножым абедзве часткі няроўнасці $\frac{(x-4)^2(3-x)}{x+1} \geqslant 0$ на –1 і атрымаем няроўнасць $\frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1} \leqslant 0.$

① Няроўнасць мае выгляд $f(x) \leqslant 0$, дзе $f(x) = \frac{(x-4)^2(x-3)}{x+1}$.

② Знойдзем нулі функцыі (лікі 3 і 4) і, паколькі знак няроўнасці нястрогі, адзначым іх на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі. Знойдзем значэнне зменнай, пры якім значэнне функцыі не існуе (лік –1), і адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам (рыс. 89).

Рыс. 89

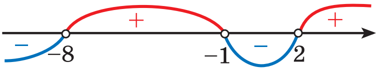


Рыс. 90

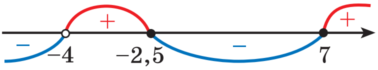
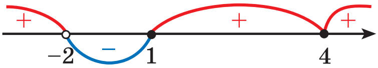
③ Пабудуем схему графіка функцыі, пры гэтым улічым, што пры пераходзе праз пункт 4 становішча графіка адносна восі не змяняецца, а пры пераходзе праз пункты –1 і 3 змяняецца (рыс. 90).

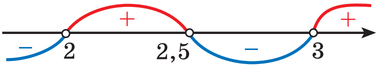
④ *Адказ*: $x \in (-1;\ 3] \cup \{4\}$.

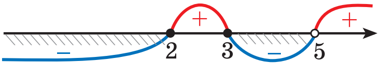
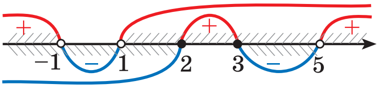
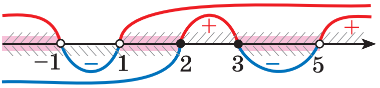
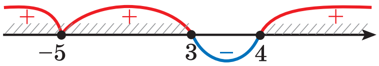
<table>
<tr><th colspan="2">Рацыянальныя няроўнасці</th></tr>
<tr><td>1. Якія з наступных няроўнасцей з’яўляюцца рацыянальнымі:
а) $(x-2)(x+3) < 0$;
б) $3x+2 \geqslant x-1$;
в) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} > 0$;
г) $\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-5} > 3$?</td><td>Няроўнасці а), б), г) — рацыянальныя, паколькі ў левай і правай частках гэтых няроўнасцей — рацыянальныя выразы. Няроўнасць в) не з’яўляецца рацыянальнай, паколькі змяшчае ірацыянальныя выразы са зменнай.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Метад інтэрвалаў для рашэння рацыянальных няроўнасцей</th></tr>
<tr><td>2. Рашыце няроўнасць:
а)$(x-2)(x+1)(x+8) < 0$;
б) $(x-1)^2(9-x^2) \leqslant 0$.</td><td>а) ① Няроўнасць мае выгляд $f(x) < 0$, дзе $f(x) = (x-2)(x+1)(x+8)$.
② Нулямі функцыі з’яўляюцца лікі –8; –1 і 2. Паколькі знак няроўнасці строгі, адзначым іх на восі абсцыс пустымі пунктамі.

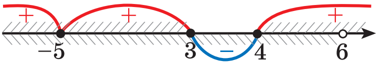
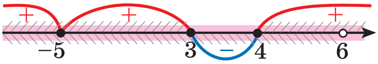

③ Пабудуем схему графіка функцыі. Пры пераходзе праз кожны з пунктаў –8; –1 і 2 становішча графіка адносна восі змяняецца.


④ <i>Адказ</i>: $x \in (-\infty;\ -8) \cup (-1;\ 2)$.
б) Памножым абедзве часткі дадзенай няроўнасці на –1 і атрымаем няроўнасць $(x-1)^2(x^2-9) \geqslant 0$, якую запішам у выглядзе $(x-1)^2(x-3)(x+3) \geqslant 0$.
Нулямі функцыі $f(x) = (x-1)^2(x-3)(x+3)$ з’яўляюцца лікі –3; 1 і 3. Паколькі знак</td></tr>
</table>

	няроўнасці нястрогі, то на восі абсцыс лікі -3; 1 і 3 адзначым зафарбаванымі пунктамі. Пабудуем схему графіка функцыі.  Пры пераходзе праз пункт 1 становішча графіка адносна восі не змяняецца, а пры пераходзе праз пункты -3 і 3 — змяняецца. *Адказ*: $x \in (-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [3; +\infty)$.
3. Рашыце няроўнасць: а) $\frac{(2x+5)(x-7)}{x+4} \leqslant 0$; б) $\frac{(1-x)^3(x-4)^2}{3x+6} \leqslant 0$.	а) Нулямі функцыі $f(x) = \frac{(2x+5)(x-7)}{x+4}$ з'яўляюцца лікі $-2{,}5$ і 7. Паколькі знак няроўнасці нястрогі, то адзначым іх на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі. Нулём назоўніка з'яўляецца лік -4. Адзначым яго пустым пунктам. Пабудуем схему графіка функцыі.  *Адказ*: $x \in (-\infty; -4) \cup [-2{,}5; 7]$. б) Памножым абедзве часткі няроўнасці на -1 і атрымаем няроўнасць $\frac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6} \geqslant 0$. Нулямі функцыі $f(x) = \frac{(x-1)^3(x-4)^2}{3x+6}$ з'яўляюцца лікі 1 і 4. Паколькі знак няроўнасці нястрогі, то адзначым іх на восі абсцыс зафарбаванымі пунктамі. Нулём назоўніка з'яўляецца лік -2. Адзначым яго пустым пунктам. Пабудуем схему графіка функцыі. Пры пераходзе праз пункт 4 становішча графіка адносна восі не змяняецца.  *Адказ*: $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.
4. Рашыце няроўнасць $\frac{4x}{x-2} < \frac{11}{2-x}$.	Запішам няроўнасць у выглядзе: $\frac{4x}{x-2} - \frac{11}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{x-2} + \frac{11}{x-2} < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{4x+11}{x-2} < 0$.

	Нулём функцыі $f(x)=\dfrac{4x+11}{x-2}$ з'яўляецца лік $-2{,}75$. Паколькі знак няроўнасці строгі, то адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам. Нулём назоўніка з'яўляецца лік 2. Адзначым яго на восі абсцыс пустым пунктам. Пабудуем схему графіка функцыі.  *Адказ*: $x \in (-2{,}75;\ 2)$.
5. Рашыце няроўнасць $\dfrac{x}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{x-2}>\dfrac{2}{x-3}$.	Прывядзём няроўнасць да выгляду: $\dfrac{x}{x^2-5x+6}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{x}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x-3}>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{x+3(x-3)-2(x-2)}{(x-2)(x-3)}>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}>0.$ Адзначым на восі абсцыс нуль функцыі $f(x)=\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$, г. зн. $x=2{,}5$, і тыя значэнні зменнай, пры якіх значэнні функцыі не існуюць: $x=2$ і $x=3$. Пабудуем схему графіка функцыі.  *Адказ*: $x \in (2;\ 2{,}5) \cup (3;\ +\infty)$.
6. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $y=\sqrt{\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-4}}$.	Паколькі функцыя $y=\sqrt{t}$ вызначана для $t \geqslant 0$, то рэшым няроўнасць $\dfrac{x^3-7x^2+12x}{x-4}\geqslant 0$. Дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці $\dfrac{x\left(x^2-7x+12\right)}{x-4}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-4)(x-3)}{x-4}\geqslant 0.$ Для знаходжання нулёў функцыі $f(x)=\dfrac{x(x-4)(x-3)}{x-4}$ выкарыстаем умову роўнасці дробу нулю:

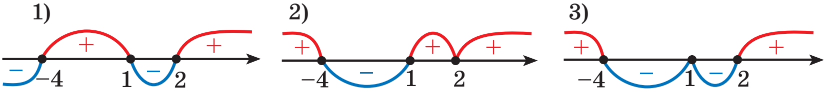
	$\frac{x(x-4)(x-3)}{x-4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=3,\\x=4,\end{array}\right.\\ x-4\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\x=3.\end{array}\right.$ При $x=4$ значэнне функцыі не існуе. Пабудуем схему графіка функцыі. Пры пераходзе праз пункт 4 становішча графіка адносна восі не змяняецца, паколькі множнік $(x-4)$ уваходзіць і ў лічнік, і ў назоўнік, а пры пераходзе праз пункты 0 і 3 становішча графіка змяняецца.  $D(y)=(-\infty;\ 0]\cup[3;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$.
7. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}\frac{(x-2)(x-3)}{x-5}\leqslant 0,\\(x-1)(x+1)>0.\end{cases}$	Адзначым на восі абсцыс мноства рашэнняў першай няроўнасці сістэмы.  Адзначым на гэтай жа восі мноства рашэнняў другой няроўнасці сістэмы.  Знойдзем перасячэнне мностваў рашэнняў.  *Адказ*: $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ 2]\cup[3;\ 5)$.
8. Знайдзіце рашэнне сукупнасці няроўнасцей $\left[\begin{array}{l}(x-3)(x-4)(x+5)^2\geqslant 0,\\2x-12<0.\end{array}\right.$	Адзначым на восі абсцыс мноства рашэнняў першай няроўнасці сукупнасці. 

	Адзначым на гэтай жа восі мноства рашэнняў другой няроўнасці сукупнасці.  Знойдзем аб'яднанне мностваў рашэнняў.  *Адказ*: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Устанавіце адпаведнасць паміж няроўнасцю і схемай графіка функцыі, якая адпавядае рашэнню няроўнасці (рыс. 91):

а) $(x-1)(x+4)(x-2) \leqslant 0$; б) $(x-1)^2(x+4)(x-2) \geqslant 0$;

в) $(x-1)(x+4)^3(x-2)^4 \leqslant 0$.



Рыс. 91

3.163. Рашыце няроўнасць, прымяніўшы метад інтэрвалаў:

а) $(x+2)(x-7)(x-10) > 0$;

б) $(3x+7)(x+6)(x-5) < 0$;

в) $x(2x-15)(x-8) \geqslant 0$;

г) $3x(4x+7)(3x-2) \leqslant 0$.

3.164. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $\dfrac{x-4}{x-1} > 0$; б) $\dfrac{x+6}{x-2} < 0$; в) $\dfrac{x+10}{x+12} \geqslant 0$;

г) $\dfrac{3x-9}{x+5} \leqslant 0$; д) $\dfrac{7x-2}{x-3} > 0$; е) $\dfrac{6x+12}{x} \leqslant 0$.

3.165. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

а) $(3-x)(x-1)(x+6) \leqslant 0$;

б) $(x-10)(2x+9)(7-2x) \geqslant 0$;

в) $(7-x)(5-x)(3x-10) < 0$;

г) $-(5-2x)(4-x)(5x-1) > 0$.

3.166. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы алгарытм рашэння няроўнасці метадам інтэрвалаў:

а) $\frac{(x+1)(x-6)}{x-2} < 0$; б) $\frac{3x+8}{(x-3)(x+5)} > 0$;

в) $\frac{x(7x-3)}{x+6} \leqslant 0$; г) $\frac{5x(x-4)}{(2x+3)(x-7)} \geqslant 0$;

д) $\frac{(5-x)(x+4)}{x-3} > 0$; е) $\frac{(x-7)(5x+2)}{3-2x} < 0$;

ж) $\frac{x(3-x)}{(1-8x)(x+12)} \geqslant 0$; з) $\frac{(8-3x)(5-x)}{(x-4)(9-2x)} \leqslant 0$.

3.167. Рашыце няроўнасць двума спосабамі:

а) $(x-3)(x-5) < 0$; б) $(x+7)(x-1) > 0$;

в) $(x+9)(x+3) \leqslant 0$; г) $(2x-8)(x+6) \geqslant 0$;

д) $(3x-1)(x-7) < 0$; е) $x(5x+2) \geqslant 0$.

3.168. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases}(x-1)(x+2)(x-3) > 0,\\ 2x-5 \leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x-5}{x} \leqslant 0,\\ (x-2)(x-3) > 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{x+5}{x-3} < 0,\\ \frac{x+9}{x-8} > 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x(x+3)(x-5) > 0,\\ (x+2)(x-6) \leqslant 0.\end{cases}$

3.169. Прымяніце метад інтэрвалаў і рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l}x(x+4)(2x-1) \geqslant 0,\\ \frac{x+7}{x-2} \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.170. Рашыце няроўнасць:

а) $(x-3)^2(x+2) \leqslant 0$; б) $x^2(x-7) < 0$;

в) $(x-10)(x-5)^2(x+3) \geqslant 0$; г) $(2x+9)(2-x)(x-1)^2 \geqslant 0$.

3.171. Прааналізуйце ўмову і знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі

$$f(x) = (x+9)^4(x-2)^2x^3(x+3)$$

ляжыць ніжэй за вось абсцыс.

3.172. Рашыце няроўнасць, выкарыстаўшы алгарытм рашэння няроўнасцей метадам інтэрвалаў:

а) $\frac{(x-5)^2}{x-3} \leqslant 0$; б) $\frac{x-7}{(x-12)^2} \geqslant 0$;

в) $\frac{6-x}{(x-5)(x-2)^4} < 0;$ г) $\frac{(x+5)^6}{(1-4x)(x+4)} \geqslant 0.$

3.173. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases}(x+1)(x-2)(x-4)^2 \geqslant 0,\\ x^2-16>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{(x-2)^2(x+3)}{x-4} \geqslant 0,\\ x(x-2)(x+5) \geqslant 0.\end{cases}$

3.174. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнне выразу:

а) $(x^2+4x+4)(x-3)$ дадатнае;

б) $(x^2-6x+9)(x^2-25)$ адмоўнае;

в) $(25x^2-10x+1)(1-x^2)$ недадатнае;

г) $(4x^2+12x+9)(x^2+5)$ неадмоўнае.

3.175. Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

а) $\left[\begin{array}{l}(x^2-8x+16)(x-5) \geqslant 0,\\ 5x-20<0;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}(9x^2-6x+1)(x^2-4)<0,\\ \frac{x-7}{x} \leqslant 0.\end{array}\right.$

3.176. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{(x^2-10x+25)x}{x^2-49} \geqslant 0;$ б) $\frac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2} > 0;$

в) $\frac{(3-x)(9x^2+1)}{x^2-16} \leqslant 0;$ г) $\frac{9x^2-6x+1}{1-4x^2} \leqslant 0.$

Праверце, ці з'яўляецца лік 5 рашэннем якой-небудзь з гэтых няроўнасцей.

3.177. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{(x+2)(x-7)}{4x+8} \leqslant 0;$ б) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} \geqslant 0;$

в) $\frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15} \leqslant 0;$ г) $\frac{x^2-4x-21}{x^2-9} \geqslant 0.$

3.178. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y=\sqrt{(x^2-4x+3)(x-2)};$

б) $y=\sqrt{(x^2+6x+5)(1-x^2)};$

в) $y=\sqrt{\dfrac{2-x-x^2}{2x+3}}$; г) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-11x+28}}$.

3.179. Рашыце няроўнасць:

а) $\dfrac{(x-3)^3(x+5)^4}{x^2}<0$; б) $\dfrac{7(x-4)(x+3)^2}{\left(x^2+9\right)(x+1)^2(x-5)}\leqslant 0$;

в) $-\dfrac{\left(x^3-8\right)(x-4)^2(x-6)}{x^2\left(x^2-9\right)\left(x^4+25\right)}<0$; г) $\dfrac{(x+2)(x+3)^5(x-2)^2}{(4-x)(2x+7)}\leqslant 0$.

Якая з гэтых няроўнасцей змяшчае сярод рашэнняў лікі –6; 2; 5?

3.180. Складзіце план рашэння і знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці:

а) $\dfrac{1}{x+5}>\dfrac{x}{x+5}$; б) $\dfrac{x}{x^2-1}\geqslant\dfrac{5}{1-x^2}$.

3.181. Рашыце няроўнасць:

а) $\dfrac{x}{x-1}\geqslant 3$; б) $\dfrac{3-x}{2x+5}<1$; в) $\dfrac{4x-3}{x}\leqslant 2$;

г) $\dfrac{1}{x-3}<\dfrac{2}{x+2}$; д) $\dfrac{5}{x-2}\geqslant\dfrac{1}{1-x}$; е) $\dfrac{8-x}{x-10}\leqslant\dfrac{2}{2-x}$;

ж) $\dfrac{3}{x-1}>x+1$; з) $x+4\leqslant\dfrac{9}{x+4}$.

3.182. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх мае сэнс выраз:

а) $\sqrt{2-\dfrac{x^2+11}{x+5}}$; б) $\sqrt{\dfrac{4}{(x-1)^2}-1}$.

3.183. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases}\dfrac{6}{x}-\dfrac{6}{x+1}\geqslant 1,\\ x^2\leqslant 9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-3x+2>0,\\ \dfrac{x^2-5x}{x+3}\geqslant 2.\end{cases}$

3.184. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

а) сума дробаў $\dfrac{4}{x+1}$ і $\dfrac{2}{1-x}$ меншая за 1;

б) рознасць дробаў $\dfrac{x-2}{x-1}$ і $\dfrac{x-1}{x}$ большая за 2;

в) рознасць дробаў $\dfrac{9}{3-x}$ і $\dfrac{7}{x^2-5x+6}$ не меншая за 1.

3.185. Турысты на маторнай лодцы плануюць праплысці 15 км па цячэнні ракі і такую ж адлегласць супраць цячэння, затраціўшы на ўвесь шлях не больш за 4 г. Якой можа быць уласная скорасць лодкі, калі скорасць цячэння ракі складае 2 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$?

3.186. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x)=\sqrt{3x^2-2x-5}+\dfrac{5}{\sqrt{(x-2)(x+3)x}}$;

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x+4}}-\sqrt{2x^2-x+3}$.

3.187*. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх:

а) графік функцыі $y=\dfrac{2x+3}{x^2+x-12}$ ляжыць ніжэй прамой $y=\dfrac{1}{2}$;

б) графік функцыі $y=\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7}$ ляжыць вышэй графіка функцыі $y=\dfrac{1}{x-3}$;

в) прамая $y=x-1$ ляжыць не ніжэй графіка функцыі $y=\dfrac{x^2-5x-1}{x-1}$.

3.188*. Знайдзіце суму цэлых адмоўных лікаў, якія не з'яўляюцца рашэннем няроўнасці $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$.

3.189*. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $\dfrac{(x^2+2x+1)(x^2-6x+9)}{x-3}\geqslant 0$.

3.190*. Знайдзіце колькасць цэлых адмоўных рашэнняў няроўнасці $\dfrac{3x^2-11x+22}{x^2-4x-5}\geqslant 3$.

3.191*. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2-4x-5}\leqslant 0$.

3.192*. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці

$$\frac{(x^2-3x+7)(x^2+4x)-4(3x-x^2-7)}{x^2-7x+6}\leqslant 0.$$

3.193. Рашыце няроўнасць, прымяніўшы метад інтэрвалаў:

а) $(x+5)(x+1)(x-4)<0$;

б) $x(2x-11)(3x+6)(x-5)\geqslant 0$;

в) $(1-x)(x+8)(4x-3)\leqslant 0$;

г) $-(3-2x)(8-x)(9-4x)>0$.

3.194. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў, выкарыстаўшы алгарытм:

а) $\dfrac{x-7}{x-3}<0$; б) $\dfrac{x-9}{x+5}>0$;

в) $\dfrac{2x+17}{x+3}\leqslant 0$; г) $\dfrac{x}{5x+2}\geqslant 0$.

3.195. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх:

а) $\dfrac{(x+2)(x-5)}{x-3}>0$; б) $\dfrac{2x+15}{(x-1)(x+9)}<0$;

в) $\dfrac{x(9x-1)}{x-5}\geqslant 0$; г) $\dfrac{(8-x)(x+6)}{x-11}\leqslant 0$;

д) $\dfrac{x(2-x)}{(1-3x)(x+5)}>0$; е) $\dfrac{(1-6x)(3-x)}{(7-2x)(x+7)}\leqslant 0$.

3.196. Рашыце няроўнасць двума спосабамі:

а) $(x-2)(x-8)>0$; б) $(x+3)(x-9)\leqslant 0$;

в) $(3x-6)(x+5)<0$; г) $x(2x-7)\geqslant 0$.

3.197. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}\dfrac{x-8}{3-x}\leqslant 0,\\(x-1)(x-2)(x+7)<0.\end{cases}$

3.198. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{aligned}&(x-3)(x+4)>0,\\&\dfrac{x+4}{x}\leqslant 0.\end{aligned}\right.$

3.199. Рашыце няроўнасць:

а) $(x-5)^2(x+3)\leqslant 0$; б) $x^2(x-9)<0$;

в) $(x-9)(x-7)^2(x+6)\geqslant 0$; г) $(3x+7)(8-x)(x-2)^2\geqslant 0$.

3.200. Рашыце няроўнасць:

а) $\dfrac{(x-6)^2}{x-4}\leqslant 0$; б) $\dfrac{x-8}{(x-10)^2}\geqslant 0$;

в) $\dfrac{(x-8)(9-x)}{(x-5)^2}<0$; г) $\dfrac{(x+6)^2}{(7-3x)(x+2)}\geqslant 0$.

Ці праўда, што лік 10 з'яўляецца рашэннем кожнай няроўнасці; не з'яўляецца рашэннем ніводнай з няроўнасцей?

3.201. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-8)^2}\geqslant 0,\\x^2-3x\geqslant 0.\end{cases}$

3.202. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнне выразу:

а) $\left(x^2-10x+25\right)\left(x+7\right)$ адмоўнае;

б) $\left(4x^2+4x+1\right)\left(36-x^2\right)$ недадатнае.

Выберыце найбольшае цэлае адмоўнае рашэнне кожнай з гэтых няроўнасцей.

3.203. Рашыце сукупнасць няроўнасцей

$$\left[\begin{array}{l}\left(x^2+12x+36\right)\left(x-1\right)\geqslant 0,\\ \dfrac{x+6}{x}<0.\end{array}\right.$$

3.204. Рашыце няроўнасць:

а) $\dfrac{\left(x^2+4x+4\right)x}{x^2-25}\geqslant 0$; б) $\dfrac{\left(9-x^2\right)\left(x^2+4\right)}{x^2-10x+25}>0$.

3.205. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y=\sqrt{\left(x^2-7x+10\right)\left(x+3\right)}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-49}{6-x-x^2}}$.

3.206. Рашыце няроўнасць:

а) $\dfrac{(x-7)^3}{x^2(x+3)^4}<0$; б) $\dfrac{-8(x-2)\left(x^2+1\right)(x+4)^2}{(x+2)^2(x-9)}\geqslant 0$.

Ці з'яўляюцца лікі –3; –4 рашэннем якой-небудзь з гэтых няроўнасцей?

3.207. Рашыце няроўнасць:

а) $\dfrac{1-x}{x}<3$; б) $\dfrac{1}{x-7}>\dfrac{x+4}{7-x}$;

в) $\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{1}{2-x}$; г) $\dfrac{5}{x+2}\geqslant x-2$.

3.208. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}\dfrac{8-x}{x-10}\leqslant\dfrac{2}{2-x},\\ x^2-25\geqslant 0.\end{cases}$

3.209. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх рознасць дробаў $\dfrac{6}{x}$ і $\dfrac{6}{x+1}$ не перавышае 1.

3.210. Турысты на катары плануюць праплысці 40 км па цячэнні ракі і такую ж адлегласць супраць цячэння, затраціўшы на ўвесь шлях не больш за 3 г. Якой можа быць уласная скорасць катара, калі скорасць цячэння ракі складае 3 $\dfrac{\text{км}}{\text{г}}$?

3.211. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-8}}-\sqrt{x^2+6x+5}.$$

3.212*. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y=\frac{x^2-4x-1}{x-2}$ ляжыць не вышэй прамой $y=x+2$.

3.213*. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці

$$1+\frac{2}{x+4}\leqslant\frac{7}{6-x}.$$

3.214*. Знайдзіце суму натуральных рашэнняў няроўнасці

$$\frac{\left(x^2-10x+21\right)\left(x^2-6x-7\right)}{\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2-4\right)}\leqslant 0.$$

* * *

3.215. Ці праўда, што:

а) $-73\notin\boldsymbol{Z}$;
б) $\sqrt{5}\notin\boldsymbol{Q}$;
в) $-\sqrt{2}\notin\boldsymbol{N}$;
г) $0\notin\boldsymbol{Z}$;
д) $0,(3)\notin\boldsymbol{I}$;
е) $2,6\notin\boldsymbol{R}$?

3.216. Вылічыце: $\sqrt{13-\sqrt{69}}\cdot\sqrt{\sqrt{69}+13}$.

3.217. Рашыце ўраўненне $(2x-3)(2x+3)-(x-2)^2-1=5x$.

3.218. Запішыце ў выглядзе дробу выраз

$$\frac{1}{2x-y}-\frac{1}{2x+y}+\frac{4x}{4x^2-y^2}.$$

3.219. Рашыце ўраўненне $\frac{x^2+3x}{x-2}=\frac{x-12}{2-x}$.

3.220. Пабудуйце графік функцыі $y=-x^2+4x-5$. Знайдзіце мноства значэнняў гэтай функцыі.

3.221. Прымяніце графічны метад і знайдзіце колькасць рашэнняў сістэмы ўраўненняў $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ y=4x.\end{cases}$

3.222. Функцыя $y=f(x)$ цотная. Вядома, што $f(x)=x^3$ пры $x\leqslant 0$. Знайдзіце $f(2)$.

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць азначэнне дробава-рацыянальных ураўненняў;
- ведаць і ўмець прымяняць умову роўнасці рацыянальнага дробу нулю;

- ведаць алгарытм рашэння дробава-рацыянальных ураўненняў;
- умець прымяняць алгарытм рашэння дробава-рацыянальных ураўненняў;
- умець рашаць задачы з дапамогай рацыянальных ураўненняў;
- умець прымяняць для рашэння сістэм рацыянальных ураўненняў спосабы падстаноўкі, складання;
- умець карыстацца графікамі ўраўненняў для рашэння сістэм ураўненняў;
- умець рашаць задачы з дапамогай сістэм рацыянальных ураўненняў;
- ведаць і ўмець прымяняць формулу даўжыні адрэзка, зададзенага каардынатамі яго канцоў;
- ведаць ураўненне акружнасці і ўмець прымяняць яго для рашэння задач;
- ведаць і ўмець прымяняць метад інтэрвалаў для рашэння рацыянальных няроўнасцей;
- умець прымяняць правілы і алгарытмы для рашэння сістэм і сукупнасцей рацыянальных няроўнасцей.

Я правяраю свае веды

1. Выберыце ўраўненне, коранем якога з'яўляецца лік −4:

а) $\frac{x^2+4x+4}{x-6}=0;$ б) $\frac{2x+8}{x-9}=0;$ в) $\frac{(x+12)(x+4)}{x+4}=0;$

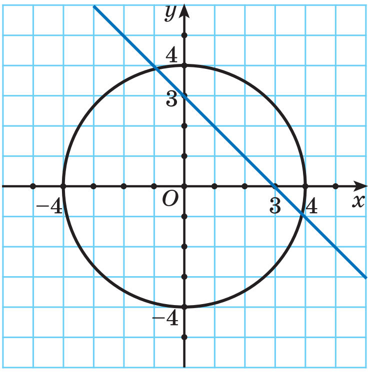
г) $\frac{7x+1}{x+4}=0;$ д) $\frac{4x^2+1}{x-10}=0.$

2. Выберыце сістэму ўраўненняў, графічная ілюстрацыя якой паказана на рысунку 92:

а) $\begin{cases} y = -x + 3, \\ xy = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -x + 3, \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$



Рыс. 92

г) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 16; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x^2 + y^2 = 16. \end{cases}$

3. Рашыце ўраўненне, прымяніўшы ўмову роўнасці дробу нулю:

а) $\frac{x+5}{x-1} = 0;$ б) $\frac{x^2-36}{x-6} = 0;$

в) $\frac{x^2-6x+8}{x-4} = 0;$ г) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0.$

4. Сума двух лікаў роўна 6, а рознасць квадратаў гэтых лікаў роўна 12. Знайдзіце гэтыя лікі.

5. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

а) $(x-3)(2x+5)(x-8) > 0;$ б) $\frac{(x-3)(5-x)}{6x+1} \leqslant 0;$

в) $(x^2-4)(x-3)(x^2+10x+25) < 0;$ г) $\frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-3} \leqslant 0;$

д) $\frac{(x^2-9)(x^2+2x+1)}{25-x^2} \geqslant 0.$

6. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{9}{(x+1)(x+2)};$

б) $\frac{1}{x+3} - \frac{x}{3-x} = \frac{18}{x^2-9};$

в) $\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3};$

г) $\frac{8}{x^2-6x+8} + \frac{1-3x}{2-x} = \frac{4}{x-4}.$

7. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 4x - y = -3, \\ 5x + y = 5. \end{cases}$

8. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 12x + 11} + \frac{6}{\sqrt{(x-1)(x+5)x}};$

б) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-5x^2}{x+6}} - \sqrt{7x^2 - x + 1}.$

9. Складзіце мадэль умовы і рашыце задачу:

а) Дзве вытворчыя лініі, працуючы адначасова, выканалі ўвесь заказ за 5 г. Калі б прадукцыйнасць першай лініі была ў два разы большай, а другой — у два разы меншай, то ўвесь заказ яны выканалі б за 4 г. Знайдзіце, за колькі гадзін выканала б увесь заказ адна першая лінія.

б) Першы турыст пераадольвае адлегласць 20 км на 2,5 г хутчэй, чым другі. Калі б першы турыст паменшыў сваю скорасць на 2 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, а другі павялічыў сваю скорасць у 1,5 раза, то яны затрацілі б на той жа шлях аднолькавы час. Знайдзіце скорасць другога турыста.

10. Знайдзіце, пры якім значэнні ліку a сістэма ўраўненняў $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ x - y = a \end{cases}$ мае адзінае рашэнне.

Практычная матэматыка

1. Пешаход ідзе са скорасцю 5 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, веласіпедыст едзе са скорасцю 20 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, легкавы аўтамабіль па кальцавой дарозе рухаецца са скорасцю 100 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, пасажырскі самалёт ляціць са скорасцю 500 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, скорасць міжнароднай касмічнай станцыі на арбіце — 27 700 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$. Знайдзіце, за які час кожны з гэтых аб’ектаў пераадолее адлегласць, роўную 1 км.

2. На аплату разгрузкі набытага вытворчага абсталявання вылучана некаторая сума грошай. Працу пагадзілася выканаць брыгада грузчыкаў. Паколькі разгрузкай займалася не ўся брыгада (3 чалавекі захварэлі), то кожны грузчык атрымаў на 1,5 тыс. р. больш. Знайдзіце вылучаную брыгадзе суму грошай (тысяч рублёў), ведаючы, што 5 %-ы збор за банкаўскі перавод каштаваў працадаўцу дадаткова суму, якая знаходзіцца ў межах ад 1,2 да 1,6 тыс. р.

3. Працоўная змена супрацоўнікаў «Зелянбуда» пачынаецца ў 8 гадзін раніцы. Два супрацоўнікі з пачатку змены выконвалі працу па азеляненні праспекта. Пасля 45 мін сумеснай працы першы супрацоўнік быў пераведзены на іншую працу, і другі супрацоўнік скончыў астатнюю частку працы за 2 г 15 мін. Калі б кожны супрацоўнік працаваў асобна, то другому для выканання ўсёй працы спатрэбілася б на 1 г больш, чым першаму. Высветліце, ці змог бы першы супрацоўнік выканаць усю працу да паўдня, калі б з пачатку змены працаваў адзін.

Займальная матэматыка

Даследуем, абагульняем, робім вывады

Даследчае заданне. Ці можна знайсці мноства значэнняў функцыі, калі: а) пабудаваць яе графік; б) рашыць ураўненне, якое задае функцыю адносна аргумента? Паспрабуйце прымяніць дадзеныя прыёмы для знаходжання мноства значэнняў функцыі $y = \frac{1}{|x|} - 3$. Абагульніце вынік.

Рыхтуемся да алімпіяд

1. Легендарная школа Піфагора сярод іншых задач займалася знаходжаннем цэлалікавых прамавугольных трохвугольнікаў. У прыватнасці, піфагарэйцы знайшлі бясконцыя серыі (не ўсе) троек натуральных лікаў (a; b; c), для якіх $a^2 + b^2 = c^2$. Ці існуе цэлалікавы прамавугольны трохвугольнік, адзін з катэтаў якога роўны 2019?

2. Да басейна падведзены чатыры трубы, прычым прапускная здольнасць чацвёртай трубы ў два разы вышэйшая за прапускную здольнасць першай трубы, а прапускная здольнасць трэцяй трубы ў два разы вышэйшая за прапускную здольнасць другой трубы. У першы дзень басейн запаўняўся дзвюма трубамі — першай і трэцяй — 40 мін, а ў другі дзень — другой і чацвёртай — 50 мін. Вызначце максімальны і мінімальны час запаўнення басейна дзвюма трубамі.

3. На рацэ размешчаны населеныя пункты A і B. Адначасова з гэтых пунктаў насустрач адзін аднаму адпраўляюцца два аднолькавыя катары, абменьваюцца поштай і вяртаюцца назад. Катар, які выйшаў з пункта A, вяртаецца назад праз 1 г пасля выхаду. Калі б гэты катар адправіўся на 15 мін раней катара, які выйшаў з пункта B, то сустрэча адбылася б на роўнай адлегласці ад абодвух пунктаў. Праз які час вяртаецца назад катар, які выйшаў з пункта B?

Раздзел 4

ПРАГРЭСІІ

§ 14. Лікавая паслядоўнасць

4.1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$; б) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^4+1}$.

4.2. Для функцыі $f(x) = x^3 - 3x$ вылічыце $f(2)$; $f(0{,}5)$; $f(0)$; $f(100)$.

4.3. Задайце аналітычна функцыю: кожнаму рэчаіснаму ліку ставіцца ў адпаведнасць сума гэтага ліку і яго квадрата.

У жыцці мы часта сустракаемся з функцыямі, абсягам вызначэння якіх з'яўляецца мноства натуральных лікаў. Напрыклад, кошт праезду ў прыгарадным транспарце залежыць ад далёкасці паездкі і задаецца функцыяй $s(n)$, дзе аргументам функцыі з'яўляецца натуральны лік n. Так, калі прыгарадная тэрыторыя падзелена на чатыры зоны, то кожнай зоне адпавядае пэўны кошт. Звычайна ён паказваецца ў табліцы.

Нумар зоны	1	2	3	4
Кошт праезду, р.	0,8	1,2	2	2,5

Функцыя кошту праезду зададзена таблічна, абсягам вызначэння функцыі з'яўляецца мноства натуральных лікаў $D = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. У такім выпадку гавораць, што разглядаецца **функцыя натуральнага аргумента**, або **лікавая паслядоўнасць.**

Прыкладам лікавай паслядоўнасці з'яўляецца паслядоўнасць дадатных цотных лікаў: 2; 4; 6; 8; ... . Лік 2 — першы член паслядоўнасці, лік 4 — другі і г. д. Зразумела, што на 5-м месцы будзе лік 10 (пяты член паслядоўнасці), а на 100-м — лік 200 (соты член паслядоўнасці).

Яшчэ адзін прыклад — паслядоўнасць лікаў, адваротных натуральным лікам: $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... . На n-м месцы запішацца лік $\frac{1}{n}$, які з'яўляецца n-м членам дадзенай паслядоўнасці.

Паслядоўнасці могуць быць **канечнымі** і **бясконцымі**. Напрыклад, паслядоўнасць двухзначных лікаў 10; 11; ...; 99 з'яўляецца канечнай, паколькі змяшчае канечную колькасць членаў. А паслядоўнасць няцотных натуральных лікаў — бясконцая.

Азначэнне. Лікавай паслядоўнасцю называецца функцыя, вызначаная на мностве N натуральных лікаў, г. зн. залежнасць, пры якой кожнаму натуральнаму ліку ставіцца ў адпаведнасць адзіны рэчаісны лік.

Лікі, якія ўтвараюць паслядоўнасць (значэнні функцыі), называюцца членамі паслядоўнасці. Яны запісваюцца літарамі з індэксамі, якія абазначаюць нумар члена паслядоўнасці: f_1 — першы член паслядоўнасці, f_2 — другі член паслядоўнасці, ..., f_n — n-ы член паслядоўнасці. Паслядоўнасць з n-м членам f_n абазначаецца (f_n). Для абазначэння паслядоўнасці можна выкарыстоўваць любую літару лацінскага алфавіта. Напрыклад, паслядоўнасць (a_n) мае выгляд a_1; a_2; ...; a_n; ... .

Калі (c_n) — паслядоўнасць няцотных натуральных лікаў 1; 3; 5; 7; ..., то $c_1 = 1$; $c_2 = 3$; $c_3 = 5$; ...; $c_6 = 11$; $c_{100} = 199$; ... .

Паслядоўнасці, гэтаксама як і функцыі, могуць быць зададзены рознымі спосабамі.

Аналітычны спосаб — гэта заданне паслядоўнасці з дапамогай формулы яе n-га члена. Напрыклад, паслядоўнасць цотных натуральных лікаў можна задаць з дапамогай формулы $a_n = 2n$, а паслядоўнасць лікаў, адваротных натуральным лікам, задаецца формулай $b_n = \frac{1}{n}$.

З дапамогай формулы n-га члена можна знайсці любы член паслядоўнасці.

Напрыклад, няхай паслядоўнасць (a_n) зададзена формулай $a_n = (-1)^n \cdot 10$, тады

$$a_1 = (-1)^1 \cdot 10 = -10;$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot 10 = 10; \ ...;$$

$$a_{100} = (-1)^{100} \cdot 10 = 10.$$

Каб знайсці некаторы член паслядоўнасці з дапамогай формулы n-га члена, трэба замест n падставіць у формулу натуральны лік, роўны нумару шуканага члена (індэксу ў яго абазначэнні).

Для задання паслядоўнасцей часта карыстаюцца **рэкурэнтным спосабам** (ад лац. *recurrentis — які вяртаецца*). Ён заключаецца ў вылічэнні наступных членаў паслядоўнасці па папярэдніх.

Напрыклад, умовы $a_1 = 3$ і $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ задаюць бясконцую паслядоўнасць: $a_2 = 2 \cdot a_1$, г. зн. $a_2 = 2 \cdot 3 = 6$; $a_3 = 3 \cdot 6 = 18$; $a_4 = 4 \cdot 18 = 72$; ... .

Прыклад. Знайдзіце некалькі членаў паслядоўнасці (b_n), дзе $b_1 = 1$; $b_2 = 1$ і $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$.

Рашэнне. $b_3 = b_1 + b_2 = 1 + 1 = 2$; $b_4 = b_2 + b_3 = 1 + 2 = 3$; $b_5 = 2 + 3 = 5$; ... .

Запішам некалькі членаў гэтай паслядоўнасці ў рад: $1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ \ldots$.

Атрыманую паслядоўнасць лікаў называюць **паслядоўнасцю Фібаначы** ў гонар італьянскага матэматыка Леанарда Фібаначы (1180—1240).

