ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый материал содержит подробные решения 35 смешанных тестов, условия которых можно увидеть в пособии «Повторяем математику за курс средней школы. Тестовые задания для 11 класса».

Работа с развернутыми решениями тестовых заданий позволит систематически повторять и обобщать пройденное, так как содержание тестов охватывает ранее изученный материал.

Кроме того, даже в случае полученного правильно ответа на то или иное тестовое задание полезно проанализировать предложенные решения и сравнить их со своими.

Систематическая и ответственная еженедельная работа с пособиями «Повторяем математику за курс средней школы» и «Повторяем математику за курс средней школы. Тестовые задания для 11 класса», а также с предложенными здесь подробными решениями смешанных тестов позволит эффективно подготовиться к ЦТ по математике.

ТЕСТ 1

Часть А

А1. Верной является формула $S=\dfrac{\pi r^2}{360^\circ}\cdot\alpha$.

Ответ: 3.

А2. $\left(5{,}25:7-5\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{3}{8}\right):3-4\dfrac{17}{28}$.

Выполним действия:

1) $5{,}25:7=5\dfrac{1}{4}:7=\dfrac{21}{4}:7=\dfrac{21:7}{4}=\dfrac{3}{4}$;

2) $5\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{40}{7}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{\overset{5}{\cancel{40}}\cdot 3}{7\cdot\underset{1}{\cancel{8}}}=\dfrac{5\cdot 3}{7\cdot 1}=\dfrac{15}{7}=2\dfrac{1}{7}$;

3) $\dfrac{3}{4}-2\dfrac{1}{7}=-\left(2\dfrac{1}{7}-\dfrac{3}{4}\right)=-\left(2\dfrac{4}{28}-\dfrac{21}{28}\right)=-\left(1\dfrac{32}{28}-\dfrac{21}{28}\right)=-1\dfrac{11}{28}$;

4) $-1\dfrac{11}{28}:3=-\dfrac{39}{28}:3=-\dfrac{39:3}{28}=-\dfrac{13}{28}$;

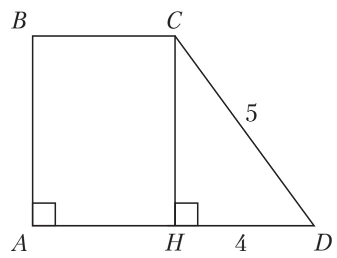
5) $-\dfrac{13}{28}-4\dfrac{17}{28}=-4\dfrac{30}{28}=-5\dfrac{2}{28}=-5\dfrac{1}{14}$.

Ответ: 4.

А3. Запишем функцию в виде $y=(x+3)^2$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершиной параболы является точка $(-3;\,0)$. Таким образом, график функции $y=x^2+6x+9$ изображен на пятом рисунке.

Ответ: 5.

А4. 1) Проведем $CH\perp AD$. Тогда $ABCH$ — прямоугольник, т. е. $AH=BC$, значит, $HD=AD-AH=AD-BC=4$.



2) Из прямоугольного треугольника CHD по теореме Пифагора находим

$CH^2=CD^2-HD^2$;

$CH^2=5^2-4^2=25-16=9$;

$CH=3$.

Так как $AB=CH$, то $AB=3$.

Ответ: 3.

А5. 1) Известно, что $a_3=8$ и $a_4=5$, тогда $d=a_4-a_3=5-8=-3$.

2) Воспользуемся формулой n-го члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+d(n-1)$ и найдем первый член данной прогрессии: $a_3=a_1+2d$; $8=a_1+2\cdot(-3)$; $8=a_1-6$; $a_1=14$.

3) Воспользуемся формулой $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$. Так как $S_n=28$; $a_1=14$; $d=-3$, составим уравнение:

$28=\dfrac{2\cdot 14+(n-1)\cdot(-3)}{2}\cdot n$; $28=\dfrac{28-3n+3}{2}\cdot n$; $28=\dfrac{31-3n}{2}\cdot n$; $56=(31-3n)\cdot n$; $3n^2-31n+56=0$;

$D=31^2-4\cdot 3\cdot 56=961-672=289=17^2$. $\quad n_{1,2}=\dfrac{31\pm 17}{2\cdot 3}$; $n_1=8$; $n_2=\dfrac{7}{3}$.

Так как n — натуральное число, то $n=8$.

Ответ: 1.

А6. $\operatorname{tg}\left(4\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(4\cdot\left(\pi-\arccos\dfrac{1}{2}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(4\cdot\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\operatorname{tg}\dfrac{8\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

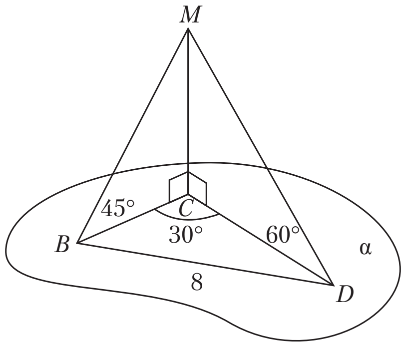
A7. $\left(x^2+2x\right)^2-4(x+1)^2+7=0.$

Запишем данное уравнение в виде $\left(x^2+2x\right)^2-4\left(x^2+2x+1\right)+7=0$ и выполним замену переменной. Пусть $t=x^2+2x$, тогда уравнение принимает вид $t^2-4(t+1)+7=0;$ $t^2-4t-4+7=0;$ $t^2-4t+3=0.$ Воспользуемся теоремой Виета и найдем $\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=3.\end{array}\right.$ Тогда $\left[\begin{array}{l}x^2+2x=1,\\ x^2+2x=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+2x-1=0,\\ x^2+2x-3=0.\end{array}\right.$

Так как и первое и второе уравнения совокупности имеют корни $(D>0)$, то (по теореме Виета) произведение корней первого уравнения равно -1, а второго -3. Таким образом, произведение корней исходного уравнения равно $-1\cdot(-3)=3$.

Ответ: 3.

A8. Пусть $MC=a$. Тогда, из прямоугольных треугольников MBC и MCD, $BC=a,\ \ CD=MC\cdot\operatorname{ctg}60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$



В треугольнике BCD применим теорему косинусов:
$BD^2=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot DC\cdot\cos\angle BCD,$

т. е. $64=a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\cdot a\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \ a=8\sqrt{3}$. Тогда $BC=8\sqrt{3},\ \ CD=8.$

Так как меньшей проекции соответствует меньшая наклонная, то $MD<BM$.

Из прямоугольного треугольника MCD найдем $MD=16$.

Ответ: 1.

A9. $\sin^2\dfrac{\pi}{x}+3\cos\dfrac{\pi}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}-2=0;$ $\sin^2\dfrac{\pi}{x}+3\cos\dfrac{\pi}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}-2\left(\sin^2\dfrac{\pi}{x}+\cos^2\dfrac{\pi}{x}\right)=0;$ $\sin^2\dfrac{\pi}{x}-3\cos\dfrac{\pi}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}+2\cos^2\dfrac{\pi}{x}=0.$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2\dfrac{\pi}{x}$ и получим $\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{x}-3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}+2=0.$

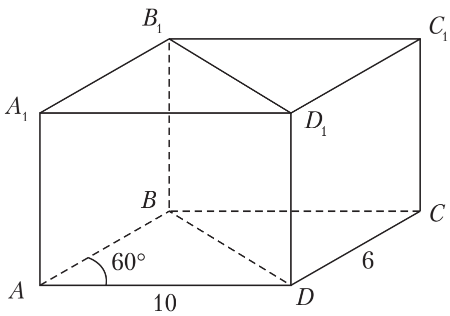
Пусть $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}=t$, тогда уравнение принимает вид $t^2-3t+2=0;$ $\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=2.\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}=1,\\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}=2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{x}=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\\ \dfrac{\pi}{x}=\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4}+n,\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{\operatorname{arctg}2}{\pi}+n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1+4n}{4},\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{\operatorname{arctg}2+\pi n}{\pi},\ n\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{1+4n},\\ x=\dfrac{\pi}{\operatorname{arctg}2+\pi n},\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Ответ: 2.

Часть B

B1. 1) Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед , то $ABCD$ — параллелограмм, а четырехугольник B_1BDD_1 является прямоугольником.



2) В треугольнике ABD воспользуемся теоремой косинусов: $BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD;$

$BD^2=6^2+10^2-2\cdot6\cdot10\cdot\dfrac{1}{2};$ $BD^2=36+100-60=76$ и $BD=\sqrt{76}$.

3) В параллелограмме $ABCD$ воспользуемся формулой, связывающей длины сторон и длины диагоналей параллелограмма: $\left(d_1^2+d_2^2=2\left(a^2+b^2\right)\right)$. Тогда $BD^2+AC^2=2\left(AB^2+AD^2\right);$

$76+AC^2=2(36+100);$ $AC^2=272-76=196;$ $AC=14$. Так как известно, что $AC=B_1B$, то $B_1B=14$.

4) Найдем площадь прямоугольника B_1BDD_1: $S_{B_1BDD_1}=BD\cdot BB_1=\sqrt{76}\cdot14.$

Значение искомого выражения равно: $\dfrac{S}{\sqrt{19}}=\dfrac{S_{B_1BDD_1}}{\sqrt{19}}=\dfrac{\sqrt{76}\cdot14}{\sqrt{19}}=\dfrac{\sqrt{4\cdot19}\cdot14}{\sqrt{19}}=\dfrac{2\sqrt{19}\cdot14}{\sqrt{19}}=28.$

Ответ: 28.

В2. Пусть x — первоначальное количество тетрадей в пачке, тогда $\frac{x}{2}$ работ имеет отметку «восемь». Если убрать из пачки три работы, то останется $(x-3)$ тетрадей, причем отметка «восемь» будет стоять в $0,48\cdot(x-3)$ работах. Так как процентное содержание работ с отметкой «восемь» уменьшилось после того, как убрали три тетради, то среди этих трех тетрадей хотя бы в одной стоит «восьмерка». Рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть отметка «восемь» стоит только в одной из убранных тетрадей, тогда в пачке осталось $\left(\frac{x}{2}-1\right)$ работ с «восьмеркой». С другой стороны, отметка «восемь» стоит в $0,48\cdot(x-3)$ работах. Составим уравнение: $\frac{x}{2}-1=0,48\cdot(x-3)$; $x-2=0,96\cdot(x-3)$; $x-2=0,96x-2,88$; $0,04x=-0,88$, т. е. $x<0$, что не удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть отметка «восемь» стоит только в двух из убранных тетрадей, тогда в пачке осталось $\left(\frac{x}{2}-2\right)$ работ с «восьмеркой». Составим уравнение $\frac{x}{2}-2=0,48\cdot(x-3)$; $x-4=0,96\cdot(x-3)$; $x-4=0,96x-2,88$; $0,04x=1,22$; $x=28$.

3) Пусть отметка «восемь» стоит во всех трех убранных тетрадях, тогда в пачке осталось $\left(\frac{x}{2}-3\right)$ работ с «восьмеркой». Составим уравнение: $\frac{x}{2}-3=0,48\cdot(x-3)$; $x-6=0,96\cdot(x-3)$; $0,04x=3,12$; $x=78$. Но по условию задачи $x<75$.

Таким образом, в пачке первоначально находилось 28 тетрадей.

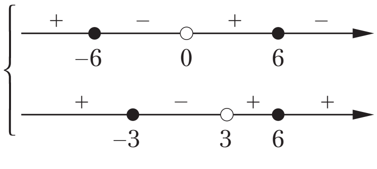
Ответ: 28.

В3. $A=(4+1)\left(4^2+1\right)\left(4^4+1\right)\left(4^8+1\right)-\frac{1}{3}\cdot4^{16}=\frac{(4-1)(4+1)\left(4^2+1\right)\left(4^4+1\right)\left(4^8+1\right)}{4-1}-\frac{1}{3}\cdot4^{16}=$
$=\frac{\left(4^2-1\right)\left(4^2+1\right)\left(4^4+1\right)\left(4^8+1\right)}{3}-\frac{1}{3}\cdot4^{16}=\frac{\left(4^4-1\right)\left(4^4+1\right)\left(4^8+1\right)}{3}-\frac{1}{3}\cdot4^{16}=\frac{\left(4^8-1\right)\left(4^8+1\right)}{3}-\frac{1}{3}\cdot4^{16}=\frac{4^{16}-1}{3}-\frac{1}{3}\cdot4^{16}=$
$=-\frac{1}{3}.$

Тогда значение искомого выражения равно -2.

Ответ: -2.

В4. $\begin{cases}\frac{36}{x}-x\le0,\\ \frac{|12-2x|\left(x^2+3x+8\right)}{|x|-3}\le0.\end{cases}$ Заметим, что $x^2+3x+8>0$ для всех $x\in\boldsymbol{R}$ (так как $a=1>0$ и $D<0$). Тогда исходную систему можно записать в виде: $\begin{cases}\frac{36-x^2}{x}\le0,\\ \frac{|12-2x|}{|x|-3}\le0.\end{cases}$ Воспользуемся методом интервалов для решения каждого неравенства системы:



$\begin{cases}x\in[-6;\,0)\cup[6;\,+\infty),\\ x\in(-3;\,3)\cup\{6\};\end{cases}$ $x\in(-3;\,0)\cup\{6\}$.

Найдем сумму целых решений системы неравенств: $-2+(-1)+6=3$.

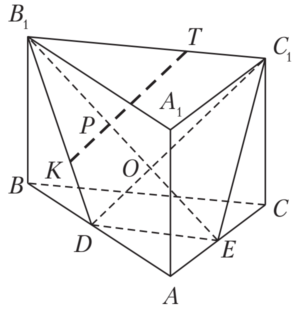
Ответ: 3.

В5. Условию задачи удовлетворяют все натуральные значения переменной x, являющиеся решениями неравенства $8<\frac{x}{3}<12$ и не кратные трем (так как дробь $\frac{x}{3}$ должна быть несократимой). Решим в натуральных числах полученное неравенство: $24 < x < 36$. То есть $x = 25; 26; 27; ...34; 35$. Из полученного множества значений переменной x исключим числа, кратные трем, и найдем искомую сумму:

$$\frac{25}{3}+\frac{26}{3}+\frac{28}{3}+\frac{29}{3}+\frac{31}{3}+\frac{32}{3}+\frac{34}{3}+\frac{35}{3}=\frac{240}{3}=80.$$

Ответ: 80.

B6. Так как отрезок DE является средней линией треугольника ABC, то $DE=\frac{1}{2}BC$ и $DE \parallel BC$, поскольку $B_1C_1 \parallel BC$, то $DE \parallel B_1C_1$. Трапеция DEC_1B_1 является сечением призмы плоскостью, проходящей через параллельные прямые DE и B_1C_1. Отрезки C_1D и B_1E лежат в плоскости сечения и являются диагоналями трапеции DEC_1B_1.



Так как $DE=\frac{1}{2}B_1C_1$ и треугольники B_1C_1O и EDO подобны, то $OE=\frac{1}{2}B_1O$, т. е. $OE = x$, $B_1O = 2x$. Тогда $B_1E = 3x$.

Так как P — середина отрезка B_1E, то $B_1P=\frac{1}{2}B_1E=\frac{3x}{2}$.

Из подобия треугольников B_1KT и B_1DC_1 получим, что $\frac{B_1P}{B_1O}=\frac{KT}{C_1D}$; $\frac{\frac{3x}{2}}{2x}=\frac{KT}{12}$; $KT = 9$.

Ответ: 9.

ТЕСТ 2

Часть А

А1. Равенство 1) $\sin A=\frac{CB}{AC}$ — неверно, так как $\sin A=\frac{CB}{AB}$.

Равенство 2) $CB^2=AB^2+AC^2$ — неверно, так как $AB^2=CB^2+AC^2$ (теорема Пифагора).

Равенство 4) $S_{ABC}=CH\cdot AB$ — неверно, так как $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot CH\cdot AB$.

Равенство 5) $\angle A+\angle B=180°$ — неверно, так как $\angle A+\angle B=90°$.

Верным является равенство 3) $CH^2=HB\cdot AH$.

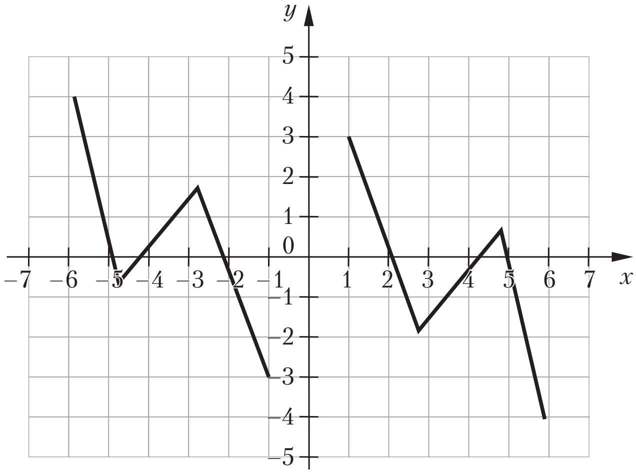
Ответ: 3.

А2. $4^{5x}\cdot 4^{4x}=4^{5x+4x}=4^{9x}$. При $x=\frac{1}{6}$ получим: $4^{9x}=4^{9\cdot\frac{1}{6}}=4^{\frac{9}{6}}=4^{\frac{3}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}=2^{2\cdot\frac{3}{2}}=2^3=8$.

Ответ: 2.

А3. График нечетной функции симметричен относительно начала координат, т. е. противоположным значениям аргумента должны соответствовать противоположные значения функции. На рисунке изображен график данной функции для $x\le -1$ и $x\ge 1$.

Ответ: 4.



А4. Избавимся от иррациональности в знаменателях дробей:

$$\frac{2}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}=\frac{2\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)}{\left(\sqrt{19}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)}{\left(\sqrt{19}\right)^2-\left(\sqrt{17}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)}{19-17}=\frac{2\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)}{2}=\sqrt{19}-\sqrt{17};$$

$$\frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{15}}=\frac{2\left(\sqrt{17}-\sqrt{15}\right)}{\left(\sqrt{17}+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{17}-\sqrt{15}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{17}-\sqrt{15}\right)}{\left(\sqrt{17}\right)^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{17}-\sqrt{15}\right)}{17-15}=\frac{2\left(\sqrt{17}-\sqrt{15}\right)}{2}=\sqrt{17}-\sqrt{15}.$$

Тогда $\left(\frac{2}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}+\frac{2}{\sqrt{17}+\sqrt{15}}+\sqrt{15}\right)\cdot\sqrt{19}=\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}+\sqrt{17}-\sqrt{15}+\sqrt{15}\right)\cdot\sqrt{19}=\sqrt{19}\cdot\sqrt{19}=19$.

Ответ: 4.

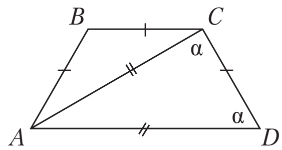
А5. $\sin^2 6,4\pi+\sin^2 2,9\pi-4\,\mathrm{tg}1,4\pi\cdot\mathrm{tg}7,1\pi=\sin^2(6\pi+0,4\pi)+\sin^2(2\pi+0,9\pi)-4\,\mathrm{tg}(\pi+0,4\pi)\cdot\mathrm{tg}(7\pi+0,1\pi)=$

$=\sin^2 0,4\pi+\sin^2 0,9\pi-4\,\mathrm{tg}0,4\pi\cdot\mathrm{tg}0,1\pi=\sin^2 0,4\pi+\sin^2(0,5\pi+0,4\pi)-4\,\mathrm{tg}(0,5\pi-0,1\pi)\cdot\mathrm{tg}0,1\pi=$

$=\sin^2 0,4\pi+\cos^2 0,4\pi-4\,\mathrm{ctg}0,1\pi\cdot\mathrm{tg}0,1\pi=1-4\cdot 1=-3$.

Ответ: 1.

А6. Так как треугольник ACD — равнобедренный, то $\angle ACD=\angle ADC=\alpha$, тогда $\angle CAD=180°-2\alpha$. Поскольку у равнобедренной трапеции углы при основании равны, то $\angle BAD=\angle ADC=\alpha$, тогда $\angle BAC=\angle BAD-\angle CAD=\alpha-(180°-2\alpha)=3\alpha-180°$.



В равнобедренном треугольнике ABC $\angle BCA=\angle BAC=3\alpha-180°$.

Так как $\angle BCD+\angle ADC=180°$; $3\alpha-180°+\alpha+\alpha=180°$; $5\alpha=360°$; $\alpha=72°$.

Тогда больший угол трапеции равен $180°-72°=108°$.

Ответ: 5.

A7. Рассмотрим пропорцию $a:b=c:d$ (a; d — крайние члены пропорции, b; d — ее средние члены), тогда $a+d=17$; $b+c=13$ и $a^2+b^2+c^2+d^2=290$. По свойству пропорции $ad=bc$. Составим систему:

$$\begin{cases} a+d=17, \\ b+c=13, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=290, \\ ad=bc; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+d)^2=289, \\ (b+c)^2=169, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=290, \\ ad=bc; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+2ad+d^2=289, \\ b^2+2bc+c^2=169, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=290, \\ ad=bc. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения системы и получим $a^2+2ad+d^2+b^2+2bc+c^2=289+169$ или $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+2bc+2ad=458$.

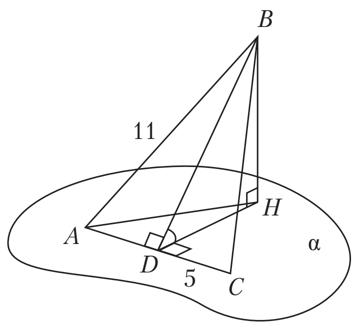
Так как $a^2+b^2+c^2+d^2=290$, то $2bc+2ad=458-290$; $2bc+2ad=168$; $bc+ad=84$. Поскольку $ad=bc$, то $2bc=84$; $bc=42$.

Ответ: 5.

A8. Из прямоугольного треугольника ABD по теореме Пифагора получим $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{121-25}=4\sqrt{6}$. В прямоугольном треугольнике BDH $\angle BDH=60^\circ$ и $BD=4\sqrt{6}$, тогда $BH=BD\cdot\sin 60^\circ=4\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{2}$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH получим, что

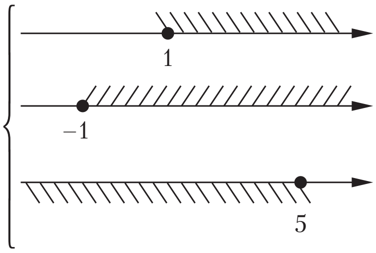
$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{121-72}=\sqrt{49}=7.$$

Ответ: 2.



A9. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} |2x+3|-3x\le 2, \\ |2x+3|-3x\ge -2. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} |2x+3|\le 3x+2, \\ |2x+3|\ge 3x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3\le 3x+2, \\ 2x+3\ge -3x-2; \\ \left[\begin{array}{l} 2x+3\ge 3x-2, \\ 2x+3\le -3x+2; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} -x\le -1, \\ 5x\ge -5; \\ \left[\begin{array}{l} -x\ge -5, \\ 5x\le -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 1, \\ x\ge -1; \\ \left[\begin{array}{l} x\le 5, \\ x\le -\frac{1}{5}. \end{array}\right. \end{cases}$



$x\in[1;\,5]$.

Неравенство имеет пять натуральных решений (это числа 1; 2; 3; 4 и 5).

Ответ: 3.

Часть B

B1. Разделим первое уравнение системы на второе и получим $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=3, \\ y(3y+x)=6. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x=3y, \\ y(3y+x)=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ y(3y+3y)=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ y\cdot 6y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ 6y^2=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3y, \\ y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=3y, \\ y=-1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3, \\ y=-1. \end{cases} \end{array}\right.$

Таким образом, система имеет два решения (т. е. $n=2$) и $n\cdot\left(x^2+y^2\right)=2\cdot\left((\pm 3)^2+(\pm 1)^2\right)=2\cdot(9+1)=20$.

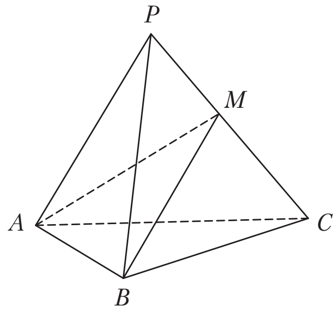
Ответ: 20.

B2. Так как x, y, z — седьмой, десятый и девятнадцатый члены геометрической прогрессии соответственно, то $y=x\cdot q^3$, $z=x\cdot q^{12}$, где q — знаменатель данной прогрессии.

Тогда $x^{-6}\cdot y^8\cdot z^{-2}=x^{-6}\cdot\left(x\cdot q^3\right)^8\cdot\left(x\cdot q^{12}\right)^{-2}=x^{-6}\cdot x^8\cdot q^{24}\cdot x^{-2}\cdot q^{-24}=x^{-6+8-2}\cdot q^{24-24}=x^0\cdot q^0=1$.

Ответ: 1.

B3. Так как $PABC$ — правильный тетраэдр, то все его грани являются равносторонними треугольниками. Отрезки AM и BM — медианы (и высоты) равносторонних треугольников APC и BPC. Воспользуемся формулой $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и получим $AM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Тогда $P_{ABM} = a + 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = a + a\sqrt{3} = a\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Так как $a = \sqrt{3}-1$, то $P_{ABM} = \left(\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 = 3-1 = 2$.

Ответ: 2.

B4. $\frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x} = 4$; $\quad \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{\cos x \sin x} = 4$; $\quad \begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x = 4\cos x \sin x, \\ \cos x \sin x \neq 0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 4\cos x\sin x$; $\quad \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 2\cos x \sin x$; $\quad \cos 60°\sin x + \sin 60°\cos x = 2\cos x\sin x$;

$\sin(x+60°) - \sin 2x = 0$; $\quad 2\sin\frac{x+60°-2x}{2}\cos\frac{x+60°+2x}{2} = 0$; $\quad \sin\left(30° - \frac{x}{2}\right)\cos\left(30° + \frac{3x}{2}\right) = 0$;

$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{x}{2} - 30°\right) = 0, \\ \cos\left(30° + \frac{3x}{2}\right) = 0; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} - 30° = 180°n, \\ \frac{3x}{2} + 30° = 90° + 180°n, \ n \in \boldsymbol{Z}; \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 60° + 360°n, \\ x = 40° + 120°n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

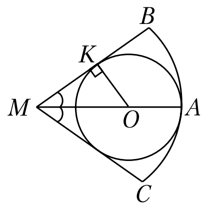
Полученные серии корней удовлетворяют условию $\cos x \sin x \neq 0$.

Наименьший положительный корень данного уравнения равен 40°.

Ответ: 40.

B5. 1) Пусть $R = AM$ — радиус сектора и $r = AO$ — радиус вписанной в сектор окружности. Так как $R = 3r$, то $OM = AM - OA = R - r = 3r - r = 2r$.

2) Рассмотрим прямоугольный треугольник MOK. Так как $OM = 2r$ и $OK = r$, $\angle OMK = 30°$. Значит, $\angle CMK = 2\cdot\angle OMK = 2\cdot 30° = 60°$.



Ответ: 60.

B6. Преобразуем левую часть уравнения:

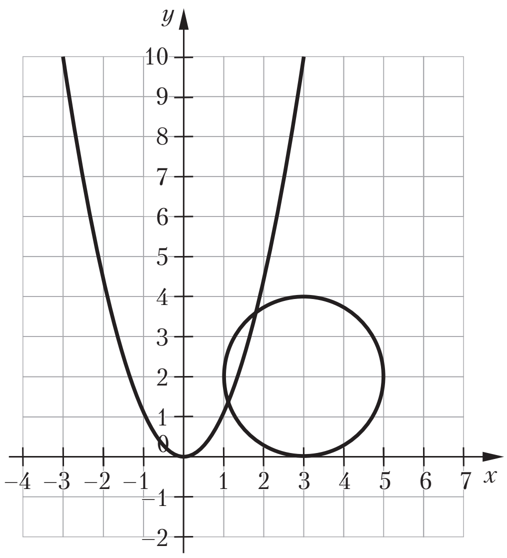
$$x^4 - 4x^2 + x^2 - 6x + 9 = 0;\quad x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 6x + 9 = 4;$$

$$\left(x^2-2\right)^2 + (x-3)^2 = 4.$$

Пусть $x^2 = y$, тогда исходное уравнение принимает вид $(y-2)^2 + (x-3)^2 = 4$ и является уравнением окружности с центром в точке $(3;\, 2)$ и радиусом 2.

Составим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2; \\ (y-2)^2 + (x-3)^2 = 4. \end{cases}$

Построим графики первого и второго уравнений системы. Так как парабола $y = x^2$ и окружность $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ имеют две общие точки, то уравнение имеет два корня.



Ответ: 2.

ТЕСТ 3

Часть А

А1. Одночлен — это произведение чисел, переменных и натуральных степеней переменных. Одночленом является выражение под номером 5.

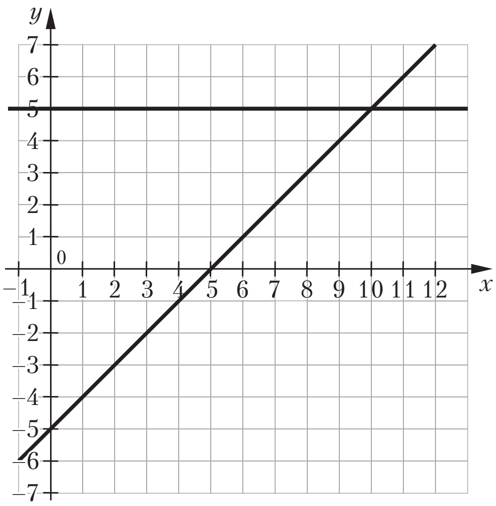
Ответ: 5.

А2. Два числа называются обратными, если их произведение равно единице. Так как $1\frac{2}{3}\cdot 0{,}6=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=1$, то число 0,6 является обратным числу $1\frac{2}{3}$.

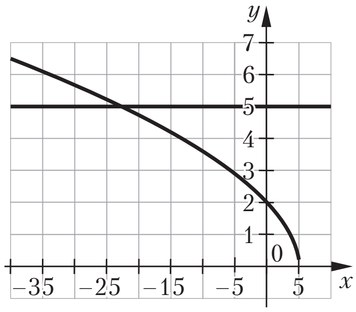
Ответ: 2.

А3. Схематично изобразим графики предложенных функций:

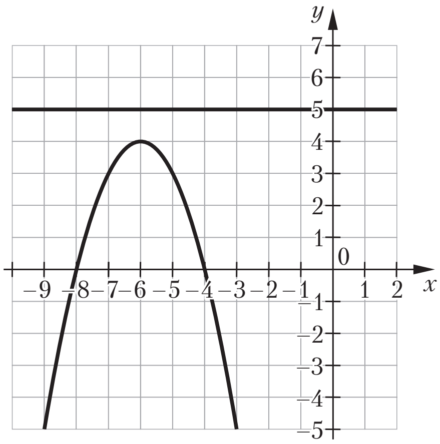
1) $y=5$ и $y=x-5$;



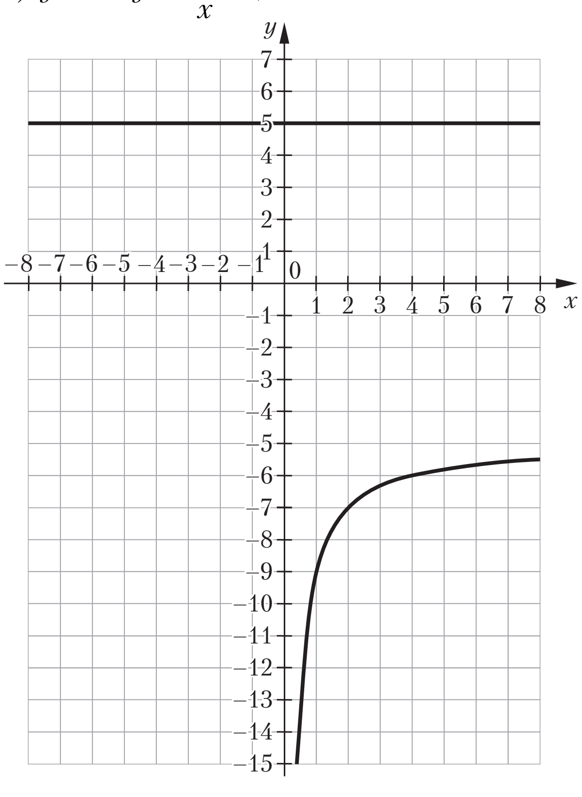
2) $y=5$ и $y=\sqrt{5-x}$;



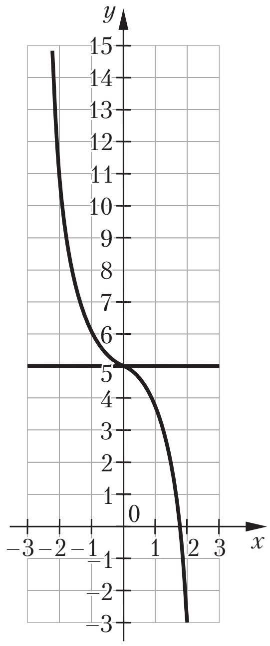
3) $y=5$ и $y=-(x+6)^2+4$;



4) $y=5$ и $y=-\frac{4}{x}-5$;



5) $y=5$ и $y=-x^3+5$.



Очевидно, что ниже прямой $y=5$ расположен график функции $y=-(x+6)^2+4$.

Ответ: 3.

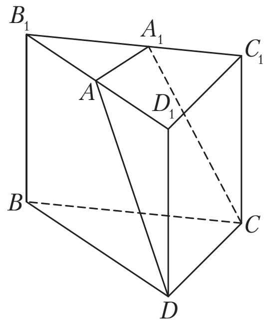
A4. Так как после продажи трети конфет масса ящика с конфетами уменьшилась на 32 %, то она стала равна $45\cdot 0,68=30,6$ кг.

Значит, масса трети конфет равна $45-30,6=14,4$ кг, а масса всех конфет равна $14,4\cdot 3=43,2$ кг.

Тогда пустой ящик весит $45-43,2=1,8$ кг.

Ответ: 3.

A5. Пусть каждое ребро призмы равно a.



Тогда $AA_1=\frac{a}{2}$ (как средняя линия треугольника $B_1C_1D_1$).

Применяя теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках AD_1D и A_1CC_1, получим:

$$AD=A_1C=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Тогда $P_{DAA_1C}=DC+AD+AA_1+A_1C=a+\frac{a\sqrt{5}}{2}+\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{3a+2a\sqrt{5}}{2}=\frac{a\left(3+2\sqrt{5}\right)}{2}.$

Так как $a=2\sqrt{5}-3$, то $P_{DAA_1C}=\frac{a\left(3+2\sqrt{5}\right)}{2}=\frac{\left(2\sqrt{5}-3\right)\left(2\sqrt{5}+3\right)}{2}=\frac{20-9}{2}=5,5.$

Ответ: 2.

A6. $\sqrt[6]{5^7\sqrt[7]{5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}=\sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{49}\cdot 5^5}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}=\sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{54}}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}=\sqrt[42]{5^{54}}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}=\sqrt[7]{5^9}\cdot\sqrt[7]{5^{-2}}=\sqrt[7]{5^9\cdot 5^{-2}}=\sqrt[7]{5^7}=5.$

Ответ: 5.

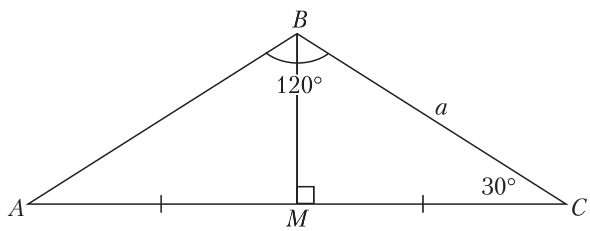
A7. Так как уравнение $2x^2-6x-1=0$ имеет корни $(D>0)$, найдем сумму и произведение корней этого уравнения с помощью теоремы Виета: $x_1+x_2=\frac{6}{2}=3;\;\; x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}.$

Преобразуем выражение:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+2x_1x_2\right)-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{3^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{9+1}{-\frac{1}{2}}=-20.$$

Ответ: 5.

A8. Пусть боковая сторона треугольника ABC равна a. По свойству равнобедренного треугольника $\angle BCA=\angle BAC=30°$ и $AM=MC$.



Из прямоугольного треугольника BMC получим, что $BM=\frac{a}{2}$ и $MC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $AC=2MC=a\sqrt{3}$ и периметр треугольника ABC равен $2a+a\sqrt{3}$.

То есть $2a+a\sqrt{3}=20+10\sqrt{3};\;\; a\left(2+\sqrt{3}\right)=10\left(2+\sqrt{3}\right);\;\; a=10$, тогда $BM=5$.

Ответ: 5.

A9. $A=\sqrt{x^2-8\sqrt{5}x+80}+\sqrt{x^2+18x+81}=\sqrt{\left(x-4\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{(x+9)^2}=\left|x-4\sqrt{5}\right|+|x+9|.$

При $x=\frac{9-4\sqrt{5}}{2}$ получим

$$A=\left|\frac{9-4\sqrt{5}}{2}-4\sqrt{5}\right|+\left|\frac{9-4\sqrt{5}}{2}+9\right|=\left|\frac{9-12\sqrt{5}}{2}\right|+\left|\frac{27-4\sqrt{5}}{2}\right|=\frac{12\sqrt{5}-9}{2}+\frac{27-4\sqrt{5}}{2}=\frac{8\sqrt{5}+18}{2}=4\sqrt{5}+9.$$

Ответ: 1.

B1. $y' = \dfrac{(1-x+x^2)' \cdot (1+x+x^2) - (1+x+x^2)' \cdot (1-x+x^2)}{(1+x+x^2)^2}$; $y' = \dfrac{(-1+2x)\cdot(1+x+x^2)-(1+2x)\cdot(1-x+x^2)}{(1+x+x^2)^2}$.

$$y'(1) = \frac{(-1+2\cdot 1)\cdot(1+1+1^2)-(1+2\cdot 1)\cdot(1-1+1^2)}{(1+1+1^2)^2} = \frac{3-3}{9} = 0.$$

Ответ: 0.

B2. Найдем значение выражения:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Тогда значение искомого выражения равно:

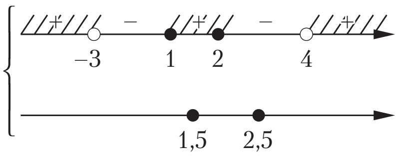
$$16\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6-2\sqrt{12}+2} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{8-4\sqrt{3}} =$$

$$= 4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)} = 8\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = 8\cdot 1 = 8.$$

Ответ: 8.

B3. $\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} \le 1,\\ |4-2x| \le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{2x-14}{x^2-x-12} - 1 \le 0,\\ |2x-4| \le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{2x-14-x^2+x+12}{x^2-x-12} \le 0,\\ -1 \le 2x-4 \le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2-x-12} \le 0,\\ 3 \le 2x \le 5;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-12} \ge 0,\\ 1{,}5 \le x \le 2{,}5;\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x+3)} \ge 0,\\ 1{,}5 \le x \le 2{,}5;\end{cases}$ 

$x \in [1{,}5;\ 2]$.

Искомая сумма: $2\cdot(1{,}5+2) = 2\cdot 3{,}5 = 7$.

Ответ: 7.

B4. Воспользуемся формулой разности синусов:

$$2\sin\frac{x+16°-x-4°}{2}\cos\frac{x+16°+x+4°}{2} = \sin 6°; \quad 2\sin 6°\cdot\cos(x+10°) = \sin 6°.$$

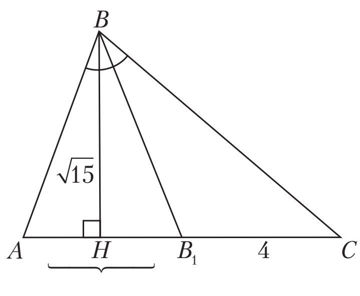
Разделим обе части уравнения на $\sin 6°$ и получим $2\cos(x+10°) = 1$; $\cos(x+10°) = \dfrac{1}{2}$;

$$x+10° = \pm 60° + 360°n,\ n\in \boldsymbol{Z};\quad \left[\begin{array}{l} x = 50° + 360°n,\\ x = -70° + 360°n,\ n\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен $-70°$.

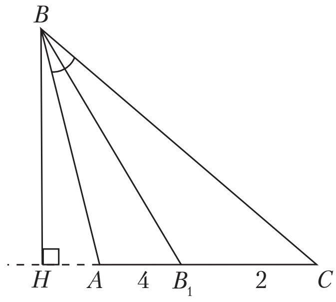
Ответ: -70.

B5. 1) По теореме о биссектрисе угла треугольника $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB_1}{B_1C}$, т. е. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, тогда $AB = x$; $BC = 2x$.



2) Треугольники ABH и HBC — прямоугольные. Пусть $AH = y$, тогда $CH = 6-y$. По теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2$ и $BC^2 = CH^2 + BH^2$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2,\\ (2x)^2 = (6-y)^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2;\end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = y^2 + 15,\\ 4x^2 = 36 - 12y + y^2 + 15;\end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 = 4y^2 + 60,\\ 4x^2 = 36 - 12y + y^2 + 15.\end{cases}$$



Вычтем из первого уравнения системы второе и получим уравнение $3y^2+12y+9=0$ или $y^2+4y+3=0$, корнями которого являются числа $-3; -1$. Так как длина отрезка не может быть отрицательным числом, то вид треугольника ABC не соответствует условиям задачи.

3) Рассмотрим тупоугольный треугольник ABC. Тогда если $AH=y$, то $CH=6+y$ и система принимает вид:

$$\begin{cases} x^2=y^2+\left(\sqrt{15}\right)^2, \\ (2x)^2=(6+y)^2+\left(\sqrt{15}\right)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2=4y^2+60, \\ 4x^2=36+12y+y^2+15. \end{cases}$$

В этом случае $3y^2-12y+9=0$ и $y^2-4y+3=0$. Тогда $y=1; 3$.

Пусть $y=1$, тогда $BC^2=CH^2+BH^2=49+15=64$; $BC=8$.

Пусть $y=3$, тогда $BC^2=81+15=96$; $BC=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$.

Целочисленное значение наибольшей стороны треугольника равно 8.

Ответ: 8.

B6. Заметим, что при $x>0$ функции $y=2x^2$; $y=-\dfrac{9}{x}$; $y=\sqrt{3x+1}$ возрастают. Тогда функция $y=2x^2-\dfrac{9}{x}+\sqrt{3x+1}$ возрастает при $x>0$ (как сумма возрастающих функций). В этом случае исходное уравнение имеет не более одного корня. Найдем его подбором.

При $x=5$ получим $2\cdot5^2-\dfrac{9}{5}+\sqrt{3\cdot5+1}=2\cdot25-1,8+\sqrt{16}=50-1,8+4=52,2$.

То есть число 5 является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: 5.

ТЕСТ 4

Часть А

А1. Вершиной данной параболы является точка с координатами $(n; m)$.

Ответ: 4.

А2. Пусть N — число, равное произведению цифр натурального числа. Тогда N можно представить в виде произведения множителей, каждый из которых является цифрой. Проанализируем предлагаемые ответы:

1) $45 = 5 \cdot 9$; 2) $63 = 7 \cdot 9$;
3) $33 = 3 \cdot 11$; 4) $56 = 7 \cdot 8 = 7 \cdot 4 \cdot 2 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
5) $5 = 5 \cdot 1$.

Очевидно, что только число 33 нельзя представить в виде произведения цифр, так как 11 не является цифрой.

Ответ: 3.

А3. 1) $\sqrt{-9^2} = \sqrt{-81}$ — не имеет смысла, так как арифметического квадратного корня из отрицательного числа не существует;

2) $\dfrac{15}{\frac{1}{7}:7-\frac{1}{49}} = \dfrac{15}{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{49}} = \dfrac{15}{\frac{1}{49}-\frac{1}{49}} = \dfrac{15}{0}$ — не имеет смысла, так как на нуль делить нельзя;

3) $\left(32-2^5\right)^0 = (32-32)^0 = 0^0$ — нуль в нулевой степени не имеет смысла;

4) $-\sqrt[3]{-\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{7}$ — выражение имеет смысл;

5) $\left(1{,}125-\dfrac{9}{8}\right)^{-1} = \left(1\dfrac{1}{8}-\dfrac{9}{8}\right)^{-1} = \left(\dfrac{9}{8}-\dfrac{9}{8}\right)^{-1} = 0^{-1}$ — не имеет смысла, так как на нуль делить нельзя.

Ответ: 4.

А4. Так как боковой гранью куба является квадрат, то с помощью формулы $d = a\sqrt{2}$ найдем $a = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

Найдем объем куба: $V = a^3$; $V = 2^3 = 8$.

Ответ: 5.

А5. $\left(\dfrac{1}{a}+1\right)\left(\dfrac{a}{1+\sqrt{a}}-\dfrac{a}{\sqrt{a}-1}+2\cdot\dfrac{1+a^2}{a^2-1}\right) = -\dfrac{2}{a}$.

1) $\dfrac{1}{a}+1 = \dfrac{1+a}{a}$;

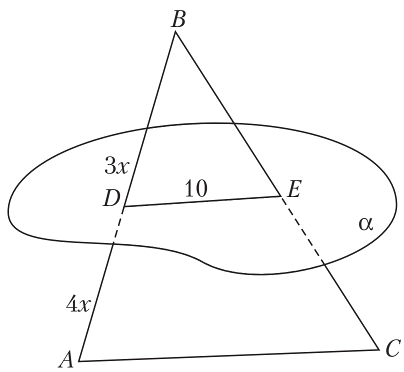
2) $\dfrac{a}{1+\sqrt{a}}-\dfrac{a}{\sqrt{a}-1} = \dfrac{a^{\backslash\sqrt{a}-1}}{1+\sqrt{a}}-\dfrac{a^{\backslash 1+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}-1} = \dfrac{a^{\backslash\sqrt{a}-1}}{1+\sqrt{a}}-\dfrac{a^{\backslash 1+\sqrt{a}}}{\sqrt{a}-1} = \dfrac{a\left(\sqrt{a}-1\right)-a\left(1+\sqrt{a}\right)}{\left(1+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)} = \dfrac{a\left(\sqrt{a}-1-1-\sqrt{a}\right)}{a-1} = \dfrac{-2a}{a-1}$;

3) $\dfrac{-2a}{a-1}+2\cdot\dfrac{1+a^2}{a^2-1} = \dfrac{-2a^{\backslash a+1}}{a-1}+\dfrac{2\cdot\left(1+a^2\right)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{-2a(a+1)+2\cdot\left(1+a^2\right)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{-2a^2-2a+2+2a^2}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{-2a+2}{(a-1)(a+1)} =$

$= \dfrac{-2(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{-2}{a+1}$;

4) $\dfrac{1+a}{a}\cdot\dfrac{-2}{a+1} = -\dfrac{2}{a}$.

Ответ: 4.



А6. Так как $AC \parallel \alpha$ и $(ABC) \cap \alpha = DE$, то $AC \parallel DE$.

Тогда треугольники BDE и ABC подобны, значит, $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BA}{BD}$, т. е. $\dfrac{AC}{10} = \dfrac{7}{3}$; $AC = \dfrac{70}{3} = 23\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 4.

A7. $\dfrac{\sin 80° + \sin 40°}{\sqrt{3}\left(\cos 80° + \cos 40°\right)} = \dfrac{2\sin\dfrac{80°+40°}{2}\cos\dfrac{80°-40°}{2}}{\sqrt{3}\cdot 2\cos\dfrac{80°+40°}{2}\cos\dfrac{80°-40°}{2}} = \dfrac{\sin 60°}{\sqrt{3}\cos 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1.$

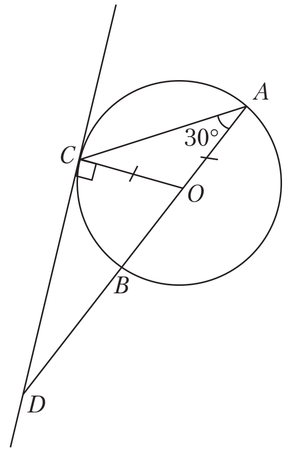
Ответ: 1.

A8. Так как треугольник AOC — равнобедренный ($AO = CO$ как радиусы), то $\angle ACO = \angle CAO = 30°$.

По свойству касательной $OC \perp CD$, тогда в треугольнике ACD $\angle CAD = 30°$, $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = 30° + 90° = 120°$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle CDA = 180° - (30° + 120°) = 30°$.

Поскольку $\angle CAD = \angle ADC = 30°$, то треугольник ACD — равнобедренный.

Ответ: 1.



A9. Пусть $\dfrac{m}{n}$ — исходная дробь. Если ее числитель увеличить на 60 %, а знаменатель уменьшить на 20 %, то получим дробь $\dfrac{m + 0{,}6m}{n - 0{,}2n} = \dfrac{1{,}6m}{0{,}8n} = 2\cdot\dfrac{m}{n}$. Так как получившаяся дробь в два раза больше исходной, то исходная дробь увеличилась на 100 %.

Ответ: 4.

Часть В

B1. В данной арифметической прогрессии $a_1 = -22$; $a_2 = -18$, тогда $d = a_2 - a_1 = -18 - (-22) = 4$.

С помощью формулы $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$ получим

$$S_n = \frac{2\cdot(-22) + 4(n-1)}{2}\cdot n = \left(-22 + 2(n-1)\right)\cdot n = (-22 + 2n - 2)\cdot n = (2n - 24)\cdot n = 2n^2 - 24n.$$

Найдем наименьшее значение выражения:

$$2n^2 - 24n = 2\left(n^2 - 12n\right) = 2\left(n^2 - 2\cdot 6n + 6^2 - 6^2\right) = 2\left((n-6)^2 - 36\right) = 2(n-6)^2 - 72.$$

Наименьшее значение данного выражения равно –72, причем достигается оно при $n = 6$.

Ответ: 6.

B2. Область определения выражения $\dfrac{\arcsin(x+2)}{\pi - 2\operatorname{arcctg}(x+1)}$ совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} -1 \le x + 2 \le 1, \\ \operatorname{arcctg}(x+1) \ne \dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \le x \le -1, \\ x + 1 \ne \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \le x \le -1, \\ x + 1 \ne 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \le x \le -1, \\ x \ne -1; \end{cases} \quad x \in [-3; -1).$$

Сумма целых чисел из области определения данного выражения равна $-3 - 2 = -5$.

Ответ: –5.

B3. Запишем неравенство в виде $\left(2x^2 - x - 2\right)^2 - \left(x^2 + 5x + 4\right)^2 \ge 0$ и воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений:

$$\left(\left(2x^2 - x - 2\right) - \left(x^2 + 5x + 4\right)\right)\left(\left(2x^2 - x - 2\right) + \left(x^2 + 5x + 4\right)\right) \ge 0;$$

$$\left(2x^2 - x - 2 - x^2 - 5x - 4\right)\left(2x^2 - x - 2 + x^2 + 5x + 4\right) \ge 0;\ \left(x^2 - 6x - 6\right)\left(3x^2 + 4x + 2\right) \ge 0.$$

Рассмотрим квадратный трехчлен $3x^2 + 4x + 2$.

Так как $D = 4^2 - 4\cdot 3\cdot 2 = 16 - 24 < 0$ и $a = 3 > 0$, то $3x^2 + 4x + 2 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

Тогда последнее неравенство равносильно неравенству $x^2 - 6x - 6 \ge 0$. $D = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 36 + 24 = 60$;

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4\cdot 15}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{15}}{2} = \frac{2\left(3 \pm \sqrt{15}\right)}{2} = 3 \pm \sqrt{15}.$$

Тогда $x \in \left(-\infty; 3-\sqrt{15}\right] \cup \left[3+\sqrt{15}; +\infty\right)$. Так как $6 < 3+\sqrt{15} < 7$, то наименьшим натуральным решением неравенства является число 7.

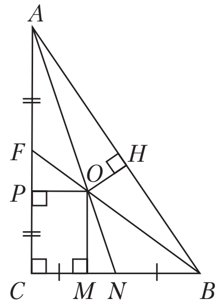
Ответ: 7.

B4. Так как наименьший положительный период функции $y = f(x)$ равен 3, то ее периодом является любое число вида $3n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Значения функций $y = f(x)$ и $y = f\left(x + \dfrac{24}{k}\right)$ будут совпадать в том случае, когда выражение $\dfrac{24}{k}$ окажется периодом данной функции, т. е. будет иметь вид $3n$.

Значит, $\dfrac{24}{k} = 3n$; $\dfrac{8}{k} = n$. Учитывая, что по условию задачи k — натуральное число, то $k = 1$; 2; 4; 8. Сумма найденных значений k равна 15.

Ответ: 15.



B5. 1) В прямоугольном треугольнике ABC $PO = \sqrt{3}$ и $OM = \sqrt{7}$.

2) Так как треугольник AOP подобен треугольнику ANC, то $\dfrac{PO}{CN} = \dfrac{AO}{AN}$. Поскольку O — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\dfrac{AO}{AN} = \dfrac{2}{3}$. Тогда $\dfrac{PO}{CN} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{CN} = \dfrac{2}{3}$; $CN = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

AN — медиана треугольника ABC, значит, $BC = 2 \cdot CN = 2 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

3) Рассмотрев подобные треугольники BOM и BFC, найдем, что

$$AC = 2 \cdot CF = 2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}.$$

4) В прямоугольном треугольнике ABC найдем гипотенузу и площадь:

$$AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(3\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9 \cdot 3 + 9 \cdot 7} = 3\sqrt{10};\ S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{3\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{21}}{2}.$$

5) Так как медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников, то $S_{AOB} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9\sqrt{21}}{2} = \dfrac{3\sqrt{21}}{2}$. Вместе с тем $S_{AOB} = \dfrac{AB \cdot OH}{2}$, т. е. $\dfrac{3\sqrt{21}}{2} = \dfrac{3\sqrt{10} \cdot OH}{2}$; $OH = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}}$, и значение искомого выражения равно $10 \cdot OH^2 = 10 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}}\right)^2 = 21$.

Ответ: 21.

B6. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть $A(2;4)$; $B(5;8)$; $C(x;y)$ — точки координатной плоскости. Тогда по формуле расстояния между двумя точками $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ получим:

$$CA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \text{ и } CB = \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2}.$$

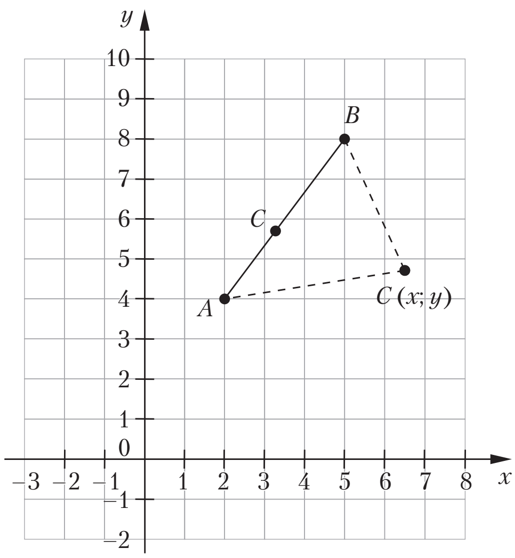
Так как $\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5$, то

$$CA + CB = 5.$$

Найдем расстояние между точками A и B:

$$AB = \sqrt{(2-5)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Итак, $CA + CB = 5$ и $AB = 5$, значит, точка C принадлежит отрезку AB. Сделанный вывод позволяет заменить первое уравнение системы уравнением прямой $y = kx + b$, проходящей через точки A и B.



Решив систему уравнений $\begin{cases}4=2k+b,\\ 8=5k+b,\end{cases}$ получим, что $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ — уравнение прямой, проходящей через точки A и B.

Так как точка C принадлежит отрезку AB, то $2\le x\le 5$, и исходная система принимает вид $\begin{cases}y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\\ 2\le x\le 5,\\ 2xy-8x=14.\end{cases}$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases}y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\\ 2\le x\le 5,\\ x\left(\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\right)-4x=7;\end{cases} \quad \begin{cases}y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\\ 2\le x\le 5,\\ \frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x-4x-7=0;\end{cases} \quad \begin{cases}y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\\ 2\le x\le 5,\\ 4x^2-8x-21=0;\end{cases} \quad \begin{cases}y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\\ 2\le x\le 5,\\ 4x^2-8x-21=0;\end{cases} \quad \begin{cases}y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3},\\ 2\le x\le 5;\\ \left[\begin{array}{l}x=3{,}5,\\ x=-1{,}5.\end{array}\right.\end{cases}$$

С учетом условия $2\le x\le 5$, $x=3{,}5$, тогда $y=\frac{4}{3}\cdot 3{,}5+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot(3{,}5+1)=\frac{4}{3}\cdot 4{,}5=6$, и значение искомого выражения $xy=3{,}5\cdot 6=21$.

Ответ: 21.

ТЕСТ 5

Часть А

А1. Расстояние между точками $F(x_1)$ и $N(x_2)$ можно вычислить по формуле $FN = |x_1 - x_2|$.

Ответ: 5.

А2. $627{,}\underline{9}5 \approx 628{,}0$.

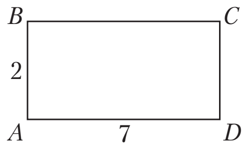
Ответ: 4.

А3. Фигуры называются равновеликими, если их площади равны.

Площадь квадрата со стороной $\sqrt{15}$ равна $\left(\sqrt{15}\right)^2 = 15$.

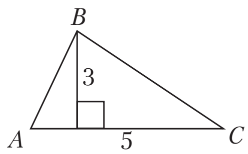
Найдем площади фигур, изображенных на рисунке:

1) $ABCD$ — прямоугольник;



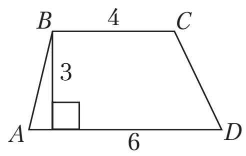
$S = a \cdot b$; $S = 2 \cdot 7 = 14$;

2) ABC — треугольник;



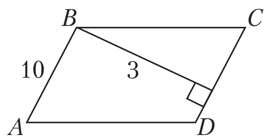
$S = \dfrac{ah}{2}$; $S = \dfrac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5$;

3) $ABCD$ — трапеция;



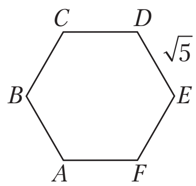
$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \dfrac{4+6}{2} \cdot 3 = 15$;

4) $ABCD$ — параллелограмм;



$S = a \cdot h$; $S = 10 \cdot 3 = 30$;

5) $ABCDEF$ — правильный шестиугольник;



$S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; $S = \dfrac{3\left(\sqrt{5}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 3.

А4. 1) $a = \sqrt[3]{108 \cdot 128} - \sqrt[4]{8 \cdot 162} = \sqrt[3]{27 \cdot 4 \cdot 64 \cdot 2} - \sqrt[4]{8 \cdot 2 \cdot 81} = 3 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 24 - 6 = 18$.

2) $\text{НОК}(15;\, 18) = 90$.

Ответ: 4.

А5. 1) Найдем абсциссу вершины параболы: $x_\text{в} = -\dfrac{b}{2a}$; $x_\text{в} = -\dfrac{12}{2 \cdot (-2)} = 3$.

2) Уравнение оси симметрии параболы: $x = 3$.

3) Прямой $x = 3$ принадлежит точка $(3;\, 19)$.

Ответ: 3.

А6. Воспользуемся формулами приведения и получим:

$$\frac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} 135° \sin 210° \cos 225° = \frac{10}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg}(180° - 45°) \cdot \sin(180° + 30°) \cdot \cos(180° + 45°) =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{2}} (-\operatorname{ctg} 45°) \cdot (-\sin 30°) \cdot (-\cos 45°) = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2{,}5.$$

Ответ: 1.

A7. $\dfrac{15-7x-4x^2}{16x^2-25}=\dfrac{-4x^2-7x+15}{16x^2-25}$.

С помощью формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен $-4x^2-7x+15$.

$$-4x^2-7x+15=0;\ 4x^2+7x-15=0,$$

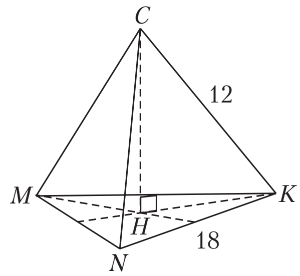
$$D=7^2-4\cdot4\cdot(-15)=49+240=289;\ x_{1,2}=\frac{-7\pm17}{8};\ x_1=\frac{5}{4};\ x_1=-3.$$

Тогда $-4x^2-7x+15=-4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x+3)=-(4x-5)(x+3)$.

Таким образом, $\dfrac{-4x^2-7x+15}{16x^2-25}=\dfrac{-(4x-5)(x+3)}{(4x-5)(4x+5)}=-\dfrac{x+3}{4x+5}$.

Ответ: 3.

A8. Проведем $CH\perp(MNK)$. Так как треугольник MNK — равносторонний, то H — центр данного треугольника, тогда



$$HK=\frac{2}{3}\cdot\frac{NK\sqrt{3}}{2}=\frac{18\sqrt{3}}{3}=6\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного треугольника CHK по теореме Пифагора найдем:

$$CH=\sqrt{CK^2-HK^2}=\sqrt{12^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=6.$$

Ответ: 2.

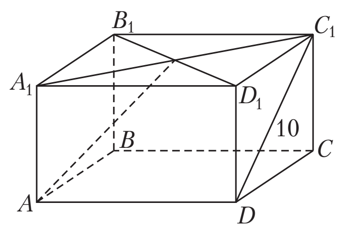
A9. $(x+1)(|x|-1)=\dfrac{1}{2}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge0,\\(x+1)(x-1)=\dfrac{1}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\(x+1)(-x-1)=\dfrac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge0,\\x^2-1=\dfrac{1}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\-(x+1)^2=\dfrac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge0,\\x^2=\dfrac{3}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\(x+1)^2=-\dfrac{1}{2};\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge0,\\x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2};\end{cases}\\ x\quad;\end{array}\right.$ $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Таким образом, уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

Часть В

B1. 1) Так как треугольник DCC_1 — прямоугольный, то по теореме Пифагора



$$CC_1=\sqrt{DC_1^2-CC_1^2};\ CC_1=\sqrt{100-36}=8.$$

2) Так как $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, то $A_1O=\dfrac{1}{2}A_1C_1=\dfrac{1}{2}\cdot6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

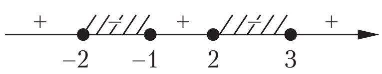
3) Из прямоугольного треугольника AA_1O получим, что

$$AO^2=OA_1^2+AA_1^2;\ AO^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2+8^2=18+64=82.$$

Ответ: 82.

B2. $(x^2-x-1)(x^2-x-7)\le-5$.

Пусть $x^2-x=t$, тогда неравенство принимает вид $(t-1)(t-7)\le-5$. Тогда $t^2-7t-t+7+5\le0$; $t^2-8t+12\le0$; $(t-2)(t-6)\le0$. Так как $t=x^2-x$, то $(x^2-x-2)(x^2-x-6)\le0$; $(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)\le0$.

Воспользуемся методом интервалов: 

$x\in[-2;\,-1]\cup[2;\,3]$.

Найдем сумму целых решений неравенства: $-2+(-1)+2+3=2$.

Ответ: 2.

B3. $\dfrac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left(a^0+\left(\dfrac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\dfrac{a+b+c}{b+c-a}\cdot\dfrac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=$

$=\dfrac{a+b+c}{b+c-a}\cdot\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\dfrac{a+b+c}{b+c-a}\cdot\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}=\dfrac{(a+b+c)^2}{2bc}\Bigg|_{a+b+c=\sqrt{2},\ bc=1}=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot 1}=1.$

Ответ: 1.

B4. Воспользуемся формулами понижения степени и получим:

$\dfrac{1-\cos 22x}{2}=\dfrac{1+\cos 34x}{2};\ \cos 34x+\cos 22x=0;\quad 2\cos\dfrac{34x+22x}{2}\cos\dfrac{34x-22x}{2}=0;\quad \cos 28x\cdot\cos 6x=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 28x=0,\\ \cos 6x=0;\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}28x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ 6x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{56}+\dfrac{\pi}{28}n,\\ x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}n,\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Найдем количество чисел вида $\dfrac{\pi}{56}+\dfrac{\pi}{28}n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, принадлежащих промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{7};\dfrac{\pi}{12}\right]$:

$$-\frac{\pi}{7}\le\frac{\pi}{56}+\frac{\pi}{28}n\le\frac{\pi}{12};\ -8\pi\le\pi+2\pi n\le\frac{14\pi}{3};\ \ -8\le 1+2n\le\frac{14}{3};\ \ -9\le 2n\le\frac{11}{3};\ \ -4{,}5\le n\le 1\frac{5}{6}.$$

Промежутку $\left[-4{,}5;\,1\dfrac{5}{6}\right]$ принадлежат шесть целых чисел, значит, шесть чисел вида $\dfrac{\pi}{56}+\dfrac{\pi}{28}n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, являющихся корнями исходного уравнения, принадлежат промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{7};\dfrac{\pi}{12}\right]$.

Рассмотрим вторую серию корней $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6}n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, и выясним, сколько корней из данной серии находятся в промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{7};\dfrac{\pi}{12}\right]$.

$$-\frac{\pi}{7}\le\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}n\le\frac{\pi}{12};\ -\frac{12\pi}{7}\le\pi+2\pi n\le\pi;\ -\frac{12}{7}\le 1+2n\le 1;\ -\frac{19}{7}\le 2n\le 0;\ -1\frac{5}{14}\le n\le 0.$$

Два целых значения n удовлетворяют полученному условию.

Таким образом, исходное уравнение имеет восемь корней на данном промежутке.

Ответ: 8.

B5. $\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0,\\ (x-3)(y-2)=y^2-3y+2;\end{cases}\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0,\\ (x-3)(y-2)=(y-1)(y-2);\end{cases}\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0,\\ (x-3)(y-2)-(y-1)(y-2)=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0,\\ (y-2)(x-3-y+1)=0;\end{cases}\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0;\\ \left[\begin{array}{l}y-2=0,\\ x-y-2=0;\end{array}\right.\end{cases}\begin{cases}x^2-5y^2-3x-y+22=0;\\ \left[\begin{array}{l}y=2,\\ x=y+2;\end{array}\right.\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\ x^2-5y^2-3x-y+22=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y+2,\\ x^2-5y^2-3x-y+22=0;\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\ x^2-20-3x-2+22=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y+2,\\ (y+2)^2-5y^2-3(y+2)-y+22=0;\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\ x^2-3x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y+2,\\ y^2+4y+4-5y^2-3y-6-y+22=0;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\x(x-3)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y+2,\\-4y^2+20=0;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2,\\x(x-3)=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x=y+2,\\-4y^2+20=0;\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2;\\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\x=3;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x=y+2,\\y=\pm\sqrt{5};\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2;\\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\x=3;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x=y+2,\\y=\pm\sqrt{5};\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt{5}+2,\\y=\sqrt{5};\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt{5}+2,\\y=-\sqrt{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Таким образом, система имеет четыре решения: $(0;\ 2)$; $(3;\ 2)$; $\left(\sqrt{5}+2;\ \sqrt{5}\right)$; $\left(-\sqrt{5}+2;\ -\sqrt{5}\right)$.

Ответ: 4.

B6.

	Масса слитка	Масса меди
Первый слиток	5	$0,3\cdot5=1,5$
Второй слиток	3	$0,3\cdot3=0,9$
Третий слиток	x	y
Первый сплав	$5+x$	$0,56\cdot(5+x)=1,5+y$
Второй сплав	$3+x$	$0,6\cdot(3+x)=0,9+y$

Составим систему уравнений: $\begin{cases}0,56\cdot(5+x)=1,5+y,\\0,6\cdot(3+x)=0,9+y;\end{cases}$ $\begin{cases}2,8+0,56x=1,5+y,\\1,8+0,6x=0,9+y.\end{cases}$

Вычтем из второго уравнения системы первое и получим: $-1+0,04x=-0,6;$ $0,04x=0,4;$ $x=10$.
Таким образом, масса третьего слитка 10 кг.

Ответ: 10.

ТЕСТ 6

Часть А

A1. Формула разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Ответ: 4.

A2. 12 + 15 = 27 (км/ч) — скорость сближения велосипедистов.
135 — 27 = 108 (км) — расстояние, которое проехали два велосипедиста за искомое время.
108 : 27 = 4 (ч) — искомое время.

Ответ: 4.

A3. $0,5^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=2^2-5\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}=5.$

Ответ: 5.

A4. Запишем выражение $2-\frac{3}{x}$ в виде $2+\left(-3\cdot\frac{1}{x}\right)$ и последовательно оценим выражения $\frac{1}{x}$; $-3\cdot\frac{1}{x}$ и $2+\left(-3\cdot\frac{1}{x}\right)$.

Так как $2<x\le 5$, то:

$\frac{1}{5}\le\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$. Умножим все части последнего неравенства на –3 и получим:

$-3\cdot\frac{1}{5}\ge-3\cdot\frac{1}{x}>-3\cdot\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{5}\ge-\frac{3}{x}>-\frac{3}{2}$ или $-\frac{3}{2}<-\frac{3}{x}\le-\frac{3}{5}$. Прибавим ко всем частям последнего неравенства 2: $2-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{x}\le2-\frac{3}{5}$, т. е. $\frac{1}{2}<2-\frac{3}{x}\le1\frac{2}{5}$.

Ответ: 3.

A5. $\begin{cases}\dfrac{3x-2y}{2y+3x}=-0,2,\\ \dfrac{1}{3x+2y}-2y+3x=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$ Пусть $a=3x+2y$; $b=3x-2y$, тогда система принимает вид

$\begin{cases}\dfrac{b}{a}=-0,2,\\ \dfrac{1}{a}+b=-\dfrac{4}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}b=-\dfrac{a}{5},\\ \dfrac{1}{a}+b=-\dfrac{4}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}b=-\dfrac{a}{5},\\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{a}{5}=-\dfrac{4}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}b=-\dfrac{a}{5},\\ \dfrac{5-a^2}{5a}=-\dfrac{4}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}b=-\dfrac{a}{5},\\ \dfrac{5-a^2}{a}=-4;\end{cases}$ $\begin{cases}b=-\dfrac{a}{5},\\ 5-a^2=-4a,\\ a\ne0;\end{cases}$

$\begin{cases}b=-\dfrac{a}{5},\\ a^2-4a-5=0,\\ a\ne0;\end{cases}$ $\begin{cases}b=-\dfrac{a}{5};\\ \left[\begin{array}{l}a=5,\\ a=-1;\end{array}\right.\\ a\ne0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=5,\\ b=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1,\\ b=\dfrac{1}{5}.\end{cases}\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x+2y=5,\\ 3x-2y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}3x+2y=-1,\\ 3x-2y=\dfrac{1}{5};\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6x=4,\\ 3x-2y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}6x=-\dfrac{4}{5},\\ 3x-2y=\dfrac{1}{5};\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ 3\cdot\dfrac{2}{3}-2y=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{2}{15},\\ 3\cdot\left(-\dfrac{2}{15}\right)-2y=\dfrac{1}{5};\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ -2y=-3;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{2}{15},\\ 2y=-\dfrac{3}{5};\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3},\\ y=1,5;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{2}{15},\\ y=-\dfrac{3}{10}.\end{cases}\end{array}\right.$

Тогда наибольшее значение выражения $x_0\cdot y_0=\frac{2}{3}\cdot1,5=1$.

Ответ: 2.

A6. Так как:

1) при $a<0<b$ $\sqrt[4]{(a-b)^4}=|a-b|=b-a$;

2) при $a<0$ $\sqrt{16a^2}=4|a|=-4a$;

3) $\sqrt[3]{27a^3}=3a$ при любом значении a,

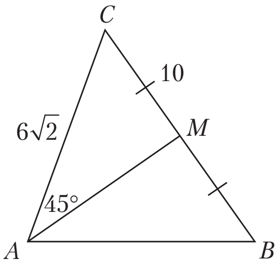
то $\sqrt[4]{(a-b)^4}+\sqrt{16a^2}+\sqrt[3]{27a^3}=b-a-4a+3a=b-2a$.

Ответ: 1.

A7. Значения выражений $f(1)=2\cdot 1-1=1;\ f(2)=2\cdot 2-1=3;\ldots;f(50)=2\cdot 50-1=99$ представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1=f(1)=1$, последним членом $a_{50}=f(50)=99$, разностью $d=2$ и количеством членов $n=50$.

По формуле $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ получим $S_{50}=\dfrac{1+99}{2}\cdot 50=2500$.

Ответ: 3.



A8. Так как AM — медиана треугольника ABC, то $CM=\dfrac{1}{2}BC=10$.

В треугольнике ACM применим теорему косинусов:

$$CM^2=AC^2+AM^2-2\cdot AC\cdot AM\cdot\cos\angle CAM;$$

$$100=72+AM^2-2\cdot 6\sqrt{2}\cdot AM\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};\quad AM^2-12\cdot AM-28=0.$$

По смыслу задачи $AM=14$.

По формуле $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$ найдем площадь треугольника ACM: $S_{ACM}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 14\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=42$.

Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ABC}=2\cdot S_{ACM}=84$.

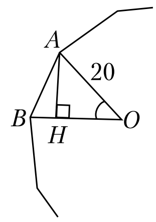
Ответ: 2.

A9. $\left(\dfrac{1}{\sin^2 40^\circ}-\dfrac{1}{\cos^2 40^\circ}\right)\cdot\dfrac{2\sin 80^\circ\,\mathrm{tg}40^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 40^\circ}=\dfrac{\cos^2 40^\circ-\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ\cos^2 40^\circ}\cdot\sin 80^\circ\cdot\dfrac{2\,\mathrm{tg}40^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 40^\circ}=$

$=\dfrac{\cos 80^\circ}{\sin^2 40^\circ\cos^2 40^\circ}\cdot 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cdot\mathrm{tg}80^\circ=\dfrac{2\cos 80^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}\cdot\mathrm{tg}80^\circ=\dfrac{4\cos 80^\circ}{2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}\cdot\mathrm{tg}80^\circ=\dfrac{4\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}\cdot\dfrac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}=4.$

Ответ: 4.

Часть B



B1. 1) Найдем градусную меру угла BOA. Так как двенадцатиугольник — правильный, то $OA=BO$ (как радиусы описанной около двенадцатиугольника окружности) и $\angle BOA=360^\circ:12=30^\circ$.

2) В прямоугольном треугольнике AOH: $\angle BOA=30^\circ$, гипотенуза $AO=20$, тогда $AH=\dfrac{1}{2}\cdot AO=10$.

Ответ: 10.

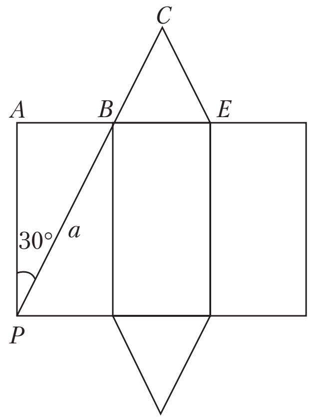
B2. Если $\cos x>0$, то уравнение принимает вид $\mathrm{tg}x=1$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Условию $\cos x>0$ удовлетворяют числа вида $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Из них только $\dfrac{\pi}{4}\in[0;\,2\pi]$.

Если $\cos x<0$, то уравнение принимает вид $\mathrm{tg}x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Условию $\cos x<0$ удовлетворяют числа вида $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Из них только $\dfrac{3\pi}{4}\in[0;\,2\pi]$.

Искомая сумма равна $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\pi=180^\circ$.

Ответ: 180.

B3. Пусть $BP = a$.



1) В прямоугольном треугольнике ABP найдем, что $AB = \frac{1}{2} \cdot BP = \frac{a}{2}$; $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Найдем площадь прямоугольника, являющегося одной из боковых граней призмы: $S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, тогда $S_{\text{бок}} = 3 \cdot S = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

2) Найдем площадь основания призмы — равностороннего треугольника CBE:

$$S_{\text{осн}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

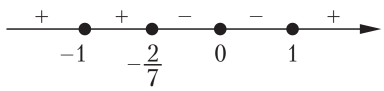
3) Тогда площадь полной поверхности призы равна:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Так как $a = 4\sqrt[4]{3}$, то $S_{\text{полн}} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7\left(4\sqrt[4]{3}\right)^2\sqrt{3}}{8} = \frac{7 \cdot 16 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{8} = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 42.$

Ответ: 42.

B4. По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен $7x^2 - 5x - 2$ и получим $x^2(x+1)^2(x-1)\left(x + \frac{2}{7}\right) \le 0$.

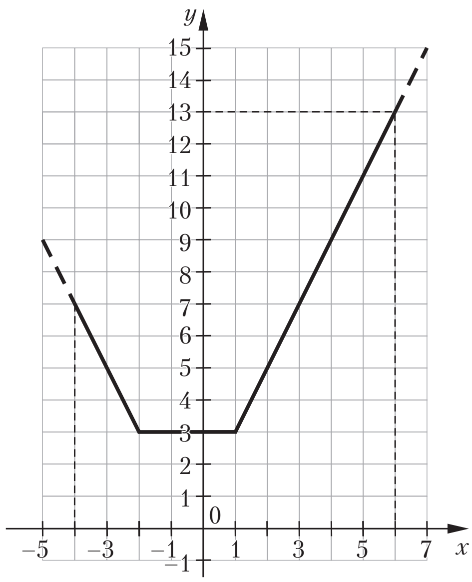
Воспользуемся методом интервалов:  $x \in \{-1\} \cup \left[-\frac{2}{7}; 1\right]$.

Таким образом, неравенство имеет три целых решения — это числа −1; 0 и 1.

Ответ: 3.

B5. Построим график функции $y = |x+2| + |x-1|$. Составим таблицу:

x	−4	−2	1	6
y	7	3	3	13



С помощью графика выясняем, что на отрезке $[-4; 6]$ множеством значений функции является промежуток $[3; 13]$.

Найдем среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значений функции: $\frac{3+13}{2} = 8$.

Ответ: 8.

B6. $\frac{m^4 + 0{,}0064}{m^2 + 0{,}4m + 0{,}08} = \frac{(m^4 + 0{,}16m^2 + 0{,}0064) - 0{,}16m^2}{m^2 + 0{,}4m + 0{,}08} = \frac{(m^2 + 0{,}08)^2 - 0{,}16m^2}{m^2 + 0{,}4m + 0{,}08} = \frac{(m^2 + 0{,}08)^2 - (0{,}4m)^2}{m^2 + 0{,}4m + 0{,}08} =$

$= \frac{(m^2 + 0{,}08 - 0{,}4m)(m^2 + 0{,}08 + 0{,}4m)}{m^2 + 0{,}4m + 0{,}08} = m^2 - 0{,}4m + 0{,}08 = m^2 - 0{,}4m + 0{,}04 + 0{,}04 = (m - 0{,}2)^2 + 0{,}04 \ge 0{,}04$

при всех $m \in \boldsymbol{R}$, т. е. $M = 0{,}04$.

Найдем значение искомого выражения: $25 \cdot 0{,}04 = 1$.

Ответ: 1.

ТЕСТ 7

Часть А

А1. Сечение четырехугольной пирамиды плоскостью изображено на четвертом рисунке.

Ответ: 4.

А2. Графики двух линейных функций ($y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$) параллельны (не пересекаются), если их угловые коэффициенты равны ($k_1 = k_2$; $b_1 \neq b_2$).

Угловой коэффициент прямой $y = -2 + 3x$ равен 3. Найдем угловые коэффициенты прямых:

1) $y = 3x + 7$; $k = 3$;

2) $y = \dfrac{15x - 8}{5}$; $y = \dfrac{15x}{5} - \dfrac{8}{5}$; $y = 3x - \dfrac{8}{5}$; $k = 3$;

3) $y = 32 + \sqrt{9}x$; $y = 3x + 32$; $k = 3$;

4) $y = 2(1 - x) + 5(x + 7)$; $y = 2 - 2x + 5x + 35$; $y = 3x + 37$; $k = 3$;

5) $y = 4 - 3x$; $k = -3 \neq 3$.