Формула n-га члена паслядоўнасці

1. Паслядоўнасць (x_n) зададзена формулай n-га члена $x_n = 2n^2 - 1$. Знайдзіце: x_1; x_2; x_6; x_k; x_{k+1}; x_{2k+1}.	$x_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$; $x_2 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$; $x_6 = 2 \cdot 6^2 - 1 = 71$; $x_k = 2k^2 - 1$; $x_{k+1} = 2(k+1)^2 - 1 = 2k^2 + 4k + 1$; $x_{2k+1} = 2(2k+1)^2 - 1 = 8k^2 + 8k + 1$.
2. Паслядоўнасць зададзена формулай n-га члена $a_n = 3 - 2n$. Ці з'яўляецца членам гэтай паслядоўнасці лік: а) -2; б) -7?	Для таго каб вызначыць, ці з'яўляецца лік членам паслядоўнасці, трэба вызначыць, ці мае натуральныя карані ўраўненне: а) $-2 = 3 - 2n$, $n = 2{,}5 \notin N$, значыць, лік -2 не з'яўляецца членам паслядоўнасці; б) $-7 = 3 - 2n$, $n = 5 \in N$, значыць, лік -7 з'яўляецца членам паслядоўнасці з нумарам 5.

3*. Для якіх членаў паслядоўнасці (x_n), зададзенай формулай n-га члена $x_n = n^2 + 3n - 4$, выконваецца няроўнасць $x_n \leqslant 0$?	Падставім у няроўнасць $x_n \leqslant 0$ выраз для n-га члена, атрымаем $n^2 + 3n - 4 \leqslant 0$. Рашэнне атрыманай квадратнай няроўнасці ёсць адрэзак [–4; 1], выберам з гэтага адрэзка толькі натуральныя лікі, атрымаем $n = 1$. Значыць, дадзеная няроўнасць выконваецца толькі для першага члена паслядоўнасці.
Рэкурэнтны спосаб задання паслядоўнасці	
4*. Запішыце 5 першых членаў паслядоўнасці (a_n), калі $a_1 = -8$, $a_{n+1} = a_n + 5$.	$a_1 = -8$; $a_2 = a_1 + 5 = -8 + 5 = -3$; $a_3 = -3 + 5 = 2$; $a_4 = 2 + 5 = 7$; $a_5 = 7 + 5 = 12$.
5*. Запішыце некалькі першых членаў паслядоўнасці (b_n), калі $b_1 = 8$, $b_{n+1} = -b_n$. Задайце гэту паслядоўнасць формулай n-га члена.	$b_2 = -b_1 = -8$; $b_3 = -b_2 = 8$; ... . Атрымаем наступную паслядоўнасць: 8; –8; 8; –8; ... . На няцотных месцах гэтай паслядоўнасці стаяць члены, роўныя ліку 8, а на цотных — ліку –8, значыць, формула n-га члена мае выгляд $b_n = (-1)^{n+1} \cdot 8$.

1. Які член паслядоўнасці (a_n) ідзе за членам:
а) a_4; б) a_k; в) a_{k+3}; г) a_{2k}; д) a_{2k+1}?

2. Які член паслядоўнасці (a_n) папярэднічае члену:
а) a_6; б) a_m; в) a_{m-2}; г) a_{2m}; д) a_{2m+1}?

4.4. Назавіце 7 першых членаў паслядоўнасці простых лікаў.

4.5. Запішыце 5 першых членаў паслядоўнасці:

а) натуральных лікаў, кратных ліку 5;

б) двухзначных лікаў, кратных 10;

в) кубоў натуральных лікаў.

Канечнымі ці бясконцымі з'яўляюцца гэтыя паслядоўнасці?

4.6. Запішыце 5 першых членаў паслядоўнасці квадратаў натуральных лікаў. Назавіце першы, шосты, пятнаццаты, соты і n-ы члены гэтай паслядоўнасці.

4.7. Знайдзіце 3 першыя члены паслядоўнасці (c_n), зададзенай формулай n-га члена:

а) $c_n = n + 5$; б) $c_n = 2 - 3n$;

в) $c_n = n^2 - 1$; г) $c_n = -3^n$.

4.8. Параўнайце другі, пяты і дваццаты члены паслядоўнасці (y_n), зададзенай формулай n-га члена:

а) $y_n = 5n - 1$; б) $y_n = \frac{n}{100}$;

в) $y_n = n^2 + 7$; г) $y_n = \left(-1\right)^{n+1} \cdot n$.

4.9. Паслядоўнасць (a_n) зададзена формулай n-га члена $a_n = \frac{n}{n+1}$. Запішыце для гэтай паслядоўнасці a_1; a_4; a_{11}; a_k; a_{k+3}.

4.10. Знайдзіце заканамернасць і прадоўжыце паслядоўнасць лікаў:

а) 2; 5; 8; 11; ...; б) 1; 8; 27; 64; ...;

в) –3; 3; –3; 3; ...; г) $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{14}$; ... .

Запішыце формулу n-га члена паслядоўнасці, першымі членамі якой з'яўляюцца дадзеныя лікі. Для кожнай з паслядоўнасцей знайдзіце яе соты член.

4.11. Кошт паездкі ў таксі ўключае аплату выкліку (5 р.) і аплату кожнага кіламетра шляху (80 к.). Запішыце формулу, па якой можна вылічыць кошт паездкі працягласцю n км. Колькі будзе каштаваць паездка даўжынёй 5 км; 7 км? Колькі кіламетраў зможа праехаць на таксі пасажыр, які разлічвае патраціць на паездку не больш за 10 р.?

4.12. Паслядоўнасці (a_n), (b_n) і (c_n) зададзены формуламі n-га члена $a_n = 20n^3 - 4$; $b_n = -3^{n+1}$; $c_n = 2n^4 + 1$. Знайдзіце значэнне выразу $a_2 + b_3 - c_4$.

4.13. Для паслядоўнасці (b_n), зададзенай формулай n-га члена $b_n = -3 \cdot \left(-2\right)^n$, сярод наступных няроўнасцей выберыце ўсе правільныя няроўнасці:

а) $b_2 < 0$; б) $b_3 > b_4$; в) $b_5 > b_7$;

г) $b_4 > b_6$; д) $b_2 < b_3$.

4.14. Паслядоўнасць (b_n) зададзена формулай n-га члена $b_n = 9 - 6n$. Ці з'яўляецца членам гэтай паслядоўнасці лік:

а) 0; б) –51; в) –18; г) 12?

4.15. Паслядоўнасць (a_n) зададзена формулай n-га члена $a_n = \frac{1}{3}(n-6)^2$. Знайдзіце n, калі $a_n = 27$.

4.16. Як можна вызначыць, ці з'яўляецца лік -44 членам паслядоўнасці, зададзенай формулай $a_n = n^2 - 24n - 69$? Вызначце, калі гэта магчыма.

4.17. Паслядоўнасці (a_n), (b_n) і (c_n) зададзены формуламі n-га члена $a_n = 18n - 4$; $b_n = n^2 - 32n + 17$; $c_n = n^3 - 75$. Ці існуе ў кожнай паслядоўнасці член, роўны 50? Калі існуе, знайдзіце яго нумар.

4.18. Паслядоўнасць (b_n) зададзена формулай n-га члена $b_n = 3n - 20$. Вызначце:

а) колькі адмоўных членаў змяшчае дадзеная паслядоўнасць;

б) колькі членаў, меншых за 100, змяшчае дадзеная паслядоўнасць.

4.19*. Паслядоўнасць (k_n) зададзена формулай n-га члена $k_n = n^2 - 8n - 1$. Знайдзіце колькасць членаў дадзенай паслядоўнасці, меншых за 19.

4.20*. Паслядоўнасць (c_n) зададзена формулай n-га члена $c_n = -2n^2 + 32n - 40$. Знайдзіце нумары членаў дадзенай паслядоўнасці, большых за 16.

4.21*. Якім спосабам зададзена паслядоўнасць (p_n)? Запішыце 4 першыя члены паслядоўнасці (p_n):

а) $p_1 = 5$; $p_{n+1} = p_n - 7$;

б) $p_1 = 3$; $p_{n+1} = -5p_n$;

в) $p_1 = -3$; $p_2 = 2$; $p_{n+2} = p_{n+1} - 2p_n$;

г) $p_1 = 1$; $p_2 = 5$; $p_{n+2} = p_n^2 - p_{n+1}$.

4.22. Запішыце 6 першых членаў паслядоўнасці няцотных натуральных лікаў. Назавіце першы, пяты, дваццаты, соты і n-ы члены гэтай паслядоўнасці.

4.23. Знайдзіце 4 першыя члены паслядоўнасці (b_n), зададзенай формулай n-га члена:

а) $b_n = n - 7$; б) $b_n = 6n + 1$;

в) $b_n = 3 - n^2$; г) $b_n = 2^n$.

4.24. Знайдзіце трэці і дзясяты члены паслядоўнасці (x_n), зададзенай формулай n-га члена:

а) $x_n = 6 - 7n$; б) $x_n = \frac{60}{n}$;

в) $x_n = 5n^2$; г) $x_n = (-1)^n \cdot (n + 1)$.

4.25. Паслядоўнасць (c_n) зададзена формулай n-га члена $c_n = 8n - 1$. Запішыце для дадзенай паслядоўнасці c_1; c_5; c_{10}; c_{2m}; c_{m-4}.

4.26. Знайдзіце заканамернасць і прадоўжыце паслядоўнасць лікаў:

а) –3; –5; –7; –9; ...; б) $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1; 3; ... .

Запішыце формулу n-га члена паслядоўнасці, першымі членамі якой з'яўляюцца дадзеныя лікі. Для кожнай з паслядоўнасцей знайдзіце яе сёмы член.

4.27. Біятланіст праходзіць дыстанцыю, роўную 5 км. За кожны недакладны выстрал яму даводзіцца бегчы яшчэ 150 м. Запішыце формулу, па якой можна вылічыць «лішкавы» шлях, які давядзецца прайсці біятланісту, калі ён зробіць n недакладных выстралаў. На колькі метраў больш запланаванай дыстанцыі пройдзе біятланіст, які выканаў 3 недакладныя выстралы; 5 недакладных выстралаў?

4.28. Паслядоўнасці (a_n), (b_n), (c_n) і (k_n) зададзены формуламі n-га члена $a_n = n^3 - 3$; $b_n = -3^n$; $c_n = 2n + 1$; $k_n = \frac{15}{n-1}$. Знайдзіце значэнне выразу $a_2 + b_3 + c_5 - k_6$.

4.29. Паслядоўнасць (d_n) зададзена формулай n-га члена $d_n = 2n^2 - 1$. Ці з'яўляецца членам гэтай паслядоўнасці лік:

а) –1; б) 31; в) 99; г) 199?

4.30. Знайдзіце нумар члена паслядоўнасці (b_n), зададзенай формулай $b_n = 0{,}25(n - 18)^2$, які роўны 144.

4.31. Паслядоўнасць зададзена формулай $a_n = n^2 - 12n + 9$. Знайдзіце, пад якім нумарам знаходзіцца член паслядоўнасці, роўны 22.

4.32. Паслядоўнасць (x_n) зададзена формулай n-га члена $x_n = 100 - 7n$. Вызначце, колькі дадатных членаў змяшчае дадзеная паслядоўнасць.

4.33*. Паслядоўнасць (a_n) зададзена формулай n-га члена $a_n = n^2 - 6n - 3$. Знайдзіце нумары членаў дадзенай паслядоўнасці, якія не перавышаюць 4.

4.34*. Запішыце 4 першыя члены паслядоўнасці (a_n), зададзенай рэкурэнтна:

а) $a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = 5a_n - 1;$ б) $a_1 = 3,\ \ a_{n+1} = a_n^2 + a_n.$

4.35. Пабудуйце графік функцыі $f(x) = -\frac{6}{x}$ і знайдзіце:

а) $f(-3)$ і $f(18)$;

б) значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі роўна 12;

в) значэнні аргумента, пры якіх функцыя прымае адмоўныя значэнні;

г) прамежкі нарастання функцыі.

4.36. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x^2 - 12y = 6, \\ x + 4y = -2. \end{cases}$

4.37. Спрасціце выраз $\left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y}{y + x}.$

4.38. Лічнік звычайнага дробу на 4 меншы за назоўнік. Калі і лічнік, і назоўнік гэтага дробу паменшыць на 3, то атрымаецца дроб, роўны 0,75. Знайдзіце першапачатковы дроб.

§ 15. Арыфметычная прагрэсія

4.39. Рашыце ўраўненне $2{,}24x - 6{,}6 = 38{,}2$.

4.40. Функцыя зададзена формулай $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$. Вылічыце:

а) $f(4)$; б) $f\left(\frac{1}{9}\right)$; в) $f(0{,}01)$.

4.41. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх значэнне функцыі $f(x) = x^2$ роўна:

а) 7; б) 0,04; в) $1\frac{7}{9}$.

4.42. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае лікаў:

а) 12 і 24; б) 5; 7 і 9.

Разгледзім задачу. У горнай мясцовасці тэмпература паветра ўлетку пры пад’ёме на кожныя 100 м у сярэднім паніжаецца на 0,7 °С. Каля падножжа гары тэмпература роўна 26 °С. Знайдзіце тэмпературу паветра на вышыні 100 м; 200 м; 300 м.

Рашэнне. Тэмпература паветра на вышыні 100 м роўна 26 °С – 0,7 °С = 25,3 °С. На вышыні 200 м тэмпература будзе роўна 25,3 °С – 0,7 °С = 24,6 °С, а на вышыні 300 м — 24,6 °С – 0,7 °С = 23,9 °С.

Адказ: 25,3 °С; 24,6 °С; 23,9 °С.

Рашаючы задачу, мы атрымалі паслядоўнасць 26; 25,3; 24,6; ... . Кожны член гэтай паслядоўнасці роўны папярэдняму, складзенаму з лікам –0,7. Многія практычныя задачы прыводзяць да паслядоўнасцей такога выгляду. Яны называюцца ***арыфметычнымі прагрэсіямі*** (ад лац. *progression* — *рух наперад*).

Азначэнне. Арыфметычнай прагрэсіяй называецца лікавая паслядоўнасць, кожны член якой, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму члену, складзенаму з адным і тым жа для дадзенай паслядоўнасці лікам, г. зн.

$$a_{n+1} = a_n + d, \text{ дзе } n \in \boldsymbol{N},\ d \in \boldsymbol{R}.$$

Лік d называецца **рознасцю арыфметычнай прагрэсіі.**

З роўнасці $a_{n+1} = a_n + d$ вынікае, што $d = a_{n+1} - a_n$.

Каб задаць арыфметычную прагрэсію (a_n), дастаткова задаць яе першы член a_1 і рознасць d.

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$$

Напрыклад, калі $a_1 = 3$, $d = 4$, то атрымаецца арыфметычная прагрэсія 3; 7; 11; 15; ... .

Калі $a_1 = 2$, $d = -3$, то арыфметычная прагрэсія мае выгляд 2; –1; –4; –7; –10; ... .

Калі $a_1 = -7$, $d = 0$, то ўсе члены арыфметычнай прагрэсіі роўныя адзін аднаму: –7; –7; –7; –7; ... .

Каб вылічыць любы член арыфметычнай прагрэсіі, не вылічваючы ўсе папярэднія члены, карыстаюцца формулай n-га члена арыфметычнай прагрэсіі

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d}.$$

Выведзем гэту формулу. Калі (a_n) — арыфметычная прагрэсія з рознасцю d, то, выкарыстаўшы азначэнне, атрымаем правільныя роўнасці:

$$a_2 = a_1 + d;\quad a_3 = a_2 + d;\quad a_4 = a_3 + d;\ \ldots;$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + d;\quad a_n = a_{n-1} + d.$$

Складзём гэтыя роўнасці:

$$\begin{array}{ll} & a_2 = a_1 + d \\ & a_3 = a_2 + d \\ & a_4 = a_3 + d \\ + & \ldots \\ & a_{n-1} = a_{n-2} + d \\ & a_n = a_{n-1} + d \\ \hline \end{array}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n =$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1 \text{ раз}}.$$

Пасля спрашчэння атрымаем:

$$a_n = a_1 + \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1 \text{ раз}}.$$

Паколькі колькасць складаемых d роўна $n - 1$, то роўнасць прыме выгляд

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Атрымалі формулу n-га члена арыфметычнай прагрэсіі (a_n).

Формула n-га члена арыфметычнай прагрэсіі (a_n) дазваляе вылічыць любы член прагрэсіі, ведаючы яе першы член a_1, нумар члена n і рознасць прагрэсіі d.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d}$$

Прыклад 1. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія, $a_1 = 2$, $d = 2{,}5$. Знайдзіце 100-ы член прагрэсіі.

Рашэнне. Па формуле n-га члена атрымаем:

$a_{100} = a_1 + (100 - 1)d = 2 + 99 \cdot 2{,}5 = 249{,}5.$

Адказ: 249,5.

Прыклад 2. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія, $a_1 = 3$, $d = 2{,}5$. Ці з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі лік: а) 168; б) 201?

Рашэнне. а) Па ўмове $a_n = 168$, $a_1 = 3$, $d = 2{,}5$. Падставім гэтыя значэнні ў формулу n-га члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ і атрымаем ураўненне $168 = 3 + (n - 1) \cdot 2{,}5$. Рашыўшы яго, атрымаем, што $n = 67$ — корань ураўнення. Паколькі 67 — натуральны лік, то лік 168 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі з нумарам 67.

б) Падставім значэнні $a_n = 201$, $a_1 = 3$, $d = 2{,}5$ у формулу n-га члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ і атрымаем ураўненне $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2{,}5$. Рэшым яго: $201 = 3 + (n - 1) \cdot 2{,}5$; $198 = 2{,}5(n - 1)$; $79{,}2 = n - 1$; $n = 80{,}2$. Паколькі корань ураўнення 80,2 — ненатуральны лік, то лік 201 не з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі.

Адказ: а) лік 168 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі; б) лік 201 не з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі.

Характарыстычная ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі

У арыфметычнай прагрэсіі кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага (суседніх з ім) членаў, г. зн. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ пры $n \geqslant 2$.

$$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

пры $n \geqslant 2$

Доказ. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) для члена a_n запішам па формуле n-га члена папярэдні і наступны члены, г. зн. a_{n-1} і a_{n+1}:

$$a_{n-1} = a_1 + d(n - 2), \quad a_{n+1} = a_1 + dn.$$

Знойдзем іх сярэдняе арыфметычнае:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + d(n-2) + a_1 + dn}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n-1)}{2} =$$
$$= a_1 + d(n - 1) = a_n.$$

Справядлівае і адваротнае сцверджанне:

калі ў паслядоўнасці кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага (суседніх з ім) членаў, то паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй.

Доказ. Няхай у некаторай лікавай паслядоўнасці (a_n) кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага членаў, г. зн. $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$. Тады $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, значыць, рознасць кожнага яе члена з папярэднім членам ёсць адзін і той жа лік. Абазначым яго d, атрымаем $a_{n+1} - a_n = d$ пры любым натуральным n, значыць, $a_{n+1} = a_n + d$. Такім чынам, па азначэнні паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія.

Абодва сцверджанні можна аб'яднаць у адно, якое называецца **характарыстычнай уласцівасцю арыфметычнай прагрэсіі:**

лікавая паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй тады і толькі тады, калі кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага членаў: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

Прыклад 3. Праверце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць, зададзеная формулай

$$a_n = 2n + 7.$$

Рашэнне. Запішам для $a_n = 2n + 7$ папярэдні і наступны члены паслядоўнасці:

$$a_{n-1} = 2(n-1) + 7 = 2n + 5; \quad a_{n+1} = 2(n+1) + 7 = 2n + 9.$$

Знойдзем сярэдняе арыфметычнае гэтых членаў:

$$\frac{(2n+5)+(2n+9)}{2} = \frac{4n+14}{2} = 2n + 7 = a_n.$$

Па характарыстычнай уласцівасці арыфметычнай прагрэсіі паслядоўнасць $a_n = 2n + 7$ з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй.

Азначэнне арыфметычнай прагрэсіі	
1. Паслядоўнасць 2; 12; 22; ... з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй. Прадоўжыце паслядоўнасць.	Паколькі паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, то знойдзем яе рознасць $d = 12 - 2 = 10$. Тады кожны наступны член паслядоўнасці роўны папярэдняму, складзенаму з лікам 10: 2; 12; 22; 32; 42; ... .

2. Вядомы члены арыфметычнай прагрэсіі: $a_6 = -2$; $a_7 = 3$. Знайдзіце рознасць гэтай прагрэсіі.	Знойдзем рознасць: $d = a_{n+1} - a_n$; $d = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$.
Формула *n*-га члена арыфметычнай прагрэсіі	
3. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія. Знайдзіце дваццаты член прагрэсіі, калі $a_1 = 3$, $d = 1{,}6$.	Па формуле n-га члена арыфметычнай прагрэсіі $a_n = a_1 + (n - 1)d$ атрымаем: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 1{,}6 = 33{,}4$.
4. Запішыце формулу n-га члена для арыфметычнай прагрэсіі $-15{,}5;\ -14{,}9;\ -14{,}3;\ \ldots$ і знайдзіце яе дваццаты член.	Па ўмове $a_1 = -15{,}5$; $a_2 = -14{,}9$, тады $d = a_2 - a_1 = -14{,}9 - (-15{,}5) = 0{,}6$. Запішам формулу n-га члена дадзенай арыфметычнай прагрэсіі, падставіўшы ў формулу $a_n = a_1 + (n - 1)d$ значэнні для a_1 і d: $a_n = -15{,}5 + (n - 1) \cdot 0{,}6$; $a_n = 0{,}6n - 16{,}1$. Падставім $n = 20$ у формулу n-га члена дадзенай арыфметычнай прагрэсіі і знойдзем яе дваццаты член: $a_{20} = 0{,}6 \cdot 20 - 16{,}1 = -4{,}1$.
5. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_1 = -5{,}6$; $a_2 = -4{,}8$. Лік 16 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі. Знайдзіце яго нумар.	Паколькі $a_1 = -5{,}6$; $a_2 = -4{,}8$, то $d = a_2 - a_1 = -4{,}8 - (-5{,}6) = -4{,}8 + 5{,}6 = 0{,}8$. Па ўмове $a_n = 16$. Выкарыстаем формулу $a_n = a_1 + (n - 1)d$, тады $16 = -5{,}6 + (n - 1) \cdot 0{,}8$; $16 = -5{,}6 + 0{,}8n - 0{,}8$; $16 = 0{,}8n - 6{,}4$; $22{,}4 = 0{,}8n$; $n = 28$.
6. У арыфметычнай прагрэсіі $a_6 = 8$, $a_{10} = 16$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі і яе першы член.	Па ўмове $a_6 = a_1 + 5d = 8$, $a_{10} = a_1 + 9d = 16$. Рэшым сістэму ўраўненняў $\begin{cases} a_1 + 5d = 8, \\ a_1 + 9d = 16. \end{cases}$ Аднімем ад другога ўраўнення першае, атрымаем $4d = 8$, адкуль $d = 2$. Падставім $d = 2$ у першае ўраўненне сістэмы, атрымаем $a_1 = -2$.

Характарыстычная ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі	
7. Знайдзіце восьмы член арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_7 = 21$, $a_9 = 29$.	Па характарыстычнай уласцівасці арыфметычнай прагрэсіі $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, г. зн. $a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{21+29}{2} = 25.$
8. Пры якім значэнні x паслядоўнасць $x - 1$; $4x - 9$; $4x + 2$ з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй?	Па характарыстычнай уласцівасці прагрэсіі паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, калі кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму арыфметычнаму папярэдняга і наступнага членаў: $4x - 9 = \frac{(x-1)+(4x+2)}{2}.$ Рэшым атрыманае ўраўненне: $8x - 18 = 5x + 1;\ 3x = 19;\ x = 6\frac{1}{3}.$

1. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) n-ы член вылічваецца па формуле:

а) $a_n = a_1 + d$;
б) $a_n = a_1 + nd$;
в) $a_n = a_1 + (n-1)d$;
г) $a_n = a_1 + 2dn$.

Выберыце правільны адказ.

2. Паслядоўнасць (a_n) з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, калі для ўсіх членаў паслядоўнасці, пачынаючы з другога, выконваецца ўмова:

а) $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;
б) $a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$;
в) $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$;
г) $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

Выберыце правільны адказ.

4.43. Дадзеная паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, вызначце рознасць прагрэсіі і знайдзіце наступныя тры яе члены:

а) 2; 4; 6; ...;
б) –1; –4; –7; ...;
в) 2; 5; 8; ...;
г) 0,1; 0,2; 0,3; ... .

4.44. Першы член арыфметычнай прагрэсіі роўны 5,3, а рознасць роўна 3. Назавіце 5 першых членаў гэтай арыфметычнай прагрэсіі.

4.45. Якія члены прагрэсіі можна выкарыстаць, каб вызначыць рознасць арыфметычнай прагрэсіі:

а) –8; –4; 0; 4; ...; б) 8,5; 8; 7,5; 7; ...;

в) 9; 9; 9; 9; ...; г) $\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; 4\sqrt{3};$ ...?

Знайдзіце шосты член прагрэсіі.

4.46. Знайдзіце рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі:

а) $a_1 = 12,\ a_2 = -6$; б) $a_8 = 7{,}2,\ a_9 = 8{,}5$;

в) $a_{45} = 8\sqrt{2}, a_{46} = 5\sqrt{2}$; г) $a_n = 3\frac{5}{7}, a_{n+1} = 2\frac{3}{7}$.

4.47. У арыфметычнай прагрэсіі –100; 0; 100; ... знайдзіце нумар члена, роўнага 1000.

4.48. Рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) роўна 4. Знайдзіце першы і другі члены гэтай прагрэсіі, калі:

а) $a_3 = 5$; б) $a_3 = -2$;

в) $a_3 = 1{,}5$; г) $a_3 = -3\frac{1}{3}$.

4.49. Выкарыстайце формулу n-га члена арыфметычнай прагрэсіі (a_n) для вылічэння шаснаццатага члена гэтай прагрэсіі, калі:

а) $a_1 = 5,\ d = -3$; б) $a_1 = -0{,}2,\ d = 10$;

в) $a_1 = 0, d = \frac{1}{3}$; г) $a_1 = \sqrt{5}, d = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4.50. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) выразіце праз a_7 і d:

а) a_1; б) a_8; в) a_{20}; г) a_{100}.

4.51. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія. Выразіце a_{30} праз:

а) a_1 і d; б) a_{31} і d; в) a_{15} і d; г) a_{40} і d.

4.52. Запішыце формулу n-га члена і знайдзіце a_{10}, a_{21} і a_{201} для арыфметычнай прагрэсіі (a_n):

а) –26; –21; –16; ...; б) 7,8; 7,1; 6,4; ...;

в) $-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2};$ ...; г) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1;$ ... .

4.53. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_2 = -4,\ a_3 = 2$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі, яе першы і дваццаць пяты член.

4.54. У бензабак грузавога аўтамабіля залілі 600 л бензіну. У першы дзень шляху было зрасходавана 30 л бензіну, а ў кожны наступны дзень расходавалі на 5 л бензіну больш, чым у папярэдні. Колькі літраў бензіну зрасходавалі ў пяты дзень; у сёмы дзень?

4.55. Як вызначыць, ці з’яўляецца лік 142 членам арыфметычнай прагрэсіі –18; –16,4; –14,8; ...? Які нумар мае член прагрэсіі, роўны 142? Як можна без вылічэнняў вызначыць, ці з’яўляецца членам дадзенай прагрэсіі лік 15?

4.56. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_1 = -7{,}3$ і $a_2 = -6{,}4$. Ці з’яўляецца членам дадзенай прагрэсіі лік 26?

4.57. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія, $a_1 = 4{,}5$, $d = -0{,}6$. Знайдзіце нумар першага адмоўнага члена гэтай прагрэсіі. Які нумар мае член дадзенай прагрэсіі, роўны –15,9? Вызначце колькасць членаў дадзенай прагрэсіі, большых за –51.

4.58. Першы член арыфметычнай прагрэсіі роўны –37, $d = 1$, n-ы член роўны 78. Знайдзіце колькасць членаў у гэтай прагрэсіі з першага па n-ы член, уключаючы гэтыя члены. Знайдзіце колькасць усіх цэлых лікаў, якія належаць прамежку:

а) [–37; 78]; б) [–15; 49]; в) [–23,8; 89,2].

4.59. Курс аздараўленчых трэніровак пачынаюць з заняткy працягласцю 10 мін. Затым кожны наступны дзень час трэніроўкі павялічваюць на 3 мін. У які дзень з моманту пачатку заняткаў працягласць трэніроўкі дасягне 25 мінут; стане большай за 45 мінут?

4.60. Ці можна знайсці першы член арыфметычнай прагрэсіі (c_n), калі:

а) $c_{12} = 48$, $d = -2$;
б) $c_{32} = 11{,}8$, $d = 0{,}3$;
в) $c_9 = 8\sqrt{2}$, $d = -\sqrt{2}$?

Па выніках вылічэнняў зрабіце абагульненне.

4.61. Якую формулу можна выкарыстаць, каб знайсці рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі вядома, што:

а) $a_1 = -12$, $a_{15} = 16$;

б) $a_1 = \frac{2}{9}$, $a_6 = 6\frac{7}{18}$;

в) $a_1 = 19\sqrt{7}$, $a_8 = -2\sqrt{7}$?

4.62. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{19} = 59$, $d = 3$. Які з членаў прагрэсіі a_1; a_6; a_{20} можна знайсці, не выкарыстоўваючы формулу n-га члена? Знайдзіце a_1; a_6; a_{20}.

4.63. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{15} = 11{,}8$, $a_{16} = 10{,}2$. Знайдзіце a_1; d; a_{18}. Выканайце заданне рознымі спосабамі.

4.64. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_{15} = 10$, $a_{20} = 6$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі і яе першы член. Як вылічыць рознасць арыфметычнай прагрэсіі па зададзеных двух яе членах?

4.65. Знайдзіце трыццаты член арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі вядома, што:

а) $a_6 = 56$, $a_{18} = -4$;

б) $a_{10} = -8{,}5$, $a_{20} = 13{,}5$;

в) $a_{17} = -3\sqrt{10}$, $a_{23} = -15\sqrt{10}$.

4.66. Колькі дадатных членаў змяшчае арыфметычная прагрэсія 8,3; 7,9; 7,5; ...?

4.67. Знайдзіце нумар першага адмоўнага члена арыфметычнай прагрэсіі (c_n), калі $c_1 = 2\frac{1}{7}$, $d = -\frac{3}{14}$.

4.68. Знайдзіце першы дадатны член арыфметычнай прагрэсіі $-6\sqrt{3}$; $-\frac{11\sqrt{3}}{2}$; $-5\sqrt{3}$; ... .

4.69. Калі паміж лікамі −12 і 8 трэба ўставіць сем такіх лікаў, каб яны разам з дадзенымі лікамі ўтварылі арыфметычную прагрэсію, то які нумар мае член, роўны 8? Чаму роўна рознасць гэтай арыфметычнай прагрэсіі?

4.70. Якую ўласцівасць можна выкарыстаць, каб знайсці дзясяты член арыфметычнай прагрэсіі, калі дзявяты і адзінаццаты яе члены адпаведна роўны −12,3 і 5,7?

4.71. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{28} = 6\frac{2}{3}$, $a_{30} = 1\frac{1}{3}$. Знайдзіце a_{29}; d; a_1; a_{45}. Выканайце заданне рознымі спосабамі.

4.72. Знайдзіце, пры якім значэнні зменнай значэнні выразаў будуць паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі:

а) $5x + 2$; $x - 4$ і $7 - 2x$;

б) $x^2 - 8$; $5x + 3$ і $3x + 6$;

в) $x^2 + 5$; $x^2 + x$ і $8x - 14$.

4.73. Сума трох першых членаў арыфметычнай прагрэсіі роўна 51. Знайдзіце другі член прагрэсіі.

4.74. Дакажыце, што значэнні выразаў $(a+b)^2$; a^2+b^2 і $(a-b)^2$ з'яўляюцца паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі.

4.75*. Праверце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць:

а) $b_n = 7n + 1$; б) $c_n = 3 - 5n$; в) $x_n = n^2$; г) $y_n = 12n$.

Калі з'яўляецца, то знайдзіце яе першы член і рознасць.

4.76*. Знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі:

а) $a_4 + a_8 = 30$ і $a_7 + a_{10} = 60$;

б) $a_{24} - a_{19} = 12$ і $a_{16} = 18$;

в) $a_3 + a_{19} = 46$ і $a_{20} - 2a_3 = 27$.

4.77*. Знайдзіце восьмы член арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі вядома, што $a_{13} + a_{14} + a_{15} = 15$ і $a_{12}a_{14} = -210$.

4.78*. У арыфметычнай прагрэсіі $a_2 = -1$, $a_4 + a_6 = -20$, $a_n = -22$. Знайдзіце n.

4.79*. У арыфметычнай прагрэсіі $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 147$. Знайдзіце $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$.

4.80*. Арыфметычныя прагрэсіі (a_n) і (c_n) зададзены формуламі сваіх n-х членаў $a_n = 43 - 2n$ і $c_n = 3n - 67$. Ці ёсць у гэтых прагрэсіях роўныя члены з аднолькавымі нумарамі?

4.81*. Дадзена арыфметычная прагрэсія (a_n). Вызначце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць:

а) a_2; a_4; a_6; ...; б) $a_1 + 5$; $a_2 + 5$; $a_3 + 5$; ...;

в) $3a_1$; $3a_2$; $3a_3$; ...; г) a_1^2; a_2^2; a_3^2; ... .

4.82*. У арыфметычнай прагрэсіі $a_4 = 7$. Пры якім значэнні рознасці прагрэсіі значэнне сумы $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$ будзе найменшым?

4.83. Дадзеная паслядоўнасць з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй. Вызначце рознасць прагрэсіі і знайдзіце наступныя тры яе члены:

а) -10; -5; 0; 5; ...; б) 9,2; 8,2; 7,2; 6,2; ...;

в) -2; -2; -2; -2; ...; г) $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; ... .

4.84. Рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n) роўна 3. Знайдзіце першы член прагрэсіі, калі:

а) $a_2 = 7$; б) $a_2 = -1$; в) $a_2 = 4{,}5$; г) $a_2 = -1\frac{2}{7}$.

4.85. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) выразіце a_{18} праз:

а) a_1 і d; б) a_{17} і d; в) a_{29} і d; г) a_3 і d.

4.86. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядомы першы член a_1 і рознасць d. Запішыце формулу n-га члена гэтай прагрэсіі і знайдзіце a_6, a_{12} і a_{51}, калі:

а) $a_1 = 3,\ d = -2$; б) $a_1 = -7,\ d = 8$;

в) $a_1 = 4,\ d = 0{,}25$; г) $a_1 = -\sqrt{2},\ d = -5\sqrt{2}$.

4.87. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_2 = 6$, $a_3 = -1$. Знайдзіце рознасць прагрэсіі і дзясяты член гэтай прагрэсіі. Якую формулу вы выкарысталі?

4.88. Паслядоўнасць (c_n) — арыфметычная прагрэсія, $c_1 = 8$, $d = -1{,}5$. Ці з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі лік:

а) –132; б) –37?

4.89. Турыст плануе ўзяць напракат аўтамабіль. Кошт пракату ўключае аплату за першыя суткі (100 р.) і аплату за кожныя наступныя суткі пракату (30 р.). Колькі трэба будзе заплаціць за аўтамабіль, узяты напракат на 3 сутак; на 5 сутак? Колькі сутак карыстаўся аўтамабілем турыст, які заплаціў за пракат 280 р.? На колькі сутак можа ўзяць аўтамабіль напракат турыст, які разлічвае патраціць на гэта не больш за 250 р.?

4.90. Паслядоўнасць (a_n) — арыфметычная прагрэсія. Знайдзіце першы член гэтай прагрэсіі, калі $a_{15} = 29$, $d = -3$.

4.91. Выкарыстайце формулу n-га члена арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце рознасць арыфметычнай прагрэсіі (x_n), калі вядома, што $x_1 = 56{,}7$, $x_{24} = -12{,}3$.

4.92. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{13} = 25$, $d = -2$. Знайдзіце a_1, a_7, a_{25}.

4.93. У арыфметычнай прагрэсіі $a_{11} = -6{,}5$, $a_{12} = -7{,}3$. Знайдзіце a_1, d, a_{13}, a_{21}.

4.94. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_9 = -19$, $a_{17} = 13$. Знайдзіце a_1, d, a_{32}.

4.95. Вызначце, калі магчыма, колькі адмоўных членаў змяшчае арыфметычная прагрэсія –112; –108; –104; ... .

4.96. Знайдзіце першы дадатны член арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_1 = -9{,}5$; $d = 0{,}4$. Вызначце яго нумар.

4.97. Паміж лікамі $-3\sqrt{5}$ і $9\sqrt{5}$ устаўце шэсць такіх лікаў, каб яны разам з дадзенымі лікамі ўтварылі арыфметычную прагрэсію. Які нумар будзе мець лік $9\sqrt{5}$? Чаму роўна рознасць гэтай арыфметычнай прагрэсіі?

4.98. Знайдзіце пятнаццаты член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі, калі чатырнаццаты і шаснаццаты яе члены адпаведна роўны –43,6 і –28,4. Якую ўласцівасць вы выкарысталі?

4.99. Выкарыстайце характарыстычную ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце, пры якім значэнні зменнай значэнні выразаў $9 - 4x$; $2x + 5$ і $3x - 1$ будуць паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі.

4.100*. Дакажыце, што паслядоўнасць $a_n = 5n - 1$ з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй.

4.101*. Прааналізуйце ўмову і знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі:

а) $a_4 + a_{13} = 47$ і $a_9 + a_{15} = 68$;

б) $a_2 + a_6 = 42$ і $a_{10} - a_4 = 54$.

4.102*. У арыфметычнай прагрэсіі трэці і дзясяты члены адпаведна роўны 12 і –2. Знайдзіце суму другога і адзінаццатага членаў прагрэсіі.

4.103*. Дадзена арыфметычная прагрэсія (a_n). Вызначце, ці з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй паслядоўнасць $-a_1$; $-a_3$; $-a_5$; ... .

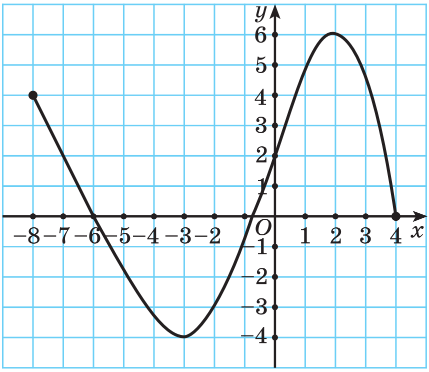
4.104. Вылічыце: $\left(3\sqrt{2} + 2\right)^2 + \left(6 - \sqrt{2}\right)^2$.

4.105. Знайдзіце значэнне выразу

НАК (16; 24; 48) + НАД (48; 49).

4.106. На рысунку 93 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = f(x - 1)$;
б) $y = f(x + 2)$;
в) $y = f(x) - 2$;
г) $y = f(x) + 3$.



Рыс. 93

4.107. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

а) $(x - 1)(x^2 - 6x + 9)(5 - x) \geqslant 0$;

б) $\dfrac{(x^2 - 4)(x + 5)}{x^2 + 4x + 4} \leqslant 0$.

§ 16. Формула сумы *n* першых членаў арыфметычнай прагрэсіі

4.108. Выразіце n з формулы сумы вуглоў n-вугольніка $S = (n - 2) \cdot 180°$.