Таким образом, график функции $y = 4 - 3x$ пересекает график функции $y = -2 + 3x$.

Ответ: 5.

А3. $$\frac{\left(-0{,}5xy^3\right)^2\left(2x^2y\right)^3}{\left(\dfrac{1}{3}x^5y^3\right)^2} = \frac{(-0{,}5)^2x^2y^6\cdot 2^3x^6y^3}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2x^{10}y^6} = \frac{0{,}25\cdot 8\cdot x^8y^9}{\dfrac{1}{9}x^{10}y^6} = \frac{2y^3}{\dfrac{1}{9}x^2} = \frac{18y^3}{x^2}.$$

Ответ: 1.

А4. Числа $\dfrac{2\pi}{7}$; $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{5}$; $\dfrac{\pi}{6}$ принадлежат промежутку $(0;\ \pi)$. На промежутке $(0;\ \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Так как $\dfrac{3\pi}{4} > \dfrac{2\pi}{7} > \dfrac{\pi}{5} > \dfrac{\pi}{6}$, то $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4} < \operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{7} < \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{5} < \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: 1.

А5. Так как боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию, то около многоугольника, лежащего в основании пирамиды, можно описать окружность. Из предложенных многоугольников только около прямоугольной трапеции нельзя описать окружность. Значит, основанием данной пирамиды не может быть прямоугольная трапеция.

Ответ: 3.

А6. $\dfrac{x+9}{x^2-3x-10} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+15}{x^2-25}$.

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - 3x - 10$ и получим:

$$\frac{x+9}{(x-5)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+15}{(x-5)(x+5)};\quad \frac{x+9}{(x-5)(x+2)} - \frac{1}{x+2} - \frac{x+15}{(x-5)(x+5)} = 0;$$

$$\frac{x+9^{\backslash x+5}}{(x-5)(x+2)} - \frac{1^{\backslash (x-5)(x+5)}}{x+2} - \frac{x+15^{\backslash x+2}}{(x-5)(x+5)} = 0;\quad \frac{(x+9)(x+5)-(x-5)(x+5)-(x+15)(x+2)}{(x-5)(x+2)(x+5)} = 0;$$

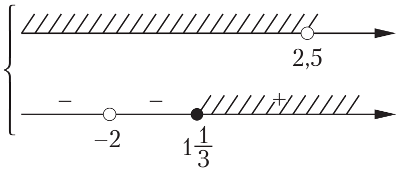
$$\frac{x^2+14x+45-x^2+25-x^2-17x-30}{(x-5)(x+2)(x+5)} = 0;\quad \frac{-x^2-3x+40}{(x-5)(x+2)(x+5)} = 0;\quad \begin{cases} x^2+3x-40=0,\\ x\neq 5,\\ x\neq -5,\\ x\neq -2; \end{cases}\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-8,\\ x=5; \end{array}\right.\\ x\neq 5,\\ x\neq -5,\\ x\neq -2; \end{cases}\quad x=-8.$$

Ответ: 3.

А7. Воспользуемся формулой $S = pr$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр, а r — радиус вписанной в этот треугольник окружности. Тогда $p = \dfrac{S}{r} = \dfrac{108}{4} = 27$, т. е. периметр треугольника равен $27\cdot 2 = 54$.

Ответ: 2.

A8. $\begin{cases} 2(x-1)-3(x-4)>x+5, \\ \dfrac{3x-4}{x^2+4x+4}\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-2-3x+12>x+5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2}\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x>-5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2}\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x<2{,}5, \\ \dfrac{3x-4}{(x+2)^2}\ge 0. \end{cases}$



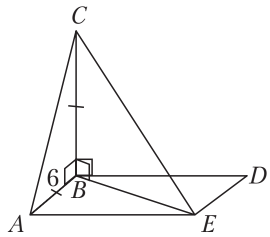
$x\in\left[1\dfrac{1}{3};\ 2{,}5\right).$

Ответ: 3.

A9. Так как треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный, то $BC=AB=6$.
В квадрате $ABDE$ найдем диагональ $BE=6\sqrt{2}$.
Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике CBE получим, что

$$CE=\sqrt{CB^2+BE^2}=\sqrt{36+72}=6\sqrt{3}.$$

Ответ: 1.



Часть B

B1. Рассмотрим арифметическую прогрессию, в которой $a_1=1;\ d=1$.

Воспользуемся формулой суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$ и получим $\dfrac{2+1\cdot(n-1)}{2}\cdot n\le 210;\ \ n^2+n-420\le 0;\ \ n\in[-21;\ 20]$.

Таким образом, наибольшее возможное число последовательных натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно 20.

Ответ: 20.

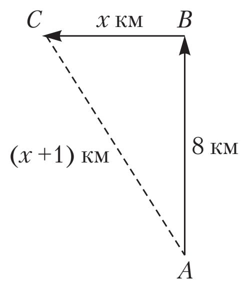
B2. $\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{22+8\sqrt{6}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}-\sqrt{\left(4+\sqrt{6}\right)^2}=\left|1-\sqrt{6}\right|-\left|4+\sqrt{6}\right|=-\left(1-\sqrt{6}\right)-\left(4+\sqrt{6}\right)=-1+\sqrt{6}-4-\sqrt{6}=-5.$

Ответ: –5.

B3. Пусть $BC=x$, тогда $AC=x+1$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABC получим:

$$(x+1)^2=x^2+8^2;\ \ x^2+2x+1=x^2+64;\ \ 2x=63;\ \ x=31{,}5.$$

То есть $AC=31{,}5+1=32{,}5$ км $=32\ 500$ м.



Ответ: 32 500.

B4. $\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{15}\right)-\dfrac{1}{2}\right|=1;$ $\left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{15}\right)-\dfrac{1}{2}=1, \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{15}\right)-\dfrac{1}{2}=-1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{15}\right)=\dfrac{3}{2}\notin[-1;\ 1], \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{15}\right)=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Решим уравнение: $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{15}\right)=-\dfrac{1}{2};\ \ x+\dfrac{\pi}{15}=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\ \ x=-\dfrac{\pi}{15}+(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$

$x=-12^\circ+(-1)^{n+1}\cdot 30^\circ+180^\circ n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$

При $n=0$ получим наибольший отрицательный корень уравнения, равный -42°.

Ответ: –42.

B5. Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2-5x-3\ge 0, \\ x-2+|x-2|\ne 0; \end{cases}\ \ \begin{cases} 2(x-3)(x+0{,}5)\ge 0, \\ |x-2|\ne -x+2. \end{cases}$$

Заметим, что равенство $|x-2|=-x+2$ выполняется при $x-2\le 0$. То есть неравенство $|x-2|\ne -x+2$ равносильно неравенству $x-2>0$ или $x>2$. Тогда система принимает вид $\begin{cases} x\in(-\infty;-0{,}5]\cup[3;+\infty), \\ x\in(2;+\infty); \end{cases}$ $x\in[3;+\infty)$. Число 3 является наименьшим целым числом, принадлежащим области определения данной функции.

Ответ: 3.

B6. Запишем уравнение в виде $(x-y)(x+y)=1\cdot 3\cdot 23$ и рассмотрим возможные варианты значений выражений $(x-y)$ и $(x+y)$. Так как требуется найти положительные решения уравнения, то $(x-y)<(x+y)$, тогда

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=69; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=3, \\ x+y=23; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x=70, \\ x+y=69; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x=26, \\ x+y=23; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=35, \\ y=34 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=13, \\ y=10. \end{cases}$$

Таким образом, пары чисел $(35;34)$ и $(13;10)$ являются положительными целочисленными решениями данного уравнения, т. е. уравнение имеет два решения, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 2.

ТЕСТ 8

Часть А

А1. Верным является утверждение под номером 3.

Ответ: 3.

А2. $\left(7{,}42\cdot\frac{5}{9}-(-11{,}48):1\frac{4}{5}\right):0{,}35=\frac{7{,}42\cdot\frac{5}{9}-(-11{,}48):1\frac{4}{5}}{0{,}35}=\frac{7{,}42\cdot\frac{5}{9}-(-11{,}48):\frac{9}{5}}{0{,}35}=\frac{7{,}42\cdot\frac{5}{9}+11{,}48\cdot\frac{5}{9}}{0{,}35}=$

$=\frac{\frac{5}{9}\cdot(7{,}42+11{,}48)}{0{,}35}=\frac{\frac{5}{9}\cdot18{,}9}{0{,}35}=\frac{5\cdot2{,}1}{0{,}35}=\frac{5\cdot210}{35}=30.$

Ответ: 5.

А3. Количество диагоналей выпуклого n-угольника можно вычислить по формуле $\frac{n(n-3)}{2}$. Так как многоугольник содержит 65 диагоналей, то $\frac{n(n-3)}{2}=65$. То есть $n(n-3)=130$; $n^2-3n-130=0$; $n_1=13$; $n_2=-10$. Таким образом, количество сторон многоугольника равно 13.

Ответ: 2.

А4. Пусть x — первое число, тогда:
$(x+3)$ — вторoе число;
$(x+3)+8=x+11$ — третье число;
$(x+11)+6=x+17$ — четвертое число.

Так как отношения второго числа к первому и четвертого к третьему равны, то $\frac{x+3}{x}=\frac{x+17}{x+11}$;

$(x+3)(x+11)=x(x+17)$; $x\neq0$; $x\neq-11$; $x^2+14x+33=x^2+17x$; $3x=33$; $x=11$.

Ответ: 4.

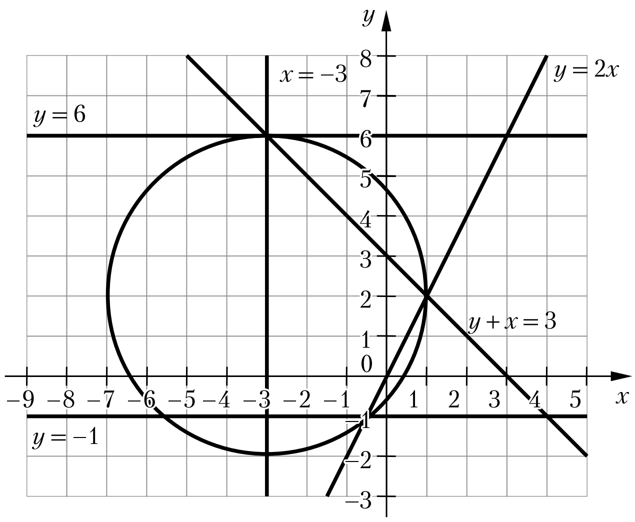
А5. $(5x+\mathrm{tg}45°)(5x-\mathrm{ctg}225°)=\sin0°$.

Так как $\mathrm{tg}45°=1$; $\mathrm{ctg}225°=\mathrm{ctg}(180°+45°)=\mathrm{ctg}45°=1$; $\sin0°=0$, то уравнение принимает вид

$$(5x+1)(5x-1)=0;\quad \left[\begin{aligned}&5x+1=0,\\&5x-1=0;\end{aligned}\right.\quad \left[\begin{aligned}&x=-0{,}2,\\&x=0{,}2.\end{aligned}\right.$$

Ответ: 3.

А6. Построим окружность, заданную уравнением $(x+3)^2+(y-2)^2=16$, и прямые $y=2x$; $x=-3$; $y=6$; $y+x=3$; $y=-1$.



С помощью построенных графиков убеждаемся, что прямая $y=6$ является касательной для окружности с центром в точке $(-3;\ 2)$ и радиусом 4.

Ответ: 3.

A7. 1) Разложим на множители квадратный трехчлен $3a^2+5a+2$.

$D=5^2-4\cdot3\cdot2=25-24=1>0;\ a_{1,2}=\dfrac{-5\pm1}{2\cdot3};\ a_1=-1;\ a_2=-\dfrac{2}{3}.$

Тогда $3a^2+5a+2=3(a+1)\left(a+\dfrac{2}{3}\right)=(a+1)(3a+2).$

2) Разложим на множители знаменатель дроби: $6ab-3a+4b-2=3a(2b-1)+2(2b-1)=(2b-1)(3a+2).$

3) Сократим дробь: $\dfrac{3a^2+5a+2}{6ab-3a+4b-2}=\dfrac{(a+1)(3a+2)}{(2b-1)(3a+2)}=\dfrac{a+1}{2b-1}.$

Ответ: 2.

A8. Так как нечетная функция $y=f(x)$ имеет нечетное количество нулей, то ее график проходит через точку с координатами $(0;0)$. То есть $x=0$ является одним из нулей данной функции. Поскольку нули нечетной функции симметричны относительно начала координат и $f(2)=f(-5)=f(13)=0$, то $x=-2;\ x=5;\ x=-13$ также являются нулями данной функции. Найдем среднее арифметическое чисел $0;-2;5$ и -13:

$$\frac{0-2+5-13}{4}=-2{,}5.$$

Ответ: 1.

A9. Воспользуемся формулой $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ и решим систему: $\begin{cases}a_1+a_4=7,\\a_2+a_3=3;\end{cases}$ $\begin{cases}a_1+a_1\cdot q^3=7,\\a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}a_1\left(1+q^3\right)=7,\\a_1\left(q+q^2\right)=3.\end{cases}$

Разделим первое уравнение системы на второе и получим: $\dfrac{1+q^3}{q+q^2}=\dfrac{7}{3};\ \dfrac{(1+q)\left(1-q+q^2\right)}{q(1+q)}=\dfrac{7}{3};\ \dfrac{1-q+q^2}{q}=\dfrac{7}{3};$

$3q^2-3q+3=7q;\ 3q^2-10q+3=0;\ q_1=3;\ q_2=\dfrac{1}{3}.$

Так как прогрессия возрастает, то $q=3$. Тогда $a_1=\dfrac{3}{q+q^2}=\dfrac{3}{3+3^2}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}=0{,}25.$

Ответ: 5.

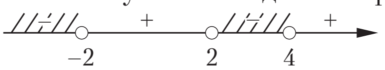
Часть В

B1. Если $\text{НОК}(a;b)=b$, то число a является делителем числа b. Так как $\text{НОК}(n;24)=24$, число n является делителем числа 24. Найдем все четные делители числа 24: $2;4;6;8;12;24$. Их сумма равна: $2+4+6+8+12+24=56$.

Ответ: 56.

B2. $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{\left(8x-x^2\right)'}{\left(12x-x^3\right)'}=\dfrac{8-2x}{12-3x^2}=\dfrac{2(x-4)}{3\left(x^2-4\right)};\ \dfrac{x-4}{(x-2)(x+2)}<0.$

Воспользуемся методом интервалов:



$x\in(-\infty;-2)\cup(2;4).$

Наибольшим целым решением неравенства является число 3.

Ответ: 3.

B3. $\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt3}}}=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+2\cdot1\cdot2\sqrt3}}}=$

$=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{\left(1+2\sqrt3\right)^2}}}=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{5-\left|1+2\sqrt3\right|}}=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{5-1-2\sqrt3}}=$

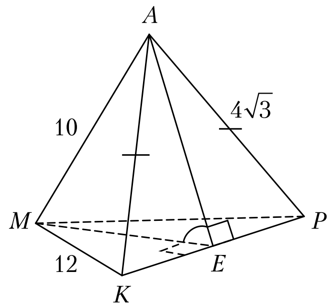
$=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt3}}=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt{\left(1-\sqrt3\right)^2}}=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\left|1-\sqrt3\right|}=\left(\sqrt2-\sqrt6\right)\sqrt{3+\sqrt3-1}=$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=1-\left(\sqrt{3}\right)^2=1-3=-2.$$

Ответ: –2.

B4. 1) В прямоугольном треугольнике APE: $AP=4\sqrt{3}$; $PE=\dfrac{KP}{2}=6$, тогда по теореме Пифагора $AE=\sqrt{AP^2-PE^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-6^2}=\sqrt{48-36}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.



2) Так как отрезок ME является высотой равностороннего треугольника MKP, то $ME=\dfrac{MK\sqrt{3}}{2}=\dfrac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.

3) По теореме косинусов из треугольника AME найдем:

$$\cos\angle MEA=\frac{ME^2+AE^2-AM^2}{2\cdot ME\cdot AE}=\frac{\left(6\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-10^2}{2\cdot 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{108+12-100}{72}=\frac{20}{72}=\frac{5}{18}.$$

Тогда $18\cdot\cos\angle MEA=18\cdot\dfrac{5}{18}=5$.

Ответ: 5.

B5. $\begin{cases}|x-2|+|y-5|=1,\\ y-|x-2|=5.\end{cases}$ Сложим первое и второе уравнения системы и получим $\begin{cases}y+|y-5|=6,\\ y-|x-2|=5.\end{cases}$

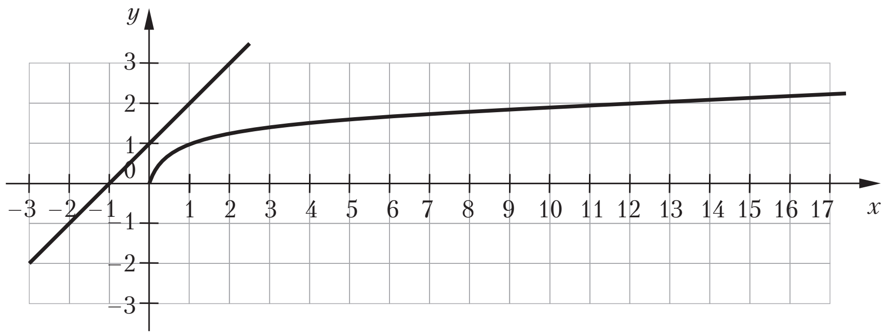
Решим первое уравнение системы: $y+|y-5|=6$; $|y-5|=6-y$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y-5=6-y,\\ y-5=-6+y;\end{array}\right.\\ 6-y\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2y=11,\\ 0y=-1;\end{array}\right.\\ y\le 6;\end{cases}$ $\begin{cases}y=5{,}5,\\ y\le 6;\end{cases}$ $y=5{,}5$.

Тогда $|x-2|=5{,}5-5$; $|x-2|=0{,}5$; $\left[\begin{array}{l}x-2=0{,}5,\\ x-2=-0{,}5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2{,}5,\\ x=1{,}5.\end{array}\right.$

Таким образом, пары чисел $(2{,}5;\,5{,}5)$ и $(1{,}5;\,5{,}5)$ являются решениями исходной системы уравнений. Найдем наибольшее значение выражения: $x_0+y_0=2{,}5+5{,}5=8$.

Ответ: 8.

B6. $\sqrt{x}-(x+3)\sqrt[4]{x}+2x+2=0$.



Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $\sqrt[4]{x}$. Тогда $D=(x+3)^2-4\cdot 1\cdot(2x+2)=$ $=x^2+6x+9-8x-8=x^2-2x+1=(x-1)^2$ и $\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}=\dfrac{x+3+x-1}{2},\\ \sqrt[4]{x}=\dfrac{x+3-x+1}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}=x+1,\\ \sqrt[4]{x}=2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x}=x+1,\\ x=16.\end{array}\right.$ Построим графики функций $y=\sqrt[4]{x}$ и $y=x+1$ и убедимся, что первое уравнение совокупности не имеет корней.

Таким образом, исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

ТЕСТ 9

Часть А

А1. Гипербола является графиком обратной пропорциональности, т. е. функции вида $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$. В данном случае гипербола является графиком функции $y=-\frac{3}{x}$.

Ответ: 1.

А2. Так как в любом прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов, то отношением катета к гипотенузе не может быть число, большее единицы. Из предложенных вариантом ответов только $\sqrt{1{,}001}>1$.

Ответ: 5.

А3. Натуральное число называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя — единицу и само себя.

Число 2 671 335 делится на 5 (так как оканчивается цифрой 5).

Число 384 291 делится на 3 (так как сумма цифр этого числа 3 + 8 + 4 + 2 + 9 + 1 = 27 кратна трем).

Число 327 327 делится на 327.

Число 55 551 делится на 3 (5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 21 — кратно трем). Так как известно, что среди предложенных чисел одно является простым, то это число 2 029.

Ответ: 3.

А4. 1) Функция $y=-\frac{6}{x}$ возрастает на промежутках $(-\infty;\,0)$ и $(0;\,+\infty)$.

2) Функция $y=-7+x$ возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

3) Функция $y=x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

4) Функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0;+\infty)$.

5) Функция $y=-x^2+5$ возрастает на промежутке $(-\infty;0]$ и убывает на промежутке $[0;+\infty)$, а значит, и на промежутке $[1;\,10]$.

Ответ: 5.

А5. Сечением куба плоскостью не может быть семиугольник, так как у куба шесть граней.

Ответ: 4.

А6. 1) С помощью основного тригонометрического тождества найдем $\cos 2\alpha$: $\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha=1$; $\cos^2 2\alpha=1-\sin^2 2\alpha$; $\cos^2 2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$; $\cos^2 2\alpha=1-\frac{9}{25}$; $\cos^2 2\alpha=\frac{16}{25}$. Тогда $\cos 2\alpha=\pm\frac{4}{5}$. Так как $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$, т. е. 2α является углом второй четверти и $\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$.

2) Так как $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, то $\cos^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha+1}{2}$, т. е. $\cos^2\alpha=\frac{-\frac{4}{5}+1}{2}=\frac{1}{10}$.

Так как $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: 1.

А7. 1) $D=[-6;\,10]$ — верно.

2) $E=[-4{,}5;\,4]$ — верно.

3) Наименьшее значение $y=-4{,}1$ функция принимает при $x=0$ — неверно, так как наименьшее значение $y=-4{,}5$ функция принимает при $x=0{,}8$.

4) Нули функции: $x=-4{,}5;\,-2;\,2{,}5;\,7$ — верно.

5) $y>0$ при $x\in(-4;\,4)\cup(-4{,}5;\,1{,}5)$ — неверно, так как $y>0$ при $x\in(-4{,}5;\,-2)\cup(2{,}5;\,7)$.

6) $y<0$ при $x\in[-6;\,-4{,}5)\cup(-2;\,2{,}5)\cup(7;\,10]$ — верно.

7) Функция возрастает на промежутках: $[-6;\,-3]$; $[0{,}8;\,5]$ — верно.

8) Функция убывает на промежутках: $[-3;\,0{,}8]$; $[6;\,10]$ — верно.

9) График функции пересекает ось ординат в точке $(7;\,0)$ — неверно, так как график функции пересекает ось ординат в точке $(0;\,-4{,}1)$.

Ответ: 4.

А8. $\left(\dfrac{x}{x-y+6}-\dfrac{6}{x+y+6}\right):\dfrac{x^2+y^2+2xy-36}{x^2+12x-y^2+36}+\dfrac{y}{x+y+6}.$

1) $\dfrac{x}{x-y+6}-\dfrac{6}{x+y+6}=\dfrac{x(x+y+6)-6(x-y+6)}{(x-y+6)(x+y+6)}=\dfrac{x^2+xy+6x-6x+6y-36}{(x-y+6)(x+y+6)}=\dfrac{x^2+xy+6y-36}{(x-y+6)(x+y+6)}.$

2) $\dfrac{x^2+y^2+2xy-36}{x^2+12x-y^2+36}=\dfrac{(x+y)^2-36}{(x+6)^2-y^2}=\dfrac{(x+y-6)(x+y+6)}{(x+6-y)(x+6+y)}=\dfrac{x+y-6}{x+6-y}.$

3) $\dfrac{x^2+xy+6y-36}{(x-y+6)(x+y+6)}:\dfrac{x+y-6}{x+6-y}=\dfrac{(x^2+xy+6y-36)(x+6-y)}{(x-y+6)(x+y+6)(x+y-6)}=\dfrac{x^2+xy+6y-36}{(x+y+6)(x+y-6)}=$

$=\dfrac{(x^2-36)+(xy+6y)}{(x+y+6)(x+y-6)}=\dfrac{(x-6)(x+6)+y(x+6)}{(x+y+6)(x+y-6)}=\dfrac{(x+6)(x-6+y)}{(x+y+6)(x+y-6)}=\dfrac{x+6}{x+y+6}.$

4) $\dfrac{x+6}{x+y+6}+\dfrac{y}{x+y+6}=\dfrac{x+6+y}{x+y+6}=1.$

Ответ: 1.

А9. Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств
$\begin{cases}20-x-x^2\ge 0,\\ 14-5x-x^2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x-20\le 0,\\ x^2+5x-14<0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+5)(x-4)\le 0,\\ (x+7)(x-2)<0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in[-5;\,4],\\ x\in(-7;\,2);\end{cases}$ $x\in[-5;\,2).$

Ответ: 4.

Часть В

В1. $\begin{cases}\sqrt{(2x-5)^2}=5-2x,\\ \sqrt{(x+5)^2}=5+x.\end{cases}$ Воспользуемся тождеством $\sqrt{a^2}=|a|$ и получим $\begin{cases}|2x-5|=5-2x,\\ |x+5|=5+x.\end{cases}$

Так как уравнение вида $|a|=-a$ равносильно неравенству $a\le 0$, а уравнение вида $|a|=a$ равносильно неравенству $a\ge 0$, то перейдем к системе неравенств $\begin{cases}2x-5\le 0,\\ 5+x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 2{,}5,\\ x\ge -5;\end{cases}$ $x\in[-5;\,2{,}5].$

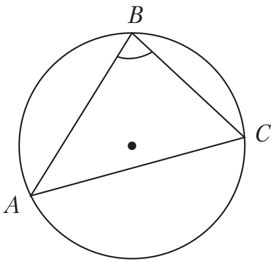
Найдем сумму целых решений системы: $-5-4-3-2-1+0+1+2=-12$.

Ответ: -12.

В2. $8x-\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\cos 160^\circ\sin 70^\circ=7$. Так как $\cos 160^\circ=\cos(180^\circ-20^\circ)=-\cos 20^\circ$, то исходное уравнение принимает вид $8x-\sin 20^\circ\cos 70^\circ-\cos 20^\circ\sin 70^\circ=7$; $8x-(\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\cos 20^\circ\sin 70^\circ)=7$;
$8x-\sin(20^\circ+70^\circ)=7$; $8x-\sin 90^\circ=7$; $8x-1=7$; $8x=8$; $x=1$.

Ответ: 1.

В3. 1) Так как $\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{2R}$ и $AC:R=6:5$, то $\sin\angle ABC=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.



2) Так как $\cos^2\angle ABC+\sin^2\angle ABC=1$, то $\cos^2\angle ABC=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$; $\cos\angle ABC=\pm\dfrac{4}{5}$.

Так как AC — меньшая сторона треугольника, то $\angle ABC$ — острый и $\cos\angle ABC=\dfrac{4}{5}$.

3) С помощью теоремы косинусов найдем сторону AC:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC;\ AC^2=20^2+21^2-2\cdot 20\cdot 21\cdot\frac{4}{5}=400+441-672=169;\ AC=13.$$

Ответ: 13.

B4. $\dfrac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{38}+\sqrt{57}-\sqrt{6}-2\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2\cdot 19}+\sqrt{3\cdot 19}-\sqrt{3\cdot 2}-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{19}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{19}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$

$=\left(\sqrt{19}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{19}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=19-2=17.$

Ответ: 17.

B5. $\dfrac{3x^2-13x+5}{x^2-1}=\dfrac{4x^2-13x+1}{2x^2-5}$. Вычтем единицу из обеих частей уравнения:

$\dfrac{3x^2-13x+5}{x^2-1}-1=\dfrac{4x^2-13x+1}{2x^2-5}-1;\quad \dfrac{3x^2-13x+5-x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{4x^2-13x+1-2x^2+5}{2x^2-5};$

$\dfrac{2x^2-13x+6}{x^2-1}=\dfrac{2x^2-13x+6}{2x^2-5};\quad \dfrac{2x^2-13x+6}{x^2-1}-\dfrac{2x^2-13x+6}{2x^2-5}=0;\quad \left(2x^2-13x+6\right)\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{2x^2-5}\right)=0;$

$\left(2x^2-13x+6\right)\cdot\dfrac{2x^2-5-x^2+1}{\left(x^2-1\right)\left(2x^2-5\right)}=0;\quad \left(2x^2-13x+6\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{\left(x^2-1\right)\left(2x^2-5\right)}=0.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}2x^2-13x+6=0,\\ x^2-4=0;\end{array}\right.\\ x^2-1\neq 0,\\ 2x^2-5\neq 0;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=6,\\ x=0{,}5,\\ x=2,\\ x=-2;\end{array}\right.\\ x^2-1\neq 0,\\ 2x^2-5\neq 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=6,\\ x=0{,}5,\\ x=2,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Найдем произведение корней уравнения: $6\cdot 0{,}5\cdot 2\cdot(-2)=-12$.

Ответ: –12.

B6. Пусть x человек — первоначальное количество жителей города. Так как население города увеличивается ежегодно на $\dfrac{1}{50}$ наличного числа жителей, или на 2 %, то после первого года в городе будет $(x\cdot 1{,}02)$ человек, а после второго года $(x\cdot 1{,}02)\cdot 1{,}02=x\cdot 1{,}02^2$ человек. То есть через n лет в городе будет жить $\left(x\cdot 1{,}02^n\right)$ человек. По условию задачи составим неравенство $x\cdot 1{,}02^n\geq x\cdot 1{,}1$. Тогда $1{,}02^n\geq 1{,}1$. Так как $1{,}02^4\leq 1{,}1$, а $1{,}02^5\geq 1{,}1$, то наименьшее количество лет, через которое население города увеличится не менее чем на 10 %, равно пяти.

Ответ: 5.

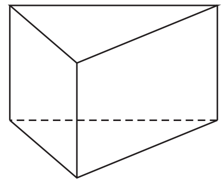
ТЕСТ 10

Часть А

А1. Так как остаток от деления всегда меньше делителя, то остатком от деления некоторого натурального числа на 37 не может быть число 39.

Ответ: 5.

А2. Наименьшее количество ребер имеет треугольная призма, изображенная на рисунке. У треугольной призмы 9 ребер.

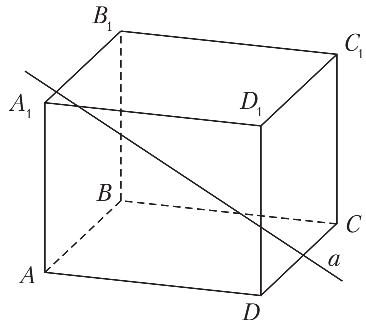


Ответ: 5.

А3. Так как $5697 = 569 \cdot 10 + 7$, то данное число имеет 569 десятков.

Ответ: 4.

А4. Так как прямая a лежит в плоскости DD_1C_1 и прямая CC_1 лежит в плоскости DD_1C_1, то прямые a и CC_1 пересекаются.



Ответ: 5.

А5. 1) Найдем периметр параллелограмма: $12 : 0{,}3 = 40$.

2) Так как периметр параллелограмма равен удвоенной сумме двух его смежных сторон, то $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$. Тогда $40 = 2(12 + BC)$; $20 = 12 + BC$; $BC = 8$.

Ответ: 3.

А6. Данное выражение имеет смысл, если $2 - b > 0$. Тогда $b - 2 < 0$. Имеем:

$$(b-2)\sqrt[4]{\frac{1}{2-b}} = -(2-b)\sqrt[4]{\frac{1}{2-b}} = -\sqrt[4]{(2-b)^4 \cdot \frac{1}{2-b}} = -\sqrt[4]{(2-b)^3}.$$

Ответ: 3.

А7. Воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений и получим:

$$\frac{24{,}3333^2 - 15{,}6667^2}{15{,}6667 - 24{,}3333} = \frac{(24{,}3333 - 15{,}6667)(24{,}3333 + 15{,}6667)}{15{,}6667 - 24{,}3333} = \frac{(24{,}3333 - 15{,}6667)(24{,}3333 + 15{,}6667)}{-(24{,}3333 - 15{,}6667)} =$$

$$= -(24{,}3333 + 15{,}6667) = -40.$$

Ответ: 1.

А8. $-5\pi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi x \le 2\pi$.

Умножим все части неравенства на два: $-10\pi \le \pi + 4\pi x \le 4\pi$.

Вычтем π: $-11\pi \le 4\pi x \le 3\pi$.

Разделим на 4π: $-\frac{11}{4} \le x \le \frac{3}{4}$; $-2\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$.

Целыми решениями данного неравенства являются числа -2; -1; 0. Их сумма равна -3.

Ответ: 4.

А9. $x\,\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 18\sin\frac{7\pi}{6} = \sin 2\pi$.

Найдем значения выражений:

$$\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3; \quad \sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}; \quad \sin 2\pi = 0.$$

Тогда уравнение принимает вид $3x - 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$; $3x + 9 = 0$; $x = -3$.

Ответ: 2.

Часть B

B1. Так как $f(2)=5$ и период функции $y=f(x)$ равен 3, то $f(-1)=f(2+(-3))=f(2)=5;$

$$f(8)=f(2+2\cdot(3))=f(2)=5 \text{ и } f(-4)=f(2+2\cdot(-3))=f(2)=5.$$

Тогда значение выражения $f(-1)+2f(8)-3f(-4)=5+2\cdot5-3\cdot5=0.$

Ответ: 0.

B2. Пусть $\sqrt{x^2+3x-6}=t$, тогда $\left(\sqrt{x^2+3x-6}\right)^2=t^2$, т. е. $x^2+3x-6=t^2$. Тогда $x^2+3x=t^2+6$, и исходное уравнение принимает вид $t^2+6-18+4t=0;$ $t^2+4t-12=0;$ $t_1=-6;$ $t_2=2$. Так как $\sqrt{x^2+3x-6}=t$, то $t\geq0$, значит, $t=2$.

Тогда $\sqrt{x^2+3x-6}=2;$ $x^2+3x-6=4;$ $x^2+3x-10=0.$

Полученное уравнение имеет корни $(D>0)$, произведение которых равно -10.

Ответ: -10.

B3. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть $t=\dfrac{x+y}{x-y}$, тогда уравнение имеет вид $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{13}{6};$

$$6t^2-13t+6=0;\quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{3},\\ t=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right. \quad \text{Тогда} \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2};\end{array}\right. \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x+3y=2x-2y,\\ 2x+2y=3x-3y;\end{array}\right.\\ x\neq y;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-5y,\\ x=5y;\end{array}\right.\\ x\neq y;\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}x=-5y,\\ x=5y.\end{array}\right.$$

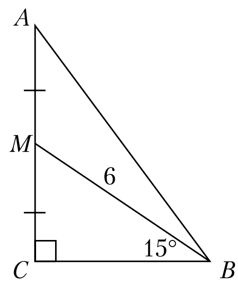
При $x=-5y$ второе уравнение системы принимает вид $-5y\cdot y=5;$ $y^2=-1$. Полученное уравнение не имеет корней.

При $x=5y$ получим $5y\cdot y=5;$ $y^2=1;$ $y=\pm1$.

Тогда решениями системы являются пары чисел $(5;1)$ и $(-5;-1)$, и значение искомого выражения равно $|x_0+y_0|=5+1=6$.

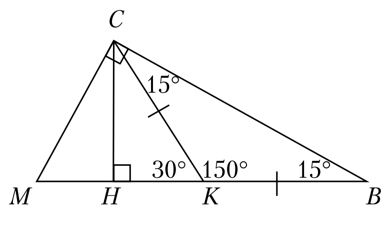
Ответ: 6.

B4. 1) Рассмотрим прямоугольный треугольник MCB с углом CBM, равным 15°, и докажем, что если в прямоугольном треугольнике угол равен 15°, то высота этого треугольника, проведенная к гипотенузе, равна $\dfrac{1}{4}$ гипотенузы.



2) В прямоугольном треугольнике MCB проведем медиану CK и высоту CH. Тогда $CK=\dfrac{1}{2}MB$ (медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы), значит, треугольник CBK — равнобедренный

$$\text{и } \angle CKB=180^\circ-(\angle KBC+\angle KCB)=180^\circ-(15^\circ+15^\circ)=150^\circ.$$



Тогда $\angle CKH=180^\circ-150^\circ=30^\circ$ и $CH=\dfrac{1}{2}CK$ (как катет, лежащий против угла в 30° в прямоугольном треугольнике CHK), но $CK=\dfrac{1}{2}MB$, значит, $CH=\dfrac{1}{2}CK=\dfrac{1}{4}MB$.

3) Воспользуемся доказанным утверждением и выразим площадь треугольника MCB через длину его гипотенузы MB:

$$S_{MCB}=\frac{1}{2}CH\cdot MB=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}MB\cdot MB=\frac{1}{8}\cdot MB^2.$$

4) Вернемся к данным задачи. С помощью доказанных утверждений найдем, что $S_{MCB}=\dfrac{1}{8}\cdot MB^2=\dfrac{1}{8}\cdot6^2=\dfrac{9}{2}$, а так как медиана MB делит треугольник ABC на два равновеликих треугольника, то $S_{ACB}=2\cdot S_{MCB}=2\cdot\dfrac{9}{2}=9$.

Ответ: 9.

B5. Пусть x ч — время, за которое можно приготовить сок, пользуясь первой соковыжималкой.

	Время приготовления сока одной соковыжималкой (ч)	Производительность	Время совместной работы (ч)	Объем выполненной работы
Первая	x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}\cdot x=1$
Вторая	$x+1$	$\frac{1}{x+1}$	x	$\frac{1}{x+1}\cdot x=\frac{x}{x+1}$
Третья	$x+4$	$\frac{1}{x+4}$	x	$\frac{1}{x+4}\cdot x=\frac{x}{x+4}$

Так как за x ч первая соковыжималка выполняет такой же объем работы, как первая и вторая соковыжималки вместе, то составим уравнение: $1=\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}$; $1=\frac{x(2x+5)}{(x+1)(x+4)}$; $x^2+5x+4=2x^2+5x$; $x^2=4$; $x=\pm2$.

По смыслу задачи $x=2$.

Ответ: 2.

B6. Найдем область определения данной функции: $\begin{cases}x+7\ge0,\\11-x\ge0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge-7,\\x\le11;\end{cases}$ $x\in[-7;\,11]$.

Так как $y>0$ при $x\in[-7;\,11]$, то наибольшее значение данной функции достигается тогда, когда достигает наибольшее значение квадрат этой функции:

$$y^2=\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)^2;\quad y^2=\left(\sqrt{x+7}\right)^2+2\sqrt{(x+7)(11-x)}+\left(\sqrt{11-x}\right)^2;$$

$$y^2=x+7+2\sqrt{-x^2+4x+77}+11-x.$$

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении: $y^2=2\sqrt{-(x-2)^2+81}+18$. Так как наибольшее значение подкоренного выражения равно 81 при $x=2$, то наибольшее значение квадрата исходной функции равно $y^2=2\sqrt{81}+18=2\cdot9+18=36$.

Тогда наибольшее значение функции $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$ равно $y_{\text{наиб}}=\sqrt{36}=6$.

Ответ: 6.

ТЕСТ 11

Часть А

А1. Так как 1 % числа равен 0,78, то само число равно $100 \cdot 0{,}78 = 78$.

Ответ: 5.

А2. 1) $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$.

2) $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

3) $-\frac{1}{3} + 6{,}05 = -\frac{1}{3} + 6\frac{1}{20} = -\frac{20}{60} + 6\frac{3}{60} = -\frac{20}{60} + 5\frac{63}{60} = 5\frac{43}{60}$.

Ответ: 2.

А3. Дробь называется неправильной, если числитель этой дроби больше знаменателя или равен ему. Таким образом, дробь $\frac{6}{a}$ является неправильной при a = 1; 2; 3; 4; 5; 6. Искомая сумма равна $1+2+3+4+5+6=21$.

Ответ: 4.

А4. $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y-4}{2} = \frac{y+2}{6}, \\ x-2 = \frac{2y-2}{3}. \end{cases}$ Умножим обе части первого уравнения системы на 6, а второго — на 3.

$$\begin{cases} 2x + 3(y-4) = y+2, \\ 3(x-2) = 2y-2; \end{cases} \begin{cases} 2x+3y-12 = y+2, \\ 3x-6 = 2y-2; \end{cases} \begin{cases} 2x+2y = 14, \\ 3x-2y = 4. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения системы и получим:

$$\begin{cases} 5x = 18, \\ 3x-2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3{,}6, \\ 3x-2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3{,}6, \\ 3 \cdot 3{,}6 - 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3{,}6, \\ 10{,}8 - 2y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 3{,}6, \\ 2y = 6{,}8; \end{cases} \begin{cases} x = 3{,}6, \\ y = 3{,}4. \end{cases}$$

То есть $x_0 = 3{,}6;\ y_0 = 3{,}4$, и искомое выражение имеет значение $x_0 - y_0 = 3{,}6 - 3{,}4 = 0{,}2$.

Ответ: 3.

А5. $\frac{7(m-n)^2}{(2n-2m)^2} = \frac{7(m-n)^2}{(2(n-m))^2} = \frac{7(m-n)^2}{4(n-m)^2} = \frac{7(m-n)^2}{4(m-n)^2} = \frac{7}{4} = 1{,}75$.

Ответ: 1.

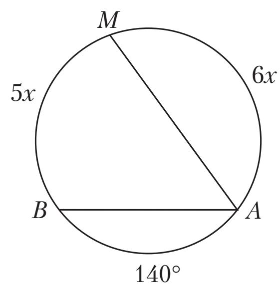
А6. Найдем объем прямоугольного параллелепипеда: $2 \cdot 4 \cdot 27 = 216$. Найдем ребро куба: $a^3 = 216;\ a^3 = 6^3;\ a = 6$.

Ответ: 1.

А7. 1) $\cup BMA = 360° - \cup BA = 360° - 140° = 220°$.

2) Так как дуга BMA точкой M делится в отношении 6 : 5, считая от точки A, то $\cup MA = 6x$; $\cup BM = 5x$. Тогда $6x + 5x = 220°$; $11x = 220°$; $x = 20°$ и $\cup BM = 5 \cdot 20° = 100°$.

3) Так как вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается, то $\angle BAM = \frac{1}{2} \cup BM = \frac{1}{2} \cdot 100° = 50°$.



Ответ: 4.

А8. $(x^2-3x)^2 - 2(x^2-3x) - 8 > 0$.

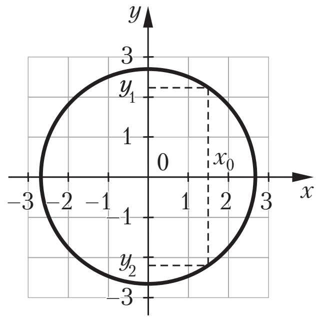
Пусть $x^2 - 3x = t$, тогда неравенство принимает вид $t^2 - 2t - 8 > 0$. Разложим на множители квадратный трехчлен в левой части неравенства и получим $(t-4)(t+2) > 0$.

Так как $t = x^2 - 3x$, то $(x^2-3x-4)(x^2-3x+2) > 0$ или $(x-4)(x+1)(x-1)(x-2) > 0$. Решим полученное неравенство методом интервалов:

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: 2.

А9. Если переменная y функционально зависит от переменной x, то *каждому* значению переменной x соответствует *единственное* значение переменной y.



1) $y^2 = x$ — очевидно, что при любом $x > 0$ $y = \pm\sqrt{x}$ (например при $x = 4$ $y = \pm 2$), т. е. данная зависимость не является функциональной;

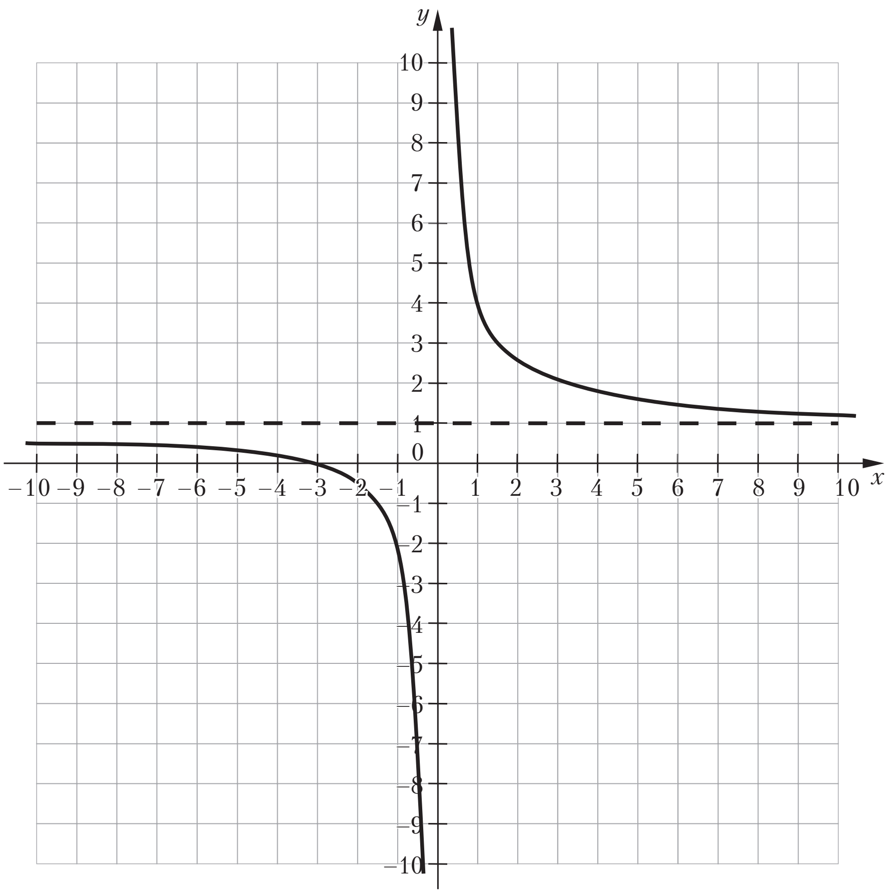
2) $|y| = x + 1$ — при любом $x > -1$ $y = \pm(x+1)$ (например при $x = 5$ $y = \pm 6$), т. е. данная зависимость не является функциональной;

3) $y^4 = 5x + 6$ — при любом $x > -\frac{6}{5}$ $y = \pm\sqrt[4]{5x+6}$ (например при $x = -1$ $y = \pm 1$), т. е. данная зависимость не является функциональной;

4) $x^2 + y^2 = 7$ — данное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{7}$.

С помощью рисунка убедимся, что значению переменной $x = x_0$ соответствует два значения переменной y: y_1 и y_2, т. е. данная зависимость не является функциональной;

5) $y - \frac{3}{x} = 1$; $y = \frac{3}{x} + 1$ — в данном случае каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y, т. е. данная зависимость является функциональной и ее график изображен на рисунке.



Ответ: 5.

Часть В

В1. Парабола $y = (x+5)^2 - 7$ получена смещением графика функции $y = x^2$ на пять единичных отрезков влево вдоль оси абсцисс и на семь единичных отрезков вниз вдоль оси ординат.

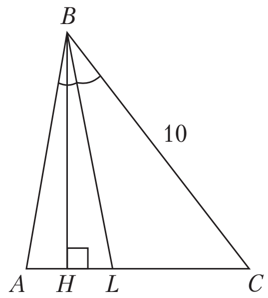
При $x = 2$ $y = (2+5)^2 - 7 = 49 - 7 = 42$. То есть прямая $x = 2$ пересекает параболу $y = (x+5)^2 - 7$ в точке с ординатой 42.

Ответ: 42.

B2. $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}}=\left|\sqrt{3}-5\right|-\dfrac{1}{\left|2+\sqrt{3}\right|}=5-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=$

$=5-\sqrt{3}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=5-\sqrt{3}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-\left(\sqrt{3}\right)^2}=5-\sqrt{3}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{4-3}=5-\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)=5-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}=3.$

Ответ: 3.



B3. 1) Проведем BH — высоту треугольников ABC и BLC. Тогда $S_{BLC}=\dfrac{1}{2}BH\cdot LC$ и $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BH\cdot AC$. Так как $S_{BLC}=\dfrac{2}{5}S_{ABC}$, то $\dfrac{1}{2}BH\cdot LC=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}BH\cdot AC$, т. е. $\dfrac{LC}{AC}=\dfrac{2}{5}$.

Пусть $LC=2x$; $AC=5x$, тогда $AL=AC-LC=5x-2x=3x$.

2) По теореме о биссектрисе треугольника $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AL}{LC}$, т. е. $\dfrac{AB}{10}=\dfrac{3x}{2x}$; $AB=10\cdot\dfrac{3}{2}=15$.

Ответ: 15.

B4. Раскроем скобки в левой части уравнения и запишем его в виде $6x-9=x^2|x-3|+x^2$; $x^2|x-3|+x^2-6x+9=0$; $x^2|x-3|+(x-3)^2=0$. Так как $x^2|x-3|\geq 0$ и $(x-3)^2\geq 0$ при любых действительных значениях x, то уравнение $x^2|x-3|+(x-3)^2=0$ равносильно системе $\begin{cases}x^2|x-3|=0,\\(x-3)^2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=3;\end{aligned}\right.\\x=3;\end{cases}$ $x=3$.

Ответ: 3.

B5. Пусть a руб. — стоимость первой книги, b руб., x руб. и d руб. — стоимость второй, третьей и четвертой книг соответственно. Тогда

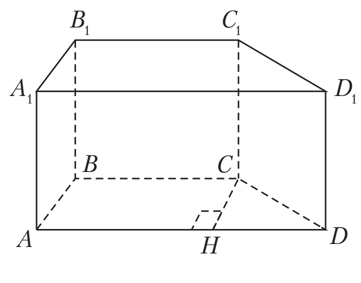
$$\begin{cases}b+x+d=48\,000,\\a+x+d=46\,000,\\a+b+d=42\,000,\\a+b+x=38\,000.\end{cases}$$

Сложим уравнения системы и получим:

$$3a+3b+3x+3d=48\,000+46\,000+42\,000+38\,000;\ 3(a+b+x+d)=174\,000;$$
$$a+b+x+d=58\,000;\ x=58\,000-(a+b+d).$$

Так как $a+b+d=42\,000$, то $x=58\,000-42\,000=16\,000$.

Ответ: 16 000.



B6. 1) Проведем $CH\perp AD$, тогда длина отрезка CH равна расстоянию между параллельными гранями AA_1D_1D и BB_1C_1C, т. е. $CH=4$.

2) Обозначим длину бокового ребра призмы h, тогда $S_{AA_1D_1D}=AD\cdot h$ и $S_{BB_1C_1C}=BC\cdot h$, т. е. $AD=\dfrac{12}{h}$, а $BC=\dfrac{8}{h}$. Так как $S_{ABCD}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot CH$, то

$$S_{ABCD}=\dfrac{\dfrac{12}{h}+\dfrac{8}{h}}{2}\cdot 4=\dfrac{40}{h}.$$

3) По формуле $V=S_{\text{осн}}\cdot h$ найдем объем призмы: $V=\dfrac{40}{h}\cdot h=40$.

Ответ: 40.

ТЕСТ 12

Часть А

А1. Верным является равенство $c^2+d^2-2cd=(c-d)^2$.

Ответ: 4.

А2. Прямая является графиком линейной функции (функции вида $y=kx+b$).

В данном случае линейной является функция $y=-8$ $(k=0;\ b=-8)$. Ее графиком является прямая, параллельная оси абсцисс и пересекающая ось ординат в точке с абсциссой -8.

Ответ: 4.

А3. $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}=2a^{\frac{1}{3}}$.

Ответ: 4.

А4. По признаку параллельности прямой и плоскости: $AB \parallel DC$; $DC \subset (SDC)$, значит, $AB \parallel (SDC)$.

Ответ: 1.

А5. 1) Так как число A составляет 180 % от 75, то $A=1{,}8\cdot 75=135$.

2) Так как 75 % числа B равны 180, то $B=180:0{,}75=240$.

3) Так как число C можно представить в виде суммы двух чисел, отношение которых равно 11 : 3, то пусть $C=11x+3x=14x$. Поскольку меньшее из слагаемых равно 27, то $3x=27$; $x=9$. Тогда $C=14\cdot 9=126$.

4) Так как число D составляет $\frac{5}{7}$ от числа 140, то $D=140\cdot\frac{5}{7}=100$.

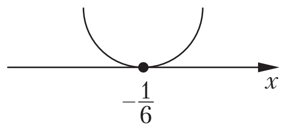
5) Так как $\frac{7}{13}$ числа E равны 91, то $E=91:\frac{7}{13}=91\cdot\frac{13}{7}=169$.

Найдем искомую сумму: $A+B+C+D+E=135+240+126+100+169=770$.

Ответ: 5.

А6. <u>I способ.</u> Рассмотрим функцию $y=36x^2+12x+1$.

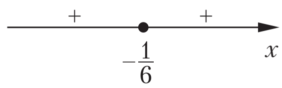
$a=36>0$ и $D=12^2-4\cdot 36\cdot 1=144-144=0$; $x_{1,2}=-\frac{12}{2\cdot 36}=-\frac{1}{6}$.



Неравенство $36x^2+12x+1\le 0$ выполняется при $x=-\frac{1}{6}$.

<u>II способ.</u> Решим неравенство методом интервалов.

$36x^2+12x+1\le 0$; $(6x+1)^2\le 0$.



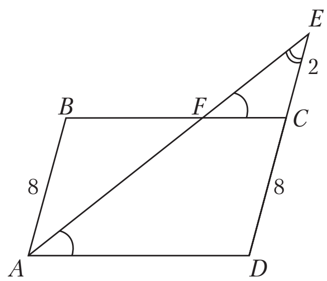
То есть неравенство верно при $x=-\frac{1}{6}$.

<u>III способ.</u> Так как исходное неравенство можно представить в виде $(6x+1)^2\le 0$, а квадрат числа не может быть числом отрицательным, то неравенство выполняется только при $x=-\frac{1}{6}$.

Ответ: 4.

А7. 1) Так как четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $CD=AB=8$.

2) Треугольник ADE подобен треугольнику FCE, так как $\angle FEC$ — общий и $\angle EFC=\angle EAD$ (как соответственные при $BC \parallel AD$ и секущей AE). Найдем коэффициент подобия: $k=\frac{ED}{EC}=\frac{10}{2}=5$. Так как площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, то $\frac{S_{ADE}}{S_{FCE}}=k^2=25=25:1$.



Ответ: 3.

А8. График функции $y=(x-3)^2-4$, заданной на множестве $D=[0;4]\cup\{5;6\}$, изображен на первом рисунке.

Ответ: 1.

A9. Воспользуемся формулой $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ и разложим на множители квадратные трехчлены x^2-x-6; x^2-4x-5 и $x^2-7x+10$. Тогда выражение принимает вид

$$\left(\frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x-2)}\right):\frac{4(x+4)}{x-2}=\left(\frac{x-3}{x-2}-\frac{x+1}{x-2}\right)\cdot\frac{x-2}{4(x+4)}=\frac{x-3-(x+1)}{x-2}\cdot\frac{x-2}{4(x+4)}=$$
$$=\frac{x-3-x-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{4(x+4)}=\frac{-4}{x-2}\cdot\frac{x-2}{4(x+4)}=-\frac{1}{x+4}.$$

Ответ: 2.

Часть B

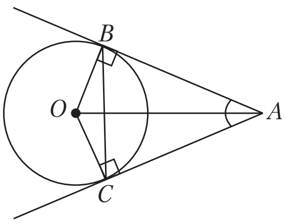
B1. $(\sqrt{7}-3)\sqrt{16+6\sqrt{7}}=-(3-\sqrt{7})\sqrt{16+6\sqrt{7}}=-\sqrt{(3-\sqrt{7})^2\cdot(16+6\sqrt{7})}=-\sqrt{\left(3^2-2\cdot3\cdot\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2\right)\cdot(16+6\sqrt{7})}=$
$=-\sqrt{(9-6\sqrt{7}+7)\cdot(16+6\sqrt{7})}=-\sqrt{(16-6\sqrt{7})\cdot(16+6\sqrt{7})}=-\sqrt{16^2-(6\sqrt{7})^2}=-\sqrt{256-36\cdot7}=-\sqrt{256-252}=$
$=-\sqrt{4}=-2.$

Ответ: –2.

B2. 1) Так как x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-5x-89=0$, то с помощью теоремы Виета найдем, что $x_1+x_2=5$; $x_1\cdot x_2=-89$.

2) Поскольку $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, то $x_1^2+x_2^2=5^2-2\cdot(-89)=25+178=203$.

Ответ: 203.



B3. 1) Так как хорда BC делит окружность в отношении 1 : 2, то градусная мера меньшей дуги BC равна 120°. Тогда $\angle BOC=\cup BC=120°$.

2) По свойству касательной $BO\perp AB$ и $CO\perp AC$.

3) Поскольку сумма углов четырехугольника $OBAC$ равна 360°, то

$$\angle BAC=360°-(90°+90°+120°)=60°.$$

4) Так как $AB=AC$ (по теореме об отрезках касательных) и $\angle BAC=60°$, то треугольник BAC — равносторонний. Воспользуемся формулой площади равностороннего треугольника $\left(S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$ и найдем длину стороны треугольника BAC:

$$12\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ a^2=48;\ a=\sqrt{48}=4\sqrt{3}.$$

То есть $AB=BC=AC=4\sqrt{3}$.

5) Проведем отрезок AO. Тогда AO — биссектриса угла BAC, т. е. $\angle OAC=60°:2=30°$.

Так как треугольник OAC — прямоугольный, то

$$\operatorname{tg}\angle OAC=\frac{OC}{AC};\ OC=AC\cdot\operatorname{tg}\angle OAC;\ OC=4\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}30°=4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=4.$$

Ответ: 4.

B4. Область определения функции $y=\sqrt[6]{|3x+6|+|4-3x|-10}+\frac{1}{x^2-|x|-30}$ совпадает с множеством решений системы неравенств $\begin{cases}|3x+6|+|4-3x|-10\ge0,\\ x^2-|x|-30\ne0.\end{cases}$

Запишем первое неравенство системы в виде $|3x+6|+|3x-4|-10\ge0$ и решим его с помощью метода промежутков:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\-(3x+6)-(3x-4)-10\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x\le 1\frac{1}{3},\\(3x+6)-(3x-4)-10\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\frac{1}{3},\\(3x+6)+(3x-4)-10\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\-3x-6-3x+4-10\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x\le 1\frac{1}{3},\\3x+6-3x+4-10\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\frac{1}{3},\\3x+6+3x-4-10\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\-6x-12\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x\le 1\frac{1}{3},\\0x+0\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\frac{1}{3},\\6x-8\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\x\le -2;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x\le 1\frac{1}{3},\\x\in \boldsymbol{R};\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\frac{1}{3},\\x\ge \frac{4}{3};\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x<-2,\\-2\le x\le 1\frac{1}{3},\\x>1\frac{1}{3}.\end{array}\right. x\in \boldsymbol{R}.$$

Решим второе неравенство системы: $x^2-|x|-30\ne 0$; $|x|^2-|x|-30\ne 0$; $|x|\ne 6$; $|x|\ne -5$, тогда $x\ne \pm 6$.

Таким образом, областью определения данной функции является множество всех действительных чисел, кроме чисел 6 и –6.

Произведение целых чисел, не входящих в область определения данной функции, равно $6\cdot(-6)=-36$.

Ответ: –36.

B5. Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц исходного числа, тогда $(10x+y)$ — само число, а $(10y+x)$ — число, записанное теми же числами, но в обратном порядке. Рассмотрим сумму

$$(10x+y)+(10y+x)=11x+11y=11(x+y).$$

Полученное выражение может быть квадратом натурального числа, только если $x+y=11$.

Учитывая, что x и y — цифры, получим возможные значения x и y:

при $x=9$ $y=2$;
при $x=8$ $y=3$;
при $x=7$ $y=4$;
при $x=6$ $y=5$;
при $x=5$ $y=6$;
при $x=4$ $y=7$;
при $x=3$ $y=8$;
при $x=2$ $y=9$.

Таким образом, существует восемь чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 8.

B6. Запишем уравнение в виде $x\sqrt{1+x}=2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3-x}$ и возведем обе его части в квадрат при условии

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3-x}\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3-x}<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\left(x\sqrt{1+x}\right)^2=\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3-x}\right)^2$; $x^2(1+x)=4\left(x^2+1\right)-4\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{3-x}+3-x$;
$x^2+x^3=4x^2-x+7-4\sqrt{3x^2-x^3+3-x}$; $x^3-3x^2+x-3+4\sqrt{-x^3+3x^2-x+3}=4$.

Пусть $\sqrt{-x^3+3x^2-x+3}=t$, тогда $-x^3+3x^2-x+3=t^2$ и уравнение принимает вид $-t^2+4t=4;$ $t^2-4t+4=0;$ $(t-2)^2=0;$ $t=2$.

Таким образом,

$$\sqrt{-x^3+3x^2-x+3}=2;\quad -x^3+3x^2-x+3=4;\quad -x^3+3x^2-x-1=0;\quad x^3-3x^2+x+1=0;$$

$$x^3-x^2-2x^2+x+1=0;\quad x^2(x-1)-\left(2x^2-x-1\right)=0;\quad x^2(x-1)-2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0;$$

$$(x-1)\left(x^2-2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)=0;\ (x-1)\left(x^2-2x-1\right)=0;\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=1+\sqrt{2}, \\ x=1-\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

2) Решим совокупность $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ 2\sqrt{x^2+1}\ge\sqrt{3-x}; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ 2\sqrt{x^2+1}<\sqrt{3-x}; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ 4x^2+4\ge 3-x, \\ 3-x\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ 4x^2+4<3-x; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ 4x^2+x+1\ge 0, \\ x\le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ 4x^2+x+1<0, \\ 4x^2+4\ge 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0, \\ x\in \boldsymbol{R}, \\ x\le 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ x\in\varnothing, \\ x\in \boldsymbol{R}; \end{cases} \end{array}\right.$ $x\in\ 0;3$.

Полученному условию удовлетворяют числа $x=1$ и $x=1+\sqrt{2}$.
Таким образом, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: 2.

ТЕСТ 13

Часть А

А1. Так как сумма корней искомого уравнения равна 6, а произведение корней равно -17, то второй коэффициент уравнения равен -6, а свободный член равен -17. Данному условию удовлетворяет уравнение под номером 5.

Ответ: 5.

А2. На рисунке изображено решение неравенства $-2 \le x < 10$.

Ответ: 4.

А3. Воспользуемся формулой квадрата разности двух выражений $\left((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\right)$ и получим:

$$\left(0{,}3a - \frac{b}{2}\right)^2 = (0{,}3a)^2 - 2\cdot 0{,}3a\cdot\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0{,}09a^2 - 0{,}3a + \frac{b^2}{4}.$$

Ответ: 5.

А4. Так как наименьшим положительным периодом функции является число 3, любое число вида $3n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ n \ne 0$, также является периодом данной функции. Таким образом, из предложенных чисел только число 2 не может являться периодом этой функции.

Ответ: 3.

А5. 1) Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и найдем $\sin\alpha$:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha;\ \ \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{11}\right)^2 = 1 - \frac{25}{121} = \frac{96}{121}.\ \ \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{96}{121}} = \pm\frac{4\sqrt{6}}{11}.$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, а синус угла, принадлежащего четвертой четверти, отрицательный, то $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{6}}{11}$.

2) Так как $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{4\sqrt{6}}{11} : \frac{5}{11} = -\frac{4\sqrt{6}}{5}$.

Ответ: 1.

А6. $\left(5^{-10} - 3\cdot 0{,}04^5\right)\cdot\sqrt[3]{5^{27}} = \left(5^{-10} - 3\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^5\right)\cdot 5^{\frac{27}{3}} = \left(5^{-10} - 3\cdot\left(\frac{1}{5^2}\right)^5\right)\cdot 5^9 = \left(5^{-10} - 3\cdot\left(5^{-2}\right)^5\right)\cdot 5^9 = \left(5^{-10} - 3\cdot 5^{-10}\right)\cdot 5^9 =$

$= \left(-2\cdot 5^{-10}\right)\cdot 5^9 = -2\cdot 5^{-10}\cdot 5^9 = -2\cdot 5^{-10+9} = -2\cdot 5^{-1} = -2\cdot\frac{1}{5} = -\frac{2}{5}.$

Ответ: 4.

А7. $\sqrt{x+5} = x-1;\ \ \begin{cases} x+5 = (x-1)^2, \\ x-1 \ge 0; \end{cases}\ \ \begin{cases} x+5 = x^2 - 2x + 1, \\ x \ge 1; \end{cases}\ \ \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x \ge 1; \end{cases}\ \ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1; \end{array}\right. \\ x \ge 1; \end{cases}\ \ x = 4.$

Ответ: 3.

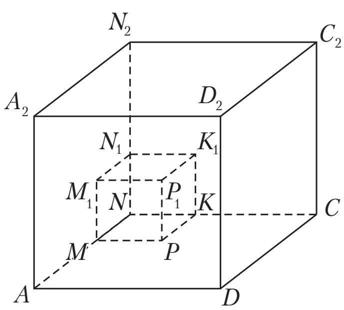
А8. 1) Пусть $NA = a;\ NC = b;\ NN_2 = c$, тогда $V_{ANCDA_2N_2C_2D_2} = abc = 128$.

2) Так как $MA = 0{,}75AN$, то $MA = \frac{3}{4}a;\ MN = NA - MA = \frac{1}{4}a$.

Так как NK составляет 25 % от NC, то $NK = \frac{1}{4}b$.

Кроме того, $N_2N : N_1N_2 = 4:3$, т. е. $NN_1 = \frac{1}{4}c$. Тогда

$$V_{MNKPM_1N_1K_1P_1} = NM\cdot NK\cdot NN_1 = \frac{1}{4}a\cdot\frac{1}{4}b\cdot\frac{1}{4}c = \frac{1}{64}abc = \frac{1}{64}\cdot 128 = 2.$$



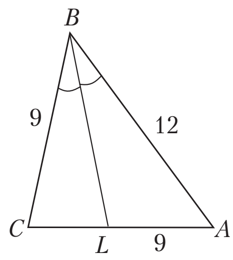
Ответ: 2.

A9. На рисунке изображен график квадратичной функции $y=(x-3)^2-2$, полученный из графика функции $y=x^2$ смещением его на три единичных отрезка вправо вдоль оси абсцисс и на два единичных отрезка вниз вдоль оси ординат.

Ответ: 3.

Часть В

B1. 1) По теореме о биссектрисе угла треугольника $\frac{AL}{AB}=\frac{LC}{BC}$.



По условию задачи один из отрезков, на которые биссектриса разделила сторону AC, равен одной из двух других сторон.

2) Если отрезок $AL=9$, то $LC=12$ и $AC=AB+BC$, т. е. такого треугольника не существует.

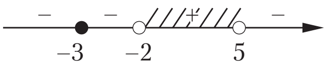
3) Если отрезок $AL=12$, то $LC=\frac{AL\cdot BC}{AB}=\frac{12\cdot 12}{9}=16$ и $AC=12+16=28$, но $28>9+12$, значит, такого треугольника не существует.

4) Пусть отрезок $LC=9$, тогда $AL=\frac{LC\cdot AB}{BC}=\frac{9\cdot 9}{12}=6{,}75$ и $AC=6{,}75+9=15{,}75$.

Так как $15{,}75<9+12$, то треугольник существует. Поскольку рассмотрены все возможные варианты длин отрезков AL и LC, то $AC=15{,}75$, тогда $4\cdot c=4\cdot 15{,}75=63$.

Ответ: 63.

B2. Решим неравенство $\frac{(3+x)^2}{(5-x)(x+2)}\geq 0$ методом интервалов:



$x\in\{-3\}\cup(-2;5)$. Таким образом, наименьшим целым решением данного неравенства является число -3.

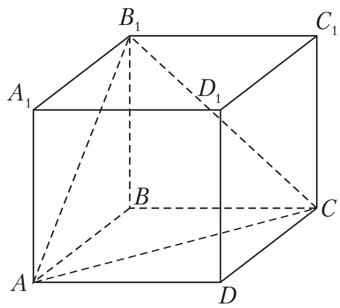
Ответ: –3.

B3. $x^2-5x\frac{|x-2|}{x-2}-14=0;$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2,\\ x^2-5x-14=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ x^2+5x-14=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2;\\ \left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=-2;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<2;\\ \left[\begin{array}{l}x=-7,\\ x=2;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=-7.\end{array}\right.$

Произведение корней исходного уравнения равно -49.

Ответ: –49.

B4. 1) Так как отрезки AB_1, B_1C и AC — диагонали равных квадратов, то треугольник AB_1C — равносторонний. С помощью формулы $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ найдем длину стороны треугольника: $AB_1=\sqrt{\frac{4\cdot 18\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}=6\sqrt{2}$.

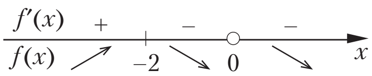


2) Площадь квадрата AA_1B_1B найдем по формуле $S=\frac{d^2}{2}$, где $d=AB_1=6\sqrt{2}$: $S_{AA_1B_1B}=\frac{(6\sqrt{2})^2}{2}=36$. Значит, площадь поверхности куба равна $6\cdot 36=216$.

Ответ: 216.

B5. $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

$f'(x)=-2x-\frac{16}{x^2}=-\frac{2(x^3+8)}{x^2}$.



Функция возрастает на промежутке $(-\infty;-2]$.
Функция имеет единственную критическую точку $x=-2$.
Тогда $a+b=1+1=2$.

Ответ: 2.

B6. Пусть v_1, v_2, v_3 км/ч — скорости движения пешком, на велосипеде и на мотоцикле соответственно, t ч — искомое время. Тогда $\begin{cases} \dfrac{3}{v_1}+\dfrac{4}{v_2}+\dfrac{2}{v_3}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{5}{v_1}+\dfrac{2}{v_2}+\dfrac{4}{v_3}=\dfrac{7}{6}, \\ \dfrac{6}{v_1}+\dfrac{22}{v_2}+\dfrac{2}{v_3}=t. \end{cases}$ Пусть $\dfrac{1}{v_1}=a$; $\dfrac{1}{v_2}=b$; $\dfrac{1}{v_3}=c$, тогда система принимает вид

$$\begin{cases} 3a+4b+2c=\dfrac{5}{6}, \\ 5a+2b+4c=\dfrac{7}{6}, & \Big|\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ 6a+22b+2c=t; & \Big|\cdot(-1) \end{cases} \quad \begin{cases} 3a+4b+2c=\dfrac{5}{6}, \\ -\dfrac{5}{2}a-b-2c=-\dfrac{7}{12}, \\ -6a-22b-2c=-t. \end{cases}$$

Сложим первое и второе; первое и третье уравнения системы и получим:

$$\begin{cases} 3a+4b+2c=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{2}a+3b=\dfrac{1}{4}, & \Big|\cdot(6) \\ -3a-18b=-t+\dfrac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3a+4b+2c=\dfrac{5}{6}, \\ 3a+18b=\dfrac{3}{2}, \\ -3a-18b=-t+\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Сложив второе и третье уравнение системы, получим $\begin{cases} 3a+4b+2c=\dfrac{5}{6}, \\ 3a+18b=\dfrac{3}{2}, \\ 0=-t+\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

То есть $t=\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{14}{6}$ ч, или 140 мин.

Ответ: 140.

ТЕСТ 14

Часть А

А1. Верным является равенство $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

Ответ: 3.

А2. На рисунке изображен график функции $y = \dfrac{2}{x}$.

Ответ: 4.

А3. 1) Так как площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, то $k^2 = \dfrac{S_1}{S_2}$; $k^2 = \dfrac{16}{25}$; $k = \dfrac{4}{5}$.

2) Периметры подобных треугольников относятся как коэффициент подобия, т. е.

$$\frac{P_1}{P_2} = k; \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{4}{5}; \quad \frac{12}{P_2} = \frac{4}{5}; \quad P_2 = 15.$$

Ответ: 5.

А4. Решим предложенные неравенства:

1) $x^2 \le 0$; $\quad x = 0$;

2) $x^2 \ge 0$; $\quad x \in (-\infty; +\infty)$;

3) $x^2 < 0$ — нет решений;

4) $x^2 > -16$; $\quad x \in (-\infty; +\infty)$;

5) $x^2 \le 49$; $\quad x \in [-7; 7]$.

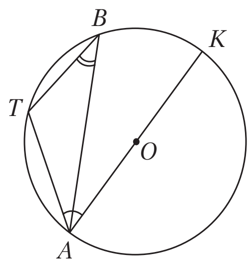
Ответ: 3.

А5. 1) $\cup TA = 2 \cdot \angle TAB = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$ (так как вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается).

2) Так как AK — диаметр, то $\cup BK = 180^\circ - \cup TA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

3) По теореме о вписанном угле $\angle BAK = \dfrac{1}{2} \cup BK = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

Ответ: 4.



А6. Найдем скорость второго поезда: $60{,}5 \cdot 0{,}8 = 48{,}4$ км/ч.
Найдем время, через которое поезда встретились: $96{,}8 : 48{,}4 = 2$ ч.
Найдем, какое расстояние до встречи прошел первый поезд: $60{,}5 \cdot 2 = 121$ км.
Найдем расстояние между станциями: $121 + 96{,}8 = 217{,}8$ км.

Ответ: 5.

А7. $4\sqrt{3\frac{1}{2}} - 0{,}5\sqrt{56} - 3\sqrt{1\frac{5}{9}} = 4\sqrt{\frac{7}{2}} - 0{,}5\sqrt{4 \cdot 14} - 3\sqrt{\frac{14}{9}} = 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} - 0{,}5 \cdot 2\sqrt{14} - 3 \cdot \frac{\sqrt{14}}{3} = 4\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{14} - \sqrt{14} =$

$= 4 \cdot \dfrac{\sqrt{14}}{2} - \sqrt{14} - \sqrt{14} = 2\sqrt{14} - \sqrt{14} - \sqrt{14} = 0.$

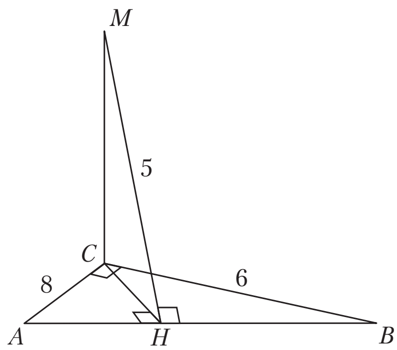
Ответ: 5.

А8. Так как $-1 \le f(x) \le 1$ и $-1 \le f(x+3) \le 1$, то $-2 \le 2f(x+3) \le 2$, тогда $-1 \le 2f(x+3) + 1 \le 3$. То есть множеством значений функции $y = 2f(x+3) + 1$ является промежуток $[-1; 3]$.

Ответ: 2.

А9. 1) Проведем CH — высоту треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах $MH \perp AB$, т. е. длина отрезка MH равна расстоянию от точки M до стороны AB, тогда $MH = 5$.

2) По теореме Пифагора гипотенуза треугольника ABC $AB = 10$. По формуле $h = \dfrac{ab}{c}$ найдем $CH = \dfrac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8$.



3) Так как отрезок CM — перпендикуляр к плоскости ABC, а прямая CP лежит в этой плоскости, то $MC \perp CH$ и треугольник CMH является прямоугольным. Тогда по теореме Пифагора:

$$MC = \sqrt{MH^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4,8^2} = \sqrt{(5-4,8)(5+4,8)} = \sqrt{0,2 \cdot 9,8} = \sqrt{0,2 \cdot 0,2 \cdot 49} = 0,2 \cdot 7 = 1,4.$$

Ответ: 4.

Часть В

В1. Найдем абсциссу точки B: $4 = 2x + 6$; $2x = -2$; $x = -1$.

Так как точка B имеет координаты $B(-1; 4)$, то точка D, симметричная точке B относительно оси ординат, имеет координаты $D(1; 4)$. Таким образом, абсцисса точки D равна 1.

Ответ: 1.

В2. Исходное уравнение имеет вид $\frac{a}{|a|} = -1$. Полученное равенство равносильно неравенству $a < 0$. Таким образом, уравнение $\frac{x^2 - 5x + 4}{|x^2 - 5x + 4|} = -1$ равносильно неравенству $x^2 - 5x + 4 < 0$. Решим полученное неравенство: $(x-1)(x-4) < 0$, $x \in (1; 4)$. Целыми корнями данного уравнения являются числа 2 и 3. Их сумма равна 5.

Ответ: 5.

В3. Уравнение $\sqrt{x-1} \cdot (-x^2 + x + 2) = 0$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0; \\ \begin{cases} x - 1 \ge 0, \\ -x^2 + x + 2 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ \begin{cases} x \ge 1, \\ x^2 - x - 2 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ \begin{cases} x \ge 1; \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Сумма корней уравнения равна 3.

Ответ: 3.

В4. 1) Найдем нули выражения $-x^2 + 36$: $-x^2 + 36 = 0$; $x^2 = 36$; $x = \pm 6$.

2) Решим систему $\begin{cases} -x^2 + 36 > 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-6)(x+6) < 0, \\ x > -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-6;\ 6), \\ x \in (-2; +\infty); \end{cases}$ $x \in (-2; 6)$.

3) Учитывая, что при $x = \pm 6$ функция определена, получим $D(y) = \{-6\} \cup (-2; 6]$. Тогда наименьшим целым числом, входящим в область определения функции, является число -6.

Ответ: -6.

В5. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 90$. Выделим квадрат суммы в левой части уравнения:

$$\left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}\right) - 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = 90; \quad \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = 90;$$

$$\left(\frac{x(x+1) + x(x-1)}{x^2 - 1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2 - 1} = 90; \quad \left(\frac{x^2 + x + x^2 - x}{x^2 - 1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{x^2 - 1} = 90; \quad \left(\frac{2x^2}{x^2 - 1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 90.$$

Пусть $\frac{2x^2}{x^2 - 1} = t$, тогда уравнение принимает вид $\frac{2x^2}{x^2-1}$. С помощью теоремы Виета получим

$$\left[\begin{array}{l} t = 10, \\ t = -9 \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 10, \\ \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -9; \end{array}\right. \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2 = 10x^2 - 10, \\ 2x^2 = -9x^2 + 9; \end{array}\right. \\ x \ne \pm 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 8x^2 = 10, \\ 11x^2 = 9; \end{array}\right. \\ x \ne \pm 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{5}{4}, \\ x^2 = \frac{9}{11}; \end{array}\right. \\ x \ne \pm 1; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{11}}. \end{array}\right.$$

Найдем произведение корней уравнения: $-\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right) = \frac{5 \cdot 9}{4 \cdot 11} = \frac{45}{44}$. Тогда $44 \cdot \frac{45}{44} = 45$.

Ответ: 45.

В6. 1) В плоскости SAC проведем OH параллельно SA. Тогда треугольник DBH — искомое сечение.

2) Из треугольника DBC по теореме Пифагора найдем длину отрезка DB: $DB = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$.

3) В прямоугольном треугольнике SAB $\angle SBA = 60°$, тогда

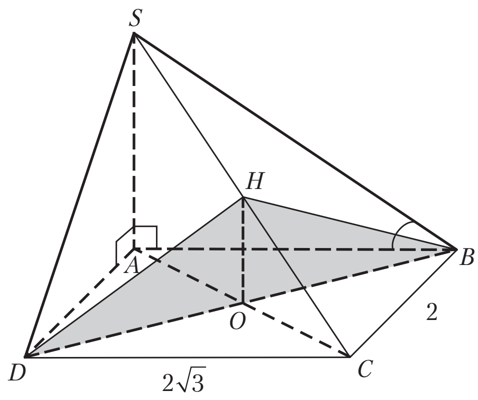
$$SA = AB \cdot \mathrm{tg}\angle SBA = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6.$$

4) Отрезок OH является средней линией треугольника SAC, т. е. $OH = \frac{1}{2}SA = 3$.

5) Найдем площадь полученного сечения:

$$S_{DHB} = \frac{1}{2}DB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

Ответ: 6.