4.109. Па формуле колькасці ўсіх дыяганалей n-вугольніка знайдзіце колькасць дыяганалей 20-вугольніка.

4.110. Знайдзіце суму рацыянальным спосабам:

$$2 + 0{,}34 - 1{,}246 + 0{,}66 - 2{,}754.$$

Разгледзім задачу. Два сябры рашылі палепшыць веданне англійскай мовы і кожны дзень вучыць на 3 новыя словы больш, чым у папярэдні. Колькі слоў вывучыць кожны з сяброў за 10 дзён, калі яны пачнуць з аднаго слова?

Для рашэння гэтай задачы трэба знайсці суму дзесяці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n), у якой $a_1 = 1$, $d = 3$.

Узнікае пытанне: як знайсці гэту суму, не вылічваючы ўсіх дзесяці членаў прагрэсіі?

У агульным выглядзе гэта задача прыводзіць да неабходнасці вываду формулы сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Для таго каб вывесці гэту формулу, дакажам уласцівасць: сумы двух членаў канечнай арыфметычнай прагрэсіі, роўнааддаленых ад яе канцоў, роў-

$$\boxed{a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n}$$

ны паміж сабой і роўны суме першага і апошняга яе членаў, г. зн. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$.

У агульным выглядзе: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

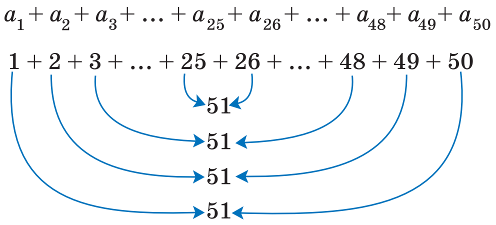
Доказ. Пераўтворым складаемыя ў левай частцы роўнасці, выкарыстаўшы формулу n-га члена: $a_k = a_1 + (k-1)d$; $a_{n-k+1} = a_1 + (n-k)d$. Тады атрымаем:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k)d =$$
$$= a_1 + dk - d + a_1 + dn - dk = a_1 + a_1 + d(n-1) = a_1 + a_n .$$

З дапамогай даказанай уласцівасці знойдзем, напрыклад, суму ўсіх натуральных лікаў ад 1 да 50.

Натуральныя лікі ад 1 да 50 утвараюць арыфметычную праграэсію 1; 2; 3; ...; 50. Першы член гэтай праграэсіі роўны 1, апошні роўны 50. Усяго ў гэтай праграэсіі 50 членаў.

Паколькі $a_1 + a_{50} = 1 + 50 = 51$, то і $a_2 + a_{49} = a_1 + a_{50} = 51$, і $a_3 + a_{48} = a_1 + a_{50} = 51$, і $a_4 + a_{47} = 51$, ..., $a_{25} + a_{26} = 51$ (рыс. 94), то шуканая сума роўна $51 \cdot 25 = 1275$.



Рыс. 94

Усяго 25 пар

Выведзем формулу сумы n першых членаў арыфметычнай праграэсіі.

Абазначым $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ праз S_n і запішам гэту суму двойчы: ад першага члена да n-га і ад n-га члена да першага:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n ,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 .$$

Складзём гэтыя дзве роўнасці і атрымаем:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Па ўласцівасці $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ заменім кожную суму ў дужках на $a_1 + a_n$.

К. Ф. Гаўс
(1777—1855)

Колькасць усіх такіх пар сум роўна n, значыць, падвоеная шуканая сума роўна: $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, г. зн. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ — **формула сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі.**

Ідэя такога доказу належыць выдатнаму нямецкаму матэматыку К. Гаўсу.

Формулу сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі можна запісаць і ў іншым выглядзе. Для гэтага па формуле n-га члена арыфметычнай прагрэсіі выразім a_n праз a_1 і d і атрымаем: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$

Калі вядомы першы член прагрэсіі і рознасць, то зручна карыстацца формулай $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$.

Выкарыстаем гэту формулу ў задачы аб колькасці вывучаных замежных слоў і атрымаем: $S_{10} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10$, $S_{10} = 29 \cdot 5 = 145$. Кожны з сяброў вывучыў па 145 новых слоў.

Прыклад 1. Знайдзіце суму пяцідзесяці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі 3; 7; 11; 15; ... .

Рашэнне. У гэтай прагрэсіі першы член роўны 3, а рознасць $d = 7 - 3 = 4$. Выкарыстаем формулу сумы

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

для $n = 50$ і атрымаем:

$$S_{50} = \frac{2 \cdot 3 + 4(50-1)}{2} \cdot 50 = 5050.$$

Адказ: 5050.

Формулы сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Прыклад 2. У арыфметычнай прагрэсіі $a_1 = -2$, $a_{85} = 44$. Знайдзіце суму 85 першых членаў арыфметычнай прагрэсіі.

Рашэнне. Выкарыстаем формулу сумы $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ і атрымаем: $S_{85} = \frac{a_1 + a_{85}}{2} \cdot 85$; $S_{85} = \frac{-2 + 44}{2} \cdot 85 = 21 \cdot 85 = 1785$.

Адказ: 1785.

Формулы сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі

1. Знайдзіце суму шасці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі, калі яе першы член роўны –2, а рознасць прагрэсіі роўна 0,4.	Выкарыстаем формулу $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$ паколькі $a_1 = -2;\ d = 0{,}4,$ то $S_6 = \frac{2 \cdot (-2) + (6-1) \cdot 0{,}4}{2} \cdot 6 =$ $= \frac{-4+2}{2} \cdot 6 = -1 \cdot 6 = -6.$
2. Знайдзіце суму $4 + 7 + 10 + \ldots + 100,$ калі яе складаемыя — паслядоўныя члены арыфметычнай прагрэсіі.	Паслядоўнасць 4, 7, 10, ..., 100 з'яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй, у якой $a_1 = 4;\ d = 3;\ a_n = 100.$ Па формуле n-га члена арыфметычнай прагрэсіі $a_n = a_1 + d(n-1)$ знойдзем колькасць членаў гэтай прагрэсіі: $100 = 4 + 3(n-1);\quad 96 = 3(n-1);$ $n - 1 = 32;\quad n = 33.$ Выкарыстаем формулу сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ і знойдзем шуканую суму: $S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{4 + 100}{2} \cdot 33 =$ $= 52 \cdot 33 = 1716.$
3. Знайдзіце колькасць членаў арыфметычнай прагрэсіі, ведаючы, што іх сума роўна 430, першы член прагрэсіі роўны –7, а рознасць прагрэсіі роўна 3.	Выкарыстаем формулу сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$ Паколькі $S_n = 430;$ $a_1 = -7;\ d = 3,$ то складзём і рэшым ураўненне: $430 = \frac{2 \cdot (-7) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n;$ $430 = \frac{-14 + 3n - 3}{2} \cdot n;\quad 430 = \frac{-17 + 3n}{2} \cdot n;$ $860 = (3n - 17) \cdot n;\quad 3n^2 - 17n - 860 = 0;$ $D = 17^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-860) = 289 + 10\,320 =$ $= 10\,609 = 103^2;$ $n_{1,2} = \frac{17 \pm 103}{2 \cdot 3};\quad n_1 = 20;\quad n_2 = -\frac{86}{6}.$ Паколькі n — натуральны лік, то $n = 20.$

4. У арыфметычнай прагрэсіі $a_5 = 18$, $a_{10} = 13$. Знайдзіце суму членаў гэтай прагрэсіі з чацвёртага па сямнаццаты ўключна.	Знойдзем a_1 і d. Паколькі $a_5 = a_1 + 4d$; $a_{10} = a_1 + 9d$, то складзём сістэму ўраўненняў $\begin{cases} a_1 + 4d = 18, \\ a_1 + 9d = 13. \end{cases}$ Рэшым атрыманую сістэму спосабам складання: $\begin{cases} -a_1 - 4d = -18, \\ a_1 + 9d = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5d = -5, \\ a_1 + 9d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} d = -1, \\ a_1 + 9 \cdot (-1) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1, \\ a_1 = 22. \end{cases}$ Тады $a_4 = 22 + 3 \cdot (-1) = 19$; $a_{17} = 22 + 16 \cdot (-1) = 6$. Будзем лічыць чацвёрты член дадзенай прагрэсіі першым членам некаторай іншай прагрэсіі, тады сямнаццаты член дадзенай прагрэсіі стане чатырнаццатым $(17 - 4 + 1 = 14)$ членам новай прагрэсіі. Шуканая сума роўна: $\frac{19 + 6}{2} \cdot 14 = 175$.
5. Знайдзіце суму ўсіх цотных натуральных лікаў, якія не перавышаюць 300 і пры дзяленні на 13 даюць у астачы 5.	Першы лік у паслядоўнасці ўсіх цотных натуральных лікаў, якія не перавышаюць 300 і пры дзяленні на 13 даюць у астачы 5, — гэта лік 18. Кожны наступны лік роўны папярэдняму, складзенаму з лікам 26. Апошні цотны лік, які пры дзяленні на 13 дае ў астачы 5, — гэта лік 278. Паколькі разглядаюцца толькі цотныя лікі, то рознасць прагрэсіі роўна 26. Знойдзем нумар ліку прагрэсіі, роўнага 278: $a_n = a_1 + d(n - 1)$, $278 = 18 + 26(n - 1)$, адкуль $n = 11$. $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{18 + 278}{2} \cdot 11 = 1628$.

? **1.** У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) сума n першых членаў вылічваецца па формуле:

а) $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$;
б) $S_n = a_1 + d \cdot n$;
в) $S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$;
г) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Выберыце правільныя адказы.

2. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n):
а) S_4 — гэта чацвёрты член прагрэсіі;
б) S_4 — сума любых чатырох членаў прагрэсіі;
в) S_4 — сума чатырох першых членаў прагрэсіі.
Выберыце правільны адказ.

4.111. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) знайдзіце:

а) S_8, калі $a_1 = 4$, $d = -3$;

б) S_{51}, калі $a_1 = -0{,}2$, $d = 5$;

в) S_{26}, калі $a_1 = \sqrt{3}$, $d = 3\sqrt{3}$.

4.112. Знайдзіце суму сарака першых членаў арыфметычнай прагрэсіі (c_n), калі:

а) $c_1 = 6$; $c_{40} = 128$;   б) $c_1 = -2\sqrt{7}$; $c_{40} = -36\sqrt{7}$.

4.113. У першы дзень прыёму дакументаў ва ўніверсітэт прыёмная камісія прыняла дакументы ад 320 чалавек. Кожны наступны дзень падавалі дакументы на 100 чалавек больш, чым у папярэдні. Колькі чалавек падалі дакументы ва ўніверсітэт за пяць першых дзён?

4.114. У першым радзе канцэртнай залы 24 месцы, а ў кожным наступным радзе на 4 месцы больш, чым у папярэднім. Усяго ў канцэртнай зале 25 радоў. На святочны канцэрт прададзена 1710 білетаў. На колькі працэнтаў будзе запоўнена зала?

4.115. Выберыце адну з формул сумы членаў арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце суму адзінаццаці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі:

а) $-3; 6; 15; \ldots$;   б) $1{,}8; 1{,}5; 1{,}2; \ldots$;

в) $3\frac{1}{7}; 3\frac{3}{7}; 3\frac{5}{7}; \ldots$;   г) $-10\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \ldots$.

4.116. Знайдзіце a_n і S_n арыфметычнай прагрэсіі (a_n), у якой:

а) $a_1 = 12$; $d = -6$; $n = 14$;

б) $a_1 = -25$; $d = 0{,}5$; $n = 21$.

4.117. Вылічыце суму, калі яе складаемыя — паслядоўныя члены арыфметычнай прагрэсіі:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$;

б) $5 + 10 + 15 + \ldots + 195 + 200 + 205$.

4.118. Складзіце план рашэння і знайдзіце суму:

а) ста першых няцотных лікаў;

б) усіх цотных трохзначных лікаў;

в) усіх двухзначных лікаў, кратных тром.

4.119. Выкарыстайце рацыянальны спосаб для вылічэння сумы ўсіх цэлых лікаў, якія належаць прамежку:

а) $(-33;\ 101]$; б) $[-56{,}2;\ 44{,}1]$.

4.120. Падчас перадсвяточнай акцыі колькасць прададзеных святочных набораў штодзень павялічвалася на адну і тую ж колькасць. За першы дзень акцыі было прададзена 25 набораў, а за апошні — 160. Знайдзіце, колькі дзён доўжылася акцыя, калі вядома, што ўсяго за перыяд акцыі было прададзена 925 святочных набораў.

4.121. Арыфметычная прагрэсія зададзена формулай $a_n = 5n - 3$. Знайдзіце:

а) S_8; б) S_{21}; в) S_n.

4.122. Знайдзіце апошні член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі, якая складаецца з n членаў, у якой:

а) $a_1 = 15;\ n = 14;\ S_{14} = 1407$;

б) $a_1 = -\frac{1}{3};\ n = 10;\ S_{10} = 88\frac{1}{6}$.

4.123. Выкарыстайце формулу сумы членаў арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце рознасць арыфметычнай прагрэсіі, першы член якой роўны 5,5, а сума шаснаццаці першых членаў роўна 328.

4.124. Знайдзіце першы член арыфметычнай прагрэсіі, рознасць якой роўна 10, а сума дзесяці першых членаў роўна –120.

4.125. Колькі трэба ўзяць паслядоўных натуральных лікаў, пачынаючы з 5, каб іх сума была роўна 221?

4.126. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $d = -7$ і $a_{16} = -9$. Знайдзіце a_{20} і S_{20}.

4.127. Знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі (y_n), калі вядома, што:

а) $y_{10} = 40,\ S_{10} = 175$;

б) $y_7 = -27,\ S_7 = -210$;

в) $y_{15} = 47,\ S_{30} = 1500$.

4.128. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_1 = 3$, $d = 5$. Знайдзіце суму ўсіх членаў гэтай прагрэсіі:

а) з 15-га па 30-ы ўключна;

б) з 10-га па 24-ы ўключна.

Выканайце заданне рознымі спосабамі.

4.129. Знайдзіце суму пятнаццаці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі (c_n), калі вядома, што:

а) $c_5 = 4$, $c_{10} = -6$; б) $c_8 = -1{,}7$, $c_{13} = 2{,}3$.

4.130. Вылічыце суму ўсіх:

а) дадатных членаў арыфметычнай прагрэсіі $5\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$; ... ;

б) адмоўных членаў арыфметычнай прагрэсіі –98,5; –92,5; ... .

4.131. Колькі трэба ўзяць паслядоўных натуральных лікаў, кратных 3, каб іх сума была большая за 165?

4.132. Знайдзіце суму дваццаці пяці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_{10} = 17$, $d = 3$.

4.133. Знайдзіце суму ўсіх натуральных лікаў, кратных 4 і не большых за 248.

4.134. Назавіце першы і апошні трохзначныя лікі, кратныя 9. Знайдзіце суму ўсіх трохзначных лікаў, кратных 9.

4.135. Запішыце формулу натуральнага ліку, які пры дзяленні на 7 дае ў астачы 3. Знайдзіце суму ўсіх натуральных лікаў, якія не перавышаюць 153 і пры дзяленні на 7 даюць у астачы 3.

4.136. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_1 = -3$, $d = 5$. Знайдзіце $S_{21} - S_{20}$.

4.137. Першы член арыфметычнай прагрэсіі роўны –12, а рознасць прагрэсіі роўна 6. Колькі трэба ўзяць першых паслядоўных членаў гэтай прагрэсіі, каб іх сума была роўна 528?

4.138. Знайдзіце суму трыццаці шасці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі, калі яе рознасць роўна 2, а пяты член прагрэсіі ў 4 разы меншы за другі член.

4.139*. Знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі, калі $S_6 = 39$ і $S_{14} = -77$.

4.140*. Сума членаў арыфметычнай прагрэсіі з трэцяга па трынаццаты роўна 55, $a_n = 5$. Знайдзіце n.

4.141*. Сума 40 першых членаў арыфметычнай прагрэсіі роўна 340, а сума 39 першых яе членаў роўна 325. Знайдзіце рознасць прагрэсіі.

4.142*. Знайдзіце суму дваццаці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 18$.

4.143*. Сума пятнаццаці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі, якая складаецца з натуральных лікаў, большая за 333, але меншая за 396. Знайдзіце восьмы член гэтай прагрэсіі, калі вядома, што ён кратны чатыром.

4.144. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) знайдзіце:

а) S_{11}, калі $a_1 = -2$; $d = 5$;

б) S_{24}, калі $a_1 = -2{,}5$; $d = -0{,}5$;

в) S_{31}, калі $a_1 = \sqrt{2}$; $d = 4\sqrt{2}$.

4.145. Вызначце неабходныя кампаненты формулы сумы першых n членаў арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце суму шаснаццаці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі:

а) 1; 11; 21; ...;

б) 2,3; 1,8; 1,3; ...;

в) $5\frac{2}{9}$; $6\frac{2}{9}$; $7\frac{2}{9}$; ...;

г) $7\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; ... .

4.146. Вучань узяў у бібліятэцы кнігу і за першы дзень прачытаў 30 старонак. Кніга настолькі захапіла яго, што кожны наступны дзень ён чытаў на 10 старонак больш, чым у папярэдні. Ці паспее вучань прачытаць кнігу за 7 дзён, калі ў ёй 490 старонак?

4.147. Знайдзіце суму дваццаці пяці першых членаў арыфметычнай прагрэсіі (x_n), калі $x_1 = -2{,}8$; $x_{25} = 12{,}6$.

4.148. Знайдзіце a_n і выкарыстайце атрыманы вынік, каб знайсці S_n арыфметычнай прагрэсіі, у якой $a_1 = 1\frac{1}{3}$; $d = -\frac{2}{3}$; $n = 16$.

4.149. Якую формулу можна выкарыстаць, каб знайсці суму, калі яе складаемыя — паслядоўныя члены арыфметычнай прагрэсіі:

а) $2 + 4 + 6 + ... + 96 + 98 + 100$;

б) $12 + 16 + 20 + ... + 88 + 92 + 96$?

Знайдзіце гэту суму.

4.150. Выканайце аналіз умовы і знайдзіце суму ўсіх:

а) двухзначных лікаў;

б) трохзначных лікаў, кратных пяці.

4.151. Арыфметычная прагрэсія зададзена формулай $a_n = 4n + 5$. Якія члены гэтай прагрэсіі трэба знайсці, каб вылічыць:

а) S_{10}; б) S_{35}?

Вылічыце гэтыя сумы.

4.152. Выкарыстайце формулы арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце апошні член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі, у якой $a_1 = 3$; $n = 20$; $S_{20} = 820$.

4.153. Знайдзіце першы член арыфметычнай прагрэсіі, рознасць якой роўна -8, а сума дванаццаці першых членаў роўна 96.

4.154. Для арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $d = 3$ і $a_{11} = 6$. Знайдзіце a_{15} і S_{15}.

4.155. Знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі (x_n), калі вядома, што $x_9 = 20$, $S_9 = 123$.

4.156. Знайдзіце суму ўсіх членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n) з 10-га па 25-ы ўключна, калі вядома, што $a_1 = -2$, $d = 7$.

4.157. У арыфметычнай прагрэсіі (c_n) вядома, што $c_3 = 12$, $c_{17} = 54$. Знайдзіце S_{20}.

4.158. Знайдзіце суму ўсіх дадатных членаў арыфметычнай прагрэсіі 8,4; 7,2; ... .

4.159. Знайдзіце суму ўсіх натуральных лікаў, кратных 6 і не большых за 162.

4.160. Запішыце формулу натуральнага ліку, які пры дзяленні на 8 дае ў астачы 1. Знайдзіце суму ўсіх натуральных лікаў, якія не перавышаюць 225 і пры дзяленні на 8 даюць у астачы 1.

4.161*. Знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі, калі $S_4 = 60$ і $S_9 = 225$.

4.162*. Арыфметычная прагрэсія змяшчае 8 членаў. Сума членаў, якія стаяць на цотных месцах, роўна 28, а сума членаў, якія стаяць на няцотных месцах, роўна 16. Знайдзіце першы член прагрэсіі.

4.163. Знайдзіце значэнне выразу

$$\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 0{,}81-1\frac{9}{16}\cdot 0{,}17}.$$

4.164. Спрасціце выраз $a-\frac{a^2-5a}{a+1}\cdot\frac{1}{a-5}$.

4.165. Рашыце ўраўненне $\frac{x}{x^2-16}+\frac{x+3}{x+4}=0$.

4.166. Наяўнай сыравіны хопіць першаму цэху на 12 дзён працы або другому цэху на 24 дні працы. Ці хопіць гэтай сыравіны на 9 дзён іх сумеснай працы?

4.167. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases}7x>x^2,\\16x^2<9.\end{cases}$

4.168. Знайдзіце каардынаты пункта, сіметрычнага пункту $A(-3;\ 5)$ адносна восі сіметрыі парабалы

$$y=2x^2-8x+1.$$

§ 17. Геаметрычная прагрэсія

4.169. Рашыце ўраўненне:

а) $x^2=16$; б) $x^2=2{,}25$; в) $x^2=-0{,}25$.

4.170. Вылічыце $g(4)$; $g(0)$; $g(-2)$, калі $g(x)=3^x$.

4.171. Знайдзіце значэнне выразу $2^{-3}\cdot 0{,}5^{-2}:0{,}125^{-1}$.

4.172. Знайдзіце новую цану тавару, калі яго першапачатковая цана ў 25 р. павялічылася на 20 %.

4.173. Знайдзіце сярэдняе геаметрычнае лікаў:

а) 8 і 32; б) 12 і 5.

Разгледзім задачу. Укладчык паклаў у банк 1000 р. на дэпазіт, па якім сума ўкладу павялічваецца штогод на 5 %. Якая сума будзе ў яго праз 1 год; 2 гады; 6 гадоў?

Рашэнне. Пачатковая сума ў 1000 р. праз год павялічыцца на 5 % і складзе 105 % ад 1000 р. Знойдзем 105 % $=1{,}05$ ад 1000 р.: $1000\cdot 1{,}05=1050$ (р.).

Праз два гады сума ўкладу стане роўна $1000\cdot 1{,}05\cdot 1{,}05=1000\cdot 1{,}05^2$ (р.), праз тры гады — $1000\cdot 1{,}05^3$ (р.) і г. д. Атрымаем лікавую паслядоўнасць: $1000\cdot 1{,}05$; $1000\cdot 1{,}05^2$; $1000\cdot 1{,}05^3$; ... .

Праз шэсць гадоў сума будзе роўна $1000\cdot 1{,}05^6$ (р.).

Многія практычныя задачы прыводзяць да паслядоўнасцей такога выгляду. Яны называюцца **геаметрычнымі прагрэсіямі.**

Азначэнне. Геаметрычнай прагрэсіяй называецца лікавая паслядоўнасць, першы член якой адрозны ад нуля, а кожны наступны, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, памножанаму на адзін і той жа для дадзенай паслядоўнасці лік, не роўны нулю, г. зн.

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ дзе } n \in N, \ q \neq 0.$$

Лік q называецца **назоўнікам геаметрычнай прагрэсіі.**

З роўнасці $b_{n+1} = b_n \cdot q$ вынікае, што $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

$$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q}$$

Каб задаць геаметрычную прагрэсію (b_n), дастаткова задаць яе першы член b_1 і назоўнік q.

Напрыклад, калі $b_1 = 3$, $q = 2$, то атрымаецца геаметрычная прагрэсія 3; 6; 12; 24; ... .

Калі $b_1 = 3$, $q = -2$, то атрымаецца геаметрычная прагрэсія, знакі членаў у якой чаргуюцца, паколькі назоўнік прагрэсіі з'яўляецца адмоўным лікам: 3; –6; 12; –24; ... .

Калі $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{4}$, то геаметрычная прагрэсія мае выгляд 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; ... .

Калі $b_1 = 3$, $q = 1$, то ўсе члены геаметрычнай прагрэсіі роўныя адзін аднаму: 3; 3; 3; 3; ... .

Каб вылічыць любы член геаметрычнай прагрэсіі, не вылічваючы ўсе папярэднія члены, карыстаюцца **формулай *n*-га члена геаметрычнай прагрэсіі**

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}.$$

Выведзем гэту формулу. Калі (b_n) — геаметрычная прагрэсія і q — яе назоўнік, то па азначэнні правільныя роўнасці:

$$b_2 = b_1 \cdot q; \quad b_3 = b_2 \cdot q; \quad b_4 = b_3 \cdot q; \ ...;$$

$$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q; \quad b_n = b_{n-1} \cdot q.$$

Памножым гэтыя роўнасці паміж сабой:

$$\times\begin{array}{l} b_2 = b_1 \cdot q \\ b_3 = b_2 \cdot q \\ b_4 = b_3 \cdot q \\ \ldots \\ b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q \\ b_n = b_{n-1} \cdot q \end{array}$$

$$b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ раз}}.$$

Падзелім абедзве часткі роўнасці на здабытак $b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$ і атрымаем $b_n = b_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-1 \text{ раз}}$.

Паколькі колькасць множнікаў q роўна $n - 1$, то роўнасць прыме выгляд

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Атрымалі формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі.

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Формула n-га члена геаметрычнай прагрэсіі (b_n) дазваляе вылічыць любы член прагрэсіі, ведаючы яе першы член, нумар члена і назоўнік прагрэсіі.

Прыклад 1. Паслядоўнасць (b_n) — геаметрычная прагрэсія, $b_1 = 2$, $q = 3$. Знайдзіце 8-ы член прагрэсіі.

Рашэнне. Па формуле n-га члена атрымаем:

$$b_8 = b_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot 3^7 = 2 \cdot 2187 = 4374.$$

Адказ: 4374.

Прыклад 2. Паслядоўнасць (b_n) — геаметрычная прагрэсія, $b_1 = 2{,}5$, $q = 2$. Ці з'яўляецца лік 320 членам гэтай прагрэсіі?

Рашэнне. Па ўмове $b_n = 320$, $b_1 = 2{,}5$, $q = 2$. Падставім гэтыя значэнні ў формулу n-га члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ і атрымаем ураўненне $320 = 2{,}5 \cdot 2^{n-1}$.

Рэшым гэта ўраўненне: $2^{n-1} = 128$; $2^{n-1} = 2^7$; $n - 1 = 7$; $n = 8$.

Паколькі 8 — натуральны лік, то лік 320 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі з нумарам 8.

Адказ: лік 320 з'яўляецца членам гэтай прагрэсіі.

Характарыстычная ўласцівасць геаметрычнай прагрэсіі

У геаметрычнай прагрэсіі модуль кожнага яе члена, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму прапарцыянальнаму папярэдняга і наступнага (суседніх з ім) яе членаў, г. зн. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ пры $n \geqslant 2$.

$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$,

або

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

пры $n \geqslant 2$

Доказ. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) для члена b_n запішам па формуле n-га члена папярэдні і наступны (суседнія) члены, г. зн. b_{n-1} і b_{n+1}:

$$b_{n-1} = b_1 q^{n-2}, \quad b_{n+1} = b_1 q^n.$$

Знойдзем сярэдняе прапарцыянальнае (сярэдняе геаметрычнае) суседніх з b_n членаў геаметрычнай прагрэсіі. Для гэтага памножым роўнасці $b_{n-1} = b_1 q^{n-2}$ і $b_{n+1} = b_1 q^n$ і атрымаем:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 q^{n-2} \cdot b_1 q^n.$$

Выканаем пераўтварэнні ў правай частцы роўнасці:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1^2 \cdot q^{2n-2},$$

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1^2 \cdot q^{2(n-1)},$$

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = \left(b_1 \cdot q^{n-1}\right)^2,$$

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = \left(b_n\right)^2,$$

адкуль атрымаем, што

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ або } |b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Справядлівае і адваротнае сцверджанне:

калі ў паслядоўнасці лікаў, адрозных ад нуля, модуль кожнага яе члена, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму прапарцыянальнаму папярэдняга і наступнага (суседніх з ім) яе членаў, то паслядоўнасць з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй.

Доказ. Няхай у некаторай лікавай паслядоўнасці (b_n) модуль кожнага яе члена, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму прапарцыянальнаму папярэдняга і наступнага яе членаў, г. зн. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

Тады $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, значыць, $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, г. зн. дзель ад дзялення кожнага члена паслядоўнасці на яго папярэдні член ёсць адзін і той жа лік, адрозны ад нуля. Абазначым яго q, атрымаем $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ пры любым натуральным n, значыць, $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Такім чынам, па азначэнні паслядоўнасць (b_n) — геаметрычная прагрэсія.

Абодва сцверджанні можна аб’яднаць у адно, якое называецца **характарыстычнай уласцівасцю геаметрычнай прагрэсіі:**

лікавая паслядоўнасць, усе члены якой адрозныя ад нуля, з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй тады і толькі тады, калі модуль кожнага яе члена, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму прапарцыянальнаму папярэдняга і наступнага яе членаў:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Прыклад 3. Праверце, ці з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй паслядоўнасць, зададзеная формулай $b_n = 6^n$.

Рашэнне. Запішам для $b_n = 6^n$ папярэдні і наступны члены паслядоўнасці:

$$b_{n-1} = 6^{n-1}, \quad b_{n+1} = 6^{n+1}.$$

Знойдзем сярэдняе прапарцыянальнае гэтых членаў:

$$\sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} = \sqrt{6^{n-1} \cdot 6^{n+1}} = \sqrt{6^{2n}} = |6^n| = 6^n = b_n.$$

Па характарыстычнай уласцівасці геаметрычнай прагрэсіі паслядоўнасць $b_n = 6^n$ з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй.

<table>
<tr><th colspan="2">Азначэнне геаметрычнай прагрэсіі</th></tr>
<tr><td>1. Паслядоўнасць 2; 10; 50; ... з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй. Прадоўжыце паслядоўнасць.</td><td>Паколькі паслядоўнасць з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй, то знойдзем яе назоўнік $q = 10 : 2 = 5$. Тады кожны наступны член роўны папярэдняму, памножанаму на лік 5: 2; 10; 50; 250; 1250; 6250; ... .</td></tr>
<tr><td>2. Вядомы члены геаметрычнай прагрэсіі: $b_7 = 16$; $b_8 = 32$. Знайдзіце назоўнік гэтай прагрэсіі.</td><td>Паколькі назоўнік геаметрычнай прагрэсіі роўны адносіне любога яе члена да папярэдняга, то $q = \frac{b_8}{b_7} = 32 : 16 = 2.$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Формула <i>n</i>-га члена геаметрычнай прагрэсіі</th></tr>
<tr><td>3. Паслядоўнасць (b_n) — геаметрычная прагрэсія. Знайдзіце пяты член гэтай прагрэсіі, калі $b_1 = -0,1$, $q = 4$.</td><td>Па формуле n-га члена геаметрычнай прагрэсіі $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ атрымаем: $b_5 = b_1 \cdot q^4 = -0,1 \cdot 4^4 = -25,6$.</td></tr>
<tr><td>4. Запішыце формулу n-га члена для геаметрычнай прагрэсіі –216; 36; –6; ... і знайдзіце яе сёмы член.</td><td>Па ўмове $b_1 = -216$, $b_2 = 36$, тады $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{36}{-216} = -\frac{1}{6}$.
Запішам формулу n-га члена дадзенай геаметрычнай прагрэсіі, падставіўшы ў формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ значэнні для b_1 і q: $b_n = -216 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.
Падставім $n = 7$ у формулу n-га члена дадзенай геаметрычнай прагрэсіі і знойдзем яе сёмы член:
$b_7 = -216 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{7-1} = -216 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{6} = -6^3 \cdot \frac{1}{6^6} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}$.</td></tr>
<tr><td>5. Знайдзіце нумар члена геаметрычнай прагрэсіі 0,1; 0,3; ..., роўнага 218,7.</td><td>Знойдзем назоўнік прагрэсіі:
$b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,3$, $q = \frac{b_2}{b_1} = 3$.
Вядома, што $b_n = 218,7$. Па формуле n-га члена геаметрычнай прагрэсіі $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ атрымаем:
$218,7 = 0,1 \cdot 3^{n-1}$; $3^{n-1} = 2187$;
$3^{n-1} = 3^7$; $n - 1 = 7$; $n = 8$.</td></tr>
</table>

6. Знайдзіце назоўнік і першы член геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_5 = 24$, $b_8 = -3$.	Па ўмове $b_5 = b_1 \cdot q^4 = 24$; $b_8 = b_1 \cdot q^7 = -3$. Складзём сістэму ўраўненняў $\begin{cases} b_1 \cdot q^4 = 24, \\ b_1 \cdot q^7 = -3. \end{cases}$ Падзелім другое ўраўненне на першае і атрымаем: $q^3 = -\frac{1}{8}$, $q = -\frac{1}{2}$. Падставім гэта значэнне q у першае ўраўненне сістэмы і атрымаем $b_1 = 384$.
Характарыстычная ўласцівасць геаметрычнай прагрэсіі	
7. Знайдзіце сорак дзявяты член геаметрычнай прагрэсіі, калі сорак восьмы яе член роўны 4, а пяцідзясяты яе член роўны 9.	Выкарыстаем характарыстычную ўласцівасць геаметрычнай прагрэсіі $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ і атрымаем $b_{49}^2 = b_{48} \cdot b_{50}$, г. зн. $b_{49}^2 = 4 \cdot 9$; $b_{49}^2 = 36$. Тады $b_{49} = -6$ або $b_{49} = 6$.
8. Пры якім значэнні x паслядоўнасць $x - 2$; $x - 1$; $x + 2$ з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй?	Па характарыстычнай уласцівасці прагрэсіі паслядоўнасць з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй, калі кожны яе член, пачынаючы з другога, роўны сярэдняму прапарцыянальнаму папярэдняга і наступнага членаў: $(x - 1)^2 = (x - 2)(x + 2)$. Рэшым атрыманае ўраўненне: $(x - 1)^2 = x^2 - 4$; $-2x = -5$; $x = 2{,}5$.

1. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) n-ы член вылічваецца па формуле:

а) $b_n = b_1 \cdot q$; б) $b_n = b_1 \cdot q^n$;

в) $b_n = b_1 + (n - 1)q$; г) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Выберыце правільны адказ.

2. Паслядоўнасць (b_n) з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй, калі для ўсіх членаў паслядоўнасці, пачынаючы з другога, выконваецца ўмова:

а) $b_n = (n - 1) \cdot b_{n+1}$; б) $b_n = b_{n-1} : b_{n+1}$;

в) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$; г) $b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2}$.

Выберыце правільны адказ.

4.174. Як вызначыць назоўнік геаметрычнай прагрэсіі, калі зададзены некалькі яе першых членаў? Вызначце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі:

а) 6; 12; 24; 48; ...;   б) 1; 4; 16; 64; ...;

в) 2; 6; 18; 54; ...;   г) 1; 0,5; 0,25; 0,125; ... .

4.175. Вылічыце назоўнік і наступныя чатыры члены геаметрычнай прагрэсіі:

а) –1; –2; –4; –8; ...;   б) 3; –0,3; 0,03; –0,003; ...;

в) 5; 5; 5; 5; ...;   г) $\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 4; ... .

4.176. Першы член геаметрычнай прагрэсіі роўны 10, а назоўнік роўны 2. Назавіце пяць першых членаў гэтай геаметрычнай прагрэсіі.

4.177. Знайдзіце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі:

а) $b_1 = 8,\ b_2 = -2$;   б) $b_9 = -6,\ b_{10} = -12$;

в) $b_{15} = 5\sqrt{5},\ b_{16} = 25$;   г) $b_n = \frac{3}{8},\ b_{n+1} = 1\frac{3}{4}$.

4.178. Як вызначыць па зададзеным члене геаметрычнай прагрэсіі яго нумар? У геаметрычнай прагрэсіі 0,01; 0,1; 1; 10; ... знайдзіце нумар члена, роўнага 1 000 000.

4.179. Назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n) роўны 2. Знайдзіце першы і другі члены гэтай прагрэсіі, калі:

а) $b_3 = 16$;   б) $b_3 = -1$;   в) $b_3 = \frac{1}{4}$;   г) $b_3 = -4\sqrt{3}$.

4.180. У геаметрычнай прагрэсіі чацвёрты член роўны 32. Знайдзіце ўсе папярэднія члены гэтай прагрэсіі, калі назоўнік прагрэсіі роўны:

а) 2;   б) $-\frac{1}{2}$;   в) 1;   г) –4.

Выканайце заданне двума спосабамі.

4.181. Паслядоўнасць (b_n) — геаметрычная прагрэсія. Выкарыстайце формулу n-га члена для вылічэння шостага члена гэтай прагрэсіі, калі:

а) $b_1 = 5,\ q = 2$;   б) $b_1 = -0{,}002,\ q = 10$;

в) $b_1 = 1,\ q = \frac{1}{3}$;   г) $b_1 = \frac{\sqrt{3}}{9},\ q = -\sqrt{3}$.

4.182. Паслядоўнасць (b_n) — геаметрычная прагрэсія. Выразіце b_8 праз:

а) b_1 і q; б) b_7 і q; в) b_9 і q; г) b_5 і q.

4.183. Для геаметрычнай прагрэсіі (b_n) выразіце праз b_{19} і q:

а) b_1; б) b_{20}; в) b_{14}; г) b_{27}.

4.184. Запішыце формулу n-га члена і знайдзіце b_5 і b_7 для геаметрычнай прагрэсіі (b_n):

а) $-25; -5; -1; \ldots;$ б) $\frac{1}{27}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; \ldots;$

в) $\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3}; \ldots;$ г) $-0{,}25; 0{,}5; -1; \ldots$.

4.185. Ці праўда, што можна знайсці першы член геаметрычнай прагрэсіі па адным з яе членаў і назоўніку прагрэсіі? Знайдзіце першы член геаметрычнай прагрэсіі (b_n), у якой:

а) $b_8 = 384$ і $q = 2$;

б) $b_5 = 31{,}25$ і $q = -2{,}5$;

в) $b_{10} = \frac{1}{243}$ і $q = \frac{1}{3}$.

4.186. Для геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_4 = -4$, $b_3 = 2$. Знайдзіце назоўнік прагрэсіі і яе восьмы член.

4.187. Геаметрычная прагрэсія (b_n) зададзена формулай n-га члена $b_n = 4^n$. Ці праўда, што:

а) $q = 2$; б) $q = 4$; в) $b_1 = \frac{1}{4}$; г) $b_1 = 4$?

4.188. Вікторыя амазонская — самы вялікі гарлачык у свеце — вельмі хутка расце. Днём яе ліст мае дыяметр 0,1 см, а праз 12 г дасягае максімальнага памеру. Які максімальны памер ліста гарлачыка, калі кожную гадзіну яго дыяметр павялічваецца ў 2 разы?

4.189. Знайдзіце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (x_n), у якой:

а) $x_1 = 2$; $x_7 = 1458$; б) $x_1 = 74\frac{2}{3}$; $x_6 = 2\frac{1}{3}$.

4.190. Лік 324 з'яўляецца членам геаметрычнай прагрэсіі (b_n), у якой $b_1 = 4$, а $q = 3$. Знайдзіце нумар гэтага члена.

4.191. Паслядоўнасць $\frac{3}{16}; \frac{3}{8}; \frac{3}{4}; \ldots$ — геаметрычная прагрэсія. Які нумар мае член прагрэсіі, роўны 96?

4.192. У першы дзень сусветнай прэм’еры кінафільма было прададзена 300 000 білетаў. Кожны наступны дзень колькасць прададзеных білетаў павялічвалася на 10 %. Колькі білетаў было прададзена за другі і за пяты дні прэм’еры?

4.193. Знайдзіце назоўнік і першы член геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі:

а) $b_4 = 2,\ b_7 = -54$; б) $b_3 = 25,\ b_6 = -3125$;

в) $b_2 = 10^8,\ b_6 = 10^4$.

4.194. Знайдзіце пятнаццаты член геаметрычнай прагрэсіі (y_n), калі $b_4 = 1,\ b_9 = 10^{-5}$.

4.195. Якія два лікі трэба ўставіць паміж лікамі 9 і 243, каб яны разам з дадзенымі лікамі ўтварылі геаметрычную прагрэсію?

4.196. Паміж лікамі $40\frac{1}{2}$ і $5\frac{1}{3}$ устаўце чатыры такія лікі, якія разам з дадзенымі лікамі ўтвораць геаметрычную прагрэсію. Чаму роўны назоўнік гэтай геаметрычнай прагрэсіі?

4.197. Знайдзіце восьмы член геаметрычнай прагрэсіі, калі сёмы і дзявяты яе члены адпаведна роўны:

а) 4 і 25; б) –9 і –16; в) 5 і 10.

4.198. Вядома, што ў геаметрычнай прагрэсіі, усе члены якой дадатныя, $b_4 = 5,\ b_6 = 1$. Знайдзіце b_5; q; b_1; b_8.

4.199. Знайдзіце, пры якім значэнні зменнай значэнні выразаў будуць паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі:

а) 5; $9 - 4x$ і $4x + 1$;

б) $x + 11$; $x - 5$ і $2x - 10$;

в) 4; $x - 5$ і $(x + 3)^2$.

4.200*. Праверце, ці з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй паслядоўнасць:

а) $b_n = 5^n$; б) $c_n = \frac{7}{11} \cdot 8^{n-1}$;

в) $x_n = 2n^3$; г) $y_n = -5n$.

Калі з’яўляецца, то знайдзіце яе першы член і назоўнік.

4.201*. Дакажыце, што паслядоўнасць 3^n; 3^{n+1}; 3^{n+2}; 3^{n+3}; ..., дзе $n \in N$, з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй. Знайдзіце назоўнік гэтай прагрэсіі.

4.202*. Знайдзіце першы член і назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі:

а) $b_7 = 5b_5$ і $b_5 - b_3 = 48$;

б) $b_1 + b_3 = 10$ і $b_2 + b_4 = 30$;

в) $b_5 - b_1 = 15$ і $b_4 - b_2 = 6$.

4.203*. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_{43} \cdot b_{36} = 57$. Знайдзіце значэнне выразу $b_{33} \cdot b_{46}$.

4.204*. Знайдзіце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_7 - b_5 = 48$; $b_6 + b_5 = 48$.

4.205*. Пяты член геаметрычнай прагрэсіі роўны 2. Чаму роўны здабытак першых дзевяці членаў гэтай прагрэсіі?

4.206*. Дадзена геаметрычная прагрэсія (b_n). Вызначце, ці з'яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй паслядоўнасць:

а) b_1; b_3; b_5; ...; б) $b_1 + 7$; $b_2 + 7$; $b_3 + 7$; ...;

в) $5b_1$; $5b_2$; $5b_3$; ...; г) b_1^2; b_2^2; b_3^2; ... .

4.207*. У геаметрычнай прагрэсіі з дадатнымі членамі $b_1 + b_2 = 20$, $b_3 + b_4 = 180$, $b_n = 405$. Знайдзіце n.

4.208. Назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n) роўны 5. Знайдзіце першы член прагрэсіі, калі:

а) $b_2 = 20$; б) $b_2 = -5$; в) $b_2 = 24$; г) $b_2 = -15\frac{1}{7}$.

4.209. Як вызначыць назоўнік геаметрычнай прагрэсіі, калі зададзены некалькі яе першых членаў? Знайдзіце назоўнік і шосты член геаметрычнай прагрэсіі:

а) –1; –5; –25; –125; ...; б) 8; 4; 2; 1; ...;

в) –3; 3; –3; 3; ...; г) $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; 9; ... .

4.210. Знайдзіце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі:

а) $b_1 = 10$, $b_2 = 30$; б) $b_5 = -12$, $b_6 = 3$;

в) $b_{17} = 0{,}25$, $b_{18} = 0{,}5$; г) $b_{21} = 16$, $b_{22} = 4\sqrt{2}$.

4.211. У геаметрычнай прагрэсіі шосты член роўны 27. Знайдзіце два папярэднія і два наступныя члены гэтай прагрэсіі, калі назоўнік прагрэсіі роўны:

а) 3; б) $-\frac{1}{3}$; в) 1; г) –3.

4.212. Для геаметрычнай прагрэсіі (b_n) выразіце b_{12} праз:
а) b_1 і q; б) b_{11} і q; в) b_{15} і q; г) b_7 і q.

4.213. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядомы першы член b_1 і назоўнік q. Запішыце формулу n-га члена гэтай прагрэсіі і знайдзіце b_4 і b_7, калі:

а) $b_1 = 5$, $q = 2$; б) $b_1 = -1$, $q = \frac{1}{3}$;

в) $b_1 = 16$, $q = -\frac{1}{2}$; г) $b_1 = 9\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$.

4.214. Знайдзіце першы член геаметрычнай прагрэсіі (b_n), у якой $b_7 = \frac{4}{9}$ і $q = -\frac{1}{3}$.

4.215. Для геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_2 = 6$, $b_3 = -2$. Знайдзіце назоўнік прагрэсіі і пяты член гэтай прагрэсіі.

4.216. Тры гады назад насельніцтва горада складала 250 000 чал. У сувязі з пашырэннем вытворчых магутнасцей прадпрыемстваў горада ў наступныя гады колькасць жыхароў горада павялічвалася на 8 % штогадова. Ці праўда, што зараз у горадзе пражывае больш за 350 000 чалавек?

4.217. Знайдзіце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (c_n), у якой $c_1 = -1{,}5$, $c_4 = 96$.

4.218. Ці з'яўляецца лік 486 членам геаметрычнай прагрэсіі (b_n), у якой $b_1 = 2$, а $q = 3$?

4.219. Лік –256 з'яўляецца членам геаметрычнай прагрэсіі –8; –16; –32; ... . Знайдзіце нумар гэтага члена.

4.220. Праверце, ці з'яўляецца лік 1024 членам геаметрычнай прагрэсіі 4; 16; 64; ... .

4.221. Прадпрыемства ў студзені плануе запусціць новую вытворчую лінію. Па папярэдніх разліках, за першы месяц на новай лініі можа быць выраблена 256 тыс. адзінак прадукцыі. Затым мяркуецца павялічваць выпуск прадукцыі на 25 % штомесячна. У якім месяцы згодна з гэтым планам прадпрыемства зможа давесці выпуск прадукцыі да 625 тыс. адзінак у месяц?

4.222. Знайдзіце назоўнік і першы член геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_4 = -48$, $b_8 = -768$.

4.223. Якія чатыры лікі трэба ўставіць паміж лікамі 160 і 5, каб яны разам з дадзенымі лікамі ўтварылі геаметрычную прагрэсію? Чаму роўны назоўнік гэтай геаметрычнай прагрэсіі?

4.224. Знайдзіце дваццаты член і назоўнік геаметрычнай прагрэсіі, калі дзевятнаццаты і дваццаць першы яе члены адпаведна роўны 2 і 50.

4.225. Знайдзіце, пры якім значэнні зменнай значэнні выразаў будуць паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі:

а) 4; $x - 5$ і $7 - 2x$; б) $3x - 4$; $x + 2$ і $x + 6$.

4.226*. Дакажыце, што паслядоўнасць $b_n = \frac{2}{7} \cdot 3^n$ з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй.

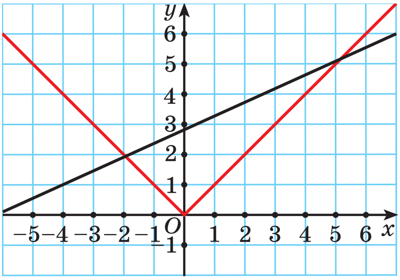
4.227*. Знайдзіце першы член і назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_4 - b_5 = -168$ і $b_3 + b_4 = -28$.

4.228*. Дадзена геаметрычная прагрэсія (b_n). Вызначце, ці з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй паслядоўнасць:

а) b_2; b_4; b_6; ...; б) $\frac{1}{b_1}$; $\frac{1}{b_2}$; $\frac{1}{b_3}$; ... .

4.229*. Шосты член геаметрычнай прагрэсіі роўны 10. Чаму роўны здабытак адзінаццаці першых членаў гэтай прагрэсіі?

4.230. З дапамогай графікаў функцый $y = |x|$ і $y = \frac{3x}{7} + 2\frac{6}{7}$ (рыс. 95) рашыце ўраўненне $|x| = \frac{3x}{7} + 2\frac{6}{7}$. Выканайце праверку.



Рыс. 95

4.231. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{7}{\sqrt{11} - 2} + \frac{5}{4 + \sqrt{11}}$.

4.232. Скараціце дроб $\frac{y^2 + 2y - 15}{y^2 - 9}$.

4.233. Аўтобус павінен праехаць 700 км за 10 г. Аказалася, што 45 % шляху ён пераадолеў за 4,5 г. З якой скорасцю яму трэба рухацца далей, каб прыбыць у пункт прызначэння па раскладзе?

§ 18. Формула сумы *n* першых членаў геаметрычнай прагрэсіі

4.234. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(2^{-1}+3^{-1}\right)^{-1}$; б) $2^4 \cdot 16 : (-8)^3$.

4.235. Рашыце ўраўненне $(x-6)\left(x^2-3\right)=x-6$.

Нямала легенд звязана з геаметрычнай прагрэсіяй. Найбольш вядомая з іх расказвае пра вынаходніка шахмат.

Паводле легенды, калі стваральнік шахмат паказаў сваю вынаходку правіцелю краіны, таму так спадабалася гульня, што ён даў вынаходніку права самому выбраць узнагароду. Мудрэц папрасіў у правіцеля за першую клетку шахматнай дошкі заплаціць яму адно зерне пшаніцы, за другую — два, за трэцюю — чатыры і г. д., падвойваючы колькасць зярнят на кожнай наступнай клетцы (рыс. 96).

Рыс. 96

Правіцель хутка пагадзіўся і загадаў казначэю выдаць мудрацу патрэбную колькасць зярнят. Аднак калі казначэй выканаў разлікі, то аказалася, што расплаціцца немагчыма, хіба толькі асушыць моры і акіяны і засеяць усё пшаніцай.

Колькасць зярнят, якую папрасіў мудрэц, роўна суме членаў геаметрычнай прагрэсіі 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}, г. зн. $1+2+2^2+2^3+...+2^{63}$.

Выведзем формулу, па якой можна знаходзіць суму *n* першых членаў геаметрычнай прагрэсіі.

Абазначым суму *n* першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n) праз S_n, тады:

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + ... + b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Памножым абедзве часткі гэтай роўнасці на назоўнік прагрэсіі q і атрымаем:

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + ... + b_1 \cdot q^n.$$

Аднімем ад другой роўнасці першую і атрымаем:

$$\begin{array}{l} - \begin{array}{l} S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^n \\ S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1} \end{array} \\ \hline S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot q^n - b_1, \end{array}$$

г. зн. $S_n \cdot (q-1) = b_1\left(q^n - 1\right)$. Выразім з гэтай роўнасці S_n пры $q \neq 1$ і атрымаем формулу сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі $S_n = \frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$.

Формула сумы *n* першых членаў геаметрычнай прагрэсіі

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$$

Калі $q = 1$, то ўсе члены прагрэсіі роўны першаму члену, і суму n першых членаў такой геаметрычнай прагрэсіі можна знайсці па формуле $S_n = nb_1$.

Вылічым па формуле сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі колькасць зярнят, якую папрасіў як узнагароду мудрэц, г. зн. суму

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}.$$

Першы член геаметрычнай прагрэсіі $b_1 = 1$, назоўнік $q = 2$, колькасць членаў прагрэсіі роўна 64.

Тады $S_{64} = \frac{1 \cdot \left(2^{64} - 1\right)}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$

Такой колькасці пшаніцы чалавецтва не сабрала за ўсю сваю гісторыю.

Прыклад 1. Знайдзіце суму дзесяці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n), у якой $b_1 = 0{,}5$, $q = 2$.

Рашэнне. Прыменім формулу сумы $S_n = \frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ для $n = 10$, атрымаем $S_{10} = \frac{b_1\left(q^{10}-1\right)}{q-1} = \frac{0{,}5\left(2^{10}-1\right)}{2-1} = 0{,}5 \cdot (1024 - 1) =$ $= 0{,}5 \cdot 1023 = 511{,}5.$

Адказ: 511,5.

Прыклад 2. Знайдзіце суму дванаццаці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі 3; –6; 12; –24; ... .

Рашэнне. Падставім у формулу $S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ значэнні $b_1 = 3$, $q = -2$, $n = 12$: $S_{12} = \frac{3\cdot\left((-2)^{12}-1\right)}{-2-1} = \frac{3\cdot\left(2^{12}-1\right)}{-3} = -(2^{12}-1) = -4095.$

Адказ: -4095.

Формула сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі	
1. Знайдзіце суму пяці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_2 = -1$, $b_3 = -\frac{1}{2}$.	Знойдзем назоўнік і першы член геаметрычнай прагрэсіі: $q = \frac{b_3}{b_2} = \left(-\frac{1}{2}\right):(-1) = \frac{1}{2}$, тады $b_1 = \frac{b_2}{q} = (-1):\frac{1}{2} = -2.$ Па формуле $S_n = \frac{b_1\cdot\left(q^n-1\right)}{q-1}$ знойдзем $S_5 = \frac{-2\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5-1\right)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{-2\cdot\left(\frac{1}{32}-1\right)}{-\frac{1}{2}} =$ $= \frac{-2\cdot\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{-62}{32}:\frac{1}{2} = \frac{-62}{16} = -3\frac{7}{8}.$
2. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 605. Знайдзіце колькасць членаў прагрэсіі, калі $b_1 = 5$, $q = 3$.	Падставім у формулу $S_n = \frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$ значэнні $S_n = 605$, $b_1 = 5$, $q = 3$ і знойдзем n: $605 = \frac{5\left(3^n-1\right)}{3-1}$; $5\left(3^n-1\right) = 605\cdot 2$; $3^n - 1 = 242$; $3^n = 243$; $3^n = 3^5$; $n = 5.$
3. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_5 = 6$; $b_6 = -36$. Знайдзіце S_3.	Знойдзем назоўнік прагрэсіі: $q = b_6 : b_5 = -36 : 6 = -6.$ Падставім у формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі $b_5 = 6$ і $q = -6$ і знойдзем першы член прагрэсіі: $b_5 = b_1\cdot q^4$; $6 = b_1\cdot(-6)^4$; $b_1 = \frac{1}{216}$.

	Па формуле $S_n = \dfrac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1}$ знойдзем суму трох першых членаў геаметрычнай прагрэсіі: $S_3 = \dfrac{\frac{1}{216}\left(\left(-6\right)^3 - 1\right)}{-6 - 1} = \dfrac{31}{216}$.
4. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_3 = 16, q = 2, b_n = 64$. Знайдзіце суму n першых членаў гэтай прагрэсіі.	Ведаючы, што трэці член геаметрычнай прагрэсіі роўны 16, а яе назоўнік роўны 2, па формуле $b_3 = b_1 \cdot q^2$ знойдзем першы член прагрэсіі: $16 = b_1 \cdot 2^2$; $b_1 = 4$. Выкарыстаем формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ і знойдзем n: $64 = 4 \cdot 2^{n-1}$; $2^{n-1} = 16$; $2^{n-1} = 2^4$; $n - 1 = 4$; $n = 5$. Па формуле сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі знойдзем S_5: $S_5 = \dfrac{4 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 124$.

1. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) сума n першых членаў вылічваецца па формуле:

а) $S_n = b_1 \cdot 2q^n$; б) $S_n = b_1 \cdot q^n$;

в) $S_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; г) $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Выберыце правільны адказ.

2. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_1 = -12$, $q = 5$. Ці праўда, што сума n першых членаў дадзенай прагрэсіі пры любым n з'яўляецца адмоўным лікам?

4.236. Знайдзіце суму 99 першых членаў геаметрычнай прагрэсіі 7; –7; 7; –7; ... .

4.237. Знайдзіце суму шасці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі:

а) 5; 10; 20; ...; б) 9; 3; 1; ...;

в) $\frac{1}{2}$; –1; 2; ...; г) 3; $3\sqrt{3}$; 9; ... .

4.238. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце:

а) S_5, калі $b_1 = 1$, $q = 5$;

б) S_8, калі $b_1 = -4$, $q = -0{,}5$;

в) S_{10}, калі $b_1 = -2$, $q = \sqrt{2}$.

4.239. Прадпрыемства на працягу паўгода праводзіла мадэрнізацыю вытворчасці, у выніку чаго расходы на выпуск адзінкі прадукцыі памяншаліся штомесячна на 10 % у параўнанні з папярэднім месяцам. Вызначце, колькі сродкаў прадпрыемства здолела сэканоміць за шэсць месяцаў, калі да мадэрнізацыі расходы на выпуск адзінкі прадукцыі складалі 100 р. і штомесячна прадпрыемства выпускала 500 адзінак прадукцыі.

4.240. Прадпрымальнік запланаваў на працягу месяца кожны дзень адкладваць грошы. Прычым у першы дзень ён плануе адкласці 1 к., у другі — 2 к., у трэці — 4 к., у чацвёрты — 8 к. і г. д. Ці зможа ён рэалізаваць свой план, калі яго штомесячны заробак складае 1200 р.?

4.241. Вядомы шаснаццаты член геаметрычнай прагрэсіі і назоўнік прагрэсіі, не роўны 1. Складзіце план вылічэння сумы 9 першых членаў гэтай прагрэсіі.

4.242. Знайдзіце суму васьмі першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (x_n), калі вядома, што $x_3 = \frac{3}{32}$; $q = \frac{1}{2}$.

4.243. Знайдзіце суму пяці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_1 = 9$; $b_5 = \frac{16}{9}$. Колькі рашэнняў мае задача?

4.244. Вядомы дзявяты і шосты члены геаметрычнай прагрэсіі з назоўнікам, не роўным 1. Складзіце план вылічэння сумы 10 першых членаў гэтай прагрэсіі.

4.245. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце S_6, калі вядома, што:

а) $b_4 = 216$; $b_5 = -648$;

б) $b_2 = 25$; $b_5 = 125\sqrt{5}$;

в) $b_3 = -12$; $b_5 = -48$.

4.246. Знайдзіце b_n і S_n для геаметрычнай прагрэсіі, у якой:

а) $b_1 = 0{,}1$; $q = 10$; $n = 6$;

б) $b_1 = -3$; $q = \sqrt{3}$; $n = 8$.

4.247. Сума чатырох першых членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 65. Знайдзіце першы член прагрэсіі, калі яе назоўнік роўны $\frac{2}{3}$.

4.248. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна –85. Знайдзіце колькасць членаў прагрэсіі, калі $b_1 = 1$, $q = -2$.

4.249. Знайдзіце суму, ведаючы, што яе складаемыя — паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі:

а) $1 + 2 + 4 + ... + 256$; б) $1 - 3 + 9 - ... + 729$.

4.250. Геаметрычная прагрэсія зададзена формулай:

а) $b_n = 2 \cdot 3^n$; знайдзіце S_6;

б) $b_n = \frac{3}{8} \cdot 2^{n-1}$; знайдзіце S_9.

4.251. Рознасць чацвёртага і трэцяга членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 24, а рознасць трэцяга і другога членаў роўна 12. Знайдзіце суму пяці першых членаў гэтай прагрэсіі.

4.252*. Знайдзіце колькасць членаў геаметрычнай прагрэсіі, у якой $q = -\frac{1}{3}$, $b_n = \frac{1}{9}$, $S_n = 6\frac{7}{9}$.

4.253*. У геаметрычнай прагрэсіі (c_n) з дадатнымі членамі сума чатырох першых членаў роўна 255 і $c_1 + c_3 = 51$. Знайдзіце q.

4.254*. У геаметрычнай прагрэсіі $S_7 = 14$, $S_{14} = 18$. Знайдзіце суму членаў гэтай прагрэсіі з 15-га па 21-ы ўключна.

4.255*. Выведзіце формулу здабытку n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі.

4.256*. Знайдзіце суму квадратаў шасці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі, першы член якой роўны $5\sqrt{2}$, а назоўнік роўны $\sqrt{2}$.

4.257*. Сума трох дадатных лікаў, якія ўтвараюць арыфметычную прагрэсію, роўна 21. Калі да іх адпаведна дадаць 2, 3 і 9, то атрыманыя лікі ўтвораць геаметрычную прагрэсію. Знайдзіце гэтыя лікі.

4.258*. Знайдзіце суму чатырох дадатных лікаў, з якіх першыя тры ўтвараюць арыфметычную прагрэсію, а апошнія тры — геаметрычную прагрэсію. Сума трох першых лікаў роўна 12, а сума трох апошніх — 19.

4.259*. Знайдзіце чатыры цэлыя лікі, з якіх першыя тры з'яўляюцца паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі, а апошнія тры — паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі, калі сума крайніх лікаў роўна 21, а сума сярэдніх лікаў роўна 18.

4.260. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце:

а) S_8, калі $b_1 = 9$, $q = 2$; б) S_5, калі $b_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$.

4.261. Знайдзіце суму васьмі першых членаў геаметрычнай прагрэсіі:

а) 7; 14; 28; ...; б) –3; 3; –3; ...; в) 5; $5\sqrt{5}$; 25; ... .

4.262. Дзякуючы эфектыўнай рэкламнай кампаніі на прадпрыемстве плануюць у першы месяц дадаткова рэалізаваць 1000 вырабаў. Далей мяркуецца штомесячнае павелічэнне дадатковай рэалізацыі ў 1,5 раза. За колькі месяцаў прадпрыемства зможа рэалізаваць па гэтым плане дадаткова 8125 вырабаў?

4.263. Вядомы трэці член геаметрычнай прагрэсіі і яе назоўнік. Складзіце план знаходжання 7 першых членаў гэтай прагрэсіі. Прапануйце два спосабы.

4.264. Знайдзіце суму шасці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі (c_n), калі вядома, што $c_4 = 3$; $q = -3$.

4.265. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) знайдзіце S_7, калі вядома, што:

а) $b_6 = 48{,}6$; $b_7 = 72{,}9$; б) $b_3 = 34$; $b_8 = 1088$.

4.266. Знайдзіце b_n і S_n для геаметрычнай прагрэсіі, у якой $b_1 = -1$; $q = -\frac{2}{3}$; $n = 5$.

4.267. Сума чатырох першых членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 62,4. Знайдзіце першы член прагрэсіі, калі яе назоўнік роўны 0,2.

4.268. Сума членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 684. Знайдзіце колькасць членаў прагрэсіі, калі яе першы член роўны 12, а назоўнік роўны 7.

4.269. Знайдзіце суму $1 - 2 + 4 - ... - 128$, ведаючы, што яе складаемыя — паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі.

4.270. Геаметрычная прагрэсія зададзена формулай $b_n = 5 \cdot 2^{n+1}$. Знайдзіце S_8.

4.271*. Знайдзіце колькасць членаў геаметрычнай прагрэсіі, у якой $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$.

4.272*. Знайдзіце суму членаў геаметрычнай прагрэсіі (b_n) з шостага па дзясяты ўключна, калі $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -2$.

4.273*. Тры дадатныя лікі, якія даюць у суме 30, утвараюць арыфметычную прагрэсію. Калі ад першага ліку адняць 5, ад другога — 4, а трэці лік пакінуць без змен, то атрыманыя лікі ўтвораць геаметрычную прагрэсію. Знайдзіце гэтыя лікі.

4.274. Параўнайце дробы:

а) $\frac{3}{7}$ і $\frac{11}{13}$; б) $-\frac{8}{9}$ і $-\frac{15}{17}$.

4.275. Знайдзіце значэнне выразу $a^{-1}+b^{-1}$ пры $a=\frac{1}{3}$ і $b=-0{,}25$.

4.276. Неабходна сабраць аднолькавыя камплекты, якія складаюцца з ручак, алоўкаў і сшыткаў. Знайдзіце, якую найбольшую колькасць камплектаў можна сабраць з 304 ручак, 190 алоўкаў і 114 сшыткаў, выкарыстаўшы пры гэтым усе прадметы.

4.277. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} x^2-6x+5>0, \\ x-2\leqslant 0. \end{array}\right.$

4.278. За перавод грошай з аднаго рахунку на другі банк бярэ 1,5 % ад сумы пераводу. Якую найбольшую суму грошай можна перавесці, маючы на рахунку дакладна 1000 р.?

4.279. Рашыце ўраўненне $(3x^2-x-4)(3x^2-x+2)=7$, выкарыстаўшы метад замены зменнай.

§ 19. Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі

4.280. Якія з наступных дробаў можна запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу: $\frac{2}{25}$; $\frac{7}{75}$; $\frac{4}{45}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{11}{120}$?

4.281. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{25}+\frac{1}{3}-\frac{1}{45}$.

4.282. Ці праўда, што $\frac{1}{6}=0{,}166...=0{,}1(6)$?

Любы звычайны дроб можна запісаць у выглядзе дзесятковага дробу — канечнага або бясконцага перыядычнага дробу. Напрыклад, $\frac{2}{50}=0{,}04$ — канечны дзесятковы дроб. Бясконцы перыядычны дзесятковы дроб атрымліваецца ў выпадку, калі дзяленне «не заканчваецца», напрыклад $\frac{2}{3} = 0{,}6666... = 0{,}(6)$, $\frac{6}{11} = 0{,}5454... = 0{,}(54)$.

Вы разглядалі правіла запісу канечнага дзесятковага дробу ў выглядзе звычайнага дробу (напрыклад, $0{,}17 = \frac{17}{100}$, $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ і да т. п.).

Высветлім, як бясконцы перыядычны дзесятковы дроб запісаць у выглядзе звычайнага дробу.

Разгледзім, напрыклад, бясконцы перыядычны дзесятковы дроб $0{,}(7) = 0{,}7777...$. Вызначым, якому звычайнаму дробу роўны гэты лік.

Запішам дроб 0,(7) у выглядзе сумы разрадных складаемых:

$$0{,}7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... \, .$$

У дадзеным выпадку неабходна знайсці суму бясконцай колькасці складаемых.

Складаемыя гэтай сумы з'яўляюцца членамі бясконцай геаметрычнай прагрэсіі з назоўнікам $q = \frac{1}{10} < 1$. Такія геаметрычныя прагрэсіі называюцца **бясконца спадальнымі геаметрычнымі прагрэсіямі.**

Азначэнне. Бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй называецца такая бясконцая геаметрычная прагрэсія, у якой назоўнік $|q| < 1$.

Напрыклад, геаметрычная прагрэсія 8; 4; 2; ... з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй, паколькі $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} < 1$.

Геаметрычная прагрэсія 9; –3; 1; $-\frac{1}{3}$, ... таксама з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй, паколькі $|q| = \left|\frac{-3}{9}\right| = \frac{1}{3} < 1$.

Для таго каб запісаць бясконцы перыядычны дзесятковы дроб у выглядзе звычайнага, трэба знайсці **суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі**. Яе абазначаюць літарай S і знаходзяць па формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Пакажам ідэю вывaду формулы сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі.

Разгледзім бясконцую геаметрычную прагрэсію (b_n), у якой $|q| < 1$. Сума n першых членаў дадзенай прагрэсіі $b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...$ вылічваецца па формуле $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

Запішам гэту формулу ў выглядзе $S_n = \dfrac{b_1}{1-q} \cdot \left(1 - q^n\right)$.

Будзем лічыць, што n неабмежавана нарастае (гавораць, што імкнецца да бясконцасці, і запісваюць $n \to \infty$). Паколькі $|q| < 1$, то пры неабмежаваным павелічэнні ліку n ступень q^n імкнецца да нуля, а значэнне рознасці $1 - q^n$ імкнецца да адзінкі. Значыць, пры неабмежаваным павелічэнні ліку n сума $S_n = \dfrac{b_1}{1-q} \cdot \left(1 - q^n\right)$ імкнецца да ліку $\dfrac{b_1}{1-q}$, што можна запісаць у выглядзе $S_n \to \dfrac{b_1}{1-q}$ пры $n \to \infty$.

Лік $\dfrac{b_1}{1-q}$ называюць сумай бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n), у якой $|q| < 1$. Такім чынам, $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Абазначым суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі літарай S і атрымаем формулу: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Вылічым па гэтай формуле суму разрадных складаемых: $0{,}7777... = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + ...$.

Складаемыя гэтай сумы ўтвараюць бясконца спадальную геаметрычную прагрэсію $\dfrac{7}{10}$; $\dfrac{7}{100}$; $\dfrac{7}{1000}$; ..., першы член якой роўны $\dfrac{7}{10}$, а назоўнік роўны $\dfrac{1}{10}$.

Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \ |q| < 1$$

Паколькі $|q| < 1$, то можна знайсці суму гэтай бясконцай прагрэсіі. Падставім $b_1 = \dfrac{7}{10}$ і $q = \dfrac{1}{10}$ у формулу $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ і атрымаем: $S = \dfrac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{7}{9}$.

Значыць, $0,(7) = 0,7777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + ... = \frac{7}{9}$.

Такім чынам, бясконцы перыядычны дзесятковы дроб 0,(7) можна запісаць у выглядзе звычайнага дробу $\frac{7}{9}$, г. зн. $0,(7) = \frac{7}{9}$.

Такім жа спосабам можна любы бясконцы перыядычны дзесятковы дроб запісаць у выглядзе звычайнага дробу.

Каб запісаць бясконцы перыядычны дзесятковы дроб у выглядзе звычайнага дробу, трэба:

① Запісаць лік у выглядзе сумы разрадных складаемых.	Запішыце ў выглядзе звычайнага дробу лік 2,4(15). ① $2,4(15) = 2,41515... =$ $= 2 + 0,4 + 0,015 + 0,00015 + ...$.
② Вылучыць суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі.	② $S = 0,015 + 0,00015 + ...$.
③ Назваць першы член b_1 і знайсці назоўнік гэтай прагрэсіі q.	③ $b_1 = 0,015$; $q = \frac{0,00015}{0,015} = 0,01$.
④ Знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі па формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.	④ $S = \frac{0,015}{1-0,01} = \frac{0,015}{0,99} = \frac{15}{990} = \frac{1}{66}$.
⑤ Вылічыць суму першых складаемых і знойдзенага значэння сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі.	⑤ $2,4 + \frac{1}{66} = 2\frac{4}{10} + \frac{1}{66} = 2\frac{2}{5} + \frac{1}{66} =$ $= 2\frac{137}{330}$. $2,4(15) = 2\frac{137}{330}$.

Бясконца спадальная геаметрычная прагрэсія

1. У бясконцай геаметрычнай прагрэсіі $b_1 = -36$, $b_2 = 6$. Ці з'яўляецца гэта прагрэсія бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй?	Знойдзем назоўнік прагрэсіі: $q = \frac{6}{-36} = -\frac{1}{6}$. Паколькі $\lvert q \rvert < 1$, то дадзеная прагрэсія з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй.

2. Ці з’яўляецца бясконца спадальнай геаметрычная прагрэсія: а) $4;\ \frac{4}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{4}{27};\ \ldots;$ б) $1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ -\frac{1}{27};\ \ldots;$ в) $2;\ -4;\ 8;\ -16;\ \ldots$?	а) Кожны член гэтай геаметрычнай прагрэсіі, пачынаючы з другога, роўны папярэдняму, памножанаму на лік $\frac{1}{3}$. Паколькі $\lvert q \rvert = \frac{1}{3} < 1$, то прагрэсія з’яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй. б) Паколькі $\lvert q \rvert = \left\lvert -\frac{1}{3} \right\rvert = \frac{1}{3} < 1$, то прагрэсія з’яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй. в) Назоўнік прагрэсіі $q = -2$. Паколькі $\lvert -2 \rvert > 1$, то прагрэсія не з’яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй.
Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі	
3. Знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой $b_1 = 5,\ q = -\frac{1}{2}$.	Па формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ атрымаем: $S = \frac{5}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.
4. У бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі $S = 90,\ q = 0{,}1$. Знайдзіце першы член гэтай прагрэсіі.	У формулу сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі $S = \frac{b_1}{1-q}$ падстаўім $S = 90$, $q = 0{,}1$ і атрымаем $90 = \frac{b_1}{1-0{,}1}$. Рэшым атрыманае ўраўненне: $90 = \frac{b_1}{0{,}9},\ b_1 = 81$.
5. Запішыце бясконцы перыядычны дзесятковы дроб 15,2(3) у выглядзе звычайнага дробу.	① $15{,}2(3) = 15 + 0{,}2 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$. ② $S = 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots$. ③ $b_1 = 0{,}03;\ q = \frac{0{,}003}{0{,}03} = 0{,}1$. ④ $S = \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{0{,}03}{0{,}9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$. ⑤ $15{,}2 + \frac{1}{30} = 15\frac{1}{5} + \frac{1}{30} = 15\frac{7}{30}$. $15{,}2(3) = 15\frac{7}{30}$.

1. Кожны член бясконцай паслядоўнасці, пачынаючы з другога, меншы за папярэдні ў 3 разы. Гэта паслядоўнасць: а) з’яўляецца арыфметычнай прагрэсіяй; б) з’яўляецца геаметрычнай прагрэсіяй; в) з’яўляецца бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіяй; г) не з’яўляецца прагрэсіяй. Выберыце правільны адказ.

2. Калі ў бясконцай геаметрычнай прагрэсіі $|q| < 1$, тады сума членаў гэтай прагрэсіі вылічваецца па формуле:

а) $S = b_1 \cdot q$; б) $S = b_1 : q$; в) $S = b_1 \cdot (q - 1)$; г) $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Выберыце правільны адказ.

4.283. Сярод дадзеных геаметрычных прагрэсій выберыце бясконца спадальныя:

а) 3; 9; 27; 81; ...; б) 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; ...;

в) –5; 10; –20; 40; ...; г) 8; –4; 2; –1; $\frac{1}{2}$; ... .

4.284. Якую формулу трэба прымяніць, каб знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n) з назоўнікам q? Знайдзіце гэту суму, калі:

а) $b_1 = 12,\ q = \frac{1}{4}$; б) $b_1 = -25,\ q = -\frac{2}{5}$;

в) $b_1 = 21,\ q = -\frac{1}{3}$; г) $b_1 = -0{,}1,\ q = 0{,}9$.

4.285. Складзіце план рашэння і знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі:

а) 100; 10; 1; ...; б) 0,2; 0,02; 0,002; ...;

в) 9; –4,5; 2,25; ...; г) –3; –2; $-\frac{4}{3}$; ... .

4.286. Знайдзіце суму, складаемымі якой з’яўляюцца паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі:

а) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$; б) $3 - \frac{3}{5} + \frac{3}{25} - \frac{3}{125} + \ldots$.

4.287. Прымяніце алгарытм для запісу ў выглядзе звычайнага дробу ліку:

а) 0,(4); б) 0,(12); в) 0,(123);

г) 14,(31); д) 6,3(8); е) 10,1(26).

4.288. Выкарыстайце формулу сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі і знайдзіце першы член бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой:

а) $S = 72,\ q = \frac{2}{9}$; б) $S = 8,\ q = -\frac{3}{4}$.

4.289. Знайдзіце назоўнік бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, калі:

а) $S = -140$, $b_1 = -35$; б) $S = \frac{2}{3}$, $b_1 = 1$.

4.290. Вызначце, ці з'яўляецца бясконца спадальнай геаметрычная прагрэсія:

а) $2;\ \sqrt{2};\ 1;\ ...;$

б) $-5\sqrt{5};\ 5;\ -\sqrt{5};\ ...;$

в) $1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{3};\ ... .$

Выкарыстайце адпаведную формулу і знайдзіце яе суму.

4.291. Знайдзіце трэці член бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой назоўнік роўны 0,4, а сума прагрэсіі роўна $33\frac{1}{3}$.

4.292. Знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, калі:

а) $b_2 = 1\frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{3}$; б) $b_4 = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $q = \frac{1}{2}$.

4.293*. Знайдзіце першы член бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, ведаючы, што сума членаў гэтай прагрэсіі роўна 12,6, а адносіна 20-га члена да 17-га роўна $-\frac{8}{125}$.

4.294*. Знайдзіце назоўнік бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, першы член якой у 1,5 раза большы за суму астатніх яе членаў.

4.295. Якую формулу трэба прымяніць, каб знайсці суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі (b_n) з назоўнікам q? Знайдзіце гэту суму, калі:

а) $b_1 = 30$, $q = \frac{2}{3}$; б) $b_1 = -36$, $q = -\frac{1}{4}$.

4.296. Складзіце план рашэння і знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі:

а) 125; 25; 5; ...;

б) 0,1; 0,01; 0,001; ...;

в) 18; –6; 2; ... .

4.297. Якую формулу можна выкарыстаць, каб знайсці суму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$, складаемымі якой з'яўляюцца паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі? Знайдзіце гэту суму.

4.298. Выкарыстайце алгарытм і запішыце ў выглядзе звычайнага дробу лік:

а) 0,(6); б) 0,(51); в) 3,(26); г) 17,3(47).

4.299. Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі роўна 3, а яе першы член роўны 4. Знайдзіце назоўнік прагрэсіі.

4.300. Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі роўна 6, а яе назоўнік роўны $\frac{2}{3}$. Знайдзіце першы член прагрэсіі.

4.301. Складзіце план рашэння і знайдзіце суму бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, калі $b_3 = -1{,}5$, $q = 0{,}25$.

4.302*. Знайдзіце назоўнік бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, у якой сума першых двух членаў у 8 разоў большая за суму астатніх яе членаў.

* * *

4.303. Рашыце сістэму ўраўненняў $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

4.304. Вылічыце: $\left(2\sqrt{3} + 5\right)^2 + \left(10 - \sqrt{3}\right)^2$.

4.305. Скараціце дроб $\frac{x^2 - 1}{17x - 2x^2 - 15}$.

4.306. Магазін прадаў на мінулым тыдні некаторую колькасць тавару. На гэтым тыдні запланавана прадаць таго ж тавару на 10 % менш, але па цане, на 10 % большай. Большую або меншую суму атрымае магазін ад продажу тавару на гэтым тыдні і на колькі працэнтаў?

Выніковая самаацэнка

Пасля вывучэння гэтага раздзела я павінен:

- ведаць спосабы задання паслядоўнасцей і ўмець прымяняць іх для рашэння задач;

- ведаць азначэнне арыфметычнай прагрэсіі, яе рознасці, формулу n-га члена арыфметычнай прагрэсіі;
- умець прымяняць формулу n-га члена арыфметычнай прагрэсіі для рашэння задач;
- умець прымяняць характарыстычную ўласцівасць арыфметычнай прагрэсіі для вызначэння віду паслядоўнасці;
- умець прымяняць формулу сумы членаў арыфметычнай прагрэсіі для рашэння задач;
- ведаць азначэнне геаметрычнай прагрэсіі, яе назоўніка, формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі;
- умець прымяняць формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі для рашэння задач;
- умець прымяняць характарыстычную ўласцівасць геаметрычнай прагрэсіі для вызначэння віду паслядоўнасці;
- умець прымяняць формулу сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі для рашэння задач;
- умець прымяняць азначэнне, формулу сумы бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі для рашэння задач.