ТЕСТ 15

Часть А

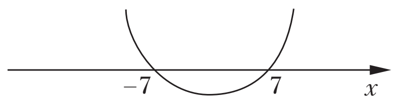
А1. Неверным является утверждение под номером 5, так как угол между касательной и хордой, проведенными через одну из точек окружности, равен *половине* дуге окружности, заключенной между ними.

Ответ: 5.

А2. $\frac{^{5/}41}{200}+\frac{^{4/}41}{250}=\frac{205}{1000}+\frac{164}{1000}=\frac{369}{1000}.$

Ответ: 3.

А3. $x^2\le 49;\quad x^2-49\le 0;\quad (x-7)(x+7)\le 0\ -7\le x\le 7.$



Ответ: 5.

А4. $\frac{\sin 3\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=\frac{-(\cos\alpha\cos 3\alpha-\sin 3\alpha\sin\alpha)}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=\frac{-\cos(\alpha+3\alpha)}{\cos(2\cdot 2\alpha)}=\frac{-\cos 4\alpha}{\cos 4\alpha}=-1.$

Ответ: 1.

А5. Корнями уравнения $f(x)=0$ являются абсциссы точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью абсцисс (нули функции). Так как предложенный график пересекает ось абсцисс в четырех точках, то уравнение имеет четыре корня.

Ответ: 4.

А6. Так как первая часть относится ко второй как 2 : 3, вторая к третьей как 3 : 5, а третья к четвертой — как 5 : 6, то первая, вторая, третья и четвертая части относятся как 2 : 3 : 5 : 6.

$2+3+5+6=16$ (долей).

$128:16=8$ — в одной доле.

$2\cdot 8=16$ — меньшая из частей.

Ответ: 3.

А7. На рисунке изображена графическая иллюстрация системы 2) $\begin{cases}y=-(x+1)^2+4,\\ y=-4.\end{cases}$

Ответ: 2.

А8. По условию задачи $b_1=240;\ b_n=15;\ q=0{,}5$. Воспользуемся формулой *n*-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ и решим уравнение: $15=240\cdot 0{,}5^{n-1};\ 0{,}5^{n-1}=\frac{1}{16};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^4;\ n-1=4;\ n=5.$

Ответ: 4.

А9. $\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{b^2-c^2-a^2-2ac}=\frac{a^2-(b^2+c^2+2bc)}{b^2-(c^2+a^2+2ac)}=\frac{a^2-(b+c)^2}{b^2-(c+a)^2}=\frac{(a-(b+c))(a+(b+c))}{(b-(c+a))(b+(c+a))}=\frac{(a-b-c)(a+b+c)}{(b-c-a)(b+c+a)}=\frac{a-b-c}{b-c-a}.$

Ответ: 2.

Часть В

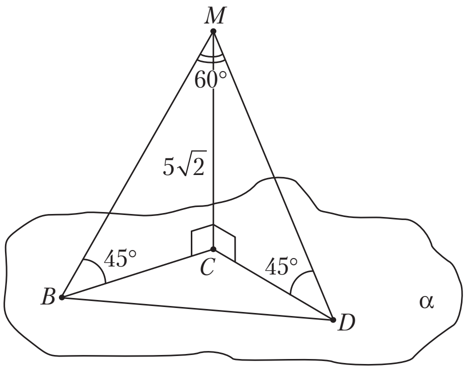
В1. $\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt2+\sqrt5}+\frac{7}{2\sqrt2+1}-(11-5\sqrt5)(2+\sqrt5)=\frac{(1-\sqrt{10})(\sqrt2-\sqrt5)}{(\sqrt2+\sqrt5)(\sqrt2-\sqrt5)}+\frac{7(2\sqrt2-1)}{(2\sqrt2+1)(2\sqrt2-1)}-(11-5\sqrt5)(2+\sqrt5)=$

$=\frac{\sqrt2-\sqrt5-\sqrt{20}+\sqrt{50}}{2-5}+\frac{7(2\sqrt2-1)}{8-1}-(22+11\sqrt5-10\sqrt5-25)=\frac{\sqrt2-\sqrt5-2\sqrt5+5\sqrt2}{-3}+\frac{7(2\sqrt2-1)}{7}-(\sqrt5-3)=$

$=\sqrt5-2\sqrt2+2\sqrt2-1-\sqrt5+3=2.$

Ответ: 2.

B2. 1) Найдем гипотенузы прямоугольных треугольников BCM и DCM: $BM = MD = \dfrac{MC}{\cos 45^\circ}$; $BM = MD = \dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10$.



2) Так как треугольник BDM — равносторонний ($BM = MD$; $\angle BMD = 60^\circ$), то $BD = BM = MD = 10$.

Ответ: 10.

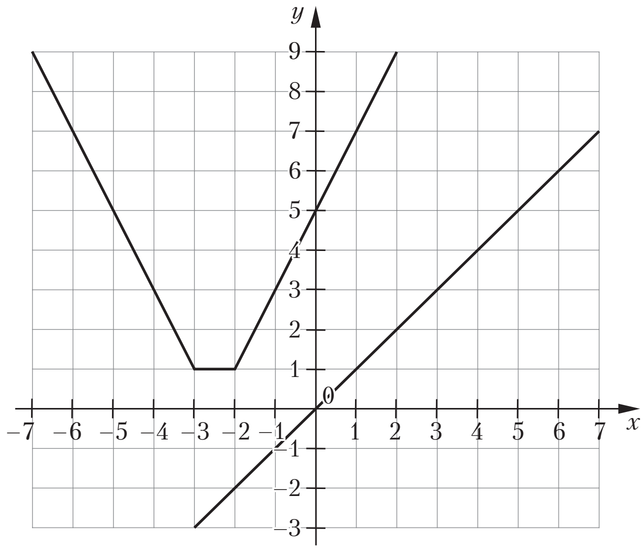
B3. Построим графики функций $y = |x+2| + |x+3|$ и $y = x$.

$y = |x+2| + |x+3|$

x	-5	-3	-2	1
y	5	1	1	3

$y = x$

x	0	3
y	0	3



Так как графики функций не пересекаются, то уравнение не имеет корней.

Ответ: 0.

B4. Неравенство вида $|f(x)| \geq |g(x)|$ равносильно неравенству $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$.

То есть неравенство $\left|x^2 - 5|x| + 4\right| \geq \left|2x^2 - 3|x| + 1\right|$ равносильно неравенству

$$\left(x^2 - 5|x| + 4\right)^2 \geq \left(2x^2 - 3|x| + 1\right)^2; \ \left(x^2 - 5|x| + 4\right)^2 - \left(2x^2 - 3|x| + 1\right)^2 \geq 0;$$

$$\left(x^2 - 5|x| + 4 - \left(2x^2 - 3|x| + 1\right)\right)\left(x^2 - 5|x| + 4 + \left(2x^2 - 3|x| + 1\right)\right) \geq 0;$$

$$\left(x^2 - 5|x| + 4 - 2x^2 + 3|x| - 1\right)\left(x^2 - 5|x| + 4 + 2x^2 - 3|x| + 1\right) \geq 0;$$

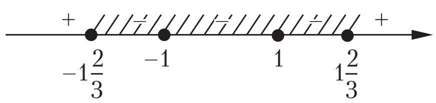
$$\left(-x^2 - 2|x| + 3\right)\left(3x^2 - 8|x| + 5\right) \geq 0; \ \left(x^2 + 2|x| - 3\right)\left(3x^2 - 8|x| + 5\right) \leq 0.$$

Так как $x^2 = |x|^2$, то неравенство принимает вид $\left(|x|^2 + 2|x| - 3\right)\left(3|x|^2 - 8|x| + 5\right) \leq 0$.

Разложим на множители квадратные трехчлены в левой части неравенства:

$$\left(|x| + 3\right)\left(|x| - 1\right)\left(|x| - 1\right)\left(|x| - 1\frac{2}{3}\right) \leq 0; \ \left(|x| + 3\right)\left(|x| - 1\right)^2\left(|x| - 1\frac{2}{3}\right) \leq 0.$$

Для решения полученного неравенства воспользуемся методом интервалов:



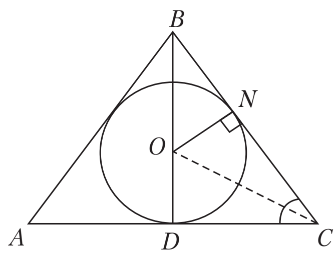
$x \in \left[-1\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}\right]$.

Таким образом, наименьшим целым решением данного неравенства является число -1.

Ответ: -1.

B5. 1) Так как радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник, составляет $\frac{2}{9}$ высоты, проведенной к основанию треугольника, то $\dfrac{OD}{BD} = \dfrac{2}{9}$. Тогда

$OD = 2x$, $BD = 9x$, $BO = BD - OD = 9x - 2x = 7x$.



2) Так как центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника, отрезок CO является биссектрисой треугольника BDC.

По теореме о биссектрисе $\frac{BC}{DC}=\frac{BO}{DO}=\frac{7}{2}$, тогда $BC=7y$; $DC=2y$. То есть $AC=2\cdot DC=4y$.
Так как периметр треугольника $P_{ABC}=81$, то $7y+7y+4y=81$; $18y=81$; $y=4{,}5$.
3) Найдем длину основания AC: $AC=4y=4\cdot 4{,}5=18$.

Ответ: 18.

В6. Рассмотрим уравнение $x^3+2\sqrt{17}x^2+17x+\sqrt{17}+1=0$ как квадратное относительно $\sqrt{17}$ и запишем его в виде $x\left(\sqrt{17}\right)^2+\sqrt{17}\left(2x^2+1\right)+x^3+1=0$. Тогда

$$D=\left(2x^2+1\right)^2-4\cdot x\cdot\left(x^3+1\right)=4x^4+4x^2+1-4x^4-4x=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$$

и $\left[\begin{array}{l}\sqrt{17}=\dfrac{-\left(2x^2+1\right)+(2x-1)}{2x},\\ \sqrt{17}=\dfrac{-\left(2x^2+1\right)-(2x-1)}{2x};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sqrt{17}=\dfrac{-x^2+x-1}{x},\\ \sqrt{17}=\dfrac{-x^2-x}{x};\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sqrt{17}x=-x^2+x-1,\\ \sqrt{17}x=-x^2-x;\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+\sqrt{17}x-x+1=0,\\ x^2+\sqrt{17}x+x=0;\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+\left(\sqrt{17}-1\right)x+1=0,\\ x\left(x+\sqrt{17}+1\right)=0;\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x^2+\left(\sqrt{17}-1\right)x+1=0,\\ x=0,\\ x=-\sqrt{17}-1;\end{array}\right.\\ x\neq 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x^2+\left(\sqrt{17}-1\right)x+1=0,\\ x=-\sqrt{17}-1.\end{array}\right.$$

Сумма корней первого уравнения совокупности равна $-\left(\sqrt{17}-1\right)$, тогда сумма корней исходного уравнения равна $-\left(\sqrt{17}-1\right)+\left(-\sqrt{17}-1\right)=-2\sqrt{17}$. Найдем значение искомого выражения: $\sqrt{17}\cdot\left(-2\sqrt{17}\right)=-34$.

Ответ: –34.

ТЕСТ 16

Часть А

A1. Так как прямая AB_1 лежит в плоскости грани AA_1B_1B, а прямая A_1C пересекает плоскость грани в точке A_1, не лежащей на прямой AB_1, то прямые A_1C и AB_1 являются скрещивающимися.

Ответ: 2.

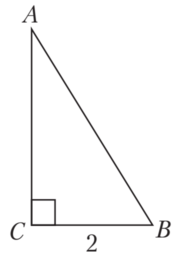
A2. Данная функция убывает на промежутке $(1; 4)$.

Ответ: 3.

A3. Неравенство $\sqrt[6]{1-3x}<2$ равносильно системе неравенств $\begin{cases}1-3x\ge 0,\\ 1-3x<64;\end{cases}$ $\begin{cases}-3x\ge -1,\\ -3x<63;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le \dfrac{1}{3},\\ x>-21;\end{cases}$ $x\in\left(-21; \dfrac{1}{3}\right]$.

Ответ: 5.

A4. Площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению его катетов, т. е. $S_{ABC}=\dfrac{AC\cdot BC}{2}$, тогда $AC=\dfrac{2\cdot 4\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$.



По теореме Пифагора $AB=\sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2+2^2}=6$.

По определению синуса $\sin\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 4.

A5. При $a=2\sqrt{5}$ найдем значение выражения $\dfrac{a^3}{4}=\dfrac{\left(2\sqrt{5}\right)^3}{4}=\dfrac{8\cdot 5\sqrt{5}}{4}=10\sqrt{5}$.

Ответ: 2.

A6. $$\frac{\sin 40^\circ-\cos 40^\circ}{\sqrt{2}\cos 85^\circ}=\frac{\sin 40^\circ-\sin 50^\circ}{\sqrt{2}\cos 85^\circ}=\frac{2\sin\dfrac{40^\circ-50^\circ}{2}\cos\dfrac{40^\circ+50^\circ}{2}}{\sqrt{2}\cos 85^\circ}=\frac{2\sin(-5^\circ)\cos 45^\circ}{\sqrt{2}\cos 85^\circ}=\frac{-2\sin 5^\circ\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}\sin 5^\circ}=-1.$$

Ответ: 1.

A7. Пусть d — диагональ куба, тогда $a=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ — ребро куба.

$V=a^3=\left(\dfrac{d}{\sqrt{3}}\right)^3=\dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$. Так как $d=\sqrt[6]{3}$, то $V=\dfrac{\left(\sqrt[6]{3}\right)^3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 4.

A8. Дискриминант квадратного уравнения $2x^2-\left(\sqrt{3}+5\right)x-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=0$ положителен.

По теореме Виета $x_1+x_2=\dfrac{\sqrt{3}+5}{2}$, а $x_1x_2=-\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$. Тогда

$$x_1+x_1x_2+x_2=\frac{\sqrt{3}+5}{2}-\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+5}{2}-\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}+5}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=2.$$

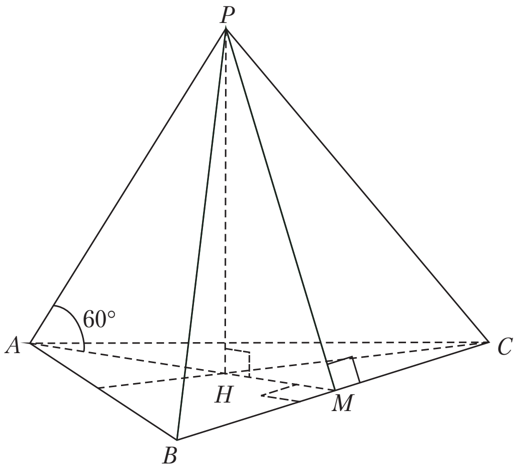
Ответ: 2.

A9. Рассмотрим треугольник ABC — равносторонний.

Воспользуемся формулой, связывающей площадь равностороннего треугольника и длину его стороны $\left(S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$. Тогда $16\sqrt{3}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a=8$.

Воспользуемся формулой, связывающей длину высоты равностороннего треугольника с длиной его стороны $\left(h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Тогда $AM=4\sqrt{3}$.

Так как точка H является центром треугольника ABC, то $AH:HM = 2:1$. Тогда $AH = \frac{2AM}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, а $MH = \frac{AM}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.



1) Рассмотрим треугольник APH — прямоугольный $(\angle PHA = 90°)$:

$$PH = AH \cdot \operatorname{tg}\angle PAH = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 8.$$

2) Угол PHM является углом наклона боковой грани пирамиды к ее основанию.

Из треугольника PHM получим:

$$\operatorname{tg}\angle PMH = \frac{PH}{HM};\quad \operatorname{tg}\angle PMH = 8 \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3};\quad \angle PMH = \operatorname{arctg} 2\sqrt{3}.$$

3) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды найдем по формуле $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot h_a$, где $h_a = PM = \frac{4\sqrt{39}}{3}$. Тогда $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{4\sqrt{39}}{3} = 16\sqrt{39}$.

4) Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора найдем

$$PM^2 = PH^2 + HM^2,\quad PM = \sqrt{8^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{39}}{3}.$$

5) Объем пирамиды найдем по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$, тогда $V = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 8 = \frac{128\sqrt{3}}{3} \neq 128\sqrt{3}$.

Ответ: 5.

Часть В

В1. $\frac{12\cos 48° - x\cos 48°}{\cos 20°\cos 28° - \sin 20°\sin 28°} = \sin(-90°)$.

Воспользуемся формулой косинуса суммы $\cos 20°\cos 28° - \sin 20°\sin 28° = \cos(20° + 28°) = \cos 48°$. Учитывая, что $\sin(-90°) = -1$, получим $\frac{12\cos 48° - x\cos 48°}{\cos 48°} = -1$ или

$$12\cos 48° - x\cos 48° = -\cos 48°;\quad -x\cos 48° = -13\cos 48°;\ x = 13.$$

Ответ: 13.

В2. <u>I способ.</u>

Так как $\text{НОД}(68; x) = 4$, то число x кратно четырем, т. е. $x = 4n$; $n \in \boldsymbol{N}$. Разложим числа 68 и 1292 на простые множители: $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$; $1292 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 19$. Поскольку $\text{НОК}(68; x) = 1292$, то среди простых множителей, на которые раскладывается число x, должно быть число 19, т. е. x кратно 19. Так как x кратно четырем и 19, то $x = 76$.

<u>II способ.</u>

Воспользуемся равенством $\text{НОК}(a; b) \cdot \text{НОД}(a; b) = ab$ и решим уравнение $4 \cdot 1292 = 68 \cdot x$; $x = 76$.

Ответ: 76.

В3. Функция $y = f(x)$ на промежутке, длина которого равна периоду, имеет четыре нуля. Так как промежуток $(-11; 13]$ содержит три периода, то на данном промежутке функция имеет 12 нулей.

Ответ: 12.

В4. $x^2 - 8x - \frac{3x - 12}{|x - 4|} + 18 \le 0$.

Перейдем к равносильной совокупности: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 8x - 3 + 18 \le 0, \\ x > 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 3 + 18 \le 0, \\ x < 4; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 8x + 15 \le 0, \\ x > 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 21 \le 0, \\ x < 4; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-3)(x-5) \le 0, \\ x > 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 21 \le 0, \\ x < 4. \end{cases} \end{array}\right.$

Так как дискриминант квадратного трехчлена $x^2-8x+21$ отрицательный, неравенство $x^2-8x+21\le 0$ не имеет решений, т. е. вторая система не имеет решения.

Решим первую систему совокупности $\begin{cases}(x-3)(x-5)\le 0,\\ x>4;\end{cases}$ $\begin{cases}3\le x\le 5,\\ x>4;\end{cases}$ $x\in(4;\,5]$.

Наибольшим целым решением неравенства является число 5.

Ответ: 5.

B5. $\begin{cases}x^2-4x-2y-1=0,\\ y^2-2x+6y+14=0.\end{cases}$ Сложим первое и второе уравнения системы и получим

$$x^2-4x-2y-1+y^2-2x+6y+14=0;\ x^2-6x+y^2+4y+13=0;\ x^2-6x+9+y^2+4y+4=0;$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=0.$$

Последнее равенство возможно только при $x=3$ и $y=-2$.

С помощью проверки убедимся, что пара чисел $(3;-2)$ является решением данной системы уравнений. Таким образом, исходная система имеет единственное решение $(3;-2)$ и значение искомого выражения равно $3+(-2)=1$.

Ответ: 1.

B6. Пусть на участке растет x деревьев, тогда среди них $(0{,}96x)$ сосен и $(0{,}04x)$ других деревьев. После вырубки 150 сосен на участке осталось $(0{,}96x-150)$ сосен и общее количество деревьев стало $(x-150)$. Так как процентное содержание сосен стало 95 %, то составим и решим уравнение: $(0{,}96x-150)=0{,}95(x-150)$; $0{,}96x-150=0{,}95x-142{,}5$; $0{,}01x=7{,}5$; $x=750$ — деревьев было на участке.

$750-150=600$ — стало деревьев на участке;

$0{,}95\cdot 600=570$ — сосен осталось на участке.

Ответ: 570.

ТЕСТ 17

Часть A

A1. Натуральные числа называются взаимно простыми, если единица является их единственным общим делителем. Взаимно простыми являются числа 25 и 32.

Ответ: 4.

A2. 1) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}\neq-\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\pi}{6}\neq\dfrac{\pi}{3}$;

3) $\arccos 0=1\neq 0$;

4) $\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}\neq\dfrac{3\pi}{2}$;

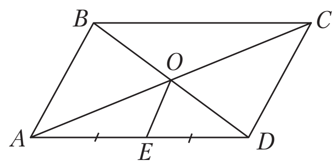
5) $\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 3.

A3. Рассмотрим треугольник OEA. Так как медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника, то $S_{AOD}=2S_{EOD}=2\cdot 3,25=6,5$.

Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника, значит, $S_{ABCD}=4S_{AOD}=4\cdot 6,5=26$.

Ответ: 1.



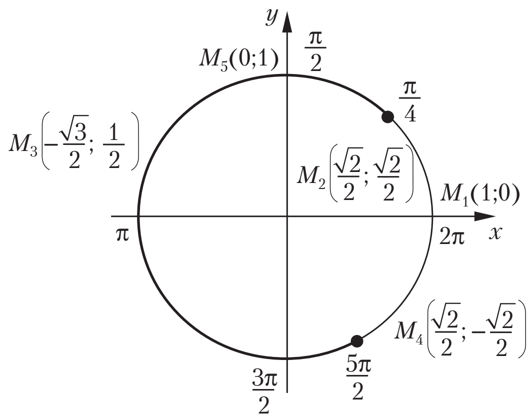
A4. $\dfrac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2\cdot 5^n}=\dfrac{5^n\cdot 5-5^n\cdot 5^{-1}}{2\cdot 5^n}=\dfrac{5^n\cdot\left(5-5^{-1}\right)}{2\cdot 5^n}=\dfrac{5-5^{-1}}{2}=\dfrac{5\frac{4}{5}}{2}=\dfrac{12}{5}=2\dfrac{2}{5}$.

Ответ: 2.

A5. Дуге с концами в точках $P_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $P_2\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ принадлежат точки

$M_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $M_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; $M_5(0;1)$.

Ответ: 4.



A6. $\left(\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{5}\right):\sqrt[3]{5}=\dfrac{\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}+\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{125}+1=5+1=6$.

Ответ: 5.

A7. Найдем координаты вершины параболы $y=x^2-2x-8$.

$$y=x^2-2x+1-9;\quad y=(x-1)^2-9.$$

Вершиной параболы является точка с координатами $(1;-9)$.

Так как искомая прямая параллельна оси абсцисс, то $y=-9$.

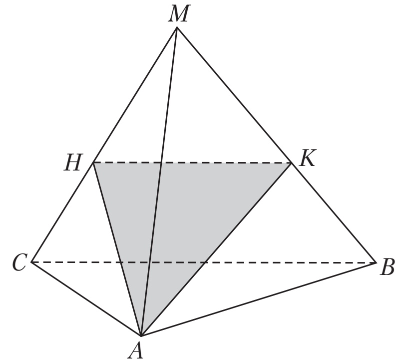
Ответ: 3.

A8. Так как HK — средняя линия треугольника CMB, то $HK=\dfrac{1}{2}BC=3$.

Отрезки AH и AK являются медианами (а значит, и высотами) правильных треугольников ACM и AMB соответственно. Воспользуемся формулой $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и получим $AH=AK=3\sqrt{3}$.

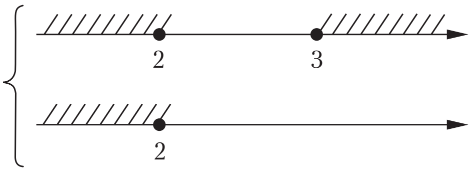
Тогда $P_{AHK}=3+6\sqrt{3}$.

Ответ: 4.



A9. Область определения функции $y=\sqrt[4]{x^2-5x+6}+\dfrac{\sqrt[5]{x+3}}{\sqrt{-x+2}}$ совпадает с множеством решения системы неравенств

$\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0, \\ -x+2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x-3)\geq 0, \\ x<2. \end{cases}$



$x\in(-\infty;\ 2).$

Ответ: 4.

Часть B

B1. $\dfrac{25{,}2^2-24{,}8^2}{\frac{12}{5}\cdot 0{,}125\cdot x}=\dfrac{-\frac{10}{3}-2}{-2};\ \dfrac{(25{,}2-24{,}8)(25{,}2+24{,}8)}{\frac{12}{5}\cdot 0{,}125\cdot x}=\dfrac{\frac{10}{3}+2}{2};\ \dfrac{0{,}4\cdot 50}{\frac{12}{5}\cdot 0{,}125\cdot x}=\dfrac{\frac{10}{3}+2}{2};\ \dfrac{20}{12\cdot 0{,}025\cdot x}=\dfrac{16}{6};$

$\dfrac{5}{12\cdot 0{,}025\cdot x}=\dfrac{4}{6};\ \dfrac{1}{2\cdot 0{,}005\cdot x}=4;\ x=\dfrac{1}{8\cdot 0{,}005};\ x=\dfrac{1000}{8\cdot 5};\ x=25.$

Ответ: 25.

B2. $\dfrac{1}{\left(\sqrt{\frac{2-x}{x}}-\frac{x+1}{2x}\right)^2}\geq 0;\ \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}-\dfrac{x+1}{2x}\neq 0;\ \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}\neq\dfrac{x+1}{2x};\ \begin{cases} \dfrac{2-x}{x}\neq\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^2, \\ \dfrac{2-x}{x}\geq 0; \end{cases}\ \begin{cases} 5x^2-6x+1\neq 0, \\ x\in(0;\ 2]; \end{cases}\ \begin{cases} x\neq 1, \\ x\neq\dfrac{1}{5}, \\ x\in(0;\ 2]; \end{cases}$

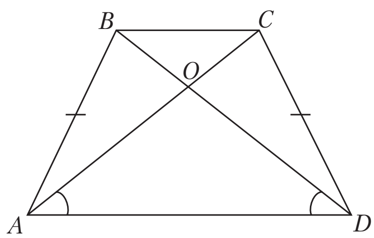
$x\in\left(0;\ \dfrac{1}{5}\right)\cup\left(\dfrac{1}{5};\ 1\right)\cup(1;\ 2]$. Таким образом, единственным целым решением неравенства является число 2.

Ответ: 1.

B3. В треугольнике AOD $\angle AOD=180°-(15°+15°)=150°$. С помощью формулы площади четырехугольника $S=\dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\angle AOD$ найдем:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{7}\right)^2\cdot\sin 150°=7.$$

Ответ: 7.



B4. $t_1=\dfrac{S}{70};\ t_2=\dfrac{S}{80};\ t_1-t_2=\dfrac{S}{70}-\dfrac{S}{80}=\dfrac{S}{560}.\ \dfrac{\frac{S}{560}}{\frac{S}{70}}\cdot 100\ \%=\dfrac{1}{8}\cdot 100\ \%=12{,}5\ \%.\ P=12{,}5\ \%;\quad 4P=50.$

Ответ: 50.

B5. 1) Проведем AH — высоту равностороннего треугольника ABC и HM — высоту параллелограмма $BCDE$.

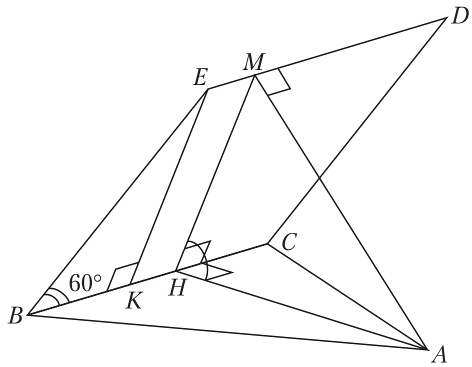
Так как $BC\perp AH$ и $BC\perp MH$, то $BC\perp(MAH)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Поскольку $BCDE$ — параллелограмм, то $ED\parallel BC$ и $BC\perp(MAH)$, значит, $ED\perp(MAH)$.

Так как $ED\perp(MAH)$ и $AM\subset(AMH)$, то $AM\perp ED$, значит, отрезок AM является расстоянием от точки A до прямой ED.

2) Так как сторона равностороннего треугольника ABC равна 8, то $AH=4\sqrt{3}$.

3) Известно, что в прямоугольном треугольнике BEK $\angle EBK=60°$ и $BE=CD=10$, тогда $EK=5\sqrt{3}$.

4) $MH=EK=5\sqrt{3}$ (как равные высоты параллелограмма).



5) В треугольнике MAH $MH=5\sqrt{3}$; $AH=4\sqrt{3}$; $AM=\sqrt{33}$, поэтому по теореме косинусов найдем косинус угла AHM: $\cos\angle MHA=\dfrac{MH^2+AH^2-AM^2}{2\cdot MH\cdot AH}$; $\cos\angle MHA=\dfrac{\left(5\sqrt{3}\right)^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{33}^2}{2\cdot 5\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}=\dfrac{75+48-33}{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\dfrac{3}{4}$.

$x=\dfrac{3}{4}$, тогда $8x=8\cdot\dfrac{3}{4}=6$.

Ответ: 6.

B6. $\begin{cases}5x^2-4xy+3y^2+18x-16y+25=0,\\10x^2-7xy+y^2+34x-11y+28=0.\end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x:

$$5x^2-4xy+3y^2+18x-16y+25=0;\quad 5x^2-(4y-18)x+3y^2-16y+25=0;$$

$$D=(4y-18)^2-4\cdot5\cdot\left(3y^2-16y+25\right)=16y^2-144y+324-60y^2+320y-500=-44y^2+176y-176=$$

$$=-44\left(y^2-4y+4\right)=-44(y-2)^2.$$

Уравнение имеет решение, если $-44(y-2)^2\ge 0$, т. е. $y=2$.

Тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}y=2,\\10x^2-7xy+y^2+34x-11y+28=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=2,\\10x^2+20x+10=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=2,\\(x+1)^2=0;\end{cases}\quad\begin{cases}y=2,\\x=-1.\end{cases}$$

Найдем значение искомого выражения: $x_0y_0=-1\cdot2=-2$.

Ответ: -2.

ТЕСТ 18

Часть А

А1. Натуральные числа называются взаимно простыми, если у них нет других общих делителей, кроме единицы. Числа 25 и 8 — взаимно простые.

Ответ: 4.

А2. Верным является равенство под номером пять, так как $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{8\cdot 2}-\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}$.

Ответ: 5.

А3. $$\frac{7\pi}{\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{7\pi}{-\arcsin\frac{1}{2}+\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{7\pi}{-\frac{\pi}{6}+\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{7\pi}{\frac{-2\pi+12\pi-3\pi}{12}}=\frac{12\cdot 7\pi}{7\pi}=12.$$

Ответ: 4.

А4. Найдем область определения каждой из предложенных функций:

1) $y=\sqrt{x^2+x-6}$; $x^2+x-6\ge 0$; $(x+3)(x-2)\ge 0$; $x\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$; $D(y)=(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$;

2) $y=\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$; $\frac{x+3}{x-2}\ge 0$; $x\in(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$; $D(y)=(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$;

3) $y=\sqrt[3]{x^2+x-6}$; $x\in(-\infty;+\infty)$; $D(y)=(-\infty;+\infty)$;

4) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2+x-6}}$; $x^2+x-6>0$; $(x+3)(x-2)>0$; $x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$; $D(y)=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$;

5) $y=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}$; $\begin{cases}x\ne -3,\\ x\ne 2;\end{cases}$ $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;2)\cup(2;+\infty)$.

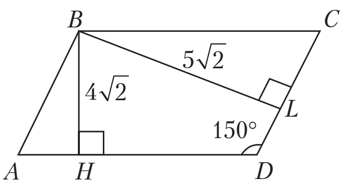
Ответ: 4.

А5. 1) По свойству параллелограмма $\angle A+\angle D=180^\circ$; $\angle A=30^\circ$.

2) В прямоугольном треугольнике ABH катет BH лежит против угла в 30°, тогда $AB=2\cdot BH=8\sqrt{2}$.

3) $CD=AB=8\sqrt{2}$, тогда $S_{ABCD}=CD\cdot BL$; $S_{ABCD}=8\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=80$.

Ответ: 1.



А6. Пусть $a_1=217$, тогда $a_{12}=305$. Поскольку $a_{12}=a_1+11d$, то

$$d=\frac{a_{12}-a_1}{11}=\frac{305-217}{11}=8.$$

По формуле $a_5=a_1+4d$ найдем: $a_5=217+4\cdot 8=249$.

Ответ: 3.

А7. $$\frac{a^{-6}+a^{-4}+a^{-2}}{a^2+a^4+a^6}=\frac{a^{-6}\left(1+a^2+a^4\right)}{a^2\left(1+a^2+a^4\right)}=\frac{a^{-6}}{a^2}=a^{-8}.$$

Ответ: 2.

А8. $\frac{x^4-625}{25-x^2}=-(8x+90)$; $\frac{\left(x^2-25\right)\left(x^2+25\right)}{25-x^2}=-(8x+90)$; $\begin{cases}-\left(x^2+25\right)=-(8x+90),\\ x\ne\pm 5;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-8x-65=0,\\ x\ne\pm 5;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=13,\\ x=-5;\end{array}\right.\\ x\ne\pm 5;\end{cases}$ $x=13$.

Ответ: 3.

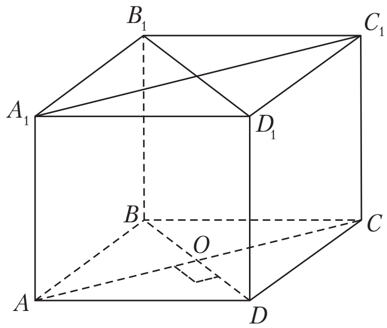
А9. Прямоугольники AA_1C_1C и BB_1D_1D — диагональные сечения параллелепипеда. Тогда $S_{AA_1C_1C}=AC\cdot AA_1=AC\cdot h=3$ и $S_{BB_1D_1D}=BD\cdot DD_1=BD\cdot h=6$. То есть $AC=\frac{3}{h}$; $BD=\frac{6}{h}$.

Поскольку площадь ромба равна полупроизведению его диагоналей, то $S_{ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD}{2}=\dfrac{3\cdot 6}{2\cdot h^2}=\dfrac{9}{h^2}$.

По условию $S_{ABCD}=1$, т. е. $\dfrac{9}{h^2}=1$; $h=3$.

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\cdot h=3$.

Ответ: 5.



Часть В

B1. $64^{\frac{1}{2}}\cdot\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{324}+\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[5]{-27}}{4^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-0,4}}=8\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 18+\dfrac{4\sqrt[3]{4}\cdot\left(-\sqrt[5]{3^3}\right)}{4^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-0,4}}=8\cdot\left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 18+\dfrac{4\cdot\left(-3^{0,6}\right)}{3^{-0,4}}=$

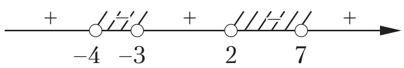
$=8\cdot\dfrac{4}{9}\cdot 18-4\cdot 3^{0,6-(-0,4)}=8\cdot 4\cdot 2-4\cdot 3=52.$

Ответ: 52.

B2. Найдем нули выражения $(|x+1|-3)(|x-2|-5)$.

$$(|x+1|-3)(|x-2|-5)=0;\quad \left[\begin{array}{l}|x+1|-3=0,\\ |x-2|-5=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}|x+1|=3,\\ |x-2|=5;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x+1=3,\\ x+1=-3,\\ x-2=5,\\ x-2=-5;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-4,\\ x=7,\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Для решения неравенства $(|x+1|-3)(|x-2|-5)<0$ воспользуемся методом интервалов:

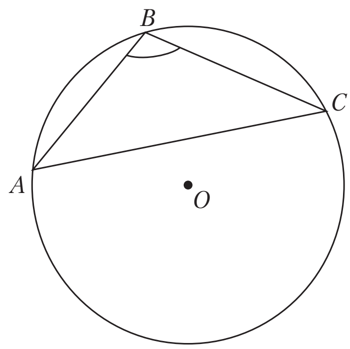


$x\in(-4;-3)\cup(2;7)$.

Сумма целых решений данного неравенства равна $3+4+5+6=18$.

Ответ: 18.

B3. 1) Найдем радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC: $2\pi R=20\pi$; $R=10$.



2) По теореме синусов найдем синус угла B: $\sin\angle B=\dfrac{AC}{2R}$; $\sin\angle B=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$.

3) Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим:

$$\cos^2\angle B=1-\sin^2\angle B;\ \cos\angle B=\pm\frac{4}{5}.$$

Так как треугольник ABC — тупоугольный, то $\cos\angle B=-\dfrac{4}{5}$.

4) По теореме косинусов $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$. Пусть $AB=BC=a$, тогда $12^2=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)$; $a^2=40$.

5) $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle B=\dfrac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin\angle B=\dfrac{1}{2}\cdot 40\cdot\dfrac{3}{5}=12.$

Ответ: 12.

B4. $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}}=0;\quad \begin{cases}1+\cos x=0,\\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\cos x=-1,\\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\neq 0.\end{cases}$

Решим первое уравнение системы: $\cos x=-1$; $x=\pi+2\pi n$; $n\in\boldsymbol{N}$.
Промежутку $[0;9\pi]$ принадлежат корни π; 3π; 5π; 7π; 9π.

При $x=\pi$ $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\neq 0$.

При $x=3\pi$ $\quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{3}=\operatorname{tg}\pi=0$.

При $x=5\pi$ $\quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\neq 0$.

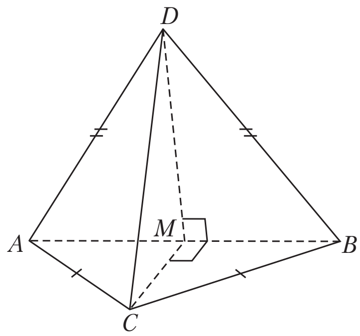
При $x=7\pi$ $\quad \operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}\neq 0$.

При $x=9\pi$ $\quad \operatorname{tg}\frac{9\pi}{3}=\operatorname{tg}3\pi=0$.

Таким образом, три корня уравнения $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}=0$ принадлежат промежутку $[0;\,9\pi]$.

Ответ: 3.

B5. 1) Пусть M — середина стороны AB. Так как треугольник ABC — равнобедренный и CM — медиана, проведенная к основанию, то CM — высота. Аналогично доказывается, что DM — высота треугольника ADB.



2) $AB\perp CM$, $AB\perp DM$, $\{CM;\,DM\}\subset(DCM)$, тогда $AB\perp(CMD)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

3) $AB\perp(CMD)$; $\quad DC\subset(CMD)$, тогда $AB\perp CD$, т. е. угол между ребрами AB и CD равен $90°$.

Ответ: 90.

B6. Пусть v — скорость автомобиля по грунтовой дороге, тогда $1{,}125v$ — скорость автомобиля по шоссе.

Пусть t — время движения автомобиля по шоссе, тогда $0{,}9t$ — время движения автомобиля по грунтовой дороге.

$s_1=1{,}125v\cdot t$ — путь, который прошел автомобиль по шоссе.

$s_2=v\cdot 0{,}9t$ — путь, который прошел автомобиль по грунтовой дороге.

Найдем, на сколько процентов больший путь автомобиль проехал по шоссе, чем по грунтовой дороге:

$$\frac{s_1-s_2}{s_2}\cdot 100\ \%=\frac{1{,}125v\cdot t-v\cdot 0{,}9t}{v\cdot 0{,}9t}\cdot 100\ \%=\frac{0{,}225v\cdot t}{0{,}9v\cdot t}\cdot 100\ \%=25\ \%.$$

Ответ: 25.

ТЕСТ 19

Часть А

А1. Верным является равенство $(a-2b)^2=(2b-a)^2$.

Ответ: 4.

А2. $ET\cap(PBC)=Q$.

Ответ: 4.

А3. Нулями функции, изображенной на рисунке, являются числа -2; 1 и 3,5. Поэтому на рисунке не могут быть изображены графики первой и пятой функций.

График функции, изображенной на рисунке, пересекает ось ординат в точке $(0;\,15)$.