Я правяраю свае веды

1. Сярод дадзеных прагрэсій выберыце арыфметычныя прагрэсіі; геаметрычныя прагрэсіі:

а) $-3; 3; -3; 3; ...;$ б) $5; 5; 5; 5; ...;$

в) $2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...;$ г) $-9; 3; -1; \frac{1}{3}; ...;$

д) $-10; -6; -2; 2; ...;$ е) $\sqrt{7}; -7; 7\sqrt{7}; -49; ... .$

Якія з дадзеных паслядоўнасцей з'яўляюцца бясконца спадальнымі геаметрычнымі прагрэсіямі?

2. Паслядоўнасць (x_n) зададзена формулай n-га члена $x_n = \frac{n-1}{n}$. Выберыце правільную роўнасць:

а) $x_4 = \frac{4}{5}$; б) $x_4 = \frac{3}{4}$; в) $x_4 = 4$; г) $x_4 = 3$.

3. а) Складзіце формулу n-га члена арыфметычнай прагрэсіі і знайдзіце a_{11}, калі $a_1 = 2{,}4$; $d = -0{,}8$.

б) Дадзена геаметрычная прагрэсія 1; 3; 9; ... . Складзіце формулу n-га члена геаметрычнай прагрэсіі і знайдзіце шосты член гэтай прагрэсіі.

4. а) У арыфметычнай прагрэсіі $a_{99} = 8$; $a_{101} = 80$. Знайдзіце a_{100}.

б) У геаметрычнай прагрэсіі $b_9 = 12{,}5$; $b_{11} = 2$. Знайдзіце b_{10}.

5. а) Дадзена арыфметычная прагрэсія, у якой $a_2 = 18$; $a_5 = 6$. Знайдзіце a_1 і d.

б) Паміж лікамі 16 і $\frac{1}{16}$ устаўце тры лікі так, каб яны разам з іншымі лікамі ўтварылі геаметрычную прагрэсію.

6. а) Арыфметычная прагрэсія зададзена формулай $a_n = 29 - 3n$. Знайдзіце суму 10 першых членаў прагрэсіі.

б) Знайдзіце першы член геаметрычнай прагрэсіі, калі вядома, што $S_4 = 15$; $q = 0{,}5$.

7. а) Дадзена арыфметычная прагрэсія –231; –228; ... . Знайдзіце колькасць адмоўных членаў гэтай прагрэсіі.

б) У геаметрычнай прагрэсіі $b_1 = -4$; $q = -2$. Знайдзіце, пад якім нумарам у гэту прагрэсію ўваходзіць лік 128.

8. Запішыце ў выглядзе звычайнага дробу лік:

а) 9,(3); б) 6,7(29).

9. а) У арыфметычнай прагрэсіі $a_{13} = 10$. Знайдзіце S_{25}.

б) У геаметрычнай прагрэсіі $b_n = 54$; $q = 3$; $S_n = 80$. Знайдзіце b_1, n.

10. Тры дадатныя лікі з'яўляюцца паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі, назоўнік якой большы за адзінку. Калі сярэдні з іх павялічыць у два разы, то яны стануць паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі. Знайдзіце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі.

Практычная матэматыка

1. Па некаторых даследаваннях, лічыцца, што, для таго каб дасягнуць павышанага ўзроўню ведаў замежнай мовы, які дазваляе разумець, чытаць і размаўляць на гэтай мове, дастаткова ведаць каля 3000 слоў. Дзевяцікласнік на летніх канікулах плануе пачаць вывучэнне замежнай мовы, прычым у першы дзень ён хоча вывучыць 10 слоў, а кожны наступны дзень — на 3 словы больш, чым у папярэдні. За які час ён зможа дасягнуць павышанага ўзроўню, калі гэты план ажыццявіцца?

2. Кіраўніцтва прадпрыемства, на якое па размеркаванні прыйшоў працаваць выпускнік універсітэта, знаёміць новага работніка з умовамі аплаты працы. У першы месяц ён атрымае 400 р. Пры добрасумленнай працы кожны наступны месяц ён будзе атрымліваць на 20 р. больш, чым у папярэдні. Колькі заробіць выпускнік за год?

3. У пачатку года ўкладчык паклаў у банк 1600 р. пад n % гадавых. У канцы года ён зняў з рахунку 848 р. У канцы другога года на рахунку аказалася 824 р. Колькі працэнтаў у год налічвае банк?

Займальная матэматыка

Даследуем, абагульняем, робім вывады

Даследчае заданне. Ці існуе ў арыфметычнай прагрэсіі 2; 5; 8; ... член, нумар якога роўны квадрату натуральнага ліку? Правядзіце даследаванне. Сфармулюйце абагульнены вынік.

Рыхтуемся да алімпіяд

1. Ці правільнае сцверджанне: калі даўжыні старон выпуклага чатырохвугольніка, узятыя ў паслядоўнасці a, b, d і c, утвараюць арыфметычную прагрэсію, то ў гэты чатырохвугольнік можна ўпісаць акружнасць?

2. Спрасціце выраз $70(71^9 + 71^8 + ... + 71^2 + 71) + 1$.

Выніковае паўтарэнне

Лікі і вылічэнні

1. Устанавіце парадак дзеянняў і знайдзіце значэнне выразу:

а) $7 - 3\frac{3}{8} \cdot 8$; б) $24 : \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right)$;

в) $\left(1\frac{6}{19} - 4\frac{5}{19}\right) : 2$; г) $\left(1\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot 3\right) : (-10)$.

2. Выканайце дзеянні:

а) $(32{,}24 : 4 - 2{,}1) \cdot 0{,}1$; б) $(2 - 6{,}588 : 6{,}1) : 0{,}1$;

в) $2{,}5 \cdot 0{,}1 - \left(-6{,}6 + \frac{3}{5} : 2{,}4\right)$; г) $\left(-7\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot 4 + 2{,}5 : 0{,}2$.

3. Выкарыстайце рацыянальныя прыёмы лічэння і знайдзіце значэнне выразу:

а) $-\frac{3}{8} \cdot (-6{,}81) - 3{,}19 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$;

б) $\frac{12 \cdot 87{,}5 - 12 \cdot 85{,}5}{0{,}4 \cdot 6{,}7 + 0{,}4 \cdot 3{,}3}$;

в) $\left(4\frac{2}{3} \cdot 3{,}5 - 3\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3}\right) : 0{,}14$;

г) $(1{,}59 \cdot 12{,}3 - 23 \cdot 0{,}159) \cdot 0{,}01$.

4. Устанавіце парадак дзеянняў і знайдзіце значэнне выразу:

а) $(1{,}27 + 3{,}74) \cdot 2{,}43 - 1{,}53 : (3{,}72 - 1{,}92)$;

б) $3\frac{3}{5} - 4\frac{1}{3} : \left(5 - 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3}\right)$.

5. Сярод лікаў 1; 2; 5; 9; 11; 26; 91; 96 выберыце ўсе простыя лікі.

6. Выкарыстайце прыметы дзялімасці і сярод лікаў 122 175, 188 154, 291 523, 510 577, 941 220 і 977 895 выберыце:

а) кратныя 5; б) кратныя 9;

в) кратныя і 5, і 9; г) не кратныя ні 3, ні 2.

7. Знайдзіце НАД (465; 870).

8. Знайдзіце НАК (40; 60; 70).

9. Выкарыстайце алгарытм прывядзення дробу да новага назоўніка і вызначце, колькі:

а) шостых у $\frac{1}{3}$;　　б) пятнаццатых у $\frac{1}{3}$;

в) восьмых у $\frac{1}{4}$;　　г) дзясятых у $\frac{3}{2}$.

10. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае лікаў 2,5 і $3\frac{5}{6}$.

11. Трохсерыйны фільм ішоў па тэлевізары 5 г. Першая і другая серыі доўжыліся $3\frac{9}{20}$ г, а другая і трэцяя — $3\frac{1}{12}$ г. Колькі часу ішла кожная серыя?

12. Знайдзіце найбольшы цэлы лік, які не перавышае значэнне выразу $0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 6{,}75 : 0{,}3$.

13. Друкарня зрасходавала $\frac{2}{5}$ усёй паперы, а калі зрасходуе яшчэ 26 т, то будзе зрасходавана 53 % усёй паперы. Знайдзіце, колькі паперы было ў друкарні першапачаткова.

14. Каток прамавугольнай формы, даўжыня якога 82 м і шырыня 55 м, трэба ачысціць ад снегу. Колькі тон снегу трэба вывезці, калі таўшчыня снежнага покрыва 0,4 м і 1 м^3 снегу важыць 125 кг?

15. Выкарыстайце прапарцыянальную залежнасць паміж велічынямі і рашыце задачу. Дарогу рамантуе брыгада з 15 чалавек. Яны павінны былі выканаць працу за 12 дзён. На пяты дзень раніцай прыйшлі яшчэ некалькі рабочых, і астатняя праца была выканана за 6 дзён. Колькі рабочых прыйшлі дадаткова?

16. Расфасавалі і адгрузілі 0,9 т круп, што склала 30 % усіх круп на складзе. Колькі круп трэба яшчэ расфасаваць і адгрузіць, каб на складзе засталося 18 % першапачатковай колькасці круп?

17. Плошча зямельнага ўчастка прамавугольнай формы 6 га. Якой будзе плошча гэтага зямельнага ўчастка на плане, калі маштаб плана 1 : 5000?

18. Сярэдняе арыфметычнае чатырох лікаў роўна 35, а сярэдняе арыфметычнае шаснаццаці іншых лікаў роўна 25. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае гэтых дваццаці лікаў.

19. Адзін токар можа выканаць заказ за 15 г, а другі — за 18 г. Знайдзіце, якая частка заказу застанецца нявыкананай пасля 5 г іх сумеснай працы.

20. Першай брыгадзе на выкананне ўсёй работы патрабуецца 10 дзён, другой — на 2 дні больш, а трэцяй — у 1,5 раза больш, чым першай. Знайдзіце, за які час могуць выканаць усю работу тры брыгады, працуючы разам.

21. Неабходна сабраць аднолькавыя камплекты, якія складаюцца з ручак, алоўкаў і сшыткаў. Знайдзіце, якую найбольшую колькасць камплектаў можна сабраць са 182 ручак, 130 алоўкаў і 78 сшыткаў, выкарыстаўшы пры гэтым усе прадметы.

22. Выкарыстайце азначэнне ступені з цэлым паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(6-4\cdot\left(\frac{5}{16}\right)^{0}\right)^{-2}$;

б) $\left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}\right):\left(0{,}5^{-2}+0{,}2^{-1}\right)$;

в) $\dfrac{0{,}5^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-2}+1^{0}}$.

23. Вылічыце: $(3^{-1}+1{,}5^{-1}):5^{-2}-4{,}23^{0}+3\cdot 0{,}1^{-2}$.

24. Знайдзіце значэнне выразу

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+0{,}125^{-2}.$$

25. Параўнайце з адзінкай значэнне выразу:

а) $-2\cdot(-3)^{2}$; б) $-(-2)^{-3}\cdot(-1)^{-4}$;

в) $\left(\frac{1}{6^{-2}}\right)^{-3}$; г) $(-2{,}4)^{0}$.

26. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу:

а) $2^{-8}\cdot 2^{7}$; б) $\frac{1}{16}\cdot 2^{-3}$;

в) $(-7)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-7}$; г) $5:5^{-1}$;

д) $0{,}25^{2}:0{,}25^{4}$; е) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right)^{2}$;

ж) $25^{-4}:5^{-7}$; з) $\dfrac{4^{-3}\cdot 4^{-5}}{4^{-11}}$;

і) $(-2{,}25)^{-5}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right)^{-2}$; к) $125^{-3}:\left(0{,}2^{-4}\right)^{-2}$.

27. Вызначце парадак ліку, запісанага ў стандартным выглядзе: $3{,}27 \cdot 10^{9}$; $1{,}2058 \cdot 10^{-12}$; $6 \cdot 10^{15}$; $2{,}0006 \cdot 10^{-1}$.

28. Запішыце ў стандартным выглядзе лікі: $302 \cdot 10^{-6}$; $3687 \cdot 10^{9}$; $0{,}034 \cdot 10^{-8}$; $0{,}00057 \cdot 10^{12}$; $1428{,}33 \cdot 10^{-7}$; $650{,}123 \cdot 10^{5}$.

29. Сярод лікаў $8\frac{11}{17}$; $\sqrt{5}$; $3{,}(2)$; $5{,}2$; $\sqrt{19}$; π выберыце ўсе рацыянальныя лікі. Якія з дадзеных лікаў можна запісаць у выглядзе бясконцага неперыядычнага дзесятковага дробу? Якому лікаваму мноству належаць усе дадзеныя лікі?

30. Вылічыце:

а) $\sqrt{576} - 2\sqrt{49}$;

б) $\sqrt{5\frac{4}{9}} - \sqrt{7\frac{1}{9}}$;

в) $\sqrt{0{,}81} \cdot \sqrt{2{,}25} - \sqrt{3\frac{1}{16}}$.

31. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2$; б) $\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

32. Размясціце лікі $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$; 4 у парадку нарастання.

33. Выкарыстайце ўласцівасці арыфметычнага квадратнага кораня і выберыце выраз, які мае найбольшае значэнне:

а) $\sqrt{313^2 - 312^2}$; б) $\sqrt{\frac{345}{233^2 - 112^2}}$;

в) $\frac{-2\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$; г) $\frac{\sqrt{51} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{68}}$.

34. Вызначце, рацыянальным або ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{12} - \sqrt{27} + 2\sqrt{75}$; б) $\left(3\sqrt{7} - \sqrt{28}\right) \cdot \sqrt{7}$;

в) $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}} - 5\sqrt{\frac{3}{8}}\right) : \sqrt{1{,}5}$; г) $\left(2 - \sqrt{5}\right)^2$;

д) $\left(\sqrt{6} - 1\right)^2 + \sqrt{24}$; е) $\left(3 - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7} + 3\right)$.

35. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{3} - 1}$; в) $\frac{5}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

36. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $5\sqrt{3}$; б) $-\frac{2}{3}\sqrt{45}$; в) $a\sqrt{2}$ пры $a \geqslant 0$;

г) $b\sqrt{7}$ пры $b < 0$; д) $y\sqrt{y}$; е) $-d\sqrt{-d}$.

37*. Вынесіце множнік за знак кораня $\sqrt{-9a^3k^4}$.

38*. Выканайце дзеянні:

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$; б) $\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$.

39*. Значэнні якіх выразаў з’яўляюцца ірацыянальнымі лікамі:

а) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}$; в) $\sqrt{21-12\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$?

40*. Знайдзіце значэнне выразу

$$65 \cdot \left(\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{2}{63 \cdot 65}\right).$$

41*. Спрасціце выраз $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$.

* * *

42. Устанавіце парадак дзеянняў і знайдзіце значэнне выразу:

а) $9 - 3\frac{3}{7} \cdot 7$; б) $18 : \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right)$;

в) $\left(1\frac{10}{21} - 4\frac{9}{21}\right) : 2$; г) $\left(1\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot 3\right) : (-10)$.

43. Выканайце дзеянні:

а) $(49{,}14 : 7 - 2{,}1) \cdot 0{,}1$; б) $(2 - 5{,}871 : 5{,}7) : 0{,}01$;

в) $2{,}5 \cdot 0{,}1 - \left(-7{,}4 + \frac{2}{5} : 1{,}6\right)$; г) $\left(-6\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot 5 + 1{,}5 : 0{,}2$.

44. Выкарыстайце рацыянальныя прыёмы лічэння і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{18 \cdot 9{,}5 - 18 \cdot 7{,}5}{0{,}9 \cdot 2{,}6 + 0{,}9 \cdot 7{,}4}$;

б) $\left(5\frac{3}{7} \cdot 4{,}5 - 4\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{7}\right) : 0{,}18$;

в) $(1{,}67 \cdot 4{,}7 + 53 \cdot 0{,}167) \cdot 0{,}01$.

45. Сярод лікаў 1; 2; 7; 12; 17; 27; 91; 102 выберыце ўсе састаўныя лікі.

46. Знайдзіце НАД (12; 18) + НАК (15; 60).

47. Параўнайце значэнні выразаў $\left(7-6\frac{5}{6}\right)\cdot\left(6-4\frac{4}{5}\right)$ і $7\cdot 6\frac{5}{6}-6\cdot 4\frac{4}{5}$.

48. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае лікаў 3,5 і $2\frac{1}{6}$.

49. Вучань прачытаў $\frac{1}{4}$ кнігі, а калі ён прачытае яшчэ 77 старонак, то будзе прачытана 69 % усёй кнігі. Знайдзіце, колькі ўсяго старонак у кнізе.

50. Выкарыстайце прапарцыянальную залежнасць паміж велічынямі і рашыце задачу. За 0,7 кг прадуктаў заплацілі 8 р. 47 к. Колькі трэба заплаціць за 1,5 кг такіх жа прадуктаў?

51. Спачатку цана тавару павысілася на 12 %, а праз год новая цана панізілася на 12 %. Тавар стаў каштаваць больш ці менш (у параўнанні з яго першапачатковай цаной)?

52. Сярэдняе арыфметычнае васьмі лікаў роўна 35, а сярэдняе арыфметычнае дванаццаці іншых лікаў роўна 25. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае гэтых дваццаці лікаў.

53. Адзін токар можа выканаць заказ за 10 г, а другі — за 8 г. Знайдзіце, якая частка заказу застанецца нявыкананай пасля 4 г іх сумеснай працы.

54. Першай брыгадзе, каб выканаць усю працу, трэба 10 дзён, другой — на 5 дзён больш, а трэцяй — у 1,2 раза больш, чым першай. Знайдзіце, за які час могуць выканаць усю працу тры брыгады, працуючы разам.

55. Неабходна сабраць аднолькавыя камплекты, якія складаюцца з ручак, алоўкаў і сшыткаў. Знайдзіце, якую найбольшую колькасць камплектаў можна сабраць з 238 ручак, 170 алоўкаў і 102 сшыткаў, выкарыстаўшы пры гэтым усе прадметы.

56. Выкарыстайце азначэнне ступені з цэлым паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot 3$;

б) $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}-0{,}51^{0}\right):\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$;

в) $\dfrac{1{,}7^{0}-0{,}1^{-1}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\cdot 1{,}5^{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

57. Выкарыстайце ўласцівасці ступені з цэлым паказчыкам і знайдзіце значэнне выразу:

а) $3\cdot 3^{-4}$; б) $25\cdot 5^{-3}$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-9}\cdot(-9)^{-9}$;

г) $9^{-4}:9^{-5}$; д) $\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{3}\right)^{5}$; е) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{-2}$;

ж) $4^{-9}:16^{-4}$; з) $\frac{3^{-1}\cdot 3^{-5}}{3^{-9}}$; і) $\left(-1\frac{7}{9}\right)^{-7}\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\right)^{4}$;

к) $32^{-2}:\left(0{,}5^{-3}\right)^{-3}$.

58. Запішыце ў стандартным выглядзе лік і знайдзіце яго парадак: 12 300 050; 17; 0,000158; 9 000 000; 7586,258; 13,2046; 0,125; 6 900 000.

59. Сярод лікаў 5,(3); $\sqrt{7}$; −9,37; $2\frac{13}{19}$; $\sqrt{13}$; π выберыце ўсе ірацыянальныя лікі.

60. Вылічыце:

а) $\sqrt{625}+4\sqrt{64}$;

б) $\sqrt{10\frac{9}{16}}-\sqrt{11\frac{1}{9}}$;

в) $\sqrt{0{,}16}:\sqrt{0{,}25}-\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

61. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^{2}$; б) $\left(-\sqrt{5}\right)^{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{2}$.

62. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $3\sqrt{8}-\sqrt{32}+2\sqrt{50}$; б) $\left(5\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)\sqrt{6}$;

в) $\left(3\sqrt{\frac{2}{7}}-4\sqrt{\frac{7}{8}}\right):\sqrt{3{,}5}$; г) $\left(\sqrt{3}+6\right)^{2}$;

д) $\left(\sqrt{7}+2\right)^{2}-2\sqrt{28}$; е) $\left(\sqrt{13}+1\right)\left(1-\sqrt{13}\right)$.

63. Пазбаўцеся ад ірацыянальнасці ў назоўніку дробу:

а) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$; в) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

64. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $7\sqrt{2}$; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$;

в) $a\sqrt{5}$ пры $a\geqslant 0$; г) $b\sqrt{7}$ пры $b<0$.

65. Значэнні якіх выразаў з'яўляюцца рацыянальнымі лікамі:

а) $\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+1}$;

б) $\sqrt{\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)}$;

в) $\left(\sqrt{24}-\sqrt{6}\right)^2$?

Выразы і іх пераўтварэнні

66. Выберыце правільную роўнасць: $a^{-4}=-4a$; $a^{-4}=a^4$; $a^{-4}=-\frac{4}{a}$; $a^{-4}=\frac{1}{a^4}$; $a^{-4}=-4a^{-1}$.

67. Сярод дробаў $\frac{1}{2ab}$; $\frac{2}{ab}$; $-\frac{1}{2ab}$; $\frac{2a}{b}$; $-\frac{b}{2a}$ выберыце той, які з'яўляецца вынікам спрашчэння выразу $2ab^{-1}$.

68. Выберыце адначлен, запісаны ў стандартным выглядзе: $2abbc$; $2m^4$; $-a\cdot\frac{1}{2}\cdot b$; $4-n$; $17a^2bca$.

69. Сярод лікаў 3; 2; $\frac{1}{7}$; 3,5; –6 выберыце лік, які ўваходзіць у абсяг вызначэння выразу $\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

70. Выберыце правільныя роўнасці: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{2a}$; $\sqrt{2}+\sqrt{a}=\sqrt{2+a}$; $\sqrt{2}-\sqrt{a}=\sqrt{2-a}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{2}{a}}$.

71. Спрасціце выраз $\left(a^5\right)^{-2}\cdot\left(a^{-13}\right)^{-1}$.

72. Знайдзіце значэнне выразу $-a^2+1$ пры $a=5$.

73. Прывядзіце адначлен $4ab^2abb^4a(-0{,}5)$ да стандартнага выгляду.

74. Знайдзіце рознасць мнагачленаў $3x+1$ і $-3x^2-3x+1$.

75. Запішыце ў выглядзе адначлена стандартнага выгляду выраз:

а) $\left(-2a^2b\right)^3\cdot 3ab^4$;   б) $\left(-2m^5n\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}m^4\right)$.

76. Запішыце ў выглядзе трохчлена выраз:

а) $-(a+5)(a-2)$;   б) $-(3x-2)(1-5x)$.

77. Раскладзіце на множнікі квадратны трохчлен:

а) $x^2-7x+10$;   б) $2x^2-5x+2$.

78. Раскладзіце двухчлен $c^2 - 25$ на множнікі.

79. Пераўтварыце ў аднаchлен стандартнага выгляду выраз $16a^5b^3c^2 : \left(-0{,}4a^4bc^2\right)$.

80. Раскладзіце на множнікі:

а) $8a^2b^2 - 72a^2c^2$; б) $2a + 4b - ab - 2b^2$;

в) $4a^2 - b^2 + 2a - b$; г) $\left(y^2 + 4\right)^2 - 16y^2$.

81. Запішыце ў выглядзе мнагачлена стандартнага выгляду выраз:

а) $\left(-\frac{y}{3} - 0{,}5x\right)\left(0{,}5x - \frac{y}{3}\right)$; б) $(3a - 7b)^2 + 42ab$;

в) $(3a + b)(2a - 5b) - 6(a - b)^2$; г) $(n - 3)^2 - (n + 2)(n - 2)$.

82. Дакажыце, што пры любым значэнні m значэнне выразу $(3 - m)(3 + m) - 10$ адмоўнае.

83. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай не мае сэнсу выраз:

а) $\frac{x - 5}{2x + 14}$; б) $\frac{5n}{n^2 - 4n}$.

84. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{a}{5} - \frac{b}{5} - \frac{a + b}{5}$; б) $14m^2 \cdot \frac{2n^3}{7m^6}$;

в) $\frac{12x^5y^2}{z^3} : \left(6x^4y^6\right)$; г) $\left(-\frac{3x^2y^4}{m^3}\right)^4$.

85. Знайдзіце суму і рознасць дробаў $\frac{3}{a^2 - b^2}$ і $\frac{3}{(a - b)^2}$.

86. Ці праўда, што дроб $\frac{(x - 3y)^2}{x^2 - 9y^2}$ можна скараціць на $3y - x$? Які дроб атрымаецца?

87. Скараціце дроб:

а) $\frac{1 - x^2}{5 - 5x}$; б) $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 - 9b^2}$.

88. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{25a^2 - 1}{30ab - 6b}$ пры $a = 7$, $b = 6$.

89. Скараціце дроб $\frac{x^2 - 4x + 4}{(x + 5)^2 - 49}$.

90. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{4x^2}{x - 3} - 4x$; б) $\frac{a}{a - b} + \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a}{a + b}$; в) $\frac{7x^2}{3 - x} \cdot \frac{x^2 - 9}{14x^3}$.

91. Выканайце дзеянні: $\frac{x^2-5x+4}{x-1}+\frac{x^2+4x+3}{x+1}$.

92. Устанавіце парадак дзеянняў і спрасціце выраз:

а) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\cdot\frac{x-y}{2y}$;

б) $\frac{7}{3x-1}-\frac{5}{2x-1}:\frac{3x-1}{4x^2-1}$;

в) $\left(\frac{x+4}{3x+3}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{3}{x+1}-\frac{2}{1-x^2}$;

г) $\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right)\cdot\frac{1-5a}{a^2+5a}+\frac{a^2+5}{a+1}$.

93. Дакажыце, што пры ўсіх сапраўдных значэннях зменных значэнне выразу не залежыць ад значэнняў зменных:

а) $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+p^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{p}-p\right)-\frac{1}{p}$; б) $\left(\frac{2a+6}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}\right):\frac{2a+2}{a^2-a}$.

94. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{5c^2-c}{25c^2-10c+1}+\frac{4}{1-25c^2}\right):\left(1-\frac{3}{5c-1}\right)-\frac{c}{5c+1}.$$

95. Спрасціце выраз:

а) $\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)^2-6\sqrt{xy}$; б) $8\sqrt{\frac{a}{16}}-3\sqrt{\frac{a}{9}}$.

96. Скараціце дроб $\frac{6-a^2}{a^2-2a\sqrt{6}+6}$.

97. Спрасціце выраз $-2\cdot\sqrt{0{,}64x^2}$, калі $x\leqslant 0$.

98. Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе $\sqrt{72n^8m^6}$ пры $m<0$.

99*. Унясіце множнік пад знак кораня ў выразе $a\sqrt{-2a}$.

100*. Запішыце здабытак $10^{-n}\cdot 0{,}0125^{-n}\cdot 128^{n+1}$ у выглядзе ступені з асновай 2.

101*. Дакажыце, што пры любым натуральным значэнні зменнай значэнне выразу $(n+5)(n-6)-(n-2)(n+15)$ кратна 14.

102*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$, ведаючы, што $b:a=1:2$.

103*. Раскладзіце на множнікі:

а) $(3x-a)y^2-4(a-3x)y-4a+12x$;

б) $\left(xy+y^2\right)\left(x^2+4x\right)-\left(x^2+xy\right)\left(y^2+4y\right)$;

в) $2a^2-20ab+50b^2-2$;

г) $\left(b^2+16\right)^2-64b^2$;

д) $(5-x)(5+x)-a(a-2x)$.

104*. Спрасціце выраз $\dfrac{4^{n+2}-4^n}{15^{n+1}}\cdot\dfrac{5^n}{12^{-n}}$, дзе $n\in N$.

105*. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{x}{a-3}\sqrt{a^2-6a+9}$, калі $a<2{,}1$;

б) $\dfrac{y}{b+5}\sqrt{b^2+10b+25}$, калі $b<-6{,}8$.

106*. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $\dfrac{1}{3x}\sqrt{-27x}$; б) $(m-n)\sqrt{\dfrac{n-m}{7}}$.

107*. Спрасціце выраз $\dfrac{x^2+x\sqrt{2}}{x^2+2}\cdot\left(\dfrac{x}{x-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)$.

108*. Запішыце суму $2\cdot16^n+2^n\cdot8^n+2^{4n}$ у выглядзе ступені з асновай 2.

109*. Дакажыце, што значэнне выразу $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$ кратна 14 пры $n\in N$.

110*. Адзін з двух натуральных лікаў пры дзяленні на 7 дае астачу 2, а другі — астачу 5. Знайдзіце, якая астача атрымаецца пры дзяленні на 7 падвоенага здабытку гэтых лікаў.

111*. Вядома, што $a^2+b^2=7$. Знайдзіце значэнне выразу $2(a+1)(b+1)-(a+b)(a+b+2)$.

112*. Знайдзіце найменшае значэнне выразу $8x^2+2y^2-4xy+4x+2y+3$ і значэнні зменных, пры якіх яно дасягаецца.

113*. Раскладзіце на множнікі:

а) $81n^4+4$; б) $\left(x^2+x+4\right)^2+8x\left(x^2+x+4\right)+15x^2$.

114*. Знайдзіце значэнне выразу $(x-b+1)^2+2(b-x-1)(x+b+1)+(x+b+1)^2$ пры $b=0{,}4$ і $x=-4{,}019$.

115*. Вылічыце значэнне дробу $\dfrac{a}{b}$, калі $\dfrac{5a^2-10ab+2b^2}{ab-2a^2-b^2}=2$.

116*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$, калі $x=3+\sqrt{5}$; $y=3-\sqrt{5}$.

117*. Спрасціце выраз

$$\frac{1}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+8)}.$$

118*. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{3{,}6xy+2{,}1y^2}{1{,}44x^2-0{,}49y^2}+\frac{2x}{2{,}4x-1{,}4y}\right)\cdot\frac{12x^2-7xy}{x+3y}.$$

119*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{\sqrt{a^2+3+2\sqrt{3}a}}$ пры $a=-\sqrt{3}-0{,}25$.

120*. Скараціце дроб $\frac{x+6\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}+1}$.

121*. Спрасціце выраз

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

* * *

122. Выберыце правільную роўнасць: $b^{-3}=-\frac{3}{b}$; $b^{-3}=-3b$; $b^{-3}=\frac{1}{b^3}$; $b^{-3}=3b^{-1}$; $b^{-3}=b^3$.

123. Сярод дробаў $-\frac{n}{3m}$; $\frac{3}{mn}$; $\frac{3m}{n}$; $\frac{1}{3mn}$; $-\frac{1}{3mn}$ выберыце той, які з'яўляецца вынікам спрашчэння выразу $3mn^{-1}$.

124. Выберыце адначлен, запісаны ў стандартным выглядзе: $m\cdot\frac{2}{3}\cdot n$; $6-a$; $9xb^2xc$; $7b^5$; $3bcdd$.

125. Сярод лікаў -6; 1; 2; $\frac{1}{3}$; 2,5 выберыце лік, які ўваходзіць у абсяг вызначэння выразу $\frac{1}{\sqrt{3x-6}}$.

126. Выберыце правільныя роўнасці: $\sqrt{3+b}=\sqrt{3}+\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{3}{b}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{3b}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{b}$; $\sqrt{3-b}=\sqrt{3}-\sqrt{b}$.

127. Спрасціце выраз $\left(a^{-2}\right)^{-4}\cdot\left(a^2\right)^{-3}$.

128. Знайдзіце значэнне выразу $-b^2-3$ пры $b=2$.

129. Прывядзіце аднаўчлен $0{,}3a^2bab^4a^2(-4)$ да стандартнага выгляду.

130. Знайдзіце рознасць мнагачленаў $-5y+2$ і $5y^2-5y-2$.

131. Выканайце дзеянні:

а) $\left(-3mn^2\right)^3 \cdot 2mn^2$; б) $\left(-3a^4b\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^5\right)$.

132. Запішыце ў выглядзе трохчлена выраз:

а) $-(x-3)(x+2)$; б) $-(6a-1)(2-3a)$.

133. Раскладзіце на множнікі квадратны трохчлен:

а) $x^2-10x+16$; б) $3x^2-10x+3$.

134. Раскладзіце двухчлен d^2-36 на множнікі.

135. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай не мае сэнсу выраз:

а) $\frac{y-9}{3y+15}$; б) $\frac{2m}{m^2-5m}$.

136. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{m}{7}+\frac{n}{7}-\frac{m-n}{7}$; б) $18a^3 \cdot \frac{5b^2}{9a^6}$;

в) $\frac{14m^6n^3}{k^4}:\left(7m^2n^5\right)$; г) $\left(-\frac{2x^3y^2}{a^4}\right)^6$.

137. Знайдзіце суму і рознасць дробаў $\frac{1}{xy-y^2}$ і $\frac{1}{xy+y^2}$.

138. Запішыце ў выглядзе дробу выраз:

а) $\left(2a^{-2}b^3\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-6}$; б) $\left(\frac{5a^{-2}}{6b^{-1}}\right)^{-2} : \frac{1}{10a^3b^4}$;

в) $\frac{28a^2}{27x^3} \cdot \left(-\frac{63x^4}{150a}\right) : \frac{49a^2}{25x^3}$; г) $\frac{\left(-1{,}5x^2y\right)^3\left(2xy^3\right)^4}{\left(6x^3y^2\right)^2}$.

139. Запішыце ў выглядзе дробу выраз:

а) $\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-1} \cdot \left(x^{-1}y\right)^3$; б) $\left(\frac{5x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2} : \frac{1}{15x^3y}$;

в) $\frac{45m^3}{49p^2} \cdot \left(-\frac{56p^2}{27m^2}\right) : \frac{3m}{p}$; г) $\frac{\left(-0{,}5xy^3\right)^2\left(2x^2y\right)^3}{\left(\frac{1}{3}x^5y^3\right)^2}$.

140. Пераўтварыце ў аднachлен стандартнага выгляду выраз $24a^2b^5c^3:\left(-0{,}8a^2b^4c\right)$.

141. Раскладзіце мнагачлен на множнікі:

а) $5m^2n^2-80m^2y^2$; б) $3m-6n+mn-2n^2$;

в) a^2-9b^2+a+3b; г) $\left(x^2+9\right)^2-36x^2$.

142. Запішыце ў выглядзе мнагачлена стандартнага выгляду выраз:

а) $\left(-\frac{a}{7}-0{,}4b\right)\left(0{,}4b-\frac{a}{7}\right)$;

б) $(5a+7b)^2-70ab$;

в) $(2m-3n)(5m+n)-10(m+n)^2$;

г) $(m+2)^2-(m-3)(m+3)$.

143. Дакажыце, што пры любым значэнні y значэнне выразу $(y+2)(y-2)+5$ дадатнае.

144. Скараціце дроб $\frac{y^2+14y+49}{(y+3)^2-16}$.

145. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{2x^2}{x-1}-2x$;

б) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b-a}$;

в) $\frac{6x^3}{x-5}\cdot\frac{25-x^2}{18x^2}$.

146. Спрасціце выраз:

а) $\left(2\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+4\sqrt{xy}$; б) $5\sqrt{\frac{b}{25}}-18\sqrt{\frac{b}{36}}$.

147. Выканайце дзеянні $\frac{x^2+5x+4}{x+1}-\frac{x^2-4x+3}{x-1}$.

148. Выканайце дзеянні:

а) $\frac{2ab}{a^2-b^2}:\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right)$;

б) $\frac{6}{2x+3}-\frac{5}{2x+1}:\frac{2x+3}{4x^2-1}$;

в) $\left(\frac{x+10}{5x+25}-\frac{1}{x+5}\right)\cdot\frac{5}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}$;

г) $\left(\frac{b-3}{7b-4}-\frac{b-3}{b-4}\right)\cdot\frac{7b-4}{9b-3b^2}+\frac{b^2-14}{4-b}$.

149. Дакажыце, што значэнне выразу не залежыць ад значэння зменнай:

а) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a}$; б) $\left(\frac{1}{x^2+x}-\frac{x}{x+1}\right):(1-x)-\frac{1}{x}$.

150. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{16a^2-24a+9}{9-16a^2}+\frac{1}{4a^2+3a}\right)\cdot\left(4+\frac{7}{a-1}\right)+\frac{1}{a}.$$

151. Скараціце дроб $\frac{m^2-2m\sqrt{3}+3}{3-m^2}$.

152. Спрасціце выраз $-3\cdot\sqrt{0,25y^2}$, калі $y \leqslant 0$.

153. Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе $\sqrt{50a^4b^{10}}$ пры $b < 0$.

154*. Унясіце множнік пад знак кораня ў выразе $b\sqrt{-5b}$.

155*. Запішыце здабытак $0,0004^{-n}\cdot 125^{n+3}\cdot 100^{-n}$ у выглядзе ступені з асновай 5.

156*. Дакажыце, што пры любым натуральным значэнні зменнай значэнне выразу $(n-1)(n+12)-(n-3)(n+4)$ кратна 10.

157*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy-y^2}$, калі $x : y = 1 : 2$.

158*. Раскладзіце на множнікі:

а) $(2a-3b)x^2-6(3b-2a)x+18a-27b$;

б) $(ab+b^2)(a^2+6a)-(a^2+ab)(b^2+6b)$;

в) $3n^2+12m^2+12mn-12$;

г) $(a^2+1)^2-4a^2$;

д) $(4-y)(4+y)-b(b-2y)$.

159*. Спрасціце выраз $\frac{7^{n+1}+7^n}{8^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{28^{-n}}$, дзе $n \in \boldsymbol{N}$.

160*. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{16a^2}$ пры $a < 0$, $b > 0$;

б) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{9b^2}$ пры $a > 0$, $b < 0$.

161*. Унясіце множнік пад знак кораня:

а) $\frac{2}{x}\sqrt{-\frac{x}{8}}$; б) $(a-b)\sqrt{\frac{b-a}{5}}$.

162*. Спрасціце выраз $\left(\frac{x}{x-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right):\frac{x^2+3}{x^2-x\sqrt{3}}$.

163*. Запішыце суму $9^{3m}+9^m\cdot 81^m+27^{2m}$ у выглядзе ступені з асновай 3.

164*. Дакажыце, што значэнне выразу $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ кратна 39 пры $n \in N$.

165*. Адзін натуральны лік пры дзяленні на 5 дае астачу 4, а другі — астачу 3. Знайдзіце, якая астача атрымаецца пры дзяленні на 5 здабытку сумы і рознасці гэтых лікаў.

166*. Вядома, што $m^2 + n^2 = 7$. Знайдзіце значэнне выразу $2(m-1)(n+1) + (m-n)(m-n-2)$.

167*. Знайдзіце найменшае значэнне выразу

$$5x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x + 4y + 7$$

і значэнні зменных, пры якіх яно дасягаецца.

168*. Раскладзіце на множнікі:

а) $n^4 + 324$; б) $\left(x^2 + 4x + 8\right)^2 + 3x\left(x^2 + 4x + 8\right) + 2x^2$.

169*. Знайдзіце значэнне выразу

$$(y - c + 3)^2 + 2(c - y - 3)(y + c + 3) + (y + c + 3)^2$$

пры $c = 0{,}2$ і $y = -8{,}029$.