Для второй, третьей и четвертой функций проверим выполнение условия $f(0)=15$.

$f(0)=2\cdot2\cdot1\cdot(-3{,}5)<0$; $f(0)=2\cdot2\cdot(-1)\cdot(-3{,}5)=15$; $f(0)=2\cdot(-1)\cdot(-3{,}5)=7\neq15$.

Таким образом, на рисунке изображен график третьей функции.

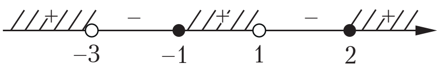
Ответ: 3.

А4. С помощью формул приведения преобразуем данное выражение:

$$\cos(\pi-x)+\sin(1{,}5\pi+x)-2\cos(2\pi-x)=-\cos x-\cos x-2\cos x=-4\cos x.$$

Ответ: 4.

А5. $\dfrac{7x+1}{x^2+4x+3}\le1$; $\dfrac{7x+1}{x^2+4x+3}-1\le0$; $\dfrac{7x+1-x^2-4x-3}{x^2+4x+3}\le0$; $\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2+4x+3}\le0$; $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+4x+3}\ge0$; $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+3)}\ge0$;



$x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1]\cup[2;+\infty)$.

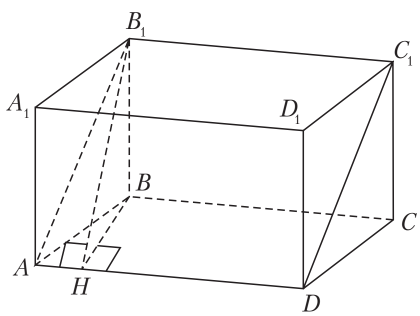
Ответ: 1.

А6. $\dfrac{7\sqrt{30}}{3\sqrt{10}-10\sqrt3}+\sqrt3+\sqrt{10}=\dfrac{7\sqrt{30}}{\sqrt{30}\left(\sqrt3-\sqrt{10}\right)}+\sqrt3+\sqrt{10}=\dfrac{7}{\sqrt3-\sqrt{10}}+\sqrt3+\sqrt{10}=$

$=\dfrac{7\left(\sqrt3+\sqrt{10}\right)}{\left(\sqrt3-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt3+\sqrt{10}\right)}+\sqrt3+\sqrt{10}=\dfrac{7\left(\sqrt3+\sqrt{10}\right)}{-7}+\sqrt3+\sqrt{10}=-\left(\sqrt3+\sqrt{10}\right)+\sqrt3+\sqrt{10}=0.$

Ответ: 2.

А7. Проведем BH — высоту параллелограмма $ABCD$. Тогда угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы равен углу B_1HB и равен 15°.



Так как $S_{B_1ADC_1}=AD\cdot B_1H$ и $S_{B_1ADC_1}=2\sqrt3$; $AD=1$, то $B_1H=2\sqrt3$.

Из прямоугольного треугольника B_1HB найдем, что

$B_1B=B_1H\cdot\sin\angle B_1HB=2\sqrt3\sin15^\circ$ и $BH=B_1H\cdot\cos\angle B_1HB=2\sqrt3\cos15^\circ$.

Тогда

$$V=S_{ABCD}\cdot BB_1=AD\cdot BH\cdot BB_1=1\cdot2\sqrt3\cos15^\circ\cdot2\sqrt3\sin15^\circ=$$
$$=12\cos15^\circ\cdot\sin15^\circ=6\sin30^\circ=3.$$

Ответ: 3.

А8. $\sqrt[5]{128y^2}+\sqrt[5]{64y}=24$; $\sqrt[5]{32\cdot4y^2}+\sqrt[5]{32\cdot2y}=24$; $2\sqrt[5]{4y^2}+2\sqrt[5]{2y}=24$; $\sqrt[5]{4y^2}+\sqrt[5]{2y}=12$. Пусть

$$\sqrt[5]{128y^2}+\sqrt[5]{64y}=24,$$

тогда уравнение принимает вид $t^2+t-12=0$; $\left[\begin{array}{l}t=-4,\\ t=3.\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}\sqrt[5]{2y}=-4,\\ \sqrt[5]{2y}=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2y=-4^5,\\ 2y=3^5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}y=-2^9,\\ y=\dfrac{3^5}{2}.\end{array}\right.$

Найдем произведение корней уравнения

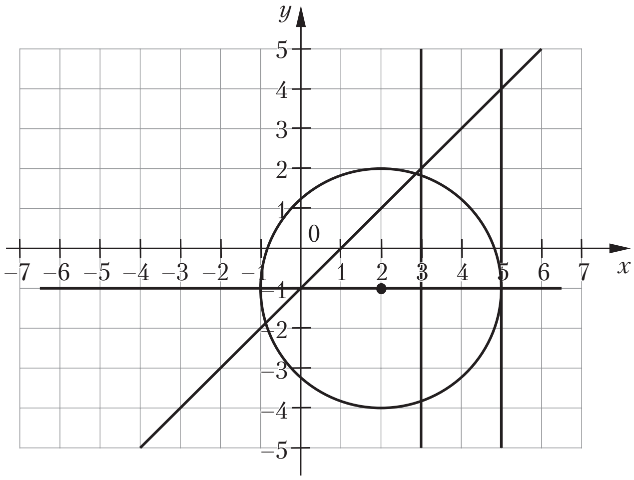
$$-2^9\cdot\frac{3^5}{2}=-2^8\cdot 3^5=-256\cdot 243=-62\ 208.$$

Ответ: 5.

A9. Изобразим графики всех предложенных линий на координатной плоскости и получим, что прямая $x=5$ является касательной для окружности

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9.$$

Выполним необходимую проверку и убедимся, что прямая $x=5$ и окружность $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ имеют только одну общую точку $(5;-1)$.



Ответ: 2.

Часть B

B1. $\begin{cases}\dfrac{y+x}{y-x}+5\dfrac{y-x}{x+y}=6,\\ x^2+y^2=13.\end{cases}$ Рассмотрим первое уравнение системы.

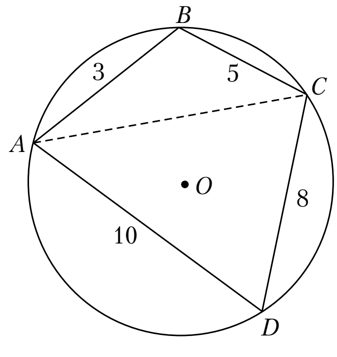
Пусть $\dfrac{y+x}{y-x}=t$, тогда уравнение принимает вид $t+\dfrac{5}{t}=6$; $t^2-6t+5=0$; $\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=5.\end{array}\right.$ То есть $\left[\begin{array}{l}\dfrac{y+x}{y-x}=1,\\ \dfrac{y+x}{y-x}=5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=0,\\ y=\dfrac{3x}{2}.\end{array}\right.$

Исходная система принимает вид $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ y=\dfrac{3x}{2};\end{array}\right.\\ x^2+y^2=13;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ x^2+y^2=13;\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{3x}{2},\\ x^2+y^2=13;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y^2=13;\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{3x}{2},\\ x^2=4;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\ y=\pm\sqrt{13};\end{cases}\\ \begin{cases}x=2,\\ y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2,\\ y=-3.\end{cases}\end{array}\right.$

Тогда $n=4$; $S=2+3=5$ и $n\cdot S=20$.

Ответ: 20.

B2. Так как четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\angle B+\angle D=180°$.



Применим теорему косинусов в треугольниках ABC и ACD и получим $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$

и $AC^2=AD^2+DC^2-2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos\angle D=AD^2+DC^2-2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos(180°-\angle B)=$

$=AD^2+DC^2+2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos\angle B.$

То есть $AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle B=AD^2+DC^2+2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos\angle B$;

$9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\angle B=100+64+2\cdot 10\cdot 8\cdot\cos\angle B$; $\cos\angle B=-\dfrac{13}{19}$.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и получим

$$\sin\angle B=\sin\angle D=\sqrt{1-\cos^2\angle B}=\frac{8\sqrt{3}}{19}.$$

Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle B=\frac{60\sqrt{3}}{19}$; $S_{DBC}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\cdot\sin\angle D=\frac{320\sqrt{3}}{19}$

и $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{BCD}=\frac{60\sqrt{3}}{19}+\frac{320\sqrt{3}}{19}=\frac{380\sqrt{3}}{19}=20\sqrt{3}$.

Значение искомого выражения равно $\frac{S}{2\sqrt{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=10.$

Ответ: 10.

B3. Запишем функцию $y=\frac{39}{x^2-4x+17}$ в виде $y=\frac{39}{(x-2)^2+13}$.

Наименьшее значение знаменателя дроби равно 13, тогда наибольшее значение дроби равно $\frac{39}{13}=3$.

Ответ: 3.

B4. $\sqrt{\sin x}=\sqrt[4]{\cos x+\frac{1}{4}}$; $\begin{cases}\sin^2 x=\cos x+\frac{1}{4},\\ \sin x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}1-\cos^2 x=\cos x+\frac{1}{4},\\ \sin x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\cos^2 x+\cos x-\frac{3}{4}=0,\\ \sin x\geq 0;\end{cases}$

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{3}{2},\\ \cos x=\frac{1}{2};\end{array}\right.\\ \sin x\geq 0;\end{array}\right.$ $\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2},\\ \sin x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ \sin x\geq 0;\end{cases}$ $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$

Найдем сумму корней исходного уравнения, принадлежащих промежутку $\left[\frac{\pi}{4};\,5\pi\right]$:

$$\frac{\pi}{3}+\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)+\left(\frac{\pi}{3}+4\pi\right)=7\pi=7\cdot180^\circ=1260^\circ.$$

Ответ: 1260.

B5. Рассмотрим уравнение $x^2-\pi x\sin x+\frac{1}{4}\pi^2=0$ как квадратное относительно x.

Тогда $D=\pi^2\sin^2 x-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}\pi^2=\pi^2\sin^2 x-\pi^2=\pi^2\left(\sin^2 x-1\right)$.

Уравнение имеет корни, если $D\geq 0$, т. е. $\pi^2\left(\sin^2 x-1\right)\geq 0$; $\sin^2 x\geq 1$.

Полученное неравенство равносильно уравнению $\sin^2 x=1$; $\sin x=\pm1$.

При $\sin x=1$ получим $x^2-\pi x+\frac{1}{4}\pi^2=0$; $\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^2=0$; $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\sin\frac{\pi}{2}=1\right)$.

При $\sin x=-1$ получим $x^2+\pi x+\frac{1}{4}\pi^2=0$; $\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)^2=0$; $x=-\frac{\pi}{2}$ $\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\right)$.

Найдем разность наибольшего и наименьшего корней уравнения: $\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi=180^\circ$.

Ответ: 180.

B6.

	Первый день	Второй день
Количество присутствующих	x	$x+1$
Количество отсутствующих	$\frac{x}{13}$	$\frac{x}{13}-1$

Так как на второй день количество отсутствовавших составило 5 % от количества присутствовавших, то $\frac{x}{13}-1=\frac{1}{20}(x+1)$; $20\left(\frac{x}{13}-1\right)=x+1$; $\frac{7x}{13}=21$; $x=39$. Тогда в классе $x+\frac{x}{13}=39+3=42$ ученика.

Ответ: 42.

ТЕСТ 20

Часть А

А1. Возрастающей геометрической прогрессией является последовательность 1; 4; 16; 64; ... .

Ответ: 4.

А2. Так как график обратной пропорциональности $y=\frac{k}{x}$ расположен во второй и четвертой координатных четвертях, то $k<0$. Определим, какое из предложенных чисел является отрицательным:

1) $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{7}\right)^6}=\left|1-\sqrt{7}\right|>0;$

2) $3^{-1}=\frac{1}{3}>0;$

3) $-5^6<0;$

4) $19{,}1-\sqrt{361}=19{,}1-19>0;$

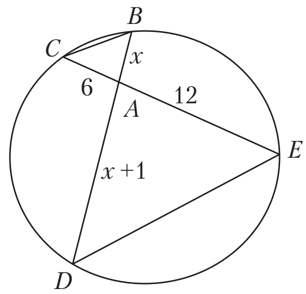
5) $\cos\frac{48\pi}{25}=\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{25}\right)=\cos\frac{2\pi}{25}>0.$

Ответ: 3.

А3. $\frac{1}{5}\sqrt{300}-\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}=\frac{1}{5}\cdot 10\sqrt{3}-\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}+5\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$

Ответ: 5.

А4. По теореме об отрезках пересекающихся хорд $AC\cdot AE=AD\cdot AB$; $6\cdot 12=x(x+1)$; $x^2+x-72=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-9,\\ x=8.\end{array}\right.$ То есть $AB=8$, тогда $AD=9$ и $BD=8+9=17$.



Ответ: 4.

А5. $2\cos(\pi(x-1))=\sqrt{3}$; $\cos(\pi(x-1))=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pi(x-1)=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$;

$$x-1=\pm\frac{1}{6}+2n,\ n\in\boldsymbol{Z};\quad \left[\begin{array}{l}x=1+\frac{1}{6}+2n,\\ x=1-\frac{1}{6}+2n,\end{array}\right.\ n\in\boldsymbol{Z};\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{6}+2n,\\ x=\frac{5}{6}+2n,\end{array}\right.\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Наибольшим отрицательным корнем уравнения является число $-\frac{5}{6}$.

Ответ: 3.

А6. Пусть $\frac{xy}{2}=a$; $2x+y-xy=b$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}a+\frac{5}{b}=5,\\ b+\frac{5}{a}=4;\end{cases}\ \begin{cases}\frac{ab+5}{b}=5,\\ \frac{ab+5}{a}=4;\end{cases}\ \begin{cases}ab+5=5b,\\ ab+5=4a;\end{cases}\ \begin{cases}4a=5b,\\ ab+5=4a;\end{cases}\ \begin{cases}b=\frac{4a}{5},\\ ab+5=4a;\end{cases}\ \begin{cases}b=\frac{4a}{5},\\ \frac{4a^2}{5}+5=4a;\end{cases}$$

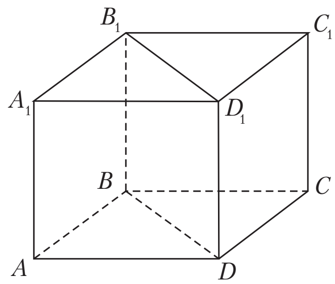
$$\begin{cases}b=\frac{4a}{5},\\ 4a^2-20a+25=0;\end{cases}\quad \begin{cases}b=\frac{4a}{5},\\ (2a-5)^2=0;\end{cases}\quad \begin{cases}b=\frac{4a}{5},\\ a=2{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}b=2,\\ a=2{,}5.\end{cases}$$

Получим $\begin{cases} 2x+y-xy=2, \\ \dfrac{xy}{2}=2{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y-xy=2, \\ xy=5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y-5=2, \\ xy=5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=7, \\ xy=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=7-2x, \\ xy=5; \end{cases}$ $\begin{cases} y=7-2x, \\ x(7-2x)=5; \end{cases}$

$\begin{cases} y=7-2x, \\ 2x^2-7x+5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=7-2x; \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2{,}5; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=5; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2{,}5, \\ y=2. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: 1.

A7. Пусть a — длина ребра куба, тогда $BD=a\sqrt{2}$ (BD — диагональ квадрата $ABCD$).



$S_{BB_1D_1D}=BD\cdot BB_1$; $a\cdot a\sqrt{2}=18\sqrt{2}$; $a=3\sqrt{2}$.

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=a^3$; $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=\left(3\sqrt{2}\right)^3=54\sqrt{2}$.

Ответ: 1.

A8. Так как $\mathrm{ctg}\alpha=4$; $\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{5}{3}$, то $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{1}{4}$; $\mathrm{tg}\beta=\dfrac{3}{5}$. Найдем

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{17}{17}=1.$$

Так как α и β — острые углы, то $\alpha+\beta=45°$. Тогда $\sin(\alpha+\beta)=\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: 4.

A9. Найдем область определения функции $f(x)=\dfrac{2x+7}{x+2+\sqrt{2x+7}}$.

Найдем значения переменной, при которых знаменатель обращается в нуль:

$$\sqrt{2x+7}=-x-2;\quad \begin{cases} 2x+7=(x+2)^2, \\ -x-2\ge 0; \end{cases}\quad \begin{cases} x^2+2x-3=0, \\ x\le -2; \end{cases}\quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=1; \end{array}\right. \\ x\le -2; \end{cases}\quad x=-3.$$

То есть при $x=-3$ выражение $\dfrac{2x+7}{x+2+\sqrt{2x+7}}$ не имеет смысла.

Кроме того, функция определена при $x\ge -3{,}5$.

Таким образом, $D(f)=[-3{,}5;\,-3)\cup(-3;\,+\infty)$.

Ответ: 4.

Часть B

B1. 1) $8\cdot 0{,}875=7$ (ч) — время, за которое второй велосипедист проезжает расстояние между городами.

2) Пусть s км — расстояние между городами, тогда $\dfrac{s}{8}$ км/ч и $\dfrac{s}{7}$ км/ч — скорости первого и второго велосипедистов соответственно.

3) $\dfrac{s}{8}+\dfrac{s}{7}=\dfrac{15s}{56}$ (км/ч) — скорость сближения велосипедистов.

4) Найдем, через какое время велосипедисты встретятся: $s:\dfrac{15s}{56}=\dfrac{56}{15}$ ч $=\dfrac{56}{15}\cdot 60=224$ мин.

Ответ: 224.

B2. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$. Пусть $t=\sqrt{2x^2-8x+12}$, тогда

$$t^2=2x^2-8x+12;\quad \frac{t^2}{2}=x^2-4x+6;\quad \frac{t^2}{2}-12=x^2-4x-6.$$

Исходное уравнение принимает вид $\frac{t^2}{2}-12=t$; $t^2-2t-24=0$; $\left[\begin{array}{l} t=6, \\ t=-4. \end{array}\right.$ Так как $t\geq 0$, то $t=6$, т. е.

$$\sqrt{2x^2-8x+12}=6;\quad 2x^2-8x+12=36;\quad 2x^2-8x-24=0;\quad x^2-4x-12=0;\quad D>0.$$

Тогда произведение корней уравнения равно -12.

Ответ: -12.

B3. $\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right|+\left|\frac{x-1}{2-x}\right|<12$; $\left(\left|\frac{x-1}{x-2}\right|\right)^2+\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-12<0$.

Пусть $t=\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$, тогда исходное неравенство принимает вид $t^2+t-12<0$; $-4<t<3$, т. е.

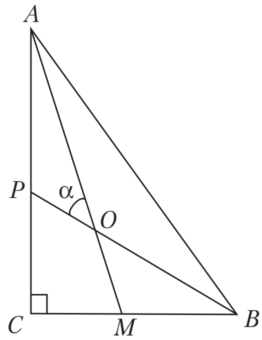
$$-4<\left|\frac{x-1}{x-2}\right|<3;\quad \left|\frac{x-1}{x-2}\right|<3;\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{x-1}{x-2}<3, \\ \frac{x-1}{x-2}>-3; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{5-2x}{x-2}<0, \\ \frac{4x-7}{x-2}>0; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{2x-5}{x-2}>0, \\ \frac{4x-7}{x-2}>0; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x\in(-\infty;2)\cup(2{,}5;+\infty), \\ x\in(-\infty;2)\cup(1{,}75;+\infty); \end{array}\right.$$

$$x\in(-\infty;2)\cup(2{,}5;+\infty).$$

Промежутку $[0;\,4]$ принадлежат корни 0; 1; 3; 4. Их сумма равна восьми.

Ответ: 8.

B4. Пусть $BC=a$, тогда $AC=2a$; $CM=MB=\frac{a}{2}$; $PC=PA=a$.



Тогда $\mathrm{tg}\angle CAM=\frac{CM}{AC}=\frac{0{,}5a}{2a}=\frac{1}{4}$.

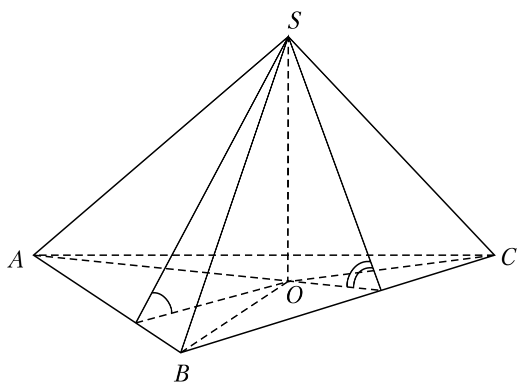
В прямоугольном треугольнике BCP $BC=PC=a$, тогда $\mathrm{tg}\angle CPB=1$.

В треугольнике APO угол CPB — внешний, т. е. $\angle CPB=\angle PAO+\angle POA$. Тогда $\mathrm{tg}\angle CPB=\mathrm{tg}(\angle PAO+\angle POA)$; $1=\frac{\mathrm{tg}\angle PAO+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\angle PAO\,\mathrm{tg}\alpha}$.

$$1=\frac{\frac{1}{4}+\mathrm{tg}\alpha}{1-\frac{\mathrm{tg}\alpha}{4}};\quad 1=\frac{1+4\mathrm{tg}\alpha}{4-\mathrm{tg}\alpha};\quad 4-\mathrm{tg}\alpha=1+4\mathrm{tg}\alpha;\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{5}.\ \text{Тогда } 10\,\mathrm{tg}\alpha=10\cdot\frac{3}{5}=6.$$

Ответ: 6.

B5. Так как все плоские углы пирамиды при вершине S прямые, то $SC\perp(ASB)$ и $SA\perp(CSB)$. То есть треугольники ASB и SBC — ортогональные проекции основания ABC.



Пусть α и β — величины двугранных углов при ребрах AB и BC соответственно.

Тогда $S_{ASB}=S_{ABC}\cdot\cos\alpha$; $S_{CSB}=S_{ABC}\cdot\cos\beta$.

Откуда $\frac{S_{ASB}}{S_{CSB}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

С другой стороны, треугольники AOB и BOC являются ортогональными проекциями граней ASB и SBC соответственно.

То есть $S_{AOB}=S_{SAB}\cdot\cos\alpha$; $S_{COB}=S_{SCB}\cdot\cos\beta$. Тогда

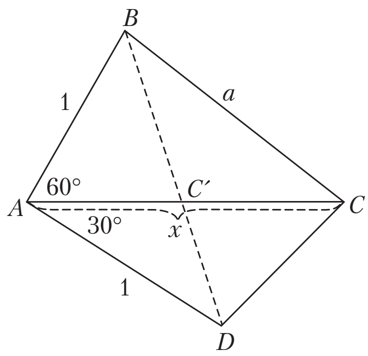
$$\frac{S_{AOB}}{S_{COB}}=\frac{S_{SAB}\cdot\cos\alpha}{S_{SCB}\cdot\cos\beta}.$$

Но $\frac{S_{ASB}}{S_{CSB}}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, а $\frac{S_{AOB}}{S_{COB}}=49$.

Тогда получим: $\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2=49$; $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=7$. То есть $\frac{S_{ASB}}{S_{CSB}}=7$.

Ответ: 7.

B6. Представим функцию в виде



$$y=\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \frac{1}{2}}+\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

или

$$y=\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 60^\circ}+\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 30^\circ}.$$

Выражение $\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 60^\circ}$ можно рассматривать как длину стороны BC треугольника с двумя другими сторонами, равными $AB = 1$ и $AC = x$, причем угол между этими сторонами составляет 60°. Рассуждая аналогично, получим треугольник ACD, в котором

$$AC=x;\ AD=1;\ \angle CAD=30^\circ,\ \text{а}\ \ CD=\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 30^\circ}.$$

Тогда сумму $\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 60^\circ}+\sqrt{1^2+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 30^\circ}$ можно рассматривать как сумму длин отрезков BC и CD.

Очевидно, что сумма длин отрезков BC и CD будет наименьшей, если точки B, C и D будут лежать на одной прямой, т. е. $C\in BD$. Из прямоугольного равнобедренного треугольника ABD найдем длину отрезка AC'. $AC'=\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos 15^\circ}=\sqrt{3}-1$, т. е. $m=\sqrt{3}-1$, тогда значение искомого выражения равно $\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=2.$

Ответ: 2.

ТЕСТ 21

Часть А

A1. При $a > 2$ положительным является число $A = \dfrac{(5-a)^2}{a-1}$.

Ответ: 3.

A2. $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24} = 3\sqrt[3]{3} - 7 \cdot 2\sqrt[3]{8} = 3\sqrt[3]{3} - 14\sqrt[3]{8} = -11\sqrt[3]{3}$.

Ответ: 3.

A3. Так как акции предприятия разделены между акционерами A и B в отношении 9 : 11, значит, у акционера A было $9x$, а у акционера B — $11x$ акций. После того как акционер A продал треть своих акций акционеру B, у него осталось $6x$ акций, а у акционера B стало $14x$ акций. Тогда отношение стало $6:14 = 3:7$.

Ответ: 1.

A4. $\dfrac{2a - \sqrt{a}}{1 - 2\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}\left(2\sqrt{a} - 1\right)}{1 - 2\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$.

Ответ: 4.

A5. Пусть a — длина стороны равностороннего треугольника, тогда его площадь равна $S_{\text{тр}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Так как сторона треугольника равна диаметру круга, то радиус круга равен $r = \dfrac{a}{2}$. Тогда площадь круга равна $S_{\text{кр}} = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$. $\dfrac{S_{\text{тр}}}{S_{\text{кр}}} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$.

Ответ: 3.

A6. $\sin 3x \cdot \cos 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x$; $\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 3x = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi n$; $n \in \boldsymbol{Z}$. Промежутку $[-\pi;\ \pi]$ принадлежат корни $-\pi;\ 0;\ \pi$. Их сумма равна нулю.

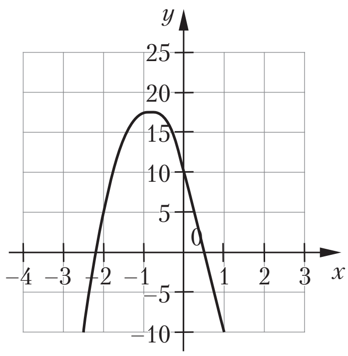
Ответ: 2.

A7. По формуле $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;1)$ и $B(3;\ 0)$. $\dfrac{x-0}{3-0} = \dfrac{y-1}{0-1}$; $\dfrac{x}{3} = -(y-1)$; $y = -\dfrac{x}{3} + 1$. Угловой коэффициент этой прямой равен $k = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 1.

A8. Так как дискриминант квадратного трехчлена $-9x^2 - 15x + 11$ положителен, то график функции $y = -9x^2 - 15x + 11$ пересекает ось абсцисс в двух точках. Поскольку $y(-3) < 0$; $y(-1) > 0$, а $y(1) < 0$, то $x_1 < -1$, а $x_2 < 2$.

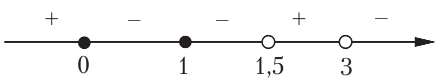
Ответ: 5.



A9. $\dfrac{|x-1|}{3-x} \geq \dfrac{|1-x|}{3-2x}$; $\dfrac{|x-1|}{3-x} \geq \dfrac{|x-1|}{3-2x}$; $\dfrac{|x-1|}{3-x} - \dfrac{|x-1|}{3-2x} \geq 0$; $|x-1|\left(\dfrac{1}{3-x} - \dfrac{1}{3-2x}\right) \geq 0$;

$|x-1|\left(\dfrac{3-2x-3+x}{(3-x)(3-2x)}\right) \geq 0$; $|x-1|\dfrac{-x}{(3-x)(3-2x)} \geq 0$; $\dfrac{|x-1|x}{(x-3)(3-2x)} \geq 0$.

Воспользуемся методом интервалов и получим



$x \in (-\infty; 0] \cup \{1\} \cup (1{,}5;\ 3)$.

Среднее арифметическое целых неотрицательных решений неравенства равно $\dfrac{0+1+2}{3} = 1$.

Ответ: 3.

B1. $\left(7^{x-3}\right)^{\sqrt{28-2x}}=7^{x^2-5x+6}$; $(x-3)\sqrt{28-2x}=x^2-5x+6$; $(x-3)\sqrt{28-2x}=(x-3)(x-2)$;

$$(x-3)\left(\sqrt{28-2x}-(x-2)\right)=0;\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3=0,\\ 28-2x\ge 0;\end{cases}\\ \sqrt{28-2x}=x-2;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\ x\le 14;\end{cases}\\ \begin{cases}28-2x=x^2-4x+4,\\ x\ge 2;\end{cases}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=3;\\ \begin{cases}x^2-2x-24=0,\\ x\ge 2;\end{cases}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=3;\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=6,\\ x=-4;\end{array}\right.\\ x\ge 2;\end{cases}\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=6.\end{array}\right.$$

Сумма корней уравнения равна 9.

Ответ: 9.

B2. $y=\sin\frac{\pi x}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{8}-\frac{\pi}{2}\right)$; $y=-\sin\frac{\pi x}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{8}\right)$; $y=-\sin\frac{\pi x}{8}\cdot\cos\frac{\pi x}{8}$; $y=-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\pi x}{8}\cdot\cos\frac{\pi x}{8}$;

$y=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{4}$. Так как наименьший положительный период функции $y=\sin x$ равен 2π, то наименьший положительный период функции $y=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{4}$ равен $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$.

Ответ: 8.

B3. Так как в арифметической прогрессии сумма любого числа первых членов равна утроенному квадрату числа этих членов, то верно равенство $S_n=3n^2$. Тогда $a_7=S_7-S_6=3\cdot\left(7^2-6^2\right)=39$.

Ответ: 39.

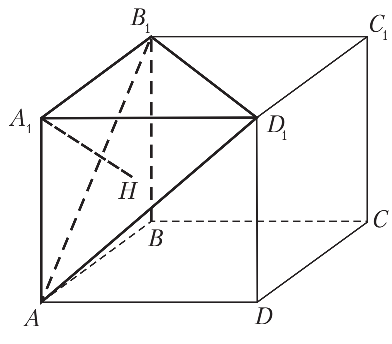
B4. $y=\left(\sqrt{3}\right)^{2-x^2+4x}$; $y=\left(\sqrt{3}\right)^{-x^2+4x-4+6}$; $y=\left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6}$. Так как $-(x-2)^2+6\le 6$ при $x\in\boldsymbol{R}$ и $\sqrt{3}>1$, то $\left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6}\le\left(\sqrt{3}\right)^6=27$. Наибольшим значением функции $y=\left(\sqrt{3}\right)^{-(x-2)^2+6}$ является число 27.

Ответ: 27.

B5. Расстояние от вершины A_1 до плоскости, проходящей через вершины B_1, D_1 и A, равно длине высоты пирамиды $A_1B_1D_1A$, основанием которой является равносторонний треугольник B_1D_1A.

Найдем объем пирамиды $A_1B_1D_1A$, считая точку A ее вершиной, а треугольник $A_1B_1D_1$ ее основанием. Тогда

$$V_{A_1B_1D_1A}=\frac{1}{3}\cdot AA_1\cdot\frac{1}{2}\cdot A_1B_1\cdot A_1D_1;\ V_{A_1B_1D_1A}=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}.$$



С другой стороны, $V_{A_1B_1D_1A}=\frac{1}{3}\cdot AH\cdot S_{AB_1D_1}$, причем

$$S_{AB_1D_1}=\frac{(AD_1)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\frac{9}{2}=\frac{1}{3}\cdot AH\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}$; $AH=\sqrt{3}$; $AH^2=3$.

Ответ: 3.

B6. По свойству двух взаимно обратных чисел $\left|\sin(x-1)+\frac{1}{\sin(x-1)}\right|\ge 2$ при $x\ne\pi n+1$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Найдем множество значений функции: $y=\sqrt{5x-x^2-4}$; $y=\sqrt{-(x-2{,}5)^2+2{,}25}$; $0\le y\le 1{,}5$. Заметим, что $\sqrt{5x-x^2-4}=0$ при $x=2{,}5$, но в этом случае $\left|\sin(x-1)+\frac{1}{\sin(x-1)}\right|>2$. Таким образом, исходное неравенство верно при любых значениях переменной, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases}x\ne\pi n+1,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ -x^2+5x-4\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ne\pi n+1,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x\in[1;\,4];\end{cases}$ $x\in(1;\,4]$.

Сумма целых решений неравенства равна: $2+3+4=9$.

Ответ: 9.

ТЕСТ 22

Часть А

А1. Так как $81<90<100$, то $9<\sqrt{90}<10$. Таким образом, числу $\sqrt{90}$ соответствует точка M.

Ответ: 4.

А2. Найдем 25 % от числа 72: $0,25\cdot 72=18$.
Число 18 составляет 60 % от искомого числа. Найдем искомое число: $18:0,6=30$.

Ответ: 4.

А3. $\begin{cases}2(x-1)-3(x+4)\le x,\\ 6x-3<-17-(x-5);\end{cases}$ $\begin{cases}2x-2-3x-12\le x,\\ 6x-3<-17-x+5;\end{cases}$ $\begin{cases}-2x\le 14,\\ 7x<-9;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -7,\\ x<-1\dfrac{2}{7};\end{cases}$ $x\in\left[-7;-1\dfrac{2}{7}\right).$

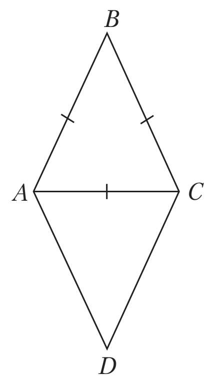
Наибольшим целым решением данного неравенства является число -2.

Ответ: 3.

А4. Так как длина стороны ромба равна длине его меньшей диагонали, то треугольник ABC является равносторонним и $\angle B=60°$.

По формуле $S=a^2\sin\alpha$ найдем площадь ромба: $S=4^2\cdot\sin 60°=16\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$.

Ответ: 1.



А5. График функции $y=7-3x$ пересекает ось ординат в точке с координатами $(0;7)$. Из предложенных функций через точку с координатами $(0;7)$ проходит график функции

$$y=\frac{x}{2}+7.$$

Ответ: 5.

А6. $x^3+2x^2\sqrt{5}+2x^2=-11x;$ $x^3+2x^2\sqrt{5}+2x^2+11x=0;$ $x\left(x^2+2x\sqrt{5}+2x+11\right)=0;$ $\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x^2+\left(2\sqrt{5}+2\right)x+11=0.\end{array}\right.$

Определим знак дискриминанта второго уравнения совокупности:

$$D=\left(2\sqrt{5}+2\right)^2-4\cdot 11=24+8\sqrt{5}-44=8\sqrt{5}-20=\sqrt{320}-\sqrt{400}<0,$$

т. е. второе уравнение совокупности не имеет корней, значит, исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

А7. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|=$

$=\left.\left|\sqrt{x-1}-1\right|+\sqrt{x-1}+1\,\right|_{x=1,27}=\left|\sqrt{0,27}-1\right|+\sqrt{0,27}+1=1-\sqrt{0,27}+\sqrt{0,27}+1=2.$

Ответ: 2.

А8. $\sin^2 6,4\pi+\sin^2 2,9\pi-4\,\mathrm{tg}1,4\pi\cdot\mathrm{tg}7,1\pi=\sin^2(6\pi+0,4\pi)+\sin^2(2\pi+0,9\pi)-4\,\mathrm{tg}(\pi+0,4\pi)\cdot\mathrm{tg}(7\pi+0,1\pi)=$

$=\sin^2 0,4\pi+\sin^2 0,9\pi-4\,\mathrm{tg}0,4\pi\cdot\mathrm{tg}0,1\pi=\sin^2 0,4\pi+\sin^2(0,5\pi+0,4\pi)-4\,\mathrm{tg}(0,5\pi-0,1\pi)\cdot\mathrm{tg}0,1\pi=$

$=\sin^2 0,4\pi+\cos^2 0,4\pi-4\,\mathrm{ctg}0,1\pi\cdot\mathrm{tg}0,1\pi=1-4\cdot 1=-3.$

Ответ: 5.

А9. $A=\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}=\left(a^2-\left(b^2+c^2-2bc\right)\right)\cdot\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=\left(a^2-(b-c)^2\right)\cdot\dfrac{a+b+c}{a+b-c}=$

$=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{a+b-c}=(a-b+c)(a+b+c)=(a+c)^2-b^2.$

При $a+c=\sqrt{19},\ b=2$ $A=\left(\sqrt{19}\right)^2-2^2=19-4=15.$

Ответ: 15.

B1.

А) $f(x)=\sqrt[8]{x^2-6x-7}-\lg(2-3x)$;

$$\begin{cases} x^2-6x-7\ge 0, \\ 2-3x>0; \end{cases} \begin{cases} (x-7)(x+1)\ge 0, \\ x<\dfrac{2}{3}; \end{cases} \quad D(f)=(-\infty;-1].$$

Б) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+6}{3-x}}+\log_{\sqrt{3}}(7x-3)$;

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+6}{3-x}\ge 0, \\ 7x-3>0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{(x-6)(x-1)}{x-3}\le 0, \\ x>\dfrac{3}{7}; \end{cases} \quad D(f)=\left(\frac{3}{7};1\right]\cup(3;6].$$

В) $y=\sqrt{4-\dfrac{4x^2+1}{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}}$;

$$\begin{cases} 4-\dfrac{4x^2+1}{x}\ge 0, \\ 2+3x>0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{4x-4x^2-1}{x}\ge 0, \\ x>-\dfrac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{4x^2-4x+1}{x}\le 0, \\ x>-\dfrac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{(2x-1)^2}{x}\le 0, \\ x>-\dfrac{2}{3}; \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}, \\ x\in\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right); \end{cases} \quad D(f)=\left(-\frac{2}{3};0\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Г) $y=\sqrt{(x^2-3x-10)\cdot\lg|x-3|}$;

$(x^2-3x-10)\cdot\lg|x-3|\ge 0$;

$$(x^2-3x-10)\cdot\lg|x-3|=0; \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x^2-3x-10=0, \\ &\lg|x-3|=0, \end{aligned}\right. \\ x\ne 3; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=-2;5, \\ &x=2;4, \end{aligned}\right. \\ x\ne 3; \end{cases} \quad D(f)=(-\infty;-2]\cup[2;3)\cup(3;4]\cup[5;+\infty).$$

Д) $y=\log_{5-x}(x^2-9)$;

$$\begin{cases} x^2-9>0, \\ 5-x>0, \\ 5-x\ne 1; \end{cases} \begin{cases} x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty), \\ x\in(-\infty;5), \\ x\ne 4; \end{cases} \quad D(f)=(-\infty;-3)\cup(3;4)\cup(4;5).$$

Ответ: А3Б1В5Г2Д4.

B2. Так как числа $\sin 2x$, $\sin 7x$ и $\sin 12x$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, то воспользуемся свойством арифметической прогрессии и получим уравнение

$$\sin 7x=\frac{\sin 2x+\sin 12x}{2}; \ \sin 7x=\frac{2\sin\dfrac{2x+12x}{2}\cos\dfrac{2x-12x}{2}}{2};$$

$$\sin 7x=\sin 7x\cos 5x; \ \sin 7x-\sin 7x\cos 5x=0; \ \sin 7x(1-\cos 5x)=0; \ \left[\begin{aligned} &\sin 7x=0, \\ &\cos 5x=1; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} &x=\frac{\pi n}{7},\ n\in\boldsymbol{Z}, \\ &x=\frac{2\pi k}{5},\ k\in\boldsymbol{Z}. \end{aligned}\right.$$

При $x=\dfrac{\pi n}{7}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, найдем $\operatorname{tg}\left(70\cdot\dfrac{\pi n}{7}\right)=\operatorname{tg}(10\pi n)=0$.

При $x = \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, найдем $\operatorname{tg}\left(70 \cdot \frac{2\pi k}{5}\right) = \operatorname{tg}(28\pi k) = 0$.

Ответ: 0.

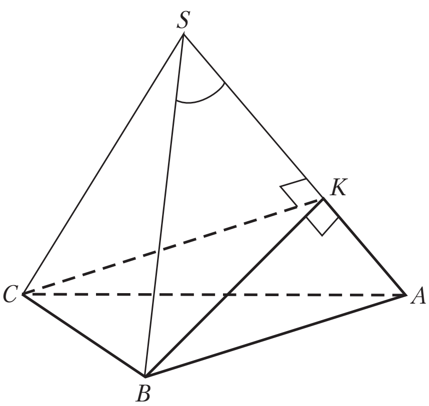
B3. $8\left(4^x + 4^{-x}\right) - 54\left(2^x + 2^{-x}\right) + 101 = 0$. Пусть $\left(2^x + 2^{-x}\right) = t$, тогда $\left(2^x + 2^{-x}\right)^2 = t^2$; $4^x + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 4^{-x} = t^2$; $4^x + 2 \cdot 1 + 4^{-x} = t^2$; $4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$. Исходное уравнение принимает вид

$$8\left(t^2 - 2\right) - 54t + 101 = 0; \quad 8t^2 - 54t + 85 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t = 6\frac{1}{4}, \\ t = 2\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 2^x + 2^{-x} = 4\frac{1}{4}, \\ 2^x + 2^{-x} = 2\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^x + \frac{1}{2^x} = 4 + \frac{1}{4}, \\ 2^x + \frac{1}{2^x} = 2 + \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = \frac{1}{4}, \\ 2^x = 2, \\ 2^x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2, \\ x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Произведение корней уравнения равно: $2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-1) = 4$.

Ответ: 4.



B4. Так как пирамида $SABC$ — правильная, то ее боковые ребра равны. Пусть $SA = SB = a$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SBK. $\angle BSK = \operatorname{arctg}\frac{13}{84}$, тогда $\operatorname{tg}\angle BSK = \frac{13}{84}$, т. е. $\frac{BK}{SK} = \frac{13}{84}$. По теореме Пифагора $SB^2 = BK^2 + SK^2$, тогда $a^2 = (13x)^2 + (84x)^2$; $a^2 = 7225x^2$; $x = \frac{a}{85}$.

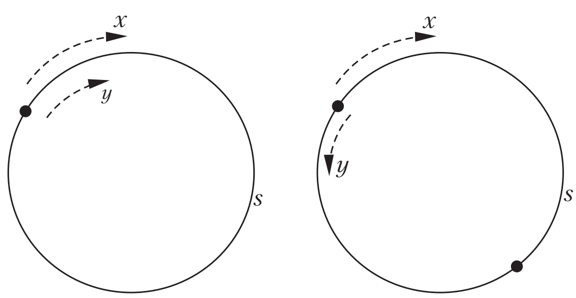
Таким образом, $SK = 84x = \frac{84a}{85}$, а $KA = SA - SK = a - \frac{84a}{85} = \frac{a}{85}$.

Так как секущая плоскость перпендикулярна боковому ребру SA, то отрезок SK является высотой пирамиды $SKBC$, основанием которой является треугольник KBC, а отрезок AK является высотой пирамиды $AKBC$, основанием которой также является треугольник KBC.

$$V_{SKBC} = \frac{1}{3}S_{CBK} \cdot SK = \frac{1}{3}S_{CBK} \cdot \frac{84a}{85}; \qquad V_{AKBC} = \frac{1}{3}S_{CBK} \cdot AK = \frac{1}{3}S_{CBK} \cdot \frac{a}{85}.$$

$$\frac{V_{SKBC}}{V_{AKBC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{CBK} \cdot \frac{84a}{85}}{\frac{1}{3}S_{CBK} \cdot \frac{a}{85}} = 84.$$

Ответ: 84.



B5. Пусть x км/ч и y км/ч — скорости первого и второго автомобилей, s км — длина кольцевой дороги. Пусть также $x > y$.

При движении в одном направлении первый автомобиль за три часа проедет на один круг больше, чем второй автомобиль, т. е. $3x - 3y = s$.

При движении в противоположных направлениях сумма расстояний, пройденных автомобилями за 20 мин, равна длине кольцевой дороги, т. е. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = s$.

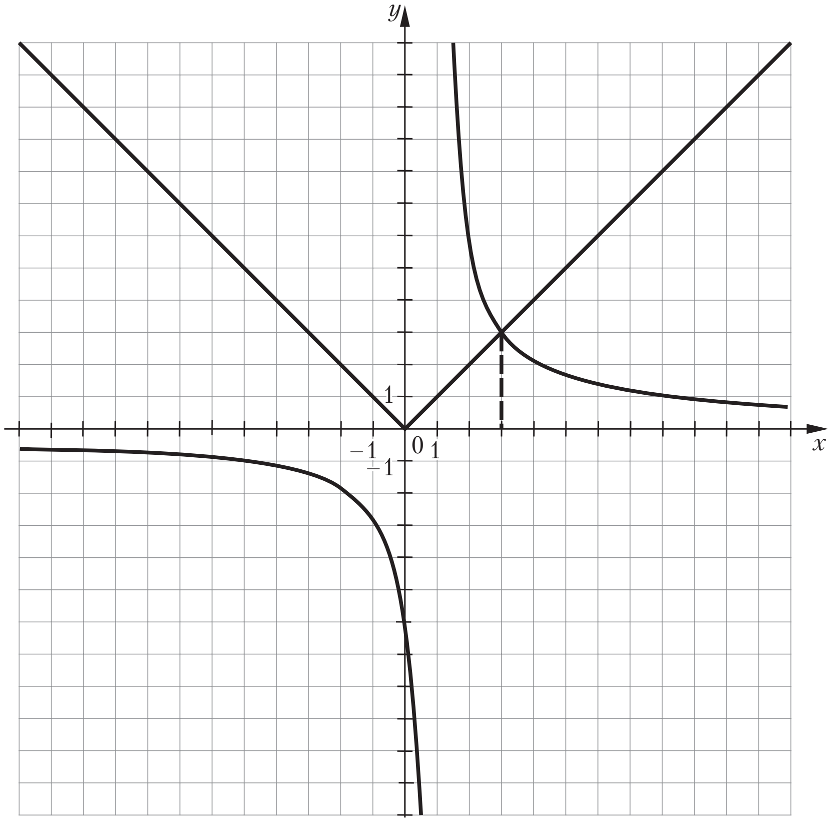
Таким образом, $3x - 3y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y$; $9x - 9y = x + y$; $y = \frac{4x}{5}$.

Тогда $s = 3x - 3\cdot\frac{4x}{5} = \frac{3x}{5}$ и время, за которое первый автомобиль пройдет всю кольцевую дорогу, равно $t = \frac{s}{x} = \frac{\frac{3x}{5}}{x} = \frac{3}{5}$ ч = 36 мин.

Ответ: 36.

В6. $\left|\sqrt{x+4}-2\right| < \frac{6}{\sqrt{x+4}-3}$. Пусть $\sqrt{x+4}-2=t$, тогда неравенство принимает вид $|t| < \frac{6}{t-1}$. Построим графики функций $y=|t|$ и $y=\frac{6}{t-1}$. Графики данных функции пересекаются при $t=3$. То есть график функции $y=|t|$ расположен ниже графика функции $y=\frac{6}{t-1}$ при $1<t<3$. Тогда $1<\sqrt{x+4}-2<3$; $3<\sqrt{x+4}<5$; $9<x+4<25$; $5<x<21$. Наименьшим целым решением неравенства является число 6.

Ответ: 6.



ТЕСТ 23

Часть А

А1. График функции $y=-(x-4)^2$ изображен на рисунке 3.

Ответ: 3.

А2. 1) $A=\sin 44°$, $B=\cos 44°$. Так как $\sin 44°<\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos 44°>\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $A<B$.

2) $A=\operatorname{tg}2$, $B=\operatorname{tg}1$. Так как 1 рад — угол первой четверти, то $\operatorname{tg}1>0$. Так как 2 рад — угол второй четверти, то $\operatorname{tg}2<0$. Значит, $A<B$.

3) $A=\sin\dfrac{5\pi}{2}$, $B=\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$. Так как $\sin\dfrac{5\pi}{2}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ и $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1$, то $A=B$.

4) $A=\sin\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B=\cos(\arccos 1)$. Так как $\sin\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos(\arccos 1)=1$, то $A>B$.

5) $A=\sin 121°$, $B=\sin 244°$. Так как $121°$ — угол второй четверти, то $\sin 121°>0$. Так как $244°$ — угол третьей четверти, то $\sin 244°<0$. Тогда $A>B$.

Ответ: 5.

А3. 1) $5\cdot 120000=600000$ (руб.) — ежедневный доход от первых пяти точек;
2) $2\cdot 176000=352000$ (руб.) — ежедневный доход от двух остальных точек;
3) $600000+352000=952000$ (руб.) — ежедневный доход от всех точек;
4) $952000:7=136000$ (руб.) — средний доход от всех точек.

Ответ: 5.

А4. $\dfrac{d^2+5d+4}{d^2+5d+6}:\dfrac{d^2-16}{d^2-4}=\dfrac{(d+1)(d+4)(d-2)(d+2)}{(d+2)(d+3)(d-4)(d+4)}=\dfrac{(d+1)(d-2)}{(d+3)(d-4)}$.

Ответ: 1.

А5. $\dfrac{4x-3}{3x^2+8}\le\dfrac{4x-3}{3x^2+5}$; $\dfrac{4x-3}{3x^2+8}-\dfrac{4x-3}{3x^2+5}\le 0$; $(4x-3)\left(\dfrac{1}{3x^2+8}-\dfrac{1}{3x^2+5}\right)\le 0$; $(4x-3)\dfrac{3x^2+5-(3x^2+8)}{(3x^2+8)(3x^2+5)}\le 0$;

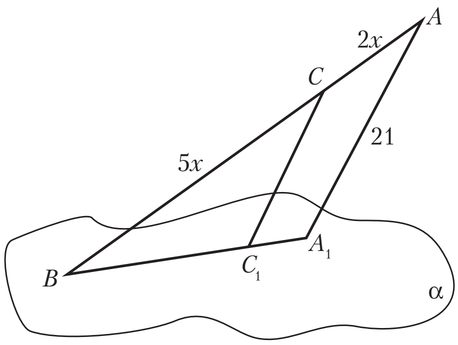
$\dfrac{-3(4x-3)}{(3x^2+8)(3x^2+5)}\le 0$; $\dfrac{4x-3}{(3x^2+8)(3x^2+5)}\ge 0$.

Так как $3x^2+8\ge 0$ и $3x^2+5\ge 0$ при $x\in\boldsymbol{R}$, то полученное неравенство равносильно неравенству $4x-3\ge 0$; $x\ge 0{,}75$; $x\in[0{,}75;+\infty)$.

Ответ: 4.

А6. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{45}-\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{5}+1-2\sqrt[4]{5}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{5}+1-2\sqrt[4]{5}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{5}+1-2\sqrt[4]{5}}=\dfrac{3\cdot\left(\sqrt[4]{5}-1\right)^2}{\left(\sqrt[4]{5}-1\right)^2}=3.$

Ответ: 3.



А7. Треугольник ABA_1 подобен CBC_1.

Так как $AC:AB=2:7$, то $BC:AB=5:7$, тогда $CC_1:AA_1=5:7$, т. е. $CC_1=\dfrac{5}{7}\cdot 21=15$.

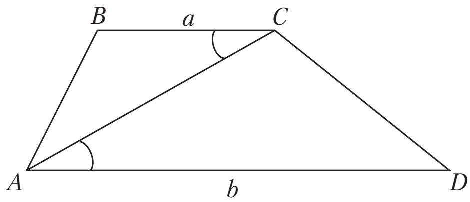
Ответ: 2.

А8. $2\cos^2 x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $2\cos^2 x-1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $2x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, $x=\pm\dfrac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Наибольшим отрицательным корнем данного уравнения является число $-\dfrac{5\pi}{12}$.

Ответ: 1.

A9. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin\angle BCA}{\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle CAD}$; $\dfrac{2}{3}=\dfrac{a}{b}$. То есть $a=2x$; $b=3x$.



Так как $\dfrac{a+b}{2}=35$, то $2x+3x=70$; $x=14$, тогда $a=28$; $b=42$.

Ответ: 5.

Часть В

B1. $2^{-1+0+1+2+...+x}=32^{x+2}$; $2^{-1+0+1+2+...+x}=2^{5(x+2)}$; $-1+0+1+2+...+x=5(x+2)$; $1+2+...+x=5(x+2)+1$.

Левую часть уравнения можно рассматривать как сумму арифметической прогрессии, в которой $a_1=1$; $a_n=x$; $n=x$.

Тогда $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{1+x}{2}\cdot x$ и уравнение принимает вид

$$\frac{1+x}{2}\cdot x=5(x+2)+1;\quad x^2+x=10x+22;\quad x^2-9x-22=0;\quad \left[\begin{array}{l}x=11,\\x=-2.\end{array}\right.$$

Так как x — натуральное число, то $x=11$.

Ответ: 11.

B2. Пусть n — искомое натуральное число, тогда $n=45\cdot q+q^2$, где q — частное от деления искомого натурального числа на 45. Так как остаток от деления всегда меньше делителя, то $q^2<45$, т. е. $0\le q<\sqrt{45}$. Наибольшим натуральным числом, удовлетворяющим данному условию, является число 6.

То есть $q=6$ и $n=45\cdot 6+6^2=306$.

Ответ: 306.

B3. $(x^2-5x+1)(x^2-4)=6\cdot(x-1)^2$; $((x^2-4)-5(x-1))(x^2-4)=6\cdot(x-1)^2$;
$(x^2-4)^2-5(x-1)(x^2-4)-6\cdot(x-1)^2=0$.

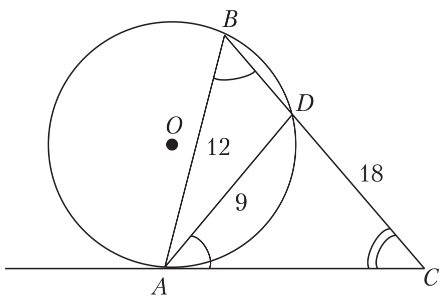
Пусть $a=x^2-4$; $b=x-1$, тогда уравнение принимает вид $a^2-5ab-6b^2=0$.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно a, тогда $\left[\begin{array}{l}a=6b,\\a=-b.\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}x^2-4=6(x-1),\\x^2-4=-x+1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-6x+2=0,\\x^2+x-5=0.\end{array}\right.$ Оба уравнения совокупности имеют корни $(D>0)$, тогда произведение корней первого уравнения равно 2, а второго равно –5. То есть произведение корней исходного уравнения равно –10.

Ответ: –10.

B4. Так как вписанный угол равен половине градусной мере дуги, на которую он опирается, то $\angle ABD=\dfrac{1}{2}\cup AD$.



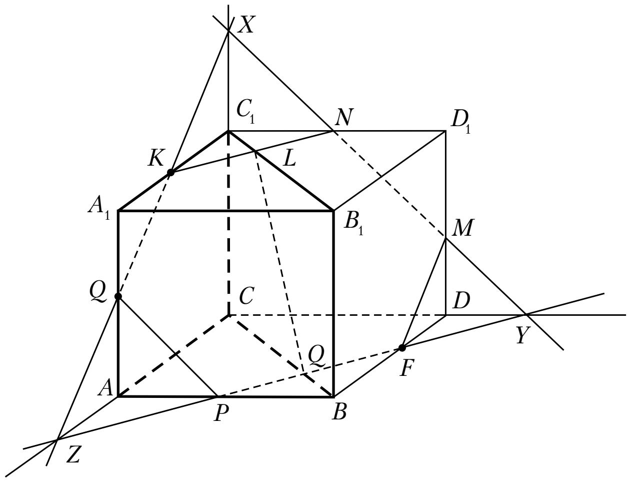
Угол между касательной и секущей равен половине градусной меры дуги, заключенной между его сторонами, тогда $\angle DAC=\dfrac{1}{2}\cup AD$. То есть $\angle ABD=\angle DAC$.

Треугольники ACD и ABC подобны по двум углам ($\angle ABD=\angle DAC$ и $\angle ACD$ — общий), тогда $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{DC}$; $AC=\dfrac{12\cdot 18}{9}=24$.

По свойству касательной и секущей $AC^2=CD\cdot BC$; $BC=\dfrac{24^2}{18}=32$. Тогда $BD=BC-CD=32-18=14$.

Ответ: 14.

B5. Достроим призму $ABCA_1B_1C_1$ до куба и проведем сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1 и A_1C_1. Полученное сечение является правильным шестиугольником, сторона которого равна $\sqrt{2}$ (QR — половина диагонали квадрата ABA_1B_1). Площадь шестиугольника, являющегося сечением куба, равна: $S_{QKNMFP} = \dfrac{3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Тогда площадь пятиугольника $PQKLG$, являющего сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1 и A_1C_1, равна $S_{PQKLG} = \dfrac{1}{2}S_{QKNMFP} = 1{,}5\sqrt{3}$.



Найдем значение искомого выражения:

$$2\sqrt{3}\,S = 2\sqrt{3}\,S_{PQKLG} = 2\sqrt{3}\cdot 1{,}5\sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.

В6. $\sqrt{x-2}+|x-4|\le 4$. Пусть $t=\sqrt{x-2}$, тогда неравенство принимает вид

$$\begin{cases} t+\left|t^2-2\right|\le 4,\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases} \left|t^2-2\right|\le 4-t,\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases} t^2-2\le 4-t,\\ t^2-2\ge t-4,\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases} t^2+t-6\le 0,\\ t^2-t+2\ge 0,\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases} -3\le t\le 2,\\ t\in \boldsymbol{R},\\ t\ge 0;\end{cases}\quad 0\le t\le 2.$$

Тогда $0\le\sqrt{x-2}\le 2$; $\quad 0\le x-2\le 4$; $\quad 2\le x\le 6$; $\quad x\in[2;\,6]$.

Найдем сумму целых решений неравенства $2+3+4+5+6=20$.

Ответ: 20.

ТЕСТ 24

Часть А

А1. Так как диаметр шара равен 10, то его радиус равен 5. Поскольку плоскость удалена от шара на расстояние, большее радиуса, то плоскость и шар не имеют общих точек.

Ответ: 4.

А2. 1) $f(1)=\dfrac{2\cdot 1+10}{3\cdot 1+1}=3;\ f(1)=\dfrac{2\cdot 0+10}{3\cdot 0+1}=10;\ f(0)\cdot f(1)=30.$

2) Функция имеет смысл при $x\neq -\dfrac{1}{3}$, т. е. $D(f)=\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right).$

3) Относительно оси ординат симметричен график четной функции. Поскольку область определения функции не симметрична относительно нулю, то функция не является четной.

4) Решением неравенства $\dfrac{2x+10}{3x+1}>0$ является объединение промежутков $(-\infty;-5)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right).$

5) $\dfrac{2x+10}{3x+1}=0$ при $x=-5$, т. е. нулем функции является число -5.

Ответ: 5.

А3. $\sqrt{1-12x+36x^2}=12x+1;\ \sqrt{(6x-1)^2}=12x+1;\ |6x-1|=12x+1;\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}6x-1=12x+1,\\6x-1=-12x-1;\end{array}\right.\\12x+1\geq 0;\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3},\\x=0;\end{array}\right.\\x\geq -\dfrac{1}{12};\end{array}\right.\quad x=0.$

Ответ: 3.

А4. $\dfrac{\sin 8x}{\sin 4x}-2\cos^2 2x=\dfrac{2\sin 4x\cos 4x}{\sin 4x}-2\cos^2 2x=2\cos 4x-2\cos^2 2x=2\left(2\cos^2 2x-1\right)-2\cos^2 2x=$
$=4\cos^2 2x-2-2\cos^2 2x=2\cos^2 2x-2=-2\left(1-\cos^2 2x\right)=-2\sin^2 2x.$

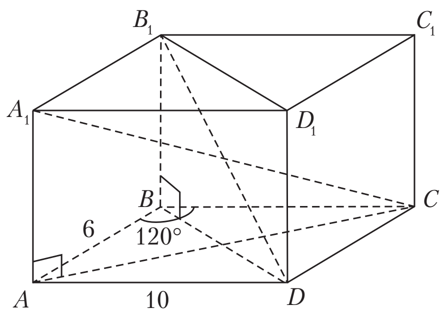
Ответ: 2.

А5. 1) Рассмотрим треугольник ABC: по теореме косинусов

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B,$$

тогда $AC^2=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot\cos 120°;\ AC^2=36+100-2\cdot 6\cdot 10\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right);$

$AC^2=196;\ AC=14.$



2) Рассмотрим треугольник AA_1C — прямоугольный $(\angle A_1AC=90°)$: по теореме Пифагора

$$A_1C^2=AA_1^{\,2}+AC^2;\ AA_1^{\,2}=\left(14\sqrt{2}\right)^2-14^2=196;\ AA_1=14.$$

3) A_1C — наклонная; A_1A — перпендикуляр к плоскости основания; AC — проекция наклонной A_1C на плоскость основания, тогда $\angle A_1CA$ — угол между прямой A_1C и плоскостью основания (по определению угла между прямой и плоскостью).

Так как в прямоугольном треугольнике AA_1C $AA_1=AC=14$, то треугольник AA_1C является равнобедренным, т. е. $\angle A_1CA=45°$.

4) Рассмотрим треугольник ABD: $\angle BAD=180°-120°=60°$.

По теореме косинусов $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$, тогда

$$BD^2=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot\cos 60°;\ BD^2=36+100-2\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{1}{2};\ BD^2=76;\ BD=2\sqrt{19}.$$

5) Рассмотрим треугольник BB_1D — прямоугольный $(\angle B_1BD=90°)$: по теореме Пифагора

$$B_1D^2=BB_1^{\,2}+BD^2;\ B_1D^2=14^2+76=272;\ B_1D=4\sqrt{17}.$$

6) $S_{BB_1D_1D} = BB_1 \cdot BD = 14 \cdot 2\sqrt{19} = 28\sqrt{19}$.

7) Площадь боковой поверхности параллелепипеда найдем с помощью формулы $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$, где $P_{\text{осн}} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (6 + 10) = 32$; $h = BB_1 = 14$. Тогда $S_{\text{бок}} = 32 \cdot 14 = 448$.

8) Площадь полной поверхности параллелепипеда найдем с помощью формулы $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. Так как основанием параллелепипеда является параллелограмм $ABCD$, то $S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \cdot \sin A = 6 \cdot 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$. Тогда $S_{\text{полн}} = 448 + 60\sqrt{3}$.

9) Объем прямого параллелепипеда найдем по формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Тогда $V = 30\sqrt{3} \cdot 14 = 420\sqrt{3} \neq 140\sqrt{3}$.

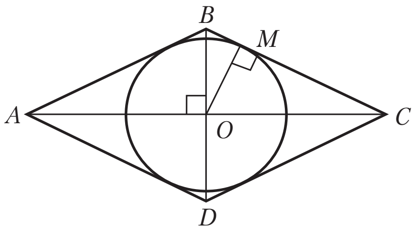
Ответ: 5.

А6. $$\left(9{,}4 \cdot \sqrt[3]{36\sqrt{6}} - 3{,}4 \cdot \sqrt{6\sqrt[3]{36}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(9{,}4 \cdot \sqrt[3]{6^2\sqrt{6}} - 3{,}4 \cdot \sqrt{6\sqrt[3]{6^2}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(9{,}4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{6^4 \cdot 6}} - 3{,}4 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{6^3 \cdot 6^2}}\right)^{\frac{6}{11}} =$$

$$= \left(9{,}4 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{6^5}} - 3{,}4 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{6^5}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(9{,}4 \cdot \sqrt[6]{6^5} - 3{,}4 \cdot \sqrt[6]{6^5}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(6 \cdot \sqrt[6]{6^5}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(\sqrt[6]{6^6 \cdot 6^5}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(\sqrt[6]{6^{11}}\right)^{\frac{6}{11}} = \left(6^{\frac{11}{6}}\right)^{\frac{6}{11}} = 6.$$

Ответ: 4.

А7. Пусть $BD = 6$; $AC = 8$.



По свойству ромба $BO = \dfrac{1}{2}BD = 3$; $OC = \dfrac{1}{2}AC = 4$, и треугольник BOC — прямоугольный.

Тогда по теореме Пифагора $BC = 5$.

Отрезок OM является высотой прямоугольного треугольника BOC, тогда $OM = \dfrac{BO \cdot OC}{BC} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$.

Ответ: 4.

А8. $$\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43; \end{cases} \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2 \cdot 2^x - 3y = 43; \end{cases} \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 4 \cdot 2^x - 6y = 86; \end{cases} \begin{cases} 11 \cdot 2^x = 88, \\ 7 \cdot 2^x + 6y = 2; \end{cases} \begin{cases} 2^x = 8, \\ 7 \cdot 2^x + 6y = 2; \end{cases} \begin{cases} 2^x = 8, \\ 7 \cdot 8 + 6y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x = 8, \\ 6y = -54; \end{cases} \begin{cases} 2^x = 8, \\ y = -9. \end{cases}$$

Тогда $2^x - y = 8 - (-9) = 17$.

Ответ: 5.

А9. $$\sqrt{49 - 4x^2} \cdot \left(\sin \pi x + 3\cos\frac{\pi x}{2}\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} 49 - 4x^2 = 0; \\ \begin{cases} \sin \pi x + 3\cos\dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ 49 - 4x^2 \geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 4x^2 = 49; \\ \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi x}{2}\cos\dfrac{\pi x}{2} + 3\cos\dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ 4x^2 - 49 \leq 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm 3{,}5; \\ \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}\left(2\sin\dfrac{\pi x}{2} + 3\right) = 0, \\ -3{,}5 \leq x \leq 3{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm 3{,}5; \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ 2\sin\dfrac{\pi x}{2} + 3 = 0; \end{array}\right. \\ -3{,}5 \leq x \leq 3{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm 3{,}5; \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0, \\ \sin\dfrac{\pi x}{2} = -1{,}5; \end{array}\right. \\ -3{,}5 \leq x \leq 3{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm 3{,}5; \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \in \varnothing; \end{array}\right. \\ -3{,}5 \leq x \leq 3{,}5; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm 3{,}5; \\ \begin{cases} x = 1 + 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ -3{,}5 \leq x \leq 3{,}5; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm 3{,}5, \\ x = -3;\ -1;\ 1;\ 3. \end{array}\right.$$ Таким образом, уравнение имеет шесть корней.

Ответ: 4.

B1. $\dfrac{x^2-3x-6}{x}-\dfrac{8x}{x^2-3x-6}=-2.$

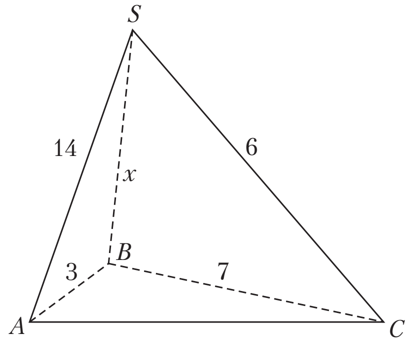
Пусть $\dfrac{x^2-3x-6}{x}=t$, тогда уравнение принимает вид $t-\dfrac{8}{t}=-2;$ $t^2+2t-8=0;$ $\left[\begin{array}{l}t=-4,\\ t=2.\end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2-3x-6}{x}=-4,\\ \dfrac{x^2-3x-6}{x}=2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+x-6=0,\\ x^2-5x-6=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=2,\\ x=6,\\ x=-1.\end{array}\right.$

Найдем произведение корней уравнения: $(-3)\cdot(-1)\cdot 2\cdot 6=36.$

Ответ: 36.

B2. Любая сторона треугольника больше разности двух других его сторон и меньше их суммы.



Тогда для треугольников SAB и SBC получим:

$$\begin{cases}14-3<x<14+3,\\ 7-6<x<7+6;\end{cases}\quad \begin{cases}11<x<17,\\ 1<x<13;\end{cases}\quad 11<x<13.$$

Поскольку длина ребра SB является целым числом, то $SB=12$.

Ответ: 12.

B3. $x^2+25\ge 8\sqrt{5-x}+10x;$ $x^2-10x+25\ge 8\sqrt{5-x};$ $(5-x)^2\ge 8\sqrt{5-x}.$

Пусть $t=\sqrt{5-x}$, тогда получим

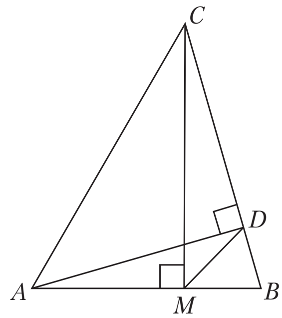
$$\begin{cases}t^4\ge 8t,\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}t^4-8t\ge 0,\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}t\left(t^3-8\right)\ge 0,\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}t\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty),\\ t\ge 0;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}t\in[2;+\infty);\\ t=0.\end{array}\right.$$

То есть $\left[\begin{array}{l}\sqrt{5-x}\ge 2,\\ \sqrt{5-x}=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}5-x\ge 4,\\ x=5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}-x\ge -1,\\ x=5;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\le 1,\\ x=5;\end{array}\right.$ $x\in(-\infty;\,1]\cup\{5\}.$

Найдем среднее арифметическое целых неотрицательных решений неравенства: $\dfrac{0+1+5}{3}=2.$

Ответ: 2.

B4. 1) Треугольники CBM и ADB подобны по двум углам ($\angle CMB=\angle ADB=90^\circ$ и $\angle B$ — общий), тогда $\dfrac{AB}{CB}=\dfrac{DB}{MB}.$



2) Рассмотрим треугольники ABC и MBD.

Поскольку $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{CB}{MB}$ и $\angle B$ — общий, то $\Delta ABC\sim\Delta DBM$, причем

$$k=\frac{DB}{AB}=\frac{MB}{CB}=\frac{DM}{AC}=\cos\angle B.$$

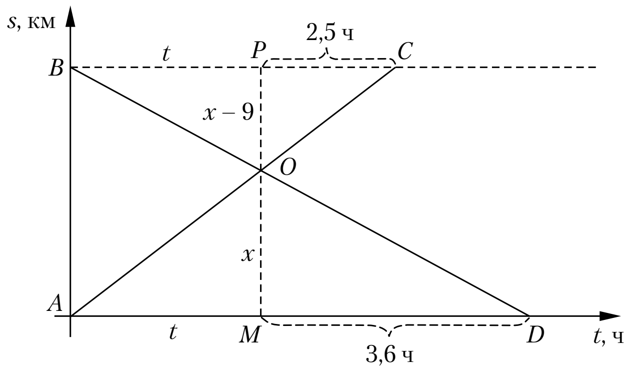
Так как периметр треугольника ABC равен 15, а периметр треугольника BDM равен 9, то $k=\dfrac{P_{DBM}}{P_{ABC}}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$, т. е. $\cos\angle B=\dfrac{3}{5}$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству $\sin\angle B=\sqrt{1-\cos^2\angle B}=\dfrac{4}{5}$.

3) По теореме синусов из треугольника DMB получим $\dfrac{DM}{\sin\angle B}=2R,$ $DM=2\cdot 1{,}8\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{72}{25}.$

Поскольку $\dfrac{DM}{AC}=k$, то $AC=\dfrac{72}{25}:\dfrac{3}{5}=\dfrac{24}{5}=4{,}8.$ Тогда $10\cdot AC=48.$

Ответ: 48.

B5. Пусть AC и BD — графики движения первого и второго велосипедистов соответственно.



Из подобия треугольников POC и AOM следует, что

$$\frac{x-9}{x}=\frac{2,5}{t}.$$

А из подобия треугольников BOP и DOM получим, что $\frac{x-9}{x}=\frac{t}{3,6}$.

То есть $\frac{2,5}{t}=\frac{t}{3,6}$; $t^2=2,5\cdot 3,6$; $t=3$.

Тогда $\frac{x-9}{x}=\frac{2,5}{3}$; $3x-27=2,5x$; $0,5x=27$; $x=54$.

Найдем скорость первого велосипедиста: $v=\frac{x}{t}=\frac{54}{3}=18$ (км/ч).

Ответ: 18.

B6. $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\geq 1$.

Оценим выражения $\left(4x-x^2-3\right)$ и $\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)$:

1) $4x-x^2-3=-\left(x^2-4x+4\right)+1=-\left(x-2\right)^2+1\leq 1$ при $x\in\boldsymbol{R}$;

2) $0\leq\cos^2\pi x\leq 1$; $1\leq\cos^2\pi x+1\leq 2$. Поскольку функция $y=\log_2 x$ возрастает на области определения, то $\log_2 1\leq\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\leq\log_2 2$, т. е. $0\leq\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\leq 1$;

3) поскольку каждый множитель в произведении $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)$ не превосходит единицы, то и значение данного произведения не может быть больше 1.

Тогда неравенство $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\geq 1$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}4x-x^2-3=1,\\ \log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\ \cos^2\pi x=1;\end{cases}\quad x=2.$$

Таким образом, единственным решением исходного неравенства является число 2.

Ответ: 1.

ТЕСТ 25

Часть А

А1. $0{,}056:(2{,}05-1{,}98)\cdot 6{,}9=0{,}056:0{,}07\cdot 6{,}9=0{,}8\cdot 6{,}9=5{,}52.$

Ответ: 3.

А2. Найдем $a_{n+1}=5(n+1)+3=5n+8$. Тогда $d=a_{n+1}-a_n=(5n+8)-(5n+3)=5.$

Ответ: 1.

А3. Умножим обе части неравенства $\frac{7x}{3}-\frac{11(x+3)}{6}\geq\frac{3x-1}{5}-\frac{13-x}{2}$ на 30 и получим:

$$10\cdot 7x-5\cdot 11(x+3)\geq 6\cdot(3x-1)-15\cdot(13-x);\ 70x-55x-165\geq 18x-6-195+15x;$$

$$-18x\geq -36;\quad x\leq 2;\quad x\in(-\infty;\ 2].$$

Ответ: 4.

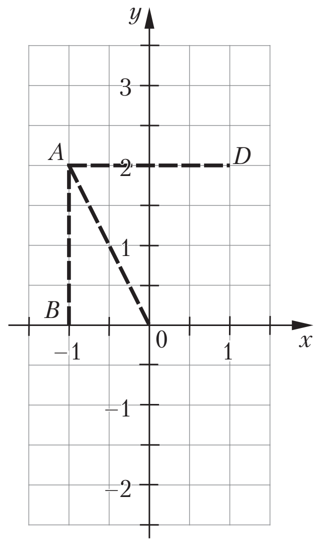
А4. Пусть точка A имеет координаты $(x;\ 2)$. Тогда по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABO получим:

$$AO^2=AB^2+BO^2,\text{ т. е. }\left(\sqrt{5}\right)^2=2^2+x^2;\ x=\pm 1.$$

Так как точка A расположена во второй четверти, то ее абсцисса отрицательна, т. е. $x=-1$.

Поскольку точка D симметрична точке $A(-1;\ 2)$ относительно оси ординат, то ординаты этих точек равны, а абсциссы противоположны, т. е. точка D имеет координаты $(1;\ 2)$.

Ответ: 2.



А5. Так как $AB\parallel EC$, то треугольники ABD и ECD подобны по двум углам.

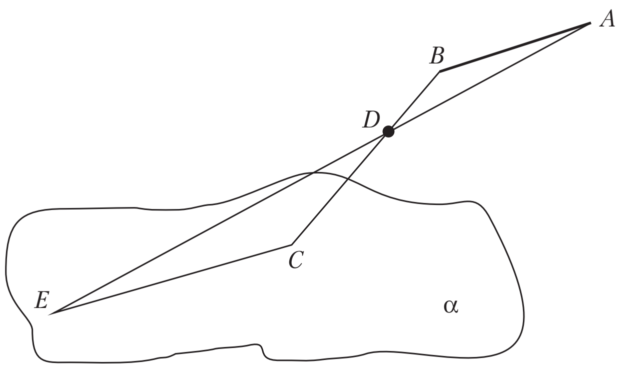
Тогда $\frac{AB}{EC}=\frac{BD}{CD};\ \frac{15}{EC}=\frac{3}{5};\ EC=25.$

Ответ: 5.

А6. $\left(a^{-\frac{1}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{1}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}\right)=a^{-\frac{1}{5}}(1-a)\cdot a^{-\frac{4}{5}}(a-1)=$

$=-\frac{(a-1)^2}{a}\Bigg|_{a=10}=-\frac{81}{10}=-8{,}1.$

Ответ: 3.



А7. Пусть r — радиус окружности, тогда сторона шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна $b_6=r$, а сторона шестиугольника, описанного около этой окружности, равна $a_6=\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Воспользуемся формулой площади правильного шестиугольника $S_6=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ и составим уравнение

$$\frac{3\cdot\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}-=14\sqrt{3};\ 2r^2+\frac{3r^2}{2}=14;\ r^2=4.$$

Площадь круга, ограниченного данной окружностью, равна $S=\pi r^2=4\pi$.

Ответ: 1.

A8. Найдем значение выражения $45\frac{1}{2}+22\frac{3}{4}+11\frac{3}{8}+\ldots$, представляющего собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=45\frac{1}{2}$ и знаменателем $q=\dfrac{22\frac{3}{4}}{45\frac{1}{2}}=\frac{91}{4}:\frac{91}{2}=\frac{1}{2}$.

По формуле $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ получим $S=\dfrac{45\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=91$.

Тогда исходное уравнение принимает вид $3^{2x-5}+3^{2x-7}+3^{2x-9}=91$; $3^{2x-9}\left(3^4+3^2+1\right)=91$; $3^{2x-9}\cdot 91=91$; $3^{2x-9}=1$; $2x-9=0$; $x=4{,}5$.

Ответ: 4.

A9. Так как дискриминант квадратного трехчлена x^2-4x+7 — отрицательный, а первый коэффициент — положительный, то $x^2-4x+7>0$ при $x\in\boldsymbol{R}$.

Найдем наименьшее значение выражения $x^2-4x+7=x^2-4x+4+3=(x-2)^2+3\geq 3$ при $x\in\boldsymbol{R}$. Тогда $\dfrac{1}{x^2-4x+7}=\dfrac{1}{(x-2)^2+3}\leq\dfrac{1}{3}$ при $x\in\boldsymbol{R}$. Значит, $\dfrac{3}{x^2-4x+7}\leq 1$.

То есть $0<f(x)\leq 1$. Множеством значений данной функции является промежуток $(0;\,1]$.

Ответ: 5.

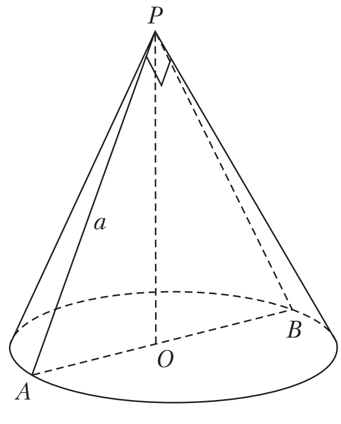
Часть B

B1. Так как $1+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi x}{4}\geq 1$ при допустимых значениях переменной, то неравенство равносильно системе $\begin{cases}x^2-x-12\leq 0,\\ \sin\dfrac{\pi x}{4}\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-4)(x+3)\leq 0,\\ \dfrac{\pi x}{4}\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{cases}$ $\begin{cases}x\in[-3;\,4],\\ x\neq 4n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{cases}$ $x\in[-3;\,0)\cup(0;\,4)$.

Таким образом, неравенство имеет шесть целых решений, это числа $-3;\,-2;\,-1;\,1;\,2;\,3$.

Ответ: 6.

B2. Пусть образующая конуса равна a. Так как осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник PBA, то $AB=a\sqrt{2}$. Тогда радиус основания конуса равен: $r=\frac{1}{2}AB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



По формуле $S_{\text{полн}}=\pi r(r+l)$ получим

$$S_{\text{полн}}=\pi\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+a\right)=\frac{\pi a^2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+2\right)}{4}=\frac{\pi a^2\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}.$$

По условию задачи $a=2\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$, тогда

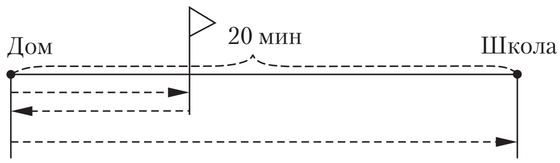
$$S_{\text{полн}}=\frac{\pi\cdot\dfrac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{\pi}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}=2.$$

Ответ: 2.