170*. Вылічыце значэнне дробу $\frac{m}{n}$, калі

$$\frac{4m^2 + 3mn + 3n^2}{m^2 - mn - 2n^2} = 3.$$

171*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{x^2 - 6xy + y^2}{x + y - 6}$, калі $x = 5 + \sqrt{7}$; $y = 5 - \sqrt{7}$.

172*. Спрасціце выраз

$$\frac{1}{b(b+3)} + \frac{1}{(b+3)(b+6)} + \frac{1}{(b+6)(b+9)} + \frac{1}{(b+9)(b+12)}.$$

173*. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{a}{0{,}5a + 1} + \frac{\frac{2}{3}a}{2 - a} + \frac{2a}{\frac{1}{4}a^2 - 1}\right) \cdot \frac{0{,}5a - 1}{0{,}5a - 2}.$$

174*. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 7 - 2\sqrt{7}a}}$ пры $a = \sqrt{7} - 0{,}125$.

175*. Скараціце дроб $\frac{x + 6\sqrt{x-2} + 6}{\sqrt{x-2} + 4}$.

176*. Спрасціце выраз

$$\frac{1}{1 + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{5n-4} + \sqrt{5n+1}}.$$

Функцыі і іх уласцівасці

177. Выберыце функцыю, графікам якой з'яўляецца прамая:

а) $y = x^3$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \frac{51}{x}$;

г) $y = \frac{2}{3}x$; д) $y = 4x^2 - 1$.

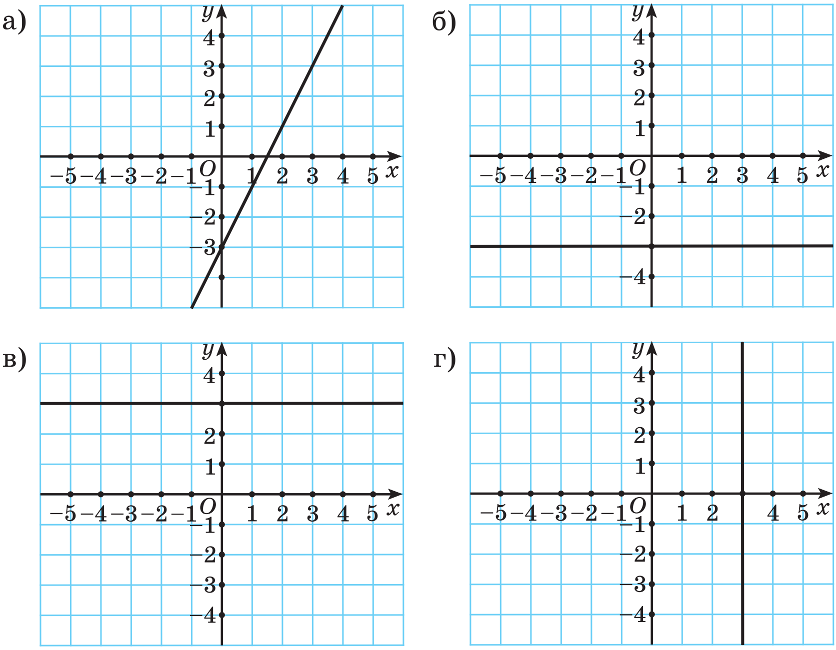
178. Адваротнай прапарцыянальнасцю з'яўляецца функцыя:

а) $y = 4x - \frac{1}{3}$; б) $y = \frac{x}{5}$; в) $y = \frac{1}{4}x$;

г) $y = \frac{10}{x}$; д) $y = x^3$.

Выберыце правільны адказ.

179. На рысунку 97, *а* паказаны графік функцыі $y = kx + b$. Сярод рысункаў 97, *б—г* выберыце той, на якім паказаны графік функцыі $y = -b$.



Рыс. 97

180. З пунктаў $A\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right)$; $B\left(20; 2\sqrt{5}\right)$; $C\left(\frac{1}{25}; \frac{1}{5}\right)$; $D(0,1; 0,01)$ выберыце ўсе тыя, што належаць графіку функцыі $y = \sqrt{x}$.

181. Знайдзіце, калі гэта магчыма, $f(3)$ для функцыі:

а) $f(x) = x - 3$; б) $f(x) = -x^2 + 2$;

в) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2x$; г) $f(x) = 8 - \frac{1}{2x-6}$.

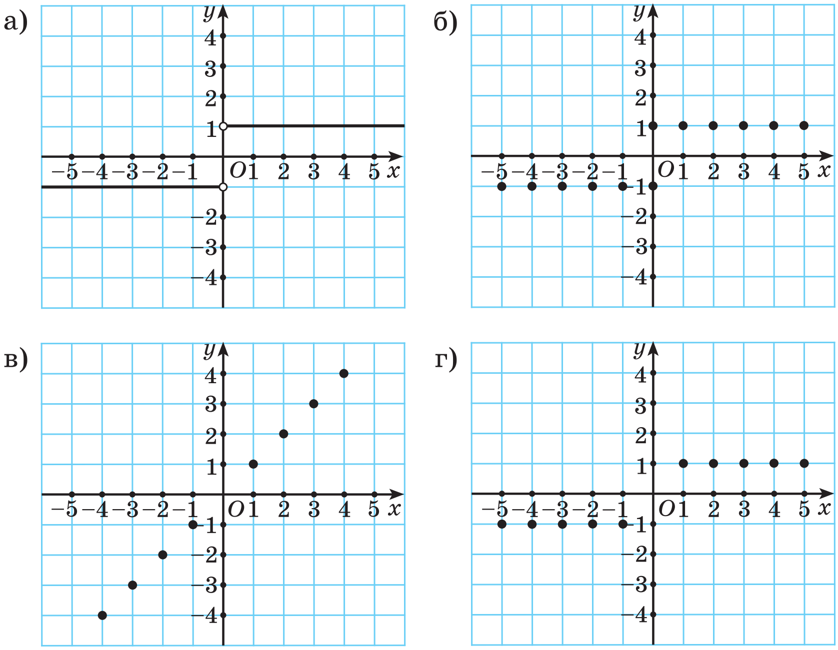
182. Знайдзіце значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна 10:

а) $y = 15x + 1$; б) $y = x^2 - 9x$;

в) $y = \frac{5}{x}$; г) $y = \sqrt{x-2}$.

183. Запішыце ўраўненне прамой, якая праходзіць праз пункт $A(3; 1)$ і паралельна прамой $y = 2x - 3$.

184. Функцыя зададзена славесным апісаннем: кожнаму дадатнаму цэламу ліку адпавядае найменшы натуральны лік, а кожнаму адмоўнаму цэламу ліку — найбольшы цэлы адмоўны лік. На рысунку 98 выберыце графік гэтай функцыі.



Рыс. 98

185. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

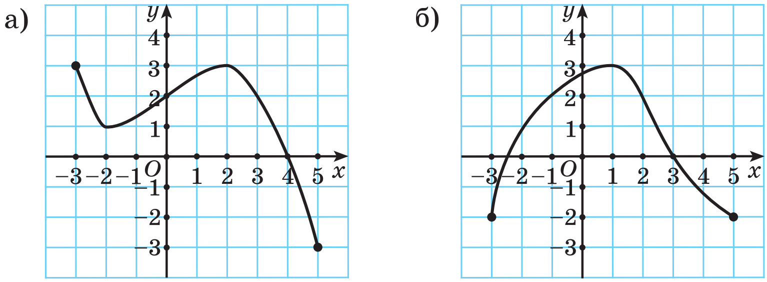
а) $f(x) = 2x + 4$; б) $f(x) = \frac{1}{x-8}$;

в) $f(x) = \sqrt{7 - 3x}$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9x+1}}$;

д) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8x-1}} + \sqrt{5 - x}$; е) $y = \frac{1}{\sqrt{30 - x - x^2}}$;

ж) $y = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} + \sqrt{x^2 + 4x}$.

186. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графічна (рыс. 99). Знайдзіце яе мноства значэнняў.



Рыс. 99

187. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \frac{2x+7}{x-5}$; б) $y = \frac{10}{x^2-4}$;

в) $y = x^2 - 2x + 4$; г) $y = 2|x| - 5$;

д) $y = 36x^4 - 13x^2 + 1$; е) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x+3}$;

ж) $y = \frac{3}{x^2} + 1$.

188. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $y = 2x - 7$; б) $y = x^2 - 7x + 6$; в) $y = \frac{2x-1}{x+5}$.

189. Аб функцыі $y = f(x)$ вядома наступнае:

1) яна вызначана на мностве рэчаісных лікаў;

2) яна не з'яўляецца ні цотнай, ні няцотнай;

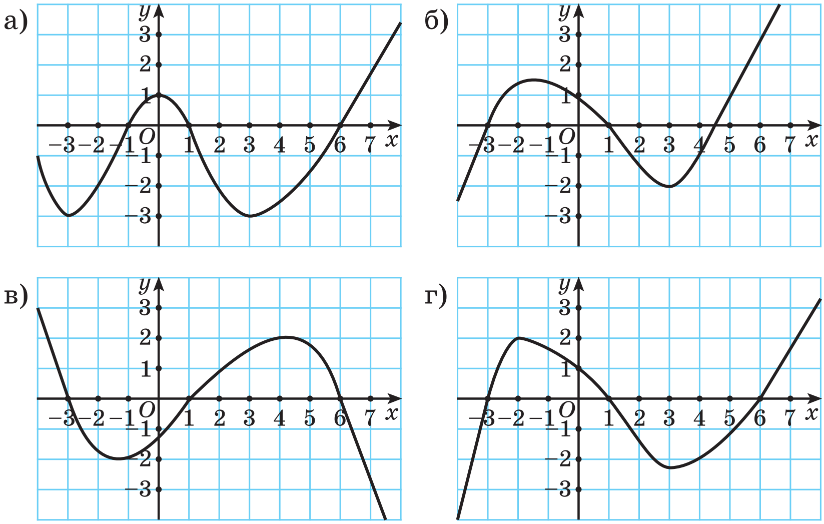
3) графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце (0; 1);

4) нулямі функцыі з'яўляюцца лікі –3; 1 і 6;

5) $y > 0$ пры $x \in (-3;\ 1) \cup (6;\ +\infty)$;

б) функцыя нарастае на прамежках $(-\infty; -2]$ і $[3; +\infty)$.

На рысунку 100 выберыце графік, які адпавядае такой функцыі.



Рыс. 100

190. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ спадае на мностве рэчаісных лікаў і $f(5) = 4$. Выберыце правільнае сцверджанне:

а) $f(6) > 4$; б) $f(-5) < -4$; в) $f(10) > 8$;

г) $f(0) > 4$; д) $f\left(\frac{1}{5}\right) < \frac{1}{4}$.

191. Знайдзіце трэці член геаметрычнай прагрэсіі, калі вядома, што яе пяты член роўны 0,5, а назоўнік прагрэсіі роўны 0,5.

192. Сума 12 першых членаў арыфметычнай прагрэсіі роўна 198. Яе першы член роўны 33. Знайдзіце рознасць гэтай прагрэсіі.

193*. Знайдзіце назоўнік бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі з дадатнымі членамі, сума першых шасці членаў якой складае $\frac{7}{8}$ сумы ўсіх яе членаў.

194. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = (x - 1)(x - 3)$;

в) $y = x^2 + 4x + 6$; г) $y = x^2 - 6x + 9$;

д) $y = -3x^2 + 6x$; е) $y = x^2 - 9$.

Для кожнай функцыі знайдзіце:

1) абсяг вызначэння;
2) каардынаты вяршыні парабалы;
3) мноства значэнняў;
4) найбольшае (найменшае) значэнне;
5) вось сіметрыі парабалы;
6) прамежкі манатоннасці;
7) нулі;
8) прамежкі знакапастаянства;
9) каардынаты пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат.

195. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = x^2 + 7x - 1$; б) $y = (x - 3)^2 + 7$;
в) $y = -2x^2 + 12x + 5$; г) $y = -3x^2 + 5$.

196. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$; б) $y = 4(x - 1)^2 - 3$;
в) $y = -3x^2$; г) $y = 4 - x^2$;
д) $y = -(x - 9)^2$; е) $y = (2 - x)(x + 6)$.

197. Вядома, што вось сіметрыі некаторай парабалы праходзіць праз пункт $A\left(-\sqrt{3}; 2\right)$. Знайдзіце абсцысу вяршыні гэтай парабалы.

198. Знайдзіце вось сіметрыі парабалы:

а) $y = -x^2 - x + 3$; б) $y = 7 + 5(x - 4)^2$; в) $y = -7x^2 + 2$.

199. Знайдзіце прамежак нарастання функцыі:

а) $y = 3x^2 + 18x - 1$;
б) $y = -(x - 3)^2 + 1$;
в) $y = (2x - 1)(x + 3)$.

200. Знайдзіце прамежак спадання функцыі:

а) $y = 12 - \frac{1}{6}\left(x + 4\right)^2$;
б) $y = x^2 - 6$;
в) $y = (3 - x)(2x + 1)$.

201. Знайдзіце нулі функцыі, калі яны ёсць:

а) $y = -3x^2 + 10x - 3$; б) $y = \frac{1}{5}\left(x - 7\right)^2 - 5$;
в) $y = x^2 - 9x + 1$; г)* $y = x^2 - \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{14}$.

202. На рысунку 101 паказаны відарыс графіка функцыі $y = 4x^2 - 11x + 6$. Знайдзіце каардынаты пункта N.

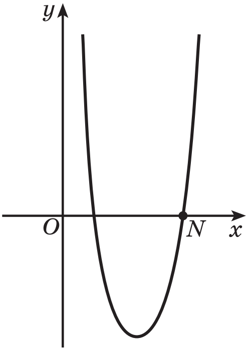
203. Нулямі квадратычнай функцыі з'яўляюцца лікі −6 і 8. Знайдзіце абсцысу вяршыні парабалы.

204. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння з воссю Oy графіка функцыі:

а) $y = -5x^2 + 7x - 6$;

б) $y = (x - 7)(x + 2)$;

в) $y = (x - 3)^2 + 7$.



Рыс. 101

205. Графік некаторай функцыі атрыманы з графіка функцыі $y = -x^2$ зрухам яго на 3 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 4 адзінкі ўгору ўздоўж восі ардынат. Знайдзіце значэнне функцыі пры $x = -9$.

206. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый $y = -x^2 + 6x - 5$ і $y = 4$. Знайдзіце каардынаты іх агульнага пункта. Праверце атрыманы вынік.

207. Знайдзіце каардынаты агульных пунктаў графікаў функцый $y = 2x^2 - 2$ і $y = x^2 + 4x + 3$.

208. Выберыце функцыю, графік якой атрыманы з графіка функцыі $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, зрухам яго на 2 адзінкі ўправа ўздоўж восі абсцыс і на 3 адзінкі ўгору ўздоўж восі ардынат:

а) $y = \frac{k}{x+2} + 3$;

б) $y = \frac{k}{x-2} + 3$;

в) $y = \frac{k}{x+3} - 2$;

г) $y = \frac{k}{x+2} - 3$;

д) $y = \frac{k}{x-3} + 2$.

209. Выберыце функцыю, графік якой паказаны на рысунку 102:

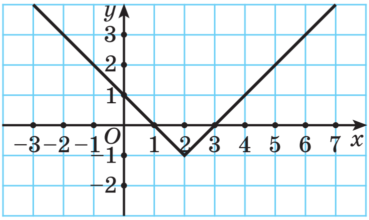
а) $y = |x + 2| + 1$;

б) $y = -|x - 2| - 1$;

в) $y = |x - 2| - 1$;

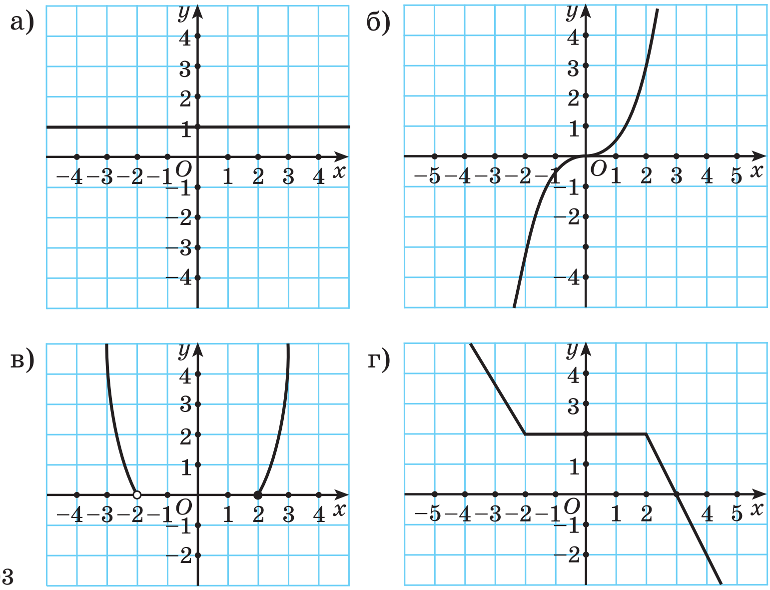
г) $y = |x + 2| - 1$;

д) $y = |x - 1| - 2$.



Рыс. 102

210. Сярод рысункаў 103, *а—г* выберыце графік цотнай функцыі.



Рыс. 103

211. Даследуйце функцыю на цотнасць:

а) $y=-2x^3$; б) $y=\frac{|x|}{x}$; в) $y=-\sqrt{x}$;

г) $y=-3|x|+1$; д)* $y=|x-1|+|x+1|$.

212. Функцыя $y=f(x)$ цотная. Вядома, што $f(x)=x^3$ пры $x\leqslant 0$. Знайдзіце $f(2)$.

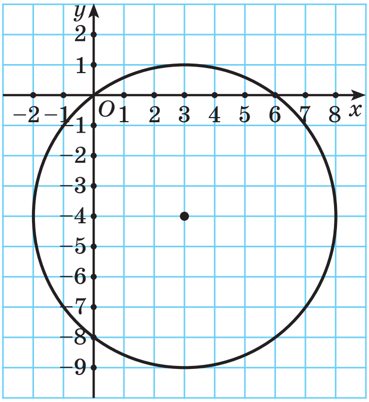
213. Знайдзіце каардынаты цэнтра і радыус акружнасці:

а) $(x-3)^2+(y+4)^2=36$;

б) $x^2+(y+7)^2=18$.

214. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі акружнасцей $x^2+y^2=2$ і $(x-6)^2+(y+8)^2=18$.

215. Запішыце ўраўненне акружнасці, сіметрычнай акружнасці, паказанай на рысунку 104, адносна прамой $y=-10$.



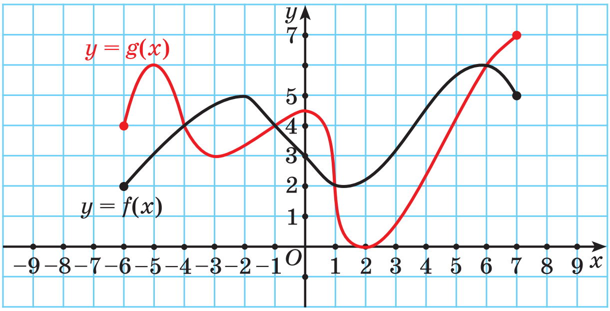
Рыс. 104

216. На акружнасці, зададзенай ураўненнем $x^2+y^2=25$, знайдзіце пункты:

а) з абсцысай –4;

б) з ардынатай 1.

217. Функцыі $y=f(x)$ і $y=g(x)$ зададзены на адрэзку [–6; 7] графікамі (рыс. 105). Знайдзіце ўсе значэнні x, пры якіх правільная няроўнасць $f(x)\geqslant g(x)$.



Рыс. 105

218. Выберыце функцыю, графікам якой з'яўляецца гіпербала:

а) $y=-\frac{4}{7x}$; б) $y=-\frac{4x}{7}$; в) $y=\frac{7x}{4}$;

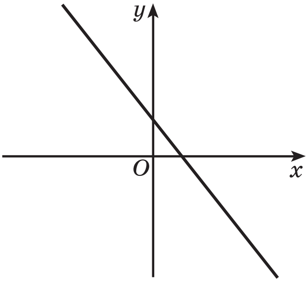
г) $y=x-\frac{7}{4}$; д) $y=-\frac{4}{7}$.

219. На рысунку 106 паказаны графік функцыі віду $y=kx+b$. Выберыце правільнае сцверджанне:

а) $k>0$; $b>0$; б) $k>0$; $b<0$;

в) $k=0$; $b>0$; г) $k<0$; $b>0$;

д) $k<0$; $b<0$.



Рыс. 106

220. Выберыце функцыю, графіку якой належыць пункт $K(-10;\ 1)$:

а) $y=-10x$; б) $y=-x+1$;

в) $y=-\frac{10}{x}$; г) $y=x-11$;

д) $y=x^2+99$.

221. Знайдзіце, калі гэта магчыма, $f(5)$ для функцыі:

а) $f(x) = 2x + 6$; б) $f(x) = 4 - x^2$;

в) $f(x) = \sqrt{3 - x} - 1$; г) $f(x) = \frac{x + 7}{2x - 5}$.

222. Знайдзіце значэнне аргумента, пры якім значэнне функцыі роўна 25:

а) $y = 7x - 3$; б) $y = x^2 - 24x$;

в) $y = -\frac{10}{x}$; г) $y = \sqrt{x}$.

223. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \frac{1}{x + 5}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6 - x}}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 36}$; г) $f(x) = \sqrt{x - 5} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x}}$.

224. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $y = \frac{3x^2 - 3}{x - 1}$; б) $y = x^2 - 2x + 1$;

в) $y = x^4 - 6x^2 + 8$; г) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

225. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства функцыі:

а) $y = 9 - 5x$; б) $y = 2x^2 - 5x + 3$; в) $y = \frac{x - 3}{x + 2}$.

226. а) У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый $y = \frac{8}{x}$, $y = \sqrt{x}$ і $y = 2x$.

б) З дапамогай пабудаваных графікаў рашыце ўраўненне:

1) $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$; 2) $\frac{8}{x} = 2x$.

в) З дапамогай пабудаваных графікаў рашыце няроўнасць:

1) $\frac{8}{x} \geqslant \sqrt{x}$; 2) $\frac{8}{x} > 2x$.

227. У арыфметычнай прагрэсіі (a_n) вядома, што $a_1 = 8$; $d = 3$. Знайдзіце колькасць членаў гэтай прагрэсіі, якія з'яўляюцца двухзначнымі лікамі.

228. Знайдзіце найбольшае значэнне зменнай x, пры якім лікі $\frac{x}{2}$; $\frac{x^2 + 3}{2}$; $2{,}5x + 1$ будуць паслядоўнымі членамі арыфметычнай прагрэсіі.

229. Паміж лікамі 1 і 81 размясцілі тры лікі так, што разам з дадзенымі лікамі яны ўтварылі геаметрычную прагрэсію. Знайдзіце назоўнік гэтай прагрэсіі.

230. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = (x - 7)(x - 1)$;

в) $y = x^2 + 2x + 3$; г) $y = x^2 - 4x + 4$;

д) $y = x^2 - 6x$; е) $y = -x^2 + 9$.

Для кожнай функцыі знайдзіце:

1) абсяг вызначэння;
2) каардынаты вяршыні парабалы;
3) мноства значэнняў;
4) найбольшае (найменшае) значэнне;
5) вось сіметрыі парабалы;
6) прамежкі манатоннасці;
7) нулі;
8) прамежкі знакапастаянства;
9) каардынаты пункта перасячэння графіка функцыі з воссю ардынат.

231. Знайдзіце каардынаты вяршыні парабалы:

а) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 9$; б) $y = -2(x + 5)^2 - 8$;

в) $y = -3x^2 - 15x + 1$; г) $y = -4x^2 + 1$.

232. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = x^2 - 8x + 17$; б) $y = -2(x - 7)^2 + 6$;

в) $y = x^2 + 9$; г) $y = -(x + 1)^2$.

233. Знайдзіце вось сіметрыі парабалы:

а) $y = -3x^2 - 5x + 3$; б) $y = 9 - 4(x + 2)^2$; в) $y = x^2 - 1$.

234. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі:

а) $y = -2x^2 + 8x - 3$; б) $y = (x - 7)^2$;

в) $y = (4 - x)(x + 3)$.

235. Знайдзіце нулі функцыі, калі яны ёсць:

а) $y = -x^2 + 6x - 8$; б) $y = -x^2 - 8$;

в) $y = x^2 + 4x - 21$; г) $y = x^2 + \frac{x}{3}$.

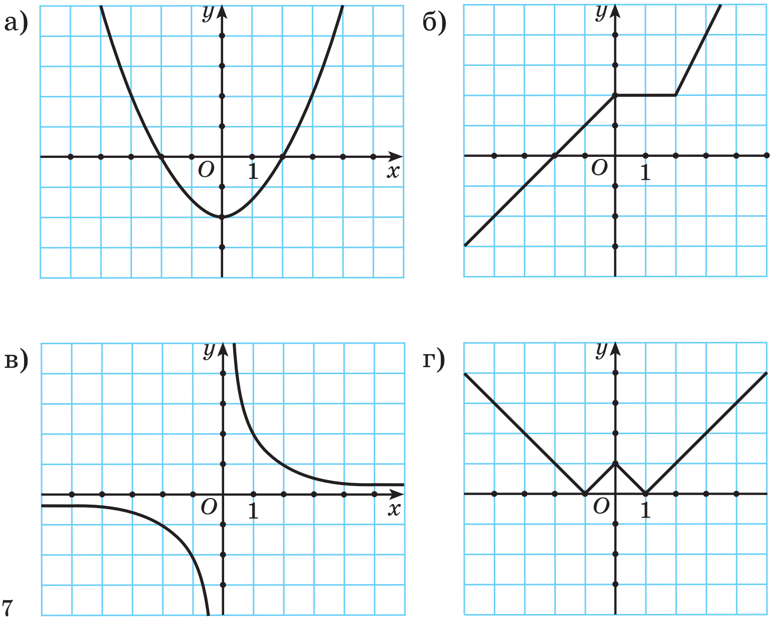
236. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння з воссю Oy графіка функцыі:

а) $y = x^2 + 4x - 16$; б) $y = (8 - x)(x + 1)$;

в) $y = (x - 1)^2 - 5$.

237. У адной сістэме каардынат пабудуйце графікі функцый $y = x^2 - 4x + 3$ і $y = -2x + 11$, знайдзіце каардынаты іх агульных пунктаў.

238. Сярод рысункаў 107, *а—г* выберыце графік няцотнай функцыі.



Рыс. 107

239. Знайдзіце каардынаты цэнтра і радыус акружнасці:

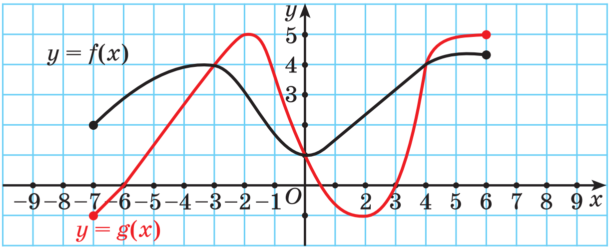
а) $(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 36$; б) $(x - 7)^2 + y^2 = 32$.

240. У адной сістэме каардынат пабудуйце акружнасці, зададзеныя ўраўненнямі

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4 \quad \text{і} \quad (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49.$$

241. Запішыце ўраўненне акружнасці з цэнтрам у пачатку каардынат, якая праходзіць праз пункт $B(-1;\ 3)$.

242. Функцыі $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зададзены на адрэзку $[-7;\ 6]$ графікамі (рыс. 108). Знайдзіце ўсе значэнні x, пры якіх правільная няроўнасць $f(x) < g(x)$.



Рыс. 108

Ураўненні, няроўнасці, сістэмы

243. З ураўненняў:

1) $2x = 0$; 2) $3 - x = 5 - x - 2$;

3) $7x - 2 = 6x + 3$; 4) $\frac{1}{2}x - 5 = 0{,}5 + 2$;

5) $9x = 9x + 4$; 6) $\frac{1}{4}x + 2 = 2 + 0{,}25x$ —

выпішыце ўраўненні:

а) якія маюць адзін корань;
б) якія не маюць каранёў;
в) у якіх корань — любы лік.

244. Рашыце ўраўненне:

а) $23 - 3(x - 3) = 4x - 3$;

б) $10x - 5(4x + 3) = 3x - 2(7x - 2)$;

в) $\frac{3x+6}{2} - \frac{7x-14}{3} = \frac{x+1}{9}$;

г) $\frac{3+3x}{4} - \frac{x+6}{4} - 1 = \frac{8x-3}{6}$.

245. Рашыце няроўнасць:

а) $7x - 3 > 11$;

б) $2(x + 3) < 3 - x$;

в) $(x - 1)(2x - 2) \leqslant (2x - 1)(x + 2)$;

г) $(x - 3)(x + 2) - (x - 3)^2 \geqslant 15x - 10$.

246. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці

$$\frac{x-2}{5} - \frac{3x+2}{6} \leqslant \frac{2}{3} - x.$$

247. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай значэнне дробу $\frac{3y-5}{6}$ не большае за значэнне рознасці дробаў $\frac{3-y}{9}$ і $\frac{6y-7}{15}$.

248. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f(x) = 5x - 10$; б) $f(x) = -x + 2$; в) $f(x) = -2x + 4$.

249. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх функцыя прымае адмоўныя значэнні:

а) $y = 2x - 7$; б) $y = -6x + 2$; в) $y = (x - 1)^2 - (x + 2)^2$.

250. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} 5x - 12 \geqslant 11x, \\ 1 - 5x > 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5 - \dfrac{x-1}{2} \geqslant 3, \\ 1 + \dfrac{4x}{3} < 7. \end{cases}$

251. Рашыце двайную няроўнасць:

а) $-1 \leqslant 5 - 2x < 3;$ б) $2 < \dfrac{5x+1}{3} \leqslant 10.$

252. Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

а) $\left[\begin{array}{l} 4x - 7 \leqslant 5x - 1, \\ 5x + 4 \leqslant 2x + 10; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} > 2 - x, \\ 7x - 15 > 0. \end{array}\right.$

253. Рашыце сістэму ўраўненняў спосабам падстаноўкі:

а) $\begin{cases} y = x - 1, \\ 5x + 2y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 6x - y = 7. \end{cases}$

254. Рашыце сістэму ўраўненняў спосабам складання:

а) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7y - 5x = 6, \\ 7y + 2x = 76. \end{cases}$

255. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 3(x + y) = 6, \\ 6 - 5(x - y) = 8x - 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3(2y + 1) = 15, \\ 3(x + y) + 3y = 2y - 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{y+1}{2} = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{6} + \dfrac{2x+y}{9} = 3, \\ \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{x-y}{4} = 4. \end{cases}$

256. Рашыце няпоўнае квадратнае ўраўненне:

а) $4x^2 - 5x = 0;$ б) $3x^2 - 27 = 0;$ в) $\dfrac{1}{6}x^2 + 2x = 0;$

г) $x^2 = 7;$ д) $x^2 + 8 = 8 - 3x;$ е) $28 + x^2 = 12.$

257. Выкарыстаўшы формулу каранёў квадратнага ўраўнення, рашыце ўраўненне:

а) $x^2 - 10x + 16 = 0;$ б) $3x^2 + 4x + 1 = 0;$

в) $9x^2 + 6x + 1 = 0;$ г) $8x^2 - 5x + 1 = 0.$

258. Рашыце ўраўненне:

а) $(x + 6)(x + 1) = -6;$

б) $(3x - 1)(x + 2) = 6;$

в) $(2x-3)(2x+3)-(x-2)^2-1=5x$;

г) $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(2-x)^2}{4}=\frac{1-x}{2}$.

259. Знайдзіце значэнне выразу $10(x_1x_2-x_1-x_2)$, дзе x_1 і x_2 — карані ўраўнення $4x^2-x-13=0$.

260. Рашыце біквадратнае ўраўненне:

а) $x^4-10x^2+9=0$; б) $6x^4+5x^2-1=0$.

261. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $(x^2-5)^4-(x^2-5)^2=12$;

б) $(x^2+5x)(x^2+5x-8)-20=0$.

262. Рашыце квадратную няроўнасць:

а) $4x-x^2>0$; б) $6x^2\geqslant -x$;

в) $9x^2<25$; г) $x^2-14x+49>0$;

д) $9x^2-30x+25<0$; е) $36x^2+12x+1\geqslant 0$;

ж) $x^2\leqslant x-\frac{1}{4}$; з) $x^2-10x+12<0$;

і) $0{,}5x^2+2x-2{,}5\leqslant 0$.

263. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases}x^2-2x-8>0,\\0{,}8x+2\leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x^2}{49}\leqslant 1,\\9x-x^2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x-3)^2>-4x+8,\\(7-x)(x+7)>-x^2+40.\end{cases}$

264. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$y=\sqrt{5-x}-\frac{5}{\sqrt{10-x^2+3x}}.$$

265. Рашыце двайную няроўнасць $6-x<x^2\leqslant 16$.

266. Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

а) $\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3<0,\\x\geqslant 3;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x^2-6x>0,\\x\leqslant 5.\end{array}\right.$

267. Рашыце дробава-рацыянальнае ўраўненне:

а) $\frac{x^2+2x}{x+4}=\frac{8}{x+4}$; б) $\frac{x^2-8x}{5-x}=\frac{15}{x-5}$;

в) $\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}=0$; г) $1-\frac{2x^2-x-6}{2-x}=0$;

д) $\dfrac{3}{x+2}+1=\dfrac{4}{x^2+4x+4}$; е) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x+1}{x+2}=0$;

ж) $\dfrac{2x^2+x-1}{x+1}=3x+1$; з) $\dfrac{3x+1}{x}+\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{6x-2}{x^2-2x}$.

268. Рашыце няроўнасць метадам інтэрвалаў:

а) $\dfrac{x-4}{x+6}\leqslant 0$; б) $\dfrac{(x-3)(x-5)}{x+6}\leqslant 0$;

в) $\dfrac{2-x-x^2}{2x+3}\geqslant 0$; г) $\dfrac{x^2-13x+30}{x^2+7x+10}<0$;

д) $\dfrac{16-x^4}{x+1}\leqslant 0$; е) $\dfrac{(x-4)^2}{2-x}\geqslant 0$;

ж) $\dfrac{x-8}{(x-10)^2}\geqslant 0$; з) $\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x-4)}>0$.

269. Рашыце няроўнасць:

а) $\dfrac{1}{x}<2$; б) $\dfrac{2}{x-2}<1$; в) $\dfrac{1}{3x+5}\leqslant\dfrac{x}{3x+5}$;

г) $\dfrac{x}{x^2-16}\geqslant\dfrac{3}{16-x^2}$; д) $\dfrac{x^2+11}{x+5}\leqslant 2$; е) $\dfrac{4}{(x-1)^2}\geqslant 1$.

270. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x-10}{3-x}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+12}{3+2x-x^2}}$;

в) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$; г) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x^2-4x+4}}+\sqrt{x^2-x}$.

271*. Выканайце замену зменнай і рашыце ўраўненне:

а) $\dfrac{1}{x^2+2x}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{30}$; б) $\dfrac{x^2+x-10}{2}-\dfrac{3}{2x^2+2x-20}=1$.

272. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення:

а) $5-2(x+1)=1-3x$; б) $5-2(x-1)=1-2x$;

в) $5-2(1-x)=2x+3$.

273. Рашыце ўраўненне:

а) $9x-5(x+2)=18-2x$; б) $7(2x-1)-3(x+4)=6(11-x)$;

в) $\dfrac{5x-6}{4}-\dfrac{x+11}{3}=\dfrac{7+4x}{2}$; г) $\dfrac{x-5}{2}+\dfrac{6-x}{3}=\dfrac{x-7}{6}-\dfrac{2+x}{4}$.

274. Рашыце няроўнасць:

а) $4x + 7 < 11$;

б) $3(x - 2) > x - 12$;

в) $(x - 3)(2x - 1) \leqslant (2x + 1)(x + 2)$;

г) $(x - 5)(x + 2) - (x + 3)^2 \geqslant 7 - 14x$.

275. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці

$$\frac{x}{4} + \frac{2x - 1}{9} \leqslant \frac{x - 9}{6} + 2.$$

276. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай значэнне дробу $\frac{2y + 5}{18}$ не меншае за значэнне сумы дробаў $\frac{7y - 3}{6}$ і $\frac{2 - 5y}{4}$.

277. Знайдзіце нулі функцыі:

а) $f(x) = 2x + 4$; б) $f(x) = -x + 10$; в) $f(x) = -5x + 3$.

278. Знайдзіце значэнні аргумента, пры якіх функцыя прымае дадатныя значэнні:

а) $y = x - 6$; б) $y = -3x + 1$; в) $y = (x - 3)^2 - (x + 1)^2$.

279. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} 7y < 4y + 9, \\ 4 - y \geqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x + 1}{5} < 3, \\ \frac{x}{10} - 1 \geqslant \frac{x}{2}. \end{cases}$

280. Рашыце двайную няроўнасць:

а) $-7 < 1 - 3x \leqslant 5$; б) $4 \leqslant \frac{3x - 2}{7} < 9$.

281. Рашыце сукупнасць няроўнасцей:

а) $\left[\begin{array}{l} 7 - 9x \leqslant 5 - 8x, \\ 7 - 3x \leqslant 6 - 4x; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{5} \leqslant x + 8, \\ 5x + 7 < 7. \end{array}\right.$

282. Рашыце сістэму ўраўненняў:

а) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 5x + 2y = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ 6x - 5y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = 4, \\ \frac{4}{5}x - 3y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2x + 3y}{4} = \frac{3x + 4y}{7}, \\ \frac{5y - 6x}{10} = \frac{12 - 4x}{2}. \end{cases}$

283. Рашыце няпоўнае квадратнае ўраўненне:

а) $7x^2 + 3x = 0$; б) $5x^2 - 20 = 0$;

в) $\frac{1}{7}x^2 - 5x = 0$; г) $x^2 = 10$;

д) $x^2 - 6 = 4x - 6$; е) $33 + x^2 = 10$.

284. Выкарыстаўшы формулу каранёў квадратнага ўраўнення, рашыце ўраўненне:

а) $x^2 + 5x + 4 = 0$; б) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

в) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; г) $7x^2 - 2x + 1 = 0$.

285. Рашыце ўраўненне:

а) $x(x + 1) = 6$; б) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$;

в) $\frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}$.

286. Рашыце біквадратнае ўраўненне:

а) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; б) $5x^4 + 4x^2 - 1 = 0$.

287. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы метад замены зменнай:

а) $(x^2 - 1)^4 - 2(x^2 - 1)^2 = 8$;

б) $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) - 18 = 0$.

288. Рашыце квадратную няроўнасць:

а) $7x + x^2 < 0$; б) $4x^2 \geqslant 49$;

в) $x^2 - 10x + 25 \leqslant 0$; г) $8x^2 - 3x + 12 > 0$;

д) $3x^2 - x - 4 \geqslant 0$; е) $x^2 + 0,8x + 0,2 < 0$.

289. Рашыце сістэму няроўнасцей:

а) $\begin{cases} 2x - x^2 - 1 < 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (1 + x)^2 \geqslant 16, \\ (2x - 7)^2 < 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x(x - 1) \leqslant 20, \\ x - 4 < -4 - x. \end{cases}$

290. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$y = \sqrt{x^2 - 6x - 7} - \frac{1}{\sqrt{2 - 3x}}.$$

291. Рашыце двайную няроўнасць $12 - x < x^2 \leqslant 25$.

292. Рашыце сукупнасць няроўнасцей $\left[\begin{array}{l} x^2 + 6x - 7 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 0. \end{array}\right.$

293. Рашыце дробава-рацыянальнае ўраўненне:

а) $\frac{x^2-6}{x-3}=\frac{x}{x-3}$; б) $\frac{20}{x}=9-x$;

в) $\frac{x-4}{x}=\frac{2x+10}{x+4}$; г) $\frac{x^2-12}{x-3}=\frac{x}{3-x}$;

д) $\frac{2x^2-5x+2}{x-2}=4x+1$; е) $\frac{2x-3}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{4x-6}{x^2+2x}$;

ж) $\frac{3x^2+2x-1}{x+1}=5$; з) $\frac{x}{x-4}-\frac{2}{x+4}=\frac{32}{x^2-16}$.

294. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{(x+3)(7x-2)}{x-5}\geqslant 0$; б) $\frac{\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)}{x+\sqrt{7}}\leqslant 0$;

в) $\frac{(x+7)^2}{x^2-36}\leqslant 0$; г) $\frac{(x-8)(x-3)^2}{x-2}\geqslant 0$.

295. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{1-x}<1$; б) $\frac{3x^2+20x+26}{x^2+6x+5}<2$.

296. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$y=\sqrt{\frac{x^2+7x+12}{3-2x-x^2}}.$$

297. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} x^2-6x+5\geqslant 0, \\ \frac{(x+4)(x+2)}{x-1}\leqslant 0. \end{cases}$

Тэкставыя задачы

298. У першым вагоне метро пасажыраў у 3 разы больш, чым у другім. Калі з першага вагона выйшлі 32 чалавекі, а ў другі зайшлі 12 чалавек, то ў абодвух вагонах пасажыраў стала пароўну. Колькі пасажыраў было ў кожным вагоне першапачаткова?

299. Веласіпедыст меркаваў пераадолець шлях за 2 г, але павялічыў запланаваную скорасць на 3 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ і затраціў на гэты шлях 1 г 36 мін. Знайдзіце даўжыню шляху.

300. У навукова-практычнай канферэнцыі прынялі ўдзел 6 % першакурснікаў і 10 % другакурснікаў універсітэта, што разам склала 134 чалавекі. Колькі першакурснікаў і колькі другакурснікаў ва ўніверсітэце, калі ўсяго на двух курсах вучыцца 1700 чалавек?

301. Сярэдняе арыфметычнае двух лікаў роўна 28, а $\frac{3}{4}$ іх рознасці роўны 12. Знайдзіце гэтыя лікі.

302. Фермеру неабходна абгарадзіць сеткай прамавугольны ўчастак зямлі, адна старана якога на 5 м меншая за другую, а плошча роўна 300 м^2. Знайдзіце, колькі метраў сеткі трэба купіць, ведаючы, што да разліковай колькасці трэба дадаць 5 % сеткі, якая ідзе ў адходы.

303. У перыяд вучэнняў ратавальнікаў МНС было арганізавана некалькі палявых лагераў, кожны з якіх меў лінію сувязі з усімі астатнімі. Колькі палявых лагераў было арганізавана, калі колькасць ліній сувязі роўна 21?

304. Здабытак двух паслядоўных натуральных лікаў большы за іх суму на 89. Знайдзіце гэтыя лікі.

305. Пры патруляванні катар інспектараў прыродаахоны прайшоў 21 км супраць цячэння ракі і 8 км па цячэнні, затраціўшы на ўвесь шлях 2 г. Знайдзіце скорасць цячэння ракі, калі ўласная скорасць катара складае 15 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

306. Фермеру неабходна было за пэўны час узараць поле плошчай 180 га. Паколькі прагноз надвор'я быў неспрыяльны, то штодзень ён araў на 2 га больш, чым планаваў, і скончыў працу на 1 дзень раней за тэрмін. За колькі дзён фермер узараў поле?

307. Здабытак двух натуральных лікаў роўны 165, а іх рознасць роўна 4. Знайдзіце гэтыя лікі.

308. Працягласць шашы паміж пунктамі A і B складае 16 км. З пункта A ў пункт B выехаў веласіпедыст. Адначасова з веласіпедыстам насустрач яму з пункта B выйшаў пешаход. Яны сустрэліся праз 1 г. Знайдзіце скорасць веласіпедыста, калі пешаход прыбыў у пункт A на $2\frac{2}{3}$ г пазней, чым веласіпедыст у пункт B.

309. Дзве вытворчыя лініі могуць выканаць заказ, працуючы разам, за 6 г. За колькі гадзін можа выканаць гэты заказ кожная лінія, працуючы асобна, калі адной з іх для выканання 40 % заказу неабходна на 4 г больш, чым другой для выканання 20 % заказу?

310. Басейн можна напаўняць вадой праз два краны. Калі першы кран адкрыць на 10 мін, а другі — на 20 мін, то ўвесь басейн будзе напоўнены. Калі першы кран адкрыць на 5 мін, а другі — на 15 мін, то напоўніцца 60 % басейна. За які час праз кожны кран асобна можа напоўніцца ўвесь басейн?

311. Ёсць кавалак сплаву медзі з волавам агульнай масай 12 кг, які змяшчае 45 % медзі. Колькі чыстага волава трэба дадаць да гэтага кавалка сплаву, каб атрыманы новы сплаў утрымліваў 40 % медзі?

312. Цана білета на стадыён складала 2 р. Пасля зніжэння ўваходнай платы колькасць гледачоў павялічылася на 25 %, а выручка ўзрасла на 12,5 %. Колькі стаў каштаваць білет пасля зніжэння цаны?

313. У першай выставачнай зале экспанатаў было ў 2 разы больш, чым у другой. З першай залы 36 экспанатаў перанеслі ў другую залу, пасля чаго ў дзвюх залах экспанатаў стала пароўну. Колькі экспанатаў было першапачаткова ў кожнай зале?

314. Аўтамабіль праязджае шлях з горада A ў горад B за 4 г. Калі б ён ехаў са скорасцю, на 20 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$ большай, то затраціў бы на гэты ж шлях 3 г. Знайдзіце першапачатковую скорасць аўтамабіля.

315. У маі ў школе вучылася 650 чалавек. Летам былі здадзены ў эксплуатацыю новабудоўлі, і ў пачатку навучальнага года ў школе стала 750 навучэнцаў, прычым колькасць дзяўчынак у школе павялічылася на 10 %, а хлопчыкаў — на 20 %. Колькі дзяўчынак стала ў школе ў верасні?

316. Сярэдняе арыфметычнае двух лікаў роўна 36, а $\frac{1}{3}$ іх рознасці роўна 4. Знайдзіце гэтыя лікі.

317. Ці хопіць 90 м сеткі, каб абгарадзіць прамавугольны вальер для жывёл плошчай 600 м^2, адна старана якога на 10 м меншая за другую?

318. Знайдзіце два паслядоўныя натуральныя лікі, сума квадратаў якіх роўна 313.

319. Турыстычны цеплаход прайшоў 24 км супраць цячэння ракі і 16 км па цячэнні, затраціўшы на ўвесь шлях 3 г. Знайдзіце ўласную скорасць цеплахода, калі скорасць цячэння ракі складае 2 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

320. Фірма па вытворчасці вокнаў атрымала заказ на выраб 160 вокнаў для новай школы да вызначанага тэрміну. Улічваючы важнасць заказу, штодзень выраблялі на 4 акны больш, чым планавалася, таму ўвесь заказ быў выкананы на 2 дні раней тэрміну. За колькі дзён быў выкананы заказ?

321. Здабытак двух натуральных лікаў роўны 108, а іх рознасць роўна 3. Знайдзіце гэтыя лікі.

322. Працягласць шашы паміж пунктамі A і B складае 18 км. З пунктаў A і B адначасова насустрач адзін аднаму выйшлі два пешаходы і сустрэліся праз 2 г. Знайдзіце скорасці пешаходаў, калі адзін з іх прыйшоў у пункт B на 0,9 г пазней, чым другі ў пункт A.

323. Дзве студэнцкія брыгады могуць выканаць заданне, працуючы разам, за 2 дні. За колькі дзён можа выканаць гэта заданне кожная брыгада, працуючы самастойна, калі адной з іх для выканання $\frac{1}{3}$ задання неабходна на 3 дні менш, чым другой для выканання $\frac{2}{3}$ задання.

324. Ёсць сталь двух гатункаў з утрыманнем нікелю 5 % і 40 %. Колькі трэба ўзяць сталі з утрыманнем нікелю 5 %, каб пасля змешвання сталі абодвух гатункаў атрымалася 140 т сталі з утрыманнем нікелю 30 %?

325. Бульба патаннела на 20 %. Колькі кілаграмаў бульбы можна купіць на тую ж суму, на якую раней куплялі 10 кг?

Адказы

Паўтарэнне курса алгебры 7—8-х класаў

1. а) 27; б) 1; в) 144; г) $\frac{1}{25}$; д) 81; е) 1000; ж) 32; з) 16; і) 100; к) 8.

2. а) $\frac{1}{3}$; б) 0,01; в) 1; г) 7; д) $\frac{1}{36}$; е) $\frac{1}{16}$.

3. а) 25; б) 1000; в) 10 000; г) 0,008; д) 32; е) $\frac{1}{4}$; ж) $\frac{1}{6}$; з) $\frac{1}{49}$.

4. а) $-b^2 + a$; б) $5m^2 + 4$; в) $-10b + 34$; г) $12c - 25$.

5. а) $5(2a - 7b)$; б) $x(5 + y)$; в) $2a(b - 2c)$; г) $3a(a + 4b)$; д) $b^2(2b^2 - 1)$; е) $3ab(7a + 1)$.

6. а) $(a - 5)(a + 5)$; б) $(4 - 3x)(4 + 3x)$; в) $(2m - 7n^2)(2m + 7n^2)$; г) $(ab - 1)(ab + 1)$.

7. а) $(a + 3)(a + b)$; б) $(3m - n)(m + 5)$.

8. а) $(a + 2)^2$; б) $(3b - 1)^2$; в) $(m - 9n)^2$; г) $(x^2 + y)^2$.

9. а) $(x - 9)(x + 1)$; б) $(x - 1)(6x - 1)$; в) $(x + 6)(1 - x)$; г) $(x + 2)(5x + 1)$.

10. а) $4a(2b - c)$; б) $3xy(2x - 1)$; в) $(m - 6)(m + 6)$; г) $(5 - 2y)(5 + 2y)$; д) $(a - 4)(a + b)$; е) $(x - 1)(x^2 + 1)$.

11. а) $(x - 5)^2$; б) $(2a + b)^2$.

12. а) $(x - 4)(x + 2)$; б) $(5x + 1)(x + 1)$.

13. а) $8\frac{1}{3}$; б) 14; в) –8; г) 14; д) 4,5; е) 40; ж) $\frac{1}{150}$; з) 15.

14. а) $65\sqrt{2}$ — ірацыянальны лік; б) –3 — рацыянальны лік; в) 34 — рацыянальны лік; г) 4 — рацыянальны лік.

15. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5} + 1$; г) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$.

16. а) 6,75; б) –12; в) 5,6; г) 4; д) 0; е) 15; ж) –2; з) 11.

17. а) 5; б) 30; в) 5; г) 1.

18. а) $x \in (-\infty;\ 1)$; б) $x \in \left[-\frac{7}{29}; +\infty\right)$.

20. а) $D = (-\infty;\ +\infty)$; б) $E = (-\infty;\ +\infty)$; в) $x = 7$; г) $y > 0$ пры $x \in (-\infty;\ 7)$; $y < 0$ пры $x \in (7;\ +\infty)$; д) $k = -5$; е) (0; 35).

21. а) –1,2; б) $1\frac{2}{7}$; в) –3.

22. а) $x \in (-5; +\infty)$; б) $x \in [-3; +\infty)$.

24. а) –2; 10; б) –1; $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) няма каранёў; д) $\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{10}$.

25. а) –4; –2; б) 0; 1; в) 1; 5.

26. а) $x \in (-\infty;\ -2] \cup [4;\ +\infty)$; б) $x \in (1;\ 3)$; в) $x \in \{3\}$; г) $x \in \varnothing$; д) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$; е) $x \in [-7;\ 7]$.

28. а) $D = (-\infty;\ +\infty)$; б) $(2;\ -3)$; в) $E = [-3;\ +\infty)$; г) $x = 2$; д) $x = 1$; $x = 3$; е) $y > 0$ пры $x \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$; $y < 0$ пры $x \in (1;\ 3)$; ж) функцыя нарастае на прамежку $[2;\ +\infty)$; функцыя спадае на прамежку $(-\infty;\ 2]$; з) $(0;\ 9)$.

29. а) $\frac{1}{3}$; 3; б) -4; 4.

30. а) $x \in (1;\ 4)$; б) $x \in \left(-\infty; -2\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; в) $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$;

г) $x \in [0;\ 6]$.

Раздзел 1. Рацыянальныя выразы

1.19. а) -6; б) 0.

1.20. а) $\frac{1}{17}$; б) $-2\frac{5}{7}$.

1.21. а) $-1\frac{5}{8}$; б) -13.

1.23. а) $(-\infty;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -0{,}5) \cup (-0{,}5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 8) \cup (8;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; ж) $(-\infty;\ -4) \cup (-4;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$; з) $\left(-\infty;\ -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};\ +\infty\right)$; і) $(-\infty;\ +\infty)$; к) $(-\infty;\ +\infty)$; л) $(-\infty;\ +\infty)$; м) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

1.24. а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0{,}2) \cup (0{,}2; +\infty)$; д) $(-\infty; -6) \cup (-6; 0) \cup (0; 8) \cup (8; +\infty)$; е) $(-\infty;\ -6) \cup (-6;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$.

1.25*. а) Немагчыма; б) $-\frac{1}{15}$; в) немагчыма; г) немагчыма.

1.62. а) $\frac{3}{a} = \frac{12}{4a}$; $\frac{3}{a} = \frac{3a}{a^2}$; $\frac{3}{a} = \frac{-3}{-a}$; $\frac{3}{a} = \frac{3b}{ab}$;

б) $\frac{x+y}{x} = \frac{-5x-5y}{-5x}$; $\frac{x+y}{x} = \frac{x^2+xy}{x^2}$; $\frac{x+y}{x} = \frac{-x-y}{-x}$; $\frac{x+y}{x} = \frac{xy+y^2}{xy}$;

в) $\frac{b+3}{b-3} = \frac{2b+6}{2b-6}$; $\frac{b+3}{b-3} = \frac{b^2+3b}{b^2-3b}$; $\frac{b+3}{b-3} = \frac{-b-3}{3-b}$; $\frac{b+3}{b-3} = \frac{b^2-9}{(b-3)^2}$;

$\frac{b+3}{b-3} = \frac{(b+3)^2}{b^2-9}$.

1.64. а) 5; б) $6m^4$; в) $3mn$; г) m^3n^4k.

1.65. а) $8b$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{7d}{3}$; г) $-\frac{y}{2x}$; д) $\frac{a}{c}$; е) $\frac{3}{m^2n^2}$; ж) $\frac{y}{3x}$; з) ab^3; і) $\frac{d}{b}$;

к) $\frac{7xz}{y}$; л) $3abc$; м) $\frac{1}{3xy^2}$.

1.66. а) $\frac{a+b}{3b}$; б) $\frac{x}{3(x-2y)}$; в) $\frac{2c+2d}{c}$; г) $\frac{bc}{b-c}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{3}{x+4}$; ж) $\frac{1}{m}$;

з) $\frac{1}{a-2}$; і) $3x - 2y$.

1.67. а) $-2{,}5$; б) 400.

1.68. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{2}{a}$; в) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{b+5}{3}$; д) $\frac{m}{m+6}$; е) $\frac{a+4}{3}$; ж) $\frac{x+1}{x-1}$; з) $\frac{3b+1}{3b-1}$; і) $\frac{2a+3b}{2a-3b}$.

1.69. а) $\frac{2-x}{x+3}$; б) $\frac{a+6}{a-3}$; в) $\frac{m+5}{m-3}$; г) $\frac{4-b}{4b}$.

1.70. а) $-\frac{n-m}{n-k}$ або $-\frac{m-n}{k-n}$; б) $-\frac{a+b}{c-d}$ або $-\frac{-a-b}{d-c}$; в) $-\frac{y-x}{x+z}$ або $-\frac{x-y}{-x-z}$.

1.71. а) $-\frac{1}{6}$; б) $-\frac{4}{5}$; в) $-\frac{x}{4}$; г) $-a$; д) $-\frac{c+7}{2}$; е) $-\frac{2b}{b+4}$; ж) $\frac{5}{2-x}$; з) $\frac{6-m}{m+6}$; і) $\frac{3x+3}{1-x}$.

1.72. а) 100; б) $-5\frac{3}{7}$.

1.73. а) $\frac{a-5}{6}$; б) $-\frac{a+7}{7}$; в) $\frac{b+1}{b-1}$; г) $-\frac{c+2}{c+1}$; д) $\frac{3-n}{m-b}$; е) $\frac{x-y}{x-3}$.

1.74. а) $\frac{x+3}{x-1}$; б) $\frac{x+3}{x-5}$; в) $x+2$; г) $\frac{x-1}{2-5x}$; д) $-\frac{x+6}{x+5}$; е) $a(a+3)$.

1.75. а) 16; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{9x-9y}{x+y}$; г) $\frac{2a+b}{18a-9b}$.

1.78*. $\frac{a}{2a-2b}$.

1.79*. $\frac{x^2-3}{x+2}$.

1.129. а) $\frac{m+n}{7}$; б) $\frac{2a}{b}$; в) $\frac{5x+3}{y^2}$; г) $\frac{2c^2}{ab}$; д) $\frac{mn+cd}{3k}$; е) $-\frac{2x^2}{a^4}$.

1.130. а) $\frac{8x+2}{7}$; $\frac{2x+2}{7}$; б) $\frac{4a+1}{4}$; $\frac{2a-3}{4}$; в) $\frac{m}{3a}$; $\frac{n}{3a}$; г) $\frac{4}{x}$; $\frac{2y-4}{3xy}$.

1.131. а) 5; б) 1; в) $\frac{2x}{x+1}$; г) -1.

1.132. а) $\frac{1}{a-3}$; б) $x+4$; в) $\frac{5}{m-n}$; г) $-\frac{2}{b+3}$; д) $\frac{a+3b}{a-3b}$; е) $\frac{y+1}{y-1}$; ж) $a+6$; з) $\frac{x+1}{x-3}$.

1.133. 61.

1.134. а) $\frac{b+2}{b-2}$; б) 7; в) 6; г) $7x+y$; д) $\frac{m+2}{5}$; е) $3c-1$.

1.135. 2.

1.136. $\frac{15}{a-2}$.

1.137. а) $\frac{a+4}{4-a}$; б) $\frac{1}{3x-1}$.

1.139. а) $\frac{12a-b}{3}$; б) $\frac{26x}{35}$; в) $\frac{3m-2n}{30}$; г) $\frac{5x+9y}{xy}$; д) $\frac{2a^2-9b^2}{15ab}$; е) $\frac{7c+5a}{7d}$; ж) $\frac{8an-1}{20mn}$; з) $\frac{xz+3y}{y^2z^2}$; і) $\frac{5x-3y}{15x^2}$.

1.140. а) $\frac{5a+5}{18}$; б) $\frac{7x-28}{15x}$; в) $\frac{m-n}{mn}$; г) $\frac{b-d}{bd}$; д) $\frac{y+3}{y^2}$; е) $\frac{3}{a^3}$; ж) $\frac{1-m^2}{m^9}$; з) $\frac{5x^2+1}{x^2y}$.

1.141. а) $\frac{2mn-m^2}{n(n-m)}$; $-\frac{m^2}{n(n-m)}$; б) $\frac{5a^2+8a+8}{a(a+2)}$; $\frac{5a^2-8}{a(a+2)}$.

1.142. а) $\frac{x^2+y}{x}$; б) $\frac{a-2b}{b}$; в) $\frac{6+m^2}{m}$; г) $-\frac{c}{d}$; д) $\frac{2y}{x}$; е) $\frac{7n}{1-n}$; ж) $\frac{8x}{x+y}$; з) $-\frac{8b+1}{5b+1}$.

1.143. а) $\frac{m^2+49}{m^2-49}$; б) $\frac{x-20}{x^2-16}$; в) $\frac{15-7a}{(4a-3)(3a+1)}$.

1.144. а) $\frac{5x-5}{x(x+3)}$; б) $\frac{1}{a(a-1)}$; в) $\frac{3m}{28(n-1)}$; г) $\frac{8y+1}{30(y+2)}$; д) $\frac{5}{ab}$; е) $-\frac{9}{(c+1)(c+5)(c-4)}$.

1.145. а) $-\frac{2}{a+9}$; б) $-\frac{2}{3x-21}$; в) $\frac{b+3}{b}$; г) $\frac{5m+1}{12m-24}$; д) $-\frac{5}{xy}$; е) $\frac{m-6}{4m}$.

1.146. $\frac{1}{a}$.

1.147. а) $\frac{4x}{16-x^2}$; б) $\frac{b+11}{b^2-9}$; в) $\frac{1}{1-9y^2}$; г) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

1.148. –14.

1.149. а) $\frac{6c}{(c+6)^2}$; б) $\frac{2x}{(x-2)^2}$.

1.150. а) $\frac{14}{(n+3)(m-6)}$; б) $\frac{2y}{(2x-3)(x+y)}$.

1.151. а) $\frac{y-8}{(y-1)(y-2)(y-5)}$; б) $\frac{4}{(a-3)(a-5)}$; в) $-\frac{3}{(a-1)^2}$.

1.153*. $\frac{1}{30}$.

1.188. а) $\frac{12}{b^2}$; б) $\frac{5a^3}{b^2}$; в) $\frac{1}{c^6}$; г) $\frac{5}{(y+2)^2}$.

1.189. а) $\frac{m^8}{n^4}$; б) $\frac{32}{x^{10}y^5}$; в) $\frac{1000a^3b^6}{c^{12}d^3}$; г) $\frac{(a-b)^3}{d^3}$; д) $\frac{x^4}{(x^2-5)^4}$;

е) $\frac{(3m+n)^6}{(m^2-7)^6}$.

1.190. а) $\frac{n^2}{15}$; б) $\frac{x^4}{y^2}$; в) $\frac{a^4}{b}$; г) $\frac{c}{(d+5)^2}$.

1.191. а) 4; б) $\frac{1}{5y}$; в) $\frac{a^3d}{c}$; г) $\frac{9}{28mn}$; д) $\frac{a^3c}{4}$; е) $\frac{75yz^2}{x}$.

1.192. а) $\frac{64a^6}{b^2}$; б) $-\frac{x^3y^3}{z^{24}}$; в) $\frac{81c^4}{a^8b^4}$; г) $-\frac{32m^5n^{10}}{k^{30}}$.

1.193. а) $a-3b$; б) $\frac{1}{3d}$; в) $\frac{1}{x^2}$; г) $-\frac{5}{2m}$.

1.194. а) $\frac{n}{m}$; б) $\frac{y^3}{x^2}$; в) $\frac{1}{2bc^2}$; г) $-3a$.

1.195. а) $a-6$; б) $\frac{m(m+n)}{5}$; в) $\frac{x^2}{x+2}$; г) $\frac{6c}{c+d}$; д) $-\frac{a(a+3)}{2}$;

е) $-\frac{(y-5)(y+1)}{2}$.

1.196. 30 100.

1.198. а) a; б) $\frac{x+y}{2}$; в) $\frac{b-3}{3b+1}$; г) $-\frac{1}{m(m+1)}$; д) $-\frac{5}{a+2b}$; е) $\frac{2c+1}{8(2c-1)}$.

1.199. $\frac{4a^2(a-1)}{a+1}$.

1.200. а) $2x-6$; б) $\frac{3y-1}{2}$; в) $\frac{n(n-2)}{5}$; г) $x+1$; д) $\frac{a-8}{a-7}$; е) $\frac{1}{y+3}$;

ж) $\frac{d}{2d-c}$; з) $\frac{1}{2(3x-1)(x+5)}$.

1.201. а) $\left(\frac{7a^4}{bc^5}\right)^2$; б) $\left(\frac{(m-n)^2}{c^3d^4}\right)^3$; в) $\left(\frac{a^2b^3}{(a+b)^4}\right)^4$.

1.202. а) $\frac{3x(x-1)}{(x-a)(x+2)}$; б) $\frac{(x-4)(x+1)}{x}$.

1.203. а) $\frac{3}{2a+1}$; б) $\frac{b+3}{2-4b}$; в) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x+1)}$; г) $4m^2-m$.

1.204*. $\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$.

1.205*. $a-c$.

1.241. а) $\frac{27}{2m}$; б) $\frac{1}{a+b}$.

1.242. а) $\frac{x-2y}{x+2y}$; б) $\frac{n}{m+3n}$; в) $\frac{4b-a}{2ab}$; г) $\frac{7b-28}{b+2}$.

1.243. а) $-\frac{1}{a+1}$; б) $m+4$; в) $\frac{2}{x(x+2)}$.

1.244. 9,1.

1.246. 1.

1.247. а) $\frac{4-c}{4}$; б) $a-1$.

1.249. а) –2; б) 0,5.

1.250. а) $\frac{a+b}{ab}$; б) xy.

1.251. $\frac{y}{6y-4x}$.

1.252. а) $\frac{\sqrt{b}-5}{2}$; б) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}-5}$; в) $\frac{\sqrt{a}+4}{\sqrt{a}}$; г) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$.

1.253. $3\sqrt{a}$.

1.254. а) $\frac{m+n}{n-m}$; б) $\frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

1.255. а) $\frac{\sqrt{ab}+b}{ab}$; б) $-\sqrt{ab}$; в) $1-x$; г) $\sqrt{a}$.

1.257*. а) $\frac{1}{4-m}$; б) $\frac{t-1}{t-3}$.

Я правяраю свае веды

1. а) $3{,}6x^2y$; $2x-\frac{y^4}{5}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{a^2+ac}{5}$;

б) $\frac{3}{8m+n}$; $\frac{3a}{8b^3}$; $\frac{a}{b}+14$; $\frac{x^2-x+7}{3x}$; $\frac{a+1}{a-7}$.

2. в); д).

3. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 6,3.

4. а) $\frac{a}{x-3}=\frac{-a}{3-x}$; б) $\frac{a}{x-3}=\frac{ax}{x^2-3x}$; в) $\frac{a}{x-3}=\frac{a(x+3)}{x^2-9}$;

г) $\frac{a}{x-3}=\frac{a(x-3)}{x^2-6x+9}$.

5. а) $\frac{3m}{4n}$; б) $-\frac{p+5q}{2}$; в) $\frac{3y}{y+8}$; г) $\frac{3-a}{a+3}$; д) $\frac{a+b}{b}$; е) $\frac{1}{x+1}$.

6. а) $\frac{c+1}{c-1}$; б) $\frac{a+3}{a-1}$; в) $\frac{4}{m-1}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{5}{b^2-1}$; е) $\frac{2c}{(c-2)^2}$; ж) $\frac{16}{(y+5)(x-9)}$;

з) $\frac{2d-1}{(d-1)(d-4)}$.

7. а) $\frac{4a^2x}{5y}$; б) $2x$; в) $\frac{a^{15}b^{10}}{2c}$; г) $\frac{x}{3y}$; д) $\frac{c(c+1)}{4(c-1)}$; е) $3a+1$; ж) $-\frac{(a+1)(a+2b)}{12}$;

з) $\frac{m}{m+x}$.

8. а) $\frac{x+3}{x-3}$; б) $\frac{a(5-a)}{a+5}$; в) $-a$; г) $\frac{1}{3}$.

Раздзел 2. Функцыі

2.25. а) 5; б) $3\frac{1}{8}$; в) 3,98; г) 13.

2.27. а) Няправільная; б) правільная.

2.28. а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{2}{3}$.

2.29. а) 0; 1; б) –2; 3; в) –3; 4.

2.31. а) 6; 0; –2; б) –6; –3; 7; 9; –7; –2; 5; в) [–9; 9]; г) [–4; 6].

2.32. а) $D=[-5;\ 5]$; $E=[-3;\ 7]$; б) $D=[-5;\ -3)\cup(-3;\ 5]$; $E=[-3;\ 4)\cup(4;\ 7]$.

2.34. а) $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 6)\cup(6;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -5)\cup(-5;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -9)\cup(-9;\ 9)\cup(9;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$; е) $\left(-\infty;\ -\sqrt{10}\right)\cup\left(-\sqrt{10};0\right)\cup\left(0;\sqrt{10}\right)\cup\left(\sqrt{10};+\infty\right)$; ж) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; з) $(-\infty;\ +\infty)$.

2.35. а) $[4;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ 2\frac{2}{3}\right]$; в) $(-\infty;\ -2{,}5]\cup[0;\ +\infty)$; г) (2; 4).

2.36. а) [–1; 4]; б) $\left[-\frac{2}{3};\ 6\right)$; в) $(-\infty;\ -5]\cup[1;\ 6]$; г) (2; 3].

2.37. а) $[-7;\ +\infty)$; б) $[6;\ +\infty)$; в) $[-3;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 20]$.

2.68. а) 1) –6; 3; 8; 2) $y>0$ пры $x\in[-9;\ -6)\cup(3;\ 8)$; $y<0$ пры $x\in(-6;\ 3)\cup(8;\ 9]$; 3) функцыя нарастае на прамежку [0; 6]; функцыя спадае на прамежках [–9; 0]; [6; 9]; б) 1) –8; –1; 7; 2) $y>0$ пры $x\in[-9;\ -8)\cup(-1;\ 7)\cup(7;\ 9]$; $y<0$ пры $x\in(-8;\ -1)$; 3) функцыя нарастае на прамежках [–5; 2]; [7; 9]; функцыя спадае на прамежках [–9; –5]; [2; 7].

2.69. а) –6; –1; 4; 6; б) $(-\infty;\ -6)\cup(-1;\ 4)\cup(6;\ +\infty)$; в) $[-6;\ -1]\cup[4;\ 6]$.

2.70. а) 1,4; б) –7; 7; в) $\frac{1}{7}$; 1; г) –3; –1; 1; 3.

2.71. б); в); г).

2.73. а) $f(x)>0$ пры $x\in\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; $f(x)<0$ пры $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$;
б) $g(x)>0$ пры $x\in(-\infty;\ -2)\cup(0;\ +\infty)$; $g(x)<0$ пры $x\in(-2;\ 0)$;
в) $h(x)>0$ пры $x\in(1;\ 2)$; $h(x)<0$ пры $x\in(-\infty;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$;
г) $p(x)>0$ пры $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

2.74. а) $(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 0)$.

2.75. $q(2)$; $q(0)$; $q(-5)$.

2.108. а) Можа; б) можа; в) не можа; г) можа.

2.109. б).

2.110. г).

2.112. 5.

2.113. а) 1; –1; б) –1; 1.

2.114. а) –1; б) 1.

2.115. Шэсць каранёў. $f(x) > 0$ пры $x \in (-6; -4) \cup (-1{,}5; 1{,}5) \cup (4; 6)$.

2.119. а) $[-4; 4]$; б) –6; –4; –1; 1; 4; 6; в) $y > 0$ пры $x \in (-6; -4) \cup (-1; 1) \cup (4; 6)$; $y < 0$ пры $x \in [-7; -6) \cup (-4; -1) \cup (1; 4) \cup (6; 7]$; г) функцыя нарастае на прамежках $[-7; -5]$; $[-3; 0]$; $[3; 5]$; функцыя спадае на прамежках $[-5; -3]$; $[0; 3]$; $[5; 7]$.

2.120*. а) Адмоўныя; б) дадатныя.

2.154. г).

2.155. в).

2.156. а) $y = (x-2)^3$; б) $y = x^3 - 3$; в) $y = x^3 + 5$; г) $y = (x+9)^3$; д) $y = (x+3)^3 + 5$; е) $y = (x-6)^3 - 7$.

2.157. в).

2.159. $y = -\dfrac{2}{x+3} - 5$.

2.160. в).

2.167*. –69.

2.168*. 4; 8.

2.169*. а) $[0; 8]$; б) $[-5; 3]$; в) $[9; 17]$; г) $[-1; 7]$.

2.170*. Праўда.

Я правяраю свае веды

1. а) –1; б) –5; в) 0,25; г) 3.

2. в); г).

3. в).

4. 8.

5. а) $f(x) > 0$ пры $x \in (1{,}8; +\infty)$; $f(x) < 0$ пры $x \in (-\infty; 1{,}8)$;
б) $g(x) > 0$ пры $x \in (-\infty; 5) \cup (6; +\infty)$; $g(x) < 0$ пры $x \in (5; 6)$;
в) $h(x) > 0$ пры $x \in (0; +\infty)$; $h(x) < 0$ пры $x \in (-\infty; 0)$.

6. а) $[-6; 9]$; б) $[-4; 4]$; в) –5; –1; 5; 8;
г) $y > 0$ пры $x \in (-5; -1) \cup (5; 8)$; $y < 0$ пры $x \in [-6; -5) \cup (-1; 5) \cup (8; 9]$;
д) функцыя нарастае на прамежках $[-6; -3]$; $[2; 7]$; функцыя спадае на прамежках $[-3; 2]$; $[7; 9]$.

7. а) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-\infty; -5) \cup (-5; -1) \cup (-1; +\infty)$; в) $(-\infty; 900)$;
г) $[0; 8]$; д) $[-4; 4)$; е) $(7; +\infty)$.

8. а) $[-6; +\infty)$; б) $[9; +\infty)$; в) $[-8; +\infty)$; г) $(-\infty; 28]$.

10. $a \in \left(-\dfrac{5}{9}; 0\right)$.

Раздзел 3. Дробава-рацыянальныя ўраўненні і няроўнасці

3.35. а) 2,5; б) –2; в) няма каранёў; г) 0,25; д) 2; е) 5.

3.37. а) $1\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{13}$; в) –2; 2; г) –3; 3.

3.38. $\frac{13}{16}$.

3.39. –6; –2.

3.40. а) –7; б) 0; в) 1; г) 8.

3.41. 7.

3.42. а) –1; 4; б) –1; в) –27; –1; г) –0,2.

3.43. 5.

3.44. а) –3; 7; б) –1; 18; в) –3; 6; г) 5.

3.45. а) –1; б) 4; 15.

3.46. а) 20; б) 15; в) 1 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$; г) 12 г, 24 г.

3.47. а) –3; б) –4; в) 0; г) 2.

3.48. а) 60 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, 80 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$; б) 30 м^3, 40 м^3.

3.49. а) –6; –1; б) 6; в) –1; 1.

3.50. 6 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

3.51. а) $3\frac{1}{7}$; б) –2; в) –2; г) 8.

3.52*. 5,4.

3.53*. а) –4; 4; б) –1,5; –1; 2; 3; в) –2; 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; г) –2; –1; 0; 1; д) $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$; е) $-2 \pm \sqrt{5}$.

3.54*. 4.

3.94. а) (5; 10); (–4; 1); б) (1; 2); (–5; –4); в) (1; 0); (–0,5; –1,5); г) (3; 6); (6; 3).

3.95. а) (2; –4); (–4; –16); б) (–2; 26); (2; 26); в) (0; 1); (2; –3); г) (4,5; 0); (3,5; –2).

3.96. а) 2; б) 2; в) 3.

3.97. а) (–2; –4); (2; 4); б) (3; 9); (–2; 4).

3.98. 12; 15.

3.99. 200 м; 300 м.

3.100. 43.

3.101. а) (1; 2); (–2; –1); б) (4; 8); (8; 4).

3.102. а) 12 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$, 30 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$; б) 18 г.

3.103. а) (9; 2); (–2; –9); б) (6; 4); (8; 3); в) (5; –1); г) (4; 2); (–2; –4).

3.104. а) (0; 0); (–1; 3); б) (1; 2); (2; 1); в) (–2; 3); (–3; 1); г) (1; –1).

3.105. 3.

3.106. а) (2; 10); (–3; 20); б) (2; –1); (1; –2).

3.107. а) (–2; –2); (2; –2); (–2; 2); (2; 2); б) (1; 0); (1; –1); (–2; 0); (–2; –1).

3.108*. а) (1; 3); (–1; –3); б) $\left(3+\sqrt{13};\ -3+\sqrt{13}\right)$; $\left(3-\sqrt{13};\ -3-\sqrt{13}\right)$; $\left(2+\sqrt{10};\ -2+\sqrt{10}\right)$; $\left(2-\sqrt{10};\ -2-\sqrt{10}\right)$.

3.141. а) 13; б) $\sqrt{61}$.

3.142. а) $2\sqrt{13}$; б) $\sqrt{2}$; в) 4.

3.143. а) 4; б) 3; в) 5; г) $\sqrt{2}$.

3.144. а) (–2; 1); $R = 3$; б) (0; 5); $R = 7$; в) (–4; 0); $R = 3\sqrt{2}$; г) (0; 0); $R = \sqrt{19}$.

3.145. а) Няпраўда; б) няпраўда; в) праўда; г) няпраўда.

3.146. а); в).

3.147. а) $(x-6)^2+(y-3)^2=49$; б) $(x-2)^2+(y+4)^2=25$; в) $(x+3)^2+y^2=2$; г) $x^2+y^2=45$.

3.148. а) $(x-5)^2+(y+3)^2=16$; б) $(x-5)^2+(y-3)^2=4$; в) $(x+5)^2+(y+3)^2=144$.

3.149. $x^2+(y+2)^2=29$.

3.150. Няпраўда.

3.151. б).

3.152. а) (2; 0); (0; 2); б) (0; –3); (0; 3).

3.153. а) 4; б) 2.

3.193. а) $(-\infty;\ -5)\cup(-1;\ 4)$; б) $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ 5]\cup[5{,}5;\ +\infty)$; в) $[-8;\ 0{,}75]\cup[1;\ +\infty)$; г) $(1{,}5;\ 2{,}25)\cup(8;\ +\infty)$.

3.194. а) (3; 7); б) $(-\infty;\ -5)\cup(9;\ +\infty)$; в) $[-8{,}5;\ -3)$; г) $(-\infty;\ -0{,}4)\cup[0;\ +\infty)$.

3.195. а) $(-2;\ 3)\cup(5;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -9)\cup(-7{,}5;\ 1)$; в) $\left[0;\ \frac{1}{9}\right]\cup(5;\ +\infty)$; г) $[-6;\ 8]\cup(11;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -5)\cup\left(0;\ \frac{1}{3}\right)\cup(2;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ -7)\cup\left[\frac{1}{6};\ 3\right]\cup(3{,}5;\ +\infty)$.

3.196. а) $(-\infty;\ 2)\cup(8;\ +\infty)$; б) $[-3;\ 9]$; в) $(-5;\ 2)$; г) $(-\infty;\ 0]\cup[3{,}5;\ +\infty)$.

3.197. $(-\infty;\ -7)\cup(1;\ 2)$.

3.198. $(-\infty;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$.

3.199. а) $(-\infty;\ -3]\cup\{5\}$; б) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 9)$; в) $(-\infty;\ -6]\cup\{7\}\cup[9;\ +\infty)$; г) $\left[-2\frac{1}{3};\ 8\right]$.

3.200. а) $(-\infty;\ 4)\cup\{6\}$; б) $[8;\ 10)\cup(10;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 5)\cup(5;\ 8)\cup(9;\ +\infty)$; г) $\{6\}\cup\left(-2;\ 2\frac{1}{3}\right)$.

3.201. $(-\infty;\ -2]\cup[3;\ 8)\cup(8;\ +\infty)$.

3.202. а) $(-\infty;\ -7)$; –8; б) $(-\infty;\ -6]\cup\{-0{,}5\}\cup[6;\ +\infty)$; –6.

3.203. $[-6;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$.

3.204. а) $(-5;\ 0] \cup (5;\ +\infty)$; б) $(-3;\ 3)$.

3.205. а) $[-3;\ 2] \cup [5;\ +\infty)$; б) $[-7;\ -3) \cup (2;\ 7]$.

3.206. а) $(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ 0) \cup (0;\ 7)$; б) $\{-4\} \cup [2;\ 9)$.

3.207. а) $(-\infty;\ 0) \cup (0{,}25;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -5) \cup (7;\ +\infty)$; в) $\left(-3;\ \frac{1}{3}\right) \cup (2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -3] \cup (-2;\ 3]$.

3.208. $(-\infty;\ -5] \cup \{6\} \cup (10;\ +\infty)$.

3.209. $(-\infty;\ -3] \cup (-1;\ 0) \cup [2;\ +\infty)$.

3.210. Не менш за 27 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.

3.211. $\{-1\} \cup (8;\ +\infty)$.

3.212*. $(-\infty;\ 0{,}75] \cup (2;\ +\infty)$.

3.213*. –11.

3.214*. 10.

Я правяраю сваe веды

1. б).

2. г).

3. а) –5; б) –6; в) 2; г) няма каранёў.

4. 2 і 4.

5. а) $(-2{,}5;\ 3) \cup (8;\ +\infty)$; б) $\left(-\frac{1}{6};\ 3\right] \cup [5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -5) \cup (-5;\ -2) \cup (2;\ 3)$; г) $(-\infty;\ -2] \cup \{0\} \cup [1;\ 3)$; д) $(-5;\ -3] \cup \{-1\} \cup [3;\ 5)$.

6. а) $-1\frac{2}{3}$; 3; б) –7; в) –6; 0; г) $1\frac{2}{3}$.

7. а) (5; 0); (0; –5); б) (0,25; 7,75); (–2; 1); в) (1; 0); (–2; 15).

8. а) $(-5;\ 0) \cup [11;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -6) \cup \{0\} \cup [5;\ +\infty)$.

9. а) 10; б) 4.

10. –4; 4.

Раздзел 4. Прагрэсіі

4.22. $a_1 = 1$; $a_5 = 9$; $a_{20} = 39$; $a_{100} = 199$.

4.23. а) –6; –5; –4; –3; б) 7; 13; 19; 25; в) 2; –1; –6; –13; г) 2; 4; 8; 16.

4.24. а) –15; –64; б) 20; 6; в) 45; 500; г) –4; 11.

4.25. $c_1 = 7$; $c_5 = 39$; $c_{10} = 79$; $c_{2m} = 16m - 1$; $c_{m-4} = 8m - 33$.

4.26. а) $a_n = -2n - 1$; $a_7 = -15$; б) $a_n = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1}$; $a_7 = 81$.

4.27. $a_n = 150n$; 450 м; 750 м.

4.28. –14.

4.29. а) Не; б) з’яўляецца; в) не; г) з’яўляецца.

4.30. 42.

4.31. 13.

4.32. 14.

4.33*. З першага па сёмы.

4.34*. а) 3; 14; 69; 344; б) 3; 12; 156; 24 492.

4.83. а) $d=5$; б) $d=-1$; в) $d=0$; г) $d=-2\sqrt{2}$.

4.84. а) 4; б) –4; в) 1,5; г) $-4\frac{2}{7}$.

4.85. а) $a_{18}=a_1+17d$; б) $a_{18}=a_{17}+d$; в) $a_{18}=a_{29}-11d$; г) $a_{18}=a_3+15d$.

4.86. а) $a_n=5-2n$; $a_6=-7$; $a_{12}=-19$; $a_{51}=-97$; б) $a_n=8n-15$; $a_6=33$; $a_{12}=81$; $a_{51}=393$; в) $a_n=0{,}25n+3{,}75$; $a_6=5{,}25$; $a_{12}=6{,}75$; $a_{51}=16{,}5$; г) $a_n=-5\sqrt{2}n+4\sqrt{2}$; $a_6=-26\sqrt{2}$; $a_{12}=-56\sqrt{2}$; $a_{51}=-251\sqrt{2}$.

4.87. $d=-7$; $a_{10}=-50$.

4.88. а) Не; б) з’яўляецца.

4.89. 160 р.; 220 р.; 7 сут; не больш за 6 сут.

4.90. 71.

4.91. –3.

4.92. $a_1=49$; $a_7=37$; $a_{25}=1$.

4.93. $a_1=1{,}5$; $d=-0{,}8$; $a_{13}=-8{,}1$; $a_{21}=-14{,}5$.

4.94. $a_1=-51$; $d=4$; $a_{32}=73$.

4.95. 28.

4.96. $a_{25}=0{,}1$.

4.97. $d=\frac{12\sqrt{5}}{7}$.

4.98. $a_{15}=-36$; $d=7{,}6$.

4.99. –0,4.

4.101*. а) $a_1=1$; $d=3$; б) $a_1=-6$; $d=9$.

4.102*. 10.

4.103*. З’яўляецца.

4.144. а) 253; б) –198; в) $1891\sqrt{2}$.

4.145. а) 1216; б) –23,2; в) $203\frac{5}{9}$; г) $-368\sqrt{5}$.

4.146. Не паспее.

4.147. 122,5.

4.148. $-58\frac{2}{3}$.

4.149. а) 2550; б) 1188.

4.150. а) 4905; б) 98 550.

4.151. а) 270; б) 2695.

4.152. 79; 4.

4.153. 52.

4.154. 18; –45.

4.155. $7\frac{1}{3}$; $1\frac{7}{12}$.

4.156. 1816.

4.157. 690.

4.158. 33,6.

4.159. 2268.

4.160. 3276.

4.161*. 9; 4.

4.162*. –5.

4.208. а) 4; б) –1; в) 4,8; г) $-3\frac{1}{35}$.

4.209. а) 5; –3125; б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; в) –1; 3; г) $\sqrt{3}$; 27.

4.210. а) 3; б) $-\frac{1}{4}$; в) 2; г) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

4.212. а) $b_{12}=b_1q^{11}$; б) $b_{12}=b_{11}q$; в) $b_{12}=\frac{b_{15}}{q^3}$; г) $b_{12}=b_7q^5$.

4.213. а) $b_n=5\cdot 2^{n-1}$; $b_4=40$; $b_7=320$; б) $b_n=-1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $b_4=-\frac{1}{27}$; $b_7=-\frac{1}{729}$; в) $b_n=16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $b_4=-2$; $b_7=\frac{1}{4}$; г) $b_n=9\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$; $b_4=81$; $b_7=243\sqrt{3}$.

4.214. 324.

4.215. $-\frac{1}{3}$; $-\frac{2}{9}$.

4.216. Не.

4.217. –4.

4.218. З’яўляецца.

4.219. 6.

4.220. З’яўляецца.

4.221. У маі.

4.222. 2; 6 або –2; –6.

4.223. 160; 80; 40; 20; 10; 5.

4.224. 10; 5 або –10; –5.

4.225. а) –1; 3; б) –7; 2.

4.227*. 7; –2 або $1\frac{5}{9}$; –3.

4.228*. а) З’яўляецца; б) з’яўляецца.

4.229*. 10^{11}.

4.260. а) 2295; б) 61.

4.261. а) 1785; б) 0; в) $780\left(\sqrt{5}+1\right)$.

4.262. За 4.

4.264. $20\frac{2}{9}$.

4.265. а) 205,9; б) 1079,5.

4.266. $-\frac{16}{81}$; $-\frac{55}{81}$.

4.267. 50.

4.268. 3.

4.269. –85.

4.270. 5100.

4.271*. 10.

4.272*. –176.

4.273*. 8; 10; 12 або 17; 10; 3.

4.295. а) 90; б) –28,8.

4.296. а) $156\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{9}$; в) 13,5.

4.297. 2.

4.298. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{17}{33}$; в) $3\frac{26}{99}$; г) $17\frac{172}{495}$.

4.299. $-\frac{1}{3}$.

4.300. 2.

4.301. –32.

4.302*. $\pm\frac{1}{3}$.

Я правяраю свае веды

1. Арыфметычныя прагрэсіі: б); д). Геаметрычныя прагрэсіі: а); б); в); г); е). Бясконца спадальныя геаметрычныя прагрэсіі: в); г).

2. б).

3. а) $a_n = 3{,}2 - 0{,}8n$; $a_{11} = -5{,}6$; б) $b = 3^{n-1}$; $b_6 = 243$.

4. а) 44; б) ±5.

5. а) $a_1 = 22$; $d = -4$; б) –4; 1; –0,25 або 4; 1; 0,25.

6. а) 125; б) 8.

7. а) 77; б) 6.

8. а) $9\frac{1}{3}$; б) $6\frac{361}{495}$.

9. а) 250; б) 2; 4.

10. $2+\sqrt{3}$.

Выніковае паўтарэнне

1. а) –20; б) –72; в) $-1\frac{9}{19}$; г) $-\frac{3}{40}$.

2. а) 0,596; б) 9,2; в) 6,6; г) –19,5.

3. а) 3,75; б) 6; в) 25; г) 0,159.

4. а) 11,3243; б) $-\frac{11}{15}$.

5. 2; 5; 11.

6. а) 122 175; 941 220; 977 895; б) 122 175; 188 154; 941 220; 977 895; в) 122 175; 941 220; 977 895; г) 291 523; 510 577;

7. 15.

8. 840.

9. а) Дзве; б) пяць; в) дзве; г) пятнаццаць.

10. $3\frac{1}{6}$.

11. $1\frac{11}{12}$ г; $1\frac{8}{15}$ г; $1\frac{11}{20}$ г.

12. –22.

13. 200 т.

14. 225,5 т.

15. 5 чалавек;

16. 1,56 т.

17. 24 см^2.

18. 27.

19. $\frac{7}{18}$.

20. 4 дні.

21. 26.

22. а) 0,25; б) $\frac{7}{9}$; в) 4.

23. 324.

24. 68.

25. а) $-2\cdot(-3)^2 < 1$; б) $-(-2)^{-3}\cdot(-1)^{-4} < 1$; в) $\left(\frac{1}{6^{-2}}\right)^{-3} < 1$; г) $(-2{,}4)^0 = 1$.

26. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{128}$; в) –1; г) 25; д) 16; е) 49; ж) 0,2; з) 64; і) $-\frac{64}{729}$; к) 0,2.

27. 9; –12; 15; –1.

28. $3{,}02\cdot10^{-4}$; $3{,}687\cdot10^{12}$; $3{,}4\cdot10^{-10}$; $5{,}7\cdot10^{8}$; $1{,}42833\cdot10^{-4}$; $6{,}50123\cdot10^{7}$.

29. $8\frac{11}{17}$; 3,(2); 5,2.

30. а) 10; б) $-\frac{1}{3}$; в) –0,4.

31. а) –26; б) 4,25.

32. 4; $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$.

33. а).

34. а) Ірацыянальным; б) рацыянальным; в) рацыянальным; г) ірацыянальным; д) рацыянальным; е) рацыянальным.

35. а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $2\left(\sqrt{3}+1\right)$; в) $\frac{5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$.

36. а) $\sqrt{75}$; б) $-\sqrt{20}$ в) $\sqrt{2a^2}$; г) $-\sqrt{7b^2}$; д) $\sqrt{y^3}$; е) $\sqrt{-d^3}$.

37*. $-3ak^2\sqrt{-a}$.

38*. а) 8; б) 2.

39*. а), б).

40*. 12.

41*. $\sqrt{5}-2$.

42. а) –15; б) –54; в) $-1\frac{10}{21}$; г) $-\frac{1}{14}$.

43. а) 0,492; б) 97; в) 7,4; г) –27,5.

44. а) 4; б) 25; в) 0,167.

45. 12; 27; 91; 102.

46. 66.

47. $\left(7-6\frac{5}{6}\right)\cdot\left(6-4\frac{4}{5}\right)<7\cdot6\frac{5}{6}-6\cdot4\frac{4}{5}$.

48. $2\frac{5}{6}$.

49. 175.

50. 18 р. 15 к.

51. Танней.

52. 29.

53. $\frac{1}{10}$.

54. 4 дні.

55. 34.

56. а) 4; б) 0,04; в) –1,5.

57. а) $\frac{1}{27}$; б) 0,2; в) –1; г) 9; д) 81; е) $\frac{1}{81}$; ж) 0,25; з) 27; і) $-\frac{9}{16}$; к) 0,5.

58. $1{,}230005\cdot10^{7}$; $1{,}7\cdot10^{1}$; $1{,}58\cdot10^{-4}$; $9\cdot10^{6}$; $7{,}586258\cdot10^{3}$; $1{,}32046\cdot10^{1}$; $1{,}25\cdot10^{-1}$; $6{,}9\cdot10^{6}$.

59. $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; π.

60. а) 57; б) $-\frac{1}{12}$; в) $-\frac{13}{15}$.

61. а) 21; б) $4\frac{13}{16}$.

62. а) Ірацыянальным; б) рацыянальным; в) рацыянальным; г) ірацыянальным; д) рацыянальным; е) рацыянальным.

63. а) $\frac{\sqrt{15}}{3}$; б) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; в) $3\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

64. а) $\sqrt{98}$; б) $-\sqrt{1{,}5}$; в) $\sqrt{5a^2}$; г) $-\sqrt{7b^2}$.

65. а), б), в).

72. –24.

73. $-2a^3b^7$.

74. $3x^2+6x$.

75. а) $-24a^7b^7$; б) $-2m^{14}n^2$.

76. а) $-a^2 - 3a + 10$; б) $15x^2 - 13x + 2$.

77. а) $(x - 2)(x - 5)$; б) $(2x - 1)(x - 2)$.

78. $(c - 5)(c + 5)$.

79. $-40ab^2$.

80. а) $8a^2(b - 3c)(b + 3c)$; б) $(a + 2b)(2 - b)$; в) $(2a - b)(2a + b + 1)$;
г) $(y - 2)^2(y + 2)^2$.

81. а) $\frac{y^2}{9} - 0{,}25x^2$; б) $9a^2 + 49y^2$; в) $-ab - 11b^2$; г) $-6n + 13$.

83. а) $x = -7$; б) $n = 0$; $n = 4$.

84. а) $-\frac{2b}{5}$; б) $\frac{4n^3}{m^4}$; в) $\frac{2x}{y^4z^3}$; г) $\frac{81x^8y^{16}}{m^{12}}$;

85. $\frac{6a}{(a - b)^2(a + b)}$ і $\frac{-6b}{(a - b)^2(a + b)}$.

86. Праўда; атрымаецца дроб $\frac{x - 3y}{x + 3y}$.

87. а) $\frac{1 + x}{5}$; б) $\frac{a - 3b}{a + 3b}$.

88. 1.

89. $\frac{x - 2}{x + 12}$.

90. а) $\frac{12x}{x - 3}$; б) 1; в) $-\frac{x + 3}{2x}$.

91. $2x - 1$.

92. а) $\frac{2x}{x + y}$; б) $\frac{-10x + 2}{3x - 1}$; в) $\frac{1}{x - 1}$; г) $a - 1$.

94. $\frac{1}{5c + 1}$.

95. а) $x + 9y$; б) $\sqrt{a}$.

96. $\frac{\sqrt{6} + a}{\sqrt{6} - a}$.

97. $1{,}6x$.

98. $-6n^4m^3\sqrt{2}$.

99*. $-\sqrt{-2a^3}$.

100*. $2^{10n + 7}$.

102*. 0,6.

103*. а) $(3x - a)(y + 2)^2$; б) $xy(x + y)(x - y)$; в) $2(a - 5b - 1)(a - 5b + 1)$;
г) $(b - 4)^2(b + 4)^2$; д) $(5 - x + a)(5 + x - a)$.

104*. 16^n.

105*. а) $-x$; б) $-y$.

106*. а) $-\sqrt{-\frac{3}{x}}$; б) $-\sqrt{\frac{(n-m)^3}{7}}$.

107*. $\frac{x}{x-\sqrt{2}}$.

108*. 2^{4n+2}.

111*. -5.

112*. $x=-0{,}5$; $y=-1$.

113*. а) $(9n^2-6n+2)(9n^2+6n+2)$; б) $(x+2)^2(x^2+6x+4)$.

114*. $0{,}64$.

115*. $\frac{2}{3}$.

116*. 2.

117*. $\frac{4}{a(a+8)}$.

118*. $10x$.

119*. 4.

120*. $\sqrt{x-1}+5$.

121*. $\sqrt{n+1}-1$.

128. -7.

129. $-1{,}2a^5b^5$.

130. $-5y^2+4$.

131. а) $-54m^4n^8$; б) $-3a^{13}b^2$.

132. а) $-x^2+x+6$; б) $18a^2-15a+2$.

133. а) $(x-2)(x-8)$; б) $3x^2-10x+3$.

134. $(d-6)(d+6)$.

135. а) $y=-5$; б) $m=0$; $m=5$.

136. а) $\frac{2n}{7}$; б) $\frac{10b^2}{a^3}$; в) $\frac{2m^4}{n^2k^4}$; г) $\frac{64x^{18}y^{12}}{a^{24}}$.

137. $\frac{2x}{y(x^2-y^2)}$ і $\frac{2}{x^2-y^2}$.

138. а) $4a^{-10}b^{12}$; б) $14{,}4a^7b^2$; в) $-\frac{2x^4}{9a}$; г) $-1{,}5x^4y^{11}$.

139. а) $\frac{y^6}{2x^5}$; б) $\frac{27x^5}{5y^3}$; в) $-\frac{40p}{63}$; г) $\frac{18y^3}{x^2}$.

140. $-30bc^2$.

141. а) $5m^2(n-4y)(n+4y)$; б) $(m-2n)(3+n)$; в) $(a+3b)(a-3b+1)$;
г) $(x-3)^2(x+3)^2$.

142. а) $\frac{a^2}{49}-0{,}16b^2$; б) $25a^2+49b^2$; в) $-33mn-13n^2$; г) $4m+13$.

144. $\frac{y+7}{y-1}$.

145. а) $\frac{2x}{x-1}$; б) 1; в) $-\frac{x(5+x)}{3}$.

146. а) $4x+y$; б) $-2\sqrt{b}$.

147. 7.

148. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{-10x+11}{2x+3}$; в) $\frac{1}{x+5}$; г) $-b-4$.

150. –4.

151. $\frac{\sqrt{3}-m}{\sqrt{3}+m}$.

152. $1{,}5y$.

153. $-5a^2b^5\sqrt{2}$.

154. $-\sqrt{-5b^3}$.

155*. 5^{5n+9}.

157*. 3.

158*. а) $(2a-3b)(x+3)^2$; б) $ab(a+b)(a-b)$; в) $3(n+2m-2)(n+2m+2)$;
г) $(a-1)^2(a+1)^2$; д) $(4-b+y)(4+b-y)$.

159*. 49^n.

160*. а) $-5a+b$; б) $a-4b$.

161*. а) $-\sqrt{-\frac{1}{2x}}$; б) $-\sqrt{\frac{(b-a)^3}{5}}$.

162*. $\frac{x}{x+\sqrt{3}}$.

163*. 3^{6m+1}.

166*. 5.

167*. $x=-1$; $y=-2$.

168*. а) $(n^2-6n+18)(n^2+6n+18)$; б) $(x^2+5x+8)(x+4)(x+2)$.

169*. 0,16.

170*. –3.

171*. –11.

172*. $\frac{4}{b(b+12)}$.

173*. $\frac{4a}{3a-12}$.

174*. 8.

175*. $\sqrt{x-2}+2$.

176*. $\frac{\sqrt{5n+1}-1}{5}$.

177. г).

178. г).

179. в).

180. A; B; C.

181. а) 0; б) –7; в) –4; г) немагчыма.

182. а) –0,6; б) –1; 10; в) $\frac{1}{2}$; г) 102.

183. $y = 2x - 5$.

184. г).

185. а) $D = \boldsymbol{R}$; б) $D = (-\infty;\ 8) \cup (8;\ +\infty)$; в) $D = \left(-\infty;\ 2\frac{1}{3}\right]$; г) $D = \left(-\frac{1}{9};\ +\infty\right)$;
д) $D = \left(\frac{1}{8};\ 5\right]$; е) $D = (-5;\ 6)$; ж) $D = [0;\ 4)$.

186. а) $E\ = [-3;\ 3]$; б) $E = [-2;\ 3]$.

187. а) –3,5; б) няма нулёў; в) няма нулёў; г) –2,5; 2,5; д) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$;
$\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; е) 4; ж) няма нулёў.

188. а) $y > 0$ пры $x \in (3{,}5;\ +\infty)$; $y < 0$ пры $x \in (-\infty;\ 3{,}5)$;
б) $y > 0$ пры $x \in (-\infty;\ 1) \cup (6;\ +\infty)$; $y < 0$ пры $x \in (1;\ 6)$;
в) $y > 0$ пры $x \in (-\infty;\ -5) \cup (0{,}5;\ +\infty)$; $y < 0$ пры $x \in (-5;\ 0{,}5)$.

189. г).

190. г).

191. 2.

192. –3.

193*. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

195. а) (–3,5; –13,25); б) (3; 7); в) (3; 23); г) (0; 5).

196. а) $E = [0;\ +\infty)$; б) $E = [-3;\ +\infty)$; в) $E = (-\infty;\ 0]$; г) $E = (-\infty;\ 4]$;
д) $E = (-\infty;\ 0]$; е) $E = (-\infty;\ 16]$.

197. $x_{\text{в}} = -\sqrt{3}$.

198. а) $x = -\frac{1}{2}$; б) $x = 4$; в) $x = 0$.

199. а) $[-3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 3]$; в) $[-1{,}25;\ +\infty)$.

200. а) $[-4;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0]$; в) $[1{,}25;\ +\infty)$.

201. а) $\frac{1}{3}$; 3; б) 2; 12; в) $\frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$; г) $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$.

202. (2; 0).

203. 1.

204. а) –6; б) –14; в) 16.

205. –140.

207. (5; 48); (–1; 0).

208. б).

209. в).

210. а).

211. а) Няцотная; б) няцотная; в) ні цотная, ні няцотная; г) цотная; д)* цотная.

212. 8.

213. а) $(3; -4)$; $R = 6$; б) $(0; -7)$; $R = 3\sqrt{2}$.

214. 10.

215. $(x-3)^2 + (y+16)^2 = 25$.

216. а) $(-4; 3)$; $(-4; -3)$; б) $\left(2\sqrt{6}; 1\right)$; $\left(-2\sqrt{6}; 1\right)$.

217. $[-4; -1] \cup [1; 6]$.

218. а).

219. г).

220. в).

221. а) 16; б) –21; в) немагчыма; г) 2,4.

222. а) 4; б) –1; 25; в) $-\frac{2}{5}$; г) 625.

223. а) $D = (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$; б) $D = (-\infty; 6)$; в) $D = (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; г) $D = [5; +\infty)$.

224. а) –1; б) 1; в) –2; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 2; г) 6.

225. а) $y > 0$ пры $x \in (-\infty; 1{,}8)$; $y < 0$ пры $x \in (1{,}8; +\infty)$;
б) $y > 0$ пры $x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty)$; $y < 0$ пры $x \in (1; 1{,}5)$;
в) $y > 0$ пры $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; $y < 0$ пры $x \in (-2; 3)$.

227. 30.

228. 2.

229. ±3.

231. а) $(3; 4{,}5)$; б) $(-5; -8)$; в) $(-2{,}5; 19{,}75)$; г) $(0; 1)$.

232. а) $E = [1; +\infty)$; б) $E = (-\infty; 6]$; в) $E = [9; +\infty)$; г) $E = (-\infty; 0]$.

233. а) $x = -\frac{5}{6}$; б) $x = -2$; в) $x = 0$.

234. а) Функцыя нарастае на прамежку $(-\infty; 2]$; функцыя спадае на прамежку $[2; +\infty)$; б) функцыя нарастае на прамежку $[7; +\infty)$; функцыя спадае на прамежку $(-\infty; 7]$; в) функцыя нарастае на прамежку $(-\infty; 0{,}5]$; функцыя спадае на прамежку $[0{,}5; +\infty)$.

235. а) 2; 4; б) няма нулёў; в) –7; 3; г) $-\frac{1}{3}$; 0.

236. а) –16; б) 8; в) –4.

238. в).

239. а) $(-6; 4)$; $R = 6$; б) $(7; 0)$; $R = 4\sqrt{2}$.

241. $x^2 + y^2 = 10$.

242. $(-3; 0) \cup (4; 6]$.

243. а) 1); 3); б) 4); 5); в) 2); 6).

244. а) 5; б) 19; в) 8; г) –1,5.

245. а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $\left[\frac{4}{7}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; -0{,}5]$.

246. 2.

247. $y \in \left(-\infty; 1\frac{8}{13}\right]$.

248. а) 2; б) 2; в) 2.

249. а) $x \in (-\infty; 3{,}5)$; б) $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $(-0{,}5; +\infty)$.

250. а) $x \in (-\infty; -2{,}4)$; б) $x \in (-\infty; 4{,}5)$.

251. а) $x \in (1; 3]$; б) $x \in (1; 5{,}8]$.

252. а) $x \in (-\infty; +\infty)$; б) $x \in (1{,}5; +\infty)$.

253. а) $(2; 1)$; б) $(2; 5)$.

254. а) $(2; 1)$; б) $(10; 8)$.

255. а) $(1; 1)$; б) $\left(2\frac{4}{13}; -2\frac{3}{13}\right)$; в) $(13; 11)$; г) $(6; 6)$.

256. а) 0; 1,25; б) –3; 3; в) –12; 0; г) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; д) –3; 0; е) няма каранёў.

257. а) 2; 8; б) –1; $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) няма каранёў.

258. а) –4; –3; б) $-2\frac{2}{3}$; 1; в) –2; $2\frac{1}{3}$; г) 1; 5.

259. –35.

260. а) –3; –1; 1; 3; б) $-\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

261. а) $-\sqrt{7}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; б) $\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{65}}{2}$.

262. а) $(0; 4)$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup [0; +\infty)$; в) $\left(-1\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}\right)$; г) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$; д) $\varnothing$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $\{0{,}5\}$; з) $\left(5 - \sqrt{13}; 5 + \sqrt{13}\right)$; і) $[-5; 1]$.

263. а) $(-\infty; -2{,}5]$; б) $(0; 7]$; в) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

264. $(-2; 5)$.

265. $[-4; -3) \cup (2; 4]$.

266. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty; 5] \cup (6; +\infty)$.

267. а) 2; б) 3; в) 1; г) –2; д) –6; –1; е) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; ж) –2; з) няма каранёў.

268. а) $(-6; 4]$; б) $(-\infty; -6) \cup [3; 5]$; в) $(-\infty; -2] \cup (-1{,}5; 1]$; г) $(-5; -2) \cup (3; 10)$; д) $[-2; -1) \cup [2; +\infty)$; е) $(-\infty; 2) \cup \{4\}$; ж) $[8; 10) \cup (10; +\infty)$; з) $(-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$.

269. а) $(-\infty; 0) \cup (0{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right) \cup [1; +\infty)$; г) $(-4; -3] \cup (4; +\infty)$; д) $(-\infty; -5) \cup \{1\}$; е) $[-1; 1) \cup (1; 3]$.

270. а) $(3; 10]$; б) $(-1; 3)$; в) $(-\infty; -3) \cup [-2; 0) \cup (0; 3) \cup [5; +\infty)$; г) $(-\infty; 0] \cup \{1\}$.

271*. а) $-1 \pm \sqrt{6}$; б) $\frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{53}}{2}$.

272. а) Адзін корань; б) няма каранёў; в) бясконца многа каранёў.

273. а) $4\frac{2}{3}$; б) 5; в) -8; г) $-4\frac{2}{3}$.

274. а) $(-\infty;\ 1)$; б) $(-3;\ +\infty)$; в) $\left[\frac{1}{12}; +\infty\right)$; г) $[5{,}2;\ +\infty)$.

275. 2.

276. $\left[-1\frac{3}{7};\ +\infty\right)$.

277. а) -2; б) 10; в) 0,6.

278. а) $(6;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$; в) $(-\infty;\ 1)$.

279. а) $(-\infty;\ -1]$; б) $(-\infty;\ -2{,}5]$.

280. а) $\left[-1\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{3}\right)$; б) $\left[10;\ 21\frac{2}{3}\right)$.

281. а) $(-\infty;\ -1] \cup [2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ +\infty)$.

282. а) (2; 3); б) (8; 9); в) (20; 3); г) (5; -2).

283. а) $-\frac{3}{7}$; 0; б) -2; 2; в) 0; 35; г) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; д) 0; 4; е) няма каранёў.

284. а) -4; -1; б) $\frac{1}{5}$; 1; в) $-\frac{1}{5}$; г) няма каранёў.

285. а) -3; 2; б) 0; 2; в) 2; $2\frac{1}{3}$.

286. а) -4; -1; 1; 4; б) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

287. а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; б) $1 \pm \sqrt{7}$.

288. а) $(-7;\ 0)$; б) $(-\infty;\ -3{,}5] \cup [3{,}5;\ +\infty)$; в) $\{5\}$; г) $(-\infty;\ -\infty)$;
д) $(-\infty; -1] \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; е) няма рашэнняў.

289. а) $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ 1{,}5]$; б) $[3;\ 5)$; в) $[-4;\ 0)$.

290. $(-\infty;\ -1]$.

291. $[-5;\ -4) \cup (3;\ 5]$.

292. $(-\infty;\ -7) \cup [1;\ +\infty)$.

293. а) -2; б) 4; 5; в) -8; -2; г) -4; д) -1; е) 2; ж) 2; з) -6.

294. а) $\left[-3;\ \frac{2}{7}\right] \cup (5;\ +\infty)$; б) $\left(-\infty;\ -\sqrt{7}\right) \cup \left[-\sqrt{5};\ \sqrt{6}\right]$; в) $(-6;\ 6) \cup \{7\}$;
г) $(-\infty;\ 2) \cup \{3\} \cup [8;\ +\infty)$.

295. а) $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$; б) $(-5;\ -4) \cup (-4;\ -1)$.

296. $[-4;\ -3) \cup (-3;\ 1)$.

297. $(-\infty;\ -4] \cup [-2;\ 1)$.

298. 22; 66.

299. 24 км.

300. 900 і 800.
301. 36 і 20.
302. 73,5 м.
303. 7.
304. 10 і 11.
305. 1 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.
306. 9 дзён.
307. 15 і 11.
308. 12 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.
309. 15 г; 10 г.
310. $\frac{50}{3}$ мін, 50 мін.
311. 1,5 кг.
312. 1,8 р.
313. 144 і 72.
314. 60 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.
315. 330.
316. 42 і 30.
317. Не хопіць.
318. 12 і 13.
319. 14 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.
320. 8 дзён.
321. 12 і 9.
322. 5 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$; 4 $\frac{\text{км}}{\text{г}}$.
323. 3 дні, 6 дзён.
324. Трэба ўзяць 40 т сталі з утрыманнем нікелю 5 %.
325. 12,5 кг.

ЗМЕСТ

Раздзел 4
Прагрэсіі

(Назва і нумар установы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Арэф’ева Ірына Глебаўна
Пірутка Вольга Мікалаеўна

АЛГЕБРА

Вучэбны дапаможнік для 9 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева*. Рэдактар *Н. М. Алганава*. Распрацоўка макета афармлення выдання *Н. У. Кузьмянковай*. Мастацкія рэдактары *А. А. Жданоўская, А. А. Праваловіч*. Тэхнічнае рэдагаванне і камп’ютарная вёрстка *Г. А. Дудко*. Карэктары *В. С. Казіцкая, А. П. Тхір, В. С. Бабеня, Г. В. Алешка*.

Падпісана да друку 24.04.2019. Фармат $60 \times 90\,^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 20,5 + 0,25 форз. Ул.-выд. арк 15,66 + 0,34 форз. Тыраж 16 000 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013.
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

ААТ «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 10.09.2018.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Рацыянальныя выразы

$$\frac{A\cdot C}{B\cdot C}=\frac{A}{B}$$

$$\frac{4a^3}{2ab}=\frac{2a^2\cdot 2a}{b\cdot 2a}=\frac{2a^2}{b}$$

$$\frac{a^2-10a+25}{a^2-25}=\frac{(a-5)^2}{(a-5)(a+5)}=\frac{a-5}{a+5}$$

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

$$\frac{5c}{ab}+\frac{c}{ab}=\frac{5c+c}{ab}=\frac{6c}{ab}$$

$$\frac{4a}{a+2}+\frac{8}{a+2}=\frac{4a+8}{a+2}=\frac{4(a+2)}{a+2}=4$$

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

$$\frac{5b}{3a^2}-\frac{2b}{3a^2}=\frac{3b}{3a^2}=\frac{b}{a^2}$$

$$\frac{a}{a-3}-\frac{a+1}{a-3}=\frac{a-a-1}{a-3}=-\frac{1}{a-3}=\frac{1}{3-a}$$

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

$$\frac{3x}{5y}\cdot\frac{m}{4n}=\frac{3x\cdot m}{5y\cdot 4n}=\frac{3mx}{20ny}$$

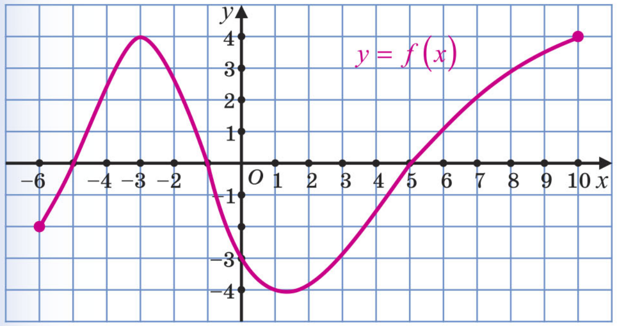
$$\frac{a+1}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2-1}=\frac{(a+1)\cdot b^2}{b(a+1)(a-1)}=\frac{b}{a-1}$$

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

$$\frac{a^2}{c}:\frac{a}{c^2}=\frac{a^2}{c}\cdot\frac{c^2}{a}=\frac{a^2\cdot c^2}{c\cdot a}=ac$$

$$\frac{t+1}{t^2}:\frac{5}{t}=\frac{t+1}{t^2}\cdot\frac{t}{5}=\frac{(t+1)\cdot t}{t^2\cdot 5}=\frac{t+1}{5t}$$

Функцыі



1) Абсяг вызначэння

$D=[-6;10]$.

2) Мноства значэнняў

$E=[-4;4]$.

3) Нулі функцыі:

$x=-5;-1;5$.

4) Прамежкі знакапастаянства:

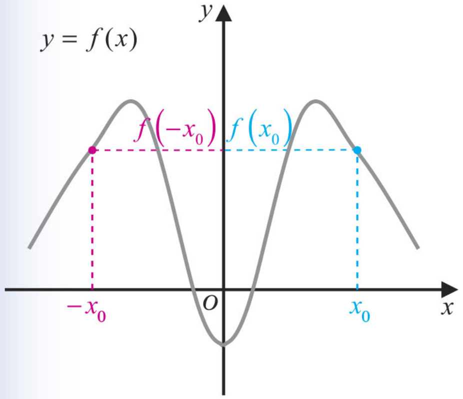
$y>0$ пры $x\in(-5;-1)\cup(5;10]$; $y<0$ пры $x\in[-6;-5)\cup(-1;5)$.

5) Функцыя нарастае на прамежках $[-6;-3]$; $[1,5;10]$.

Функцыя спадае на прамежку $[-3;1,5]$.

6) Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце $(0;-3)$.

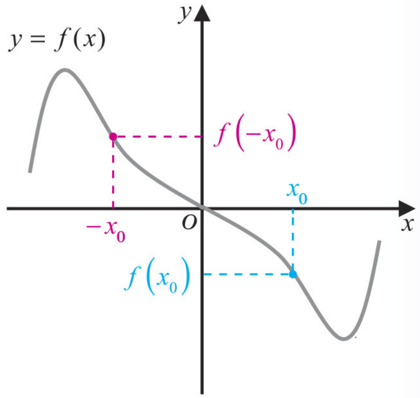
Цотная функцыя



$f(-x)=f(x)$

Графік цотнай функцыі
сіметрычны адносна
восі ардынат

Няцотная функцыя



$f(-x)=-f(x)$

Графік няцотнай функцыі
сіметрычны адносна
пачатку каардынат

Дробава-рацыянальныя ўраўненні і няроўнасці

Каб рашыць дробава-рацыянальнае ўраўненне, трэба:

① Перанесці ўсе складаемыя з правай часткі ўраўнення ў левую.

② Пераўтварыць левую частку ўраўнення да рацыянальнага дробу.

③ Прымяніць умову роўнасці дробу нулю.

④ Запісаць адказ.

Рашыце ўраўненне $\frac{9x^2-4}{x-1}=\frac{5-10x}{1-x}$.

① $\frac{9x^2-4}{x-1}-\frac{5-10x}{1-x}=0.$

② $\frac{9x^2-4}{x-1}+\frac{5-10x}{x-1}=0;\ \frac{9x^2-4+5-10x}{x-1}=0;$

$\frac{9x^2-10x+1}{x-1}=0.$

③ $\begin{cases}9x^2-10x+1=0,\\ x-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{9},\\ x=1,\end{array}\right.\\ x\ne 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{1}{9}.$

④ *Адказ*: $\frac{1}{9}$.

Каб рашыць рацыянальную няроўнасць метадам інтэрвалаў, трэба:

① Прывесці няроўнасць да выгляду $f(x)>0$ $(f(x)<0,\ f(x)\ge 0,\ f(x)\le 0)$.

② Знайсці і адзначыць на восі абсцыс нулі функцыі і тыя значэнні аргумента, пры якіх значэнні функцыі не існуюць (нулі назоўніка).

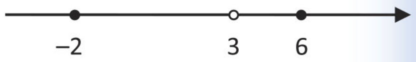
③ Пабудаваць схему графіка функцыі.

④ Запісаць адказ у адпаведнасці са знакам няроўнасці.

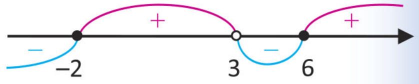
Рашыце няроўнасць $\frac{(x+2)(x-6)}{x-3}\le 0.$

① Няроўнасць мае выгляд $f(x)\le 0$, дзе $f(x)=\frac{(x+2)(x-6)}{x-3}$.

②



③



④ *Адказ*: $x\in(-\infty;-2]\cup(3;6]$.

Прагрэсіі

	Арыфметычная прагрэсія	Геаметрычная прагрэсія
Формула *n*-га члена	$a_n=a_1+(n-1)\cdot d$	$b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
Характарыстычная ўласцівасць	$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ пры $n\ge 2$	$b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$ пры $n\ge 2$
Формула сумы *n* першых членаў прагрэсіі	$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ $S_n=\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$	$S_n=\frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1}$ пры $q\ne 1$

Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі $S=\frac{b_1}{1-q}$, дзе $|q|<1$.

Натуральныя ступені лікаў 2, 3, 4, 5, 6

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187			
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125					
6^n	6	36	216	1296						

Табліца квадратаў натуральных лікаў ад 10 да 99

Адзінкі *Дзясяткі*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801