B3. $\log_3\sin^5\dfrac{\pi}{8}\cdot\log_{\sin\frac{\pi}{8}}9=5\log_3\sin\dfrac{\pi}{8}\cdot\log_{\sin\frac{\pi}{8}}9=5\cdot\dfrac{1}{\log_{\sin\frac{\pi}{8}}3}\cdot\log_{\sin\frac{\pi}{8}}9=5\cdot\dfrac{\log_{\sin\frac{\pi}{8}}9}{\log_{\sin\frac{\pi}{8}}3}=5\cdot\log_3 9=5\cdot 2=10.$

Ответ: 10.

B4. Для того чтобы взять из дома ручку, Пете пришлось проделать «лишний» путь, равный удвоенной части пути, которую он прошел, когда вспомнил. В этом случае на весь путь у него уйдет $20+10+8=38$ (мин).



То есть на «лишний» путь затрачено «лишних» 18 мин. Тогда на путь, пройденный от места, когда Петя вспомнил о забытой ручке, до дома, было затрачено $18:2=9$ (мин).

Так как на весь путь затрачивается 20 мин, то Петя прошел $\frac{9}{20}=45$ % всего пути.

Ответ: 45.

B5. $x^2-x=\sqrt{2x-1}-1$; $x^2-x+1=\sqrt{2x-1}$; $4x^2-4x+4=4\sqrt{2x-1}$; $(2x-1)^2+3=4\sqrt{2x-1}$. Пусть $t=\sqrt{2x-1}$, тогда уравнение принимает вид

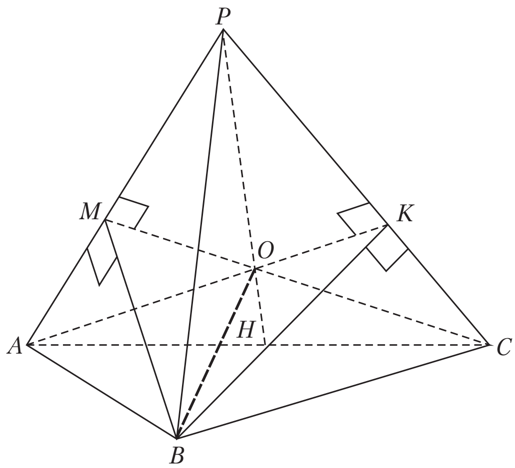
$$t^4-4t+3=0;\quad t^4+4t^2+4-4t^2-4t-1=0;\quad \left(t^2+2\right)^2-(2t+1)^2=0;\quad \left(t^2-2t+1\right)\left(t^2+2t+3\right)=0.$$

Уравнение $t^2+2t+3=0$ не имеет корней $(D<0)$.

Корнем уравнения $t^2-2t+1=0$ является $t=1$. Тогда $\sqrt{2x-1}=1$; $x=1$.

Ответ: 1.

B6. Так как $PC\perp(ABK)$ и $BO\subset(ABK)$, то $BO\perp PC$. Аналогично доказывается, что $BO\perp AP$.



Таким образом, прямая BO перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости грани APC, значит, $BO\perp(APC)$.

Пусть P — вершина пирамиды, а треугольник ABC — ее основание. Найдем объем пирамиды: $V=\frac{512\sqrt{23}}{3}$.

Пусть B — вершина пирамиды, треугольник APC — ее основание. Так как $BO\perp(APC)$, то BO — высота пирамиды и $V=\frac{1}{3}\cdot S_{APC}\cdot BO$. Так как $S_{APC}=128\sqrt{2}$, то

$$\frac{512\sqrt{23}}{3}=\frac{1}{3}\cdot 128\sqrt{2}\cdot BO;\ BO=2\sqrt{46};\ BO^2=184.$$

Ответ: 184.

ТЕСТ 26

Часть А

А1. Данная фигура состоит из 28 равных квадратов.

На первом рисунке заштриховано 10 квадратов, т. е. $\frac{8}{28}=\frac{2}{7}$ всей фигуры.

На втором рисунке — 3 квадрата, или $\frac{3}{28}$ всей фигуры.

На третьем и четвертом рисунках — 10 квадратов, т. е. $\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$ всей фигуры.

На пятом рисунке — 12 квадратов, т. е. $\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$ всей фигуры.

Ответ: 5.

А2. Число –3,6 заключено между числами –4 и –3.

Ответ: 4.

А3. $\left(\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}}=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{\log_2 7}}=7^{\frac{1}{\log_2 7}}=7^{\log_7 2}=2.$

Ответ: 2.

А4. Пусть в школе x учащихся, тогда спортом занимается $(0,88x)$ человек, а футболом занимается $0,75\cdot 0,88x=0,66x$ человек, что составляет 66 % учащихся школы.

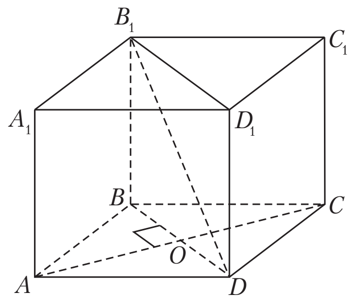
Ответ: 4.

А5. Так как функция является периодической с периодом, равным 2, то $f(7,3)=f(3,3+2\cdot 2)=f(3,3)=10.$

Поскольку функция является нечетной, то $f(-7,3)=-f(7,3)=-10.$

Ответ: 4.

А6. Так как призма является правильной, то $ABCD$ — квадрат. Поскольку площадь квадрата равна 16, то его сторона равна 4.



Прямые AA_1 и B_1D являются скрещивающимися. Прямая B_1D лежит в плоскости BB_1D, а прямая AA_1 параллельна этой плоскости. Тогда расстояние между прямыми AA_1 и B_1D равно расстоянию между прямой AA_1 и плоскостью BB_1D, т. е. длине отрезка AO.

Так как отрезок AC является диагональю квадрата $ABCD$, то

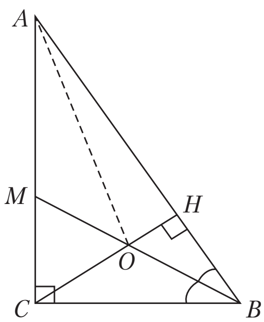
$$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

Ответ: 4.

А7. $\begin{cases}\lg\left((2x-1)(2x-3)\right)>\lg(3x-3),\\ 2x-1>0,\\ 2x-3>0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2-11x+6>0,\\ x>1,5;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(2;+\infty),\\ x>1,5;\end{cases}$ $x\in(2;+\infty).$

Ответ: 1.

А8. В прямоугольном треугольнике ABC по теореме Пифагора найдем гипотенузу $AB=10$, а по формуле $h=\frac{ab}{c}$ — высоту $CH=\frac{6\cdot 8}{10}=4,8.$



Из прямоугольного треугольника BCH найдем $BH=3,6$, тогда $AH=6,4.$

В треугольнике BCH воспользуемся теоремой о биссектрисе треугольника и получим $\frac{CO}{OH}=\frac{CB}{BH}$; $\frac{CO}{OH}=\frac{6}{3,6}$; $\frac{CO}{OH}=\frac{5}{3}.$

Найдем площадь треугольника ACH: $S_{ACH}=\frac{CH\cdot AH}{2}=\frac{4,8\cdot 6,4}{2}=15,36.$

Так как $\dfrac{CO}{OH}=\dfrac{5}{3}$, то $S_{AOC}=\dfrac{5}{8}S_{ACH}=\dfrac{5}{8}\cdot 15{,}36=9{,}6.$

Ответ: 3.

А9. Решим уравнение $4\sin^2 x+7\cos 2x=1$ различными способами.

<u>I способ.</u>

$$4\sin^2 x+7\cos 2x=1;\ 4\sin^2 x+7\left(1-2\sin^2 x\right)=1;\ -10\sin^2 x=-6;\ \sin^2 x=0{,}6;\ \sin x=\pm\sqrt{0{,}6};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^k\arcsin\sqrt{0{,}6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z},\\ x=(-1)^{k+1}\arcsin\sqrt{0{,}6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};\end{array}\right.\quad x=\pm\arcsin\sqrt{0{,}6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

<u>II способ.</u>

$$4\sin^2 x+7\cos 2x=1;\ 4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+7\cos 2x=1;\ \cos 2x=-\frac{1}{5};\ x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};$$

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z};$$

<u>III способ.</u>

$$4\sin^2 x+7\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=1;\ 4\sin^2 x-6\cos^2 x=0;\ \mathrm{tg}^2 x=\frac{3}{2};\ x=\pm\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Проверим, являются ли числа вида $\pm\mathrm{arcctg}\sqrt{1{,}5}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$, корнями исходного уравнения. При $x=\pm\mathrm{arcctg}\sqrt{1{,}5}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$, получим

$$\mathrm{tg}^2\left(\pm\mathrm{arcctg}\sqrt{1{,}5}+\pi k\right)=\mathrm{tg}^2\left(\pm\mathrm{arcctg}\sqrt{1{,}5}\right)=\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arcctg}\sqrt{1{,}5}\right)=\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\left(\mathrm{arcctg}\sqrt{1{,}5}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1{,}5}\right)^2}=\frac{1}{1{,}5}=\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}.$$

Ответ: 4.

Часть В

В1. $$\frac{36^n}{3^{2n-3}\cdot 2^{2n+2}}:\frac{2^{2n-1}\cdot 3^{n+1}}{6\cdot 12^n}=\frac{36^n}{3^{2n-3}\cdot 2^{2n+2}}\cdot\frac{6\cdot 12^n}{2^{2n-1}\cdot 3^{n+1}}=\frac{6^{2n}}{3^{2n}\cdot 3^{-3}\cdot 2^{2n}\cdot 2^2}\cdot\frac{6\cdot 3^n\cdot 4^n}{2^{2n}\cdot 2^{-1}\cdot 3^n\cdot 3}=$$

$$=\frac{6^{2n}}{6^{2n}\cdot 3^{-3}\cdot 2^2}\cdot\frac{2\cdot 3^n\cdot 2^{2n}}{2^{2n}\cdot 2^{-1}\cdot 3^n}=\frac{1}{3^{-3}\cdot 2^2}\cdot\frac{2}{2^{-1}}=27.$$

Ответ: 27.

В2. $$\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1;\quad \frac{4x}{x\left(4x-8+\frac{7}{x}\right)}+\frac{3x}{x\left(4x-10+\frac{7}{x}\right)}=1;\quad \frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

Пусть $t=4x-8+\dfrac{7}{x}$, тогда уравнение принимает вид

$$\frac{4}{t}+\frac{3}{t-2}=1;\quad \frac{4(t-2)+3t}{t(t-2)}=1;\quad \frac{7t-8}{t(t-2)}=1;\quad \begin{cases} t^2-9t+8=0,\\ t\neq 0,\\ t\neq 2;\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l} t=1,\\ t=8.\end{array}\right.$$

То есть $$\left[\begin{array}{l} 4x-8+\frac{7}{x}=1,\\ 4x-8+\frac{7}{x}=8;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} 4x-9+\frac{7}{x}=0,\\ 4x-16+\frac{7}{x}=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l} 4x^2-9x+7=0,\\ 4x^2-16x+7=0.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней $(D<0)$.

Сумма корней второго уравнения равна $\dfrac{16}{4}=4.$

Ответ: 4.

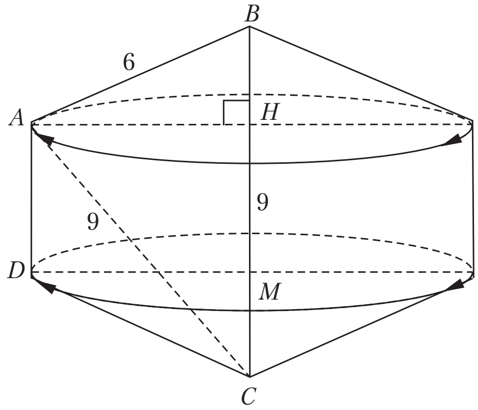
B3. Пусть $t=(x-3)^2$, тогда неравенство принимает вид $t+\frac{1}{t}>2$. По свойству двух положительных взаимно обратных чисел получим, что неравенство $t+\frac{1}{t}>2$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} t\neq 0, \\ t\neq 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} (x-3)^2\neq 0, \\ (x-3)^2\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 3, \\ x\neq 2, \\ x\neq 4. \end{cases}$

На промежутке $[1;\,25]$ находится 22 целых решения данного неравенства.

Ответ: 22.

B4. При вращении равнобедренной трапеции вокруг большего основания образовались два равных конуса и цилиндр, радиусы оснований которых равны.



По формуле Герона найдем площадь треугольника ABC:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{12\cdot 3\cdot 3\cdot 6}=18\sqrt{2}.$$

Тогда $AH=\frac{2S_{ABC}}{BC}=4\sqrt{2}$ и $BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{36-32}=2.$

Значит, $HM=BC-2BH=5.$

Тогда $V=2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot 2+\pi\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot 5=\pi\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}+5\right)=\frac{608\pi}{3}.$

Значение искомого выражения равно 608.

Ответ: 608.

B5. Воспользуемся формулой суммы m членов арифметической прогрессии и получим

$$\frac{S_{3m}}{S_{2m}-S_m}=\frac{\frac{2a_1+d(3m-1)}{2}\cdot 3m}{\frac{2a_1+d(2m-1)}{2}\cdot 2m-\frac{2a_1+d(m-1)}{2}\cdot m}=\frac{(2a_1+d(3m-1))\cdot 3}{(2a_1+d(2m-1))\cdot 2-(2a_1+d(m-1))}=$$

$$=\frac{(2a_1+d(3m-1))\cdot 3}{4a_1+2d(2m-1)-2a_1-d(m-1)}=\frac{(2a_1+d(3m-1))\cdot 3}{2a_1+d(3m-1)}=3.$$

Ответ: 3.

B6. Оценим левую и правую части данного уравнения.

Поскольку $\left|x^2-9\right|\geq 0$ при $x\in\boldsymbol{R}$, то $\pi^{\left|x^2-9\right|}\geq 1$ при $x\in\boldsymbol{R}$.

С другой стороны, $-1\leq\sin\frac{\pi x}{2}\leq 1$ при $x\in\boldsymbol{R}$.

Таким образом, равенство возможно только в том случае, когда и левая и правая части уравнения равны единице, т. е. $\begin{cases} \pi^{\left|x^2-9\right|}=1, \\ \sin\frac{\pi x}{2}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left|x^2-9\right|=0, \\ \sin\frac{\pi x}{2}=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3, \\ \sin\frac{\pi x}{2}=1. \end{cases}$

При $x=3$ получим, что $\sin\frac{3\pi}{2}=-1\neq 1$, а при $x=-3$ имеем $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1.$

То есть уравнение имеет единственный корень, равный -3.

Ответ: -3.

ТЕСТ 27

Часть А

А1. Так как собственная скорость лодки x км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч, то скорость лодки по течению реки равна $(x+2)$ км/ч, а против течения реки — $(x-2)$ км/ч. За 5 ч по течению реки лодка проплыла $5\cdot(x+2)$ км, а за 2 ч против течения реки — $2\cdot(x-2)$ км. Так как длина всего участка пути равна 50 км, то условию задачи соответствует уравнение $(x+2)\cdot 5+(x-2)\cdot 2=50$.

Ответ: 3.

А2. 1) $\frac{2}{7}\cdot 14=4$;
2) $B=4:0{,}4=10$.

Ответ: 1.

А3. Воспользуемся формулой разности квадратов и получим:

$$548^2-452^2=(548-452)(548+452)=96\cdot 1000=96\,000.$$

Ответ: 5.

А4. Так как график искомой функции вида $y=kx+b$ не пересекает график функции $y=4x+7$, то $k=4$ и функция имеет вид $y=4x+b$.

График функции проходит через точку $M(-2;\,3)$, значит, $3=4\cdot(-2)+b$; $b=11$.

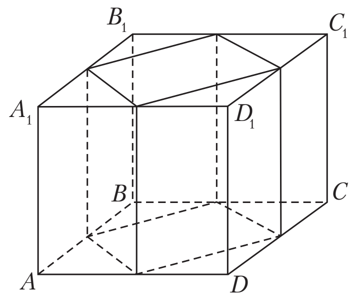
То есть искомая функция имеет вид $y=4x+11$.

Ответ: 2.

А5. Неравенство $\sqrt{3-3^x}\le 0$ равносильно уравнению $3-3^x=0$; $3^x=3$; $x=1$.

Ответ: 4.

А6. Объем куба равен $4^3=64$.



Найдем объем образовавшейся четырехугольной призмы.

Высота призмы равна ребру куба, а сторона основания равна половине диагонали куба. Тогда ее объем равен $V=\left(2\sqrt{2}\right)^2\cdot 4=32$.

Найдем объем оставшейся части куба: $64-32=32$.

Ответ: 2.

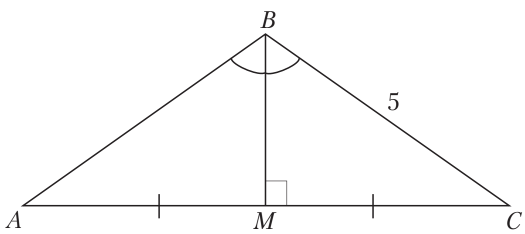
А7. Область определения данной функции совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases}9-3^{x^2-x}\ge 0,\\ x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}3^{x^2-x}\le 9,\\ x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-x-2\le 0,\\ x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in[-1;\,2],\\ x>0;\end{cases}\quad x\in(0;\,2].$$

Ответ: 5.

А8. По теореме косинусов $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$; $AC^2=25+25-2\cdot 5\cdot 5\cdot(-0{,}28)=64$; $AC=8$.

По свойству равнобедренного треугольника



$$AM=MC=\frac{1}{2}AC=4.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BMC получим $BM=3$. Тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BM=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=12$.

С другой стороны, $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h$, где h — высота, проведенная к боковой стороне треугольника. То есть $12=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h$; $h=4{,}8$.

Ответ: 3.

A9. Запишем уравнение в виде $\sqrt{2x+3}=\sqrt{7-x}+\sqrt{4-x}$ и возведем обе части в квадрат:

$$2x+3=7-x+2\cdot\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{4-x}+4-x;\quad 2x-4=\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{4-x};$$

$$(2x-4)^2=(7-x)(4-x);\quad 4x^2-16x+16=28-7x-4x+x^2;\quad 3x^2-5x-12=0;\ \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-1\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

С помощью проверки убеждаемся, что корнем уравнения является число 3.

Ответ: 3.

Часть B

B1. $\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right)=\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\left(2\pi+\frac{13\pi}{11}\right)\right)=\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{11}\right)=\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{11}\right)\right)=$

$=\frac{22}{\pi}\arcsin\left(-\cos\frac{2\pi}{11}\right)=-\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{11}\right)=-\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{22}\right)\right)=-\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{22}\right)=$

$=-\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{22}\right)=-\frac{22}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{22}=-7.$

Ответ: –7.

B2. Данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cdot 4^{2x}-17\cdot4^x+8=0,\\ 1-2x\ge0;\end{cases}\\ 1-2x=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}4^x=8,\\ 4^x=\frac{1}{2};\end{array}\right.\\ x\le\frac{1}{2};\end{cases}\\ x=\frac{1}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1{,}5,\\ x=-\frac{1}{2};\end{array}\right.\\ x\le\frac{1}{2};\end{cases}\\ x=\frac{1}{2};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2},\\ x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

Сумма корней уравнения равна нулю.

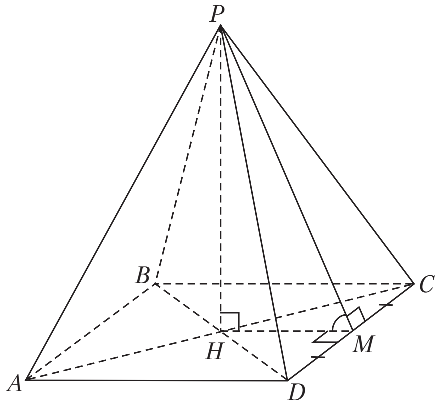
Ответ: 0.

B3. Воспользуемся формулой $S_{\text{осн}}=S_{\text{бок}}\cdot\cos\alpha$.

Тогда $S_{\text{осн}}=36\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=36$. Так как пирамида является правильной, то ее основание — квадрат. То есть $AB=6$.

В прямоугольном треугольника PMH известно, что $HM=\frac{1}{2}AB=3$ и $\angle PMH=45°$, тогда $PH=3$.

Найдем объем пирамиды: $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot PH$; $V=\frac{1}{3}\cdot36\cdot3=36$.



Ответ: 36.

B4. $|x-12|\le\frac{x}{12-x}$; $|x-12|+\frac{x}{x-12}\le0$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>12,\\ x-12+\frac{x}{x-12}\le0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<12,\\ -(x-12)+\frac{x}{x-12}\le0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>12,\\ \frac{(x-12)^2+x}{x-12}\le0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<12,\\ \frac{-(x-12)^2+x}{x-12}\le0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>12,\\ \frac{x^2-23x+144}{x-12}\le0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<12,\\ \frac{x^2-25x+144}{x-12}\ge0;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>12,\\ x<12;\end{cases}\\ \begin{cases}x<12,\\ \dfrac{(x-9)(x-16)}{x-12}\ge 0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \begin{cases}x<12,\\ \dfrac{(x-9)(x-16)}{x-12}\ge 0;\end{cases} \quad \begin{cases}x<12,\\ x\in[9;\,12)\cup[16;+\infty);\end{cases} \quad x\in[9;\,12).$$

Сумма целых решений неравенства равна $9+10+11=30$.

Ответ: 30.

B5. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{7\pi}{5}-\dfrac{\pi x}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{5}+\pi x\right)$; $\operatorname{ctg}\left(\pi+\left(\dfrac{2\pi}{5}-\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\pi-\left(\dfrac{2\pi}{5}-\pi x\right)\right)$; $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2\pi}{5}-\dfrac{\pi x}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{5}-\pi x\right)=0$;

$$\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)}=0;\quad \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)}=0;$$

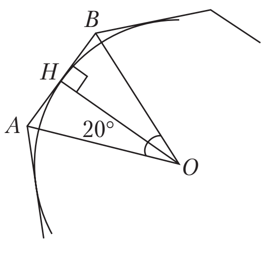
$$\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}-\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)}=0;\quad \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)}=0;\quad \begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}=0,\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi x}{2}\right)\ne 0,\\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}-\pi x\right)\ne 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}-\dfrac{\pi x}{2}\right)\ne 0,\\ \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}-\pi x\right)\ne 0;\end{cases}\quad x=1+2n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Первым положительным членом арифметической прогрессии $x_n=1+2n$ является число 1, тогда 66-м членом этой прогрессии является число $1+2\cdot 65=131$.

По формуле $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ найдем искомую сумму: $S_{66}=\dfrac{1+131}{2}\cdot 66=4356$.

Ответ: 4356.



B6. Так как правильная 9-угольная призма описана около шара, то высота призмы равна диаметру круга, вписанного в правильный 9-угольник, являющийся основанием призмы.

$\angle AOB=\dfrac{360^\circ}{9}=40^\circ$.

Из прямоугольного треугольника OBH найдем $BH=r\operatorname{tg}20^\circ$.

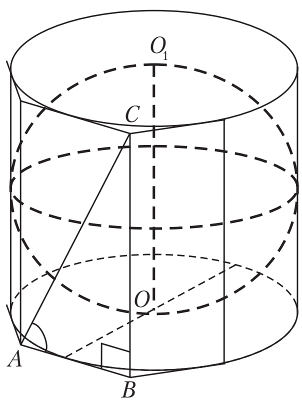
Тогда сторона основания призмы $AB=2r\operatorname{tg}20^\circ$.

В прямоугольном треугольнике ABC известно, что $CB=2r$, а $AB=2r\operatorname{tg}20^\circ$.

Тогда $\operatorname{tg}\angle CAB=\dfrac{CB}{AB}=\dfrac{2r}{2r\operatorname{tg}20^\circ}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}20^\circ}=\operatorname{ctg}20^\circ=\operatorname{tg}70^\circ$.

Таким образом, искомый угол равен 70°.

Ответ: 70.



ТЕСТ 28

Часть А

А1. Верным является утверждение $a-b<0$, поскольку число a расположено на координатной прямой левее числа b.

Ответ: 3.

А2. $\frac{1}{5}\cdot 5^{15}=5^{-1}\cdot 5^{15}=5^{-1+15}=5^{14}$.

Ответ: 2.

А3. $4\frac{1}{2}:7\frac{1}{2}=x:8\frac{1}{3}$; $\quad x=\dfrac{4\frac{1}{2}\cdot 8\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$; $\quad x=\frac{9}{2}\cdot\frac{25}{3}:\frac{15}{2}$; $\quad x=\frac{9}{2}\cdot\frac{25}{3}\cdot\frac{2}{15}$; $\quad x=5$.

Ответ: 5.

А4. По формуле $S_{\text{кр}}=\pi r^2$ найдем радиус основания цилиндра: $\pi r^2=2\pi$; $r=\sqrt{2}$.

Так как цилиндр является равносторонним, то его осевым сечением является квадрат со стороной, равной диаметру основания цилиндра.

Тогда площадь осевого сечения равна $\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$.

Ответ: 2.

А5. Область определения функции совпадает с множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases}x^2-6x-7\ge 0,\\ 2-3x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}(x-7)(x+1)\ge 0,\\ x<1{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in(-\infty;-1]\cup[7;+\infty),\\ x<1{,}5;\end{cases}\quad x\in(-\infty;-1].$$

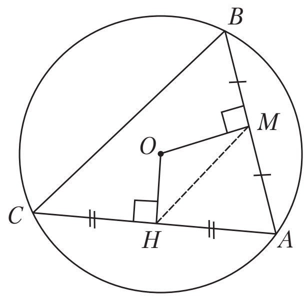
Ответ: 1.

А6. Пусть x тыс. руб. — первоначальная сумма вклада, тогда после первого года вклад стал равен $1{,}03x$ тыс. руб., а после второго года — $1{,}03\cdot(1{,}03x)=1{,}0609x$ тыс. руб.

По условию задачи составим уравнение $1{,}0609x-x=304{,}5$; $0{,}0609x=304{,}5$; $x=5000$.

Ответ: 5.

А7. Пусть $AB=9$, $AC=17$. Длина отрезка HM, соединяющего середины хорд AB и AC, равна 5.



В треугольнике ABC отрезок HM является средней линией, значит, $BC=10$.

По теореме косинусов найдем косинус угла BAC:

$$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC};\quad \cos\angle BAC=\frac{81+289-100}{2\cdot 9\cdot 17}=\frac{15}{17}.$$

По основному тригонометрическому тождеству найдем $\sin\angle BAC=\frac{8}{17}$.

Так как окружность описана около треугольника ABC, то

$$2R=\frac{CB}{\sin\angle BAC};\quad R=\frac{5\cdot 17}{8}=10{,}625.$$

Ответ: 2.

А8. $\begin{cases}\dfrac{3^{x-y}}{3^{xy}}=\dfrac{1}{3},\\ 2^x\cdot 2^y=32;\end{cases}$ $\begin{cases}3^{x-y-xy}=3^{-1},\\ 2^{x+y}=2^5;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y-xy=-1,\\ x+y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x-(5-x)-x(5-x)=-1,\\ y=5-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-3x-4=0,\\ y=5-x;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=-1;\end{array}\right.\\ y=5-x;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1,\\ y=6.\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: 4.

A9. $2\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x-3=0$; $2\operatorname{tg}x-\dfrac{2}{\operatorname{tg}x}-3=0$; $2\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x-2=0$; $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=2;\\ \operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Так как $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$, то $\operatorname{tg}x<0$, значит, $\operatorname{tg}x=-\dfrac{1}{2}$.

По формуле $\operatorname{tg}^2x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ получим $\cos^2 x=\dfrac{4}{5}$.

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла: $\cos 2x=2\cos^2 x-1$; $\cos 2x=2\cdot\dfrac{4}{5}-1=0{,}6$.

Ответ: 3.

Часть В

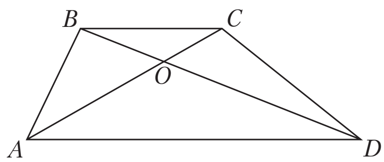
В1. Так как x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+x+c=0$, то по теореме Виета $x_1+x_2=-1$ и $x_1\cdot x_2=c$.

Преобразуем равенство: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{1}{2}$. Тогда $\dfrac{-1}{c}=\dfrac{1}{2}$; $c=-2$.

При найденном значении c исходное уравнение имеет корни.

Ответ: –2.

В2. Поскольку треугольники BOC и DOA подобны, то $\dfrac{S_{OBC}}{S_{ODA}}=\left(\dfrac{BC}{AD}\right)^2=\dfrac{9}{16}$.



Так как $S_{ABO}=S_{COD}$ и $S^2_{ABO}=S_{COB}\cdot S_{AOD}$, то

$$S^2_{ABO}=\frac{9}{16}\cdot S_{AOD}\cdot S_{AOD};\quad S_{AOD}=\frac{4}{3}S_{ABO}$$

$$\text{и}\quad S_{OBC}=\frac{9}{16}S_{AOD}=\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{3}S_{ABO}=\frac{3}{4}S_{ABO}.$$

$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}$; $S_{ABCD}=S_{ABO}+\dfrac{3}{4}S_{ABO}+S_{ABO}+\dfrac{4}{3}S_{ABO}$; $98=\dfrac{49}{12}S_{ABO}$; $S_{ABO}=24$.

Ответ: 24.

В3. $4^{\log_{0,25}0,1}+\log_3\dfrac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\log_{\frac{1}{9}}\dfrac{1}{12-2\sqrt{35}}=4^{\log_4 10}+\log_3\dfrac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\log_9\left(12-2\sqrt{35}\right)=$

$=10+\log_3\dfrac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\log_{3^2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2=10+\log_3\dfrac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\log_3\left|\sqrt{7}-\sqrt{5}\right|=$

$=10+\log_3\dfrac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\log_3\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)=10+\log_3\left(\dfrac{81}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\right)=10+\log_3 81=10+4=14.$

Ответ: 14.

В4. Пусть $AB=12$, $BC=8$ и $\angle CAB=x$, $\angle ACB=2x$.

По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle CAB};\quad \frac{12}{\sin 2x}=\frac{8}{\sin x};$$

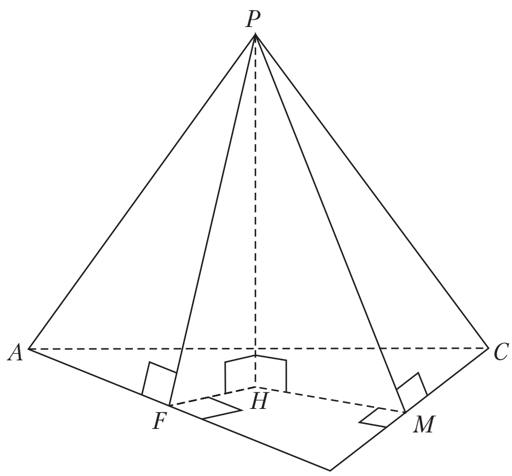
$$\frac{12}{2\sin x\cos x}=\frac{8}{\sin x};\quad \cos x=\frac{3}{4}.$$

Воспользуемся теоремой косинусов и получим

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC;$$

$$64=144+AC^2-2\cdot 12\cdot AC\cdot\frac{3}{4};\quad AC^2-18\cdot AC+80=0.$$

То есть $AC=8$ или $AC=10$. Если $AC=8$, то треугольник ABC — равнобедренный, тогда $\angle CAB=\angle ABC$, что противоречит условию задачи (треугольник ABC не является прямоугольным). Значит, $AC=10$.



По формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ найдем площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC}=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=15\sqrt{7}.$$

Тогда радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен $r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{15\sqrt{7}}{15}=\sqrt{7}$.

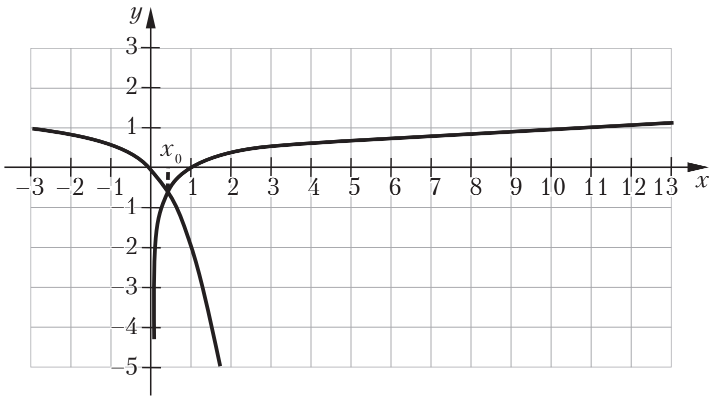
Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание пирамиды окружности, и $S_{осн}=S_{бок}\cdot\cos\varphi$, где φ — угол наклона боковых граней к основанию пирамиды. Тогда $\cos\varphi=\frac{15\sqrt{7}}{60}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

В прямоугольном треугольнике PHM известно, что $\cos\angle PMH=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $HM=r=\sqrt{7}$. Тогда $PH=3$ и объем пирамиды равен $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot PH$; $V=\frac{1}{3}\cdot 15\sqrt{7}\cdot 3=15\sqrt{7}$.

Значение искомого выражения равно 105.

Ответ: 105.

B5. Запишем неравенство в виде $\lg x>1-3^x$ и найдем, при каких значениях аргумента график функции $y=\lg x$ расположен выше графика функции $y=1-3^x$.

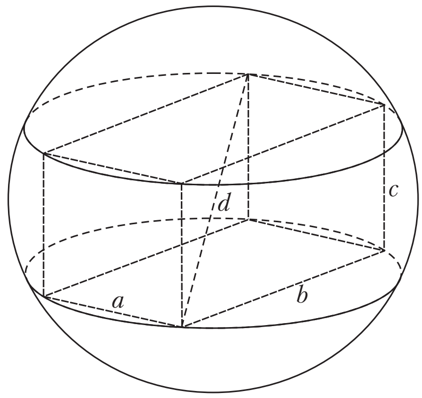


Неравенство выполняется при $x\in(x_0;+\infty)$. Так как $0<x_0<1$, то все целые числа из промежутка $[2;100]$ удовлетворяют данному неравенству.

Таким образом, неравенство имеет 99 целых решений.

Ответ: 99.

B6. Пусть a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда, а d — его диагональ. Так как диагональ прямоугольного параллелепипеда равна диаметру описанной около него сферы, то $d=9$. Поскольку периметр основания параллелепипеда равен 16, то $a+b=8$; $b=8-a$.



По формуле $d^2=a^2+b^2+c^2$ получим, что

$$81=a^2+(8-a)^2+c^2;\qquad c^2=-2a^2+16a+17.$$

$S_{бок}=2(a+b)c$; $S_{бок}=2\cdot 8\cdot\sqrt{-2a^2+16a+17}$.

Найдем, при каком значении a выражение $\sqrt{-2a^2+16a+17}$ принимает свое наибольшее значение.

$\sqrt{-2a^2+16a+17}=\sqrt{-2(a-4)^2+49}\le 7$, т. е. своего наибольшего значения, равного 7, выражение достигает при $a=4$.

Тогда $b=4$, $c=7$ и $V=abc=112$.

Ответ: 112.

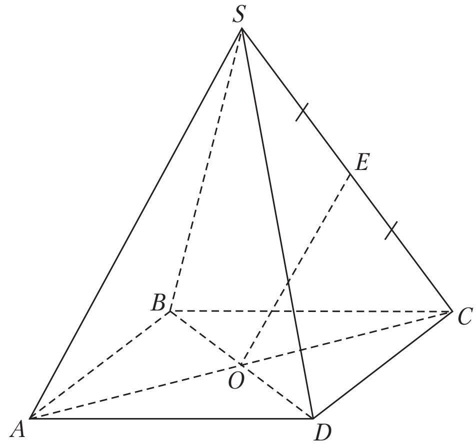
ТЕСТ 29

Часть А

А1. Так как отрезок OE является средней линией треугольника SAC, то $OE \parallel SA$.

Прямая SA лежит в плоскости грани BAS, значит, $OE \parallel (SAB)$.

Ответ: 1.



А2. Найдем первое число: $11:0{,}05=220$. Тогда второе число равно $0{,}18\cdot 220=39{,}6$.

Искомая разность равна: $220-39{,}6=180{,}4$.

Ответ: 4.

А3. Через точку $(3;-1)$ проходит график функции $y=\log_{0,(3)} x$, так как при $x=3$ $\;y=\log_{0,(3)} 3=\log_{\frac{1}{3}} 3=-1$.

Ответ: 2.

А4. Так как среднее арифметическое пяти чисел равно 2,4, то их сумма равна: $2{,}4\cdot 5=12$.

Поскольку среднее арифметическое трех других чисел равно 3,2, то их сумма равна: $3{,}2\cdot 3=9{,}6$.

Найдем сумму восьми чисел: $12+9{,}6=21{,}6$ и их среднее арифметическое: $21{,}6:8=2{,}7$.

Ответ: 5.

А5. Так как треугольник ABC — равнобедренный, то

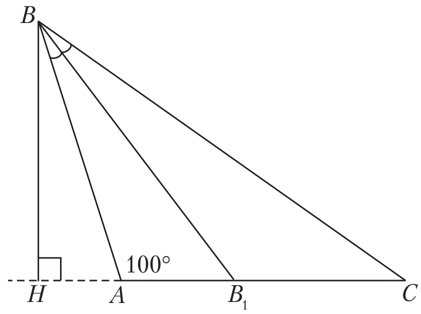
$$\angle ABC=\frac{180°-100°}{2}=40°.$$

Тогда $\angle ABB_1=\frac{1}{2}\angle ABC=20°$.

Из треугольника ABB_1 найдем: $\angle BB_1A=180°-(100°+20°)=60°$.

Тогда в прямоугольном треугольнике HBB_1 получим, что

$$\angle HBB_1=90°-60°=30°.$$



Ответ: 3.

А6. $49^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{2,5}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{9}}\cdot 49\cdot x^{0,5}$; $\left(7^2\right)^{\frac{1}{6}}\cdot 7^{2,5}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{-\frac{2}{9}}\cdot 7^2\cdot x^{0,5}$; $7^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{2,5}=7^{\frac{1}{2}-\frac{2}{9}+2}\cdot x^{0,5}$; $7^{2\frac{5}{6}}=7^{2\frac{5}{18}}\cdot x^{0,5}$; $x^{0,5}=7^{2\frac{5}{6}}:7^{2\frac{5}{18}}$;

$x^{0,5}=7^{2\frac{5}{6}-2\frac{5}{18}}$; $\;x^{0,5}=7^{\frac{5}{9}}$; $\;x=\left(7^{\frac{5}{9}}\right)^2$; $\;x=49^{\frac{5}{9}}$.

Ответ: 1.

А7. $\begin{cases}(7+x)^{-1}\ge \frac{1}{6},\\ (7+x)^2<36;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{x+7}\ge\frac{1}{6},\\ -6<x+7<6;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{x+7}-\frac{1}{6}\ge 0,\\ -13<x<-1;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{x+1}{x+7}\le 0,\\ -13<x<-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(-7;-1],\\ -13<x<-1;\end{cases}$ $x\in(-7;-1)$.

Ответ: 4.

А8. Воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму и получим

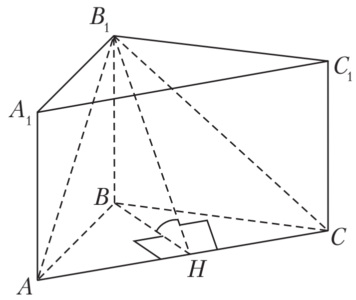
$$\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 8x)=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x);\quad \cos 4x-\cos 8x=\cos 2x+\cos 4x;\quad \cos 8x+\cos 2x=0.$$

По формулам преобразования суммы в произведение получим

$$2\cos 5x\cos 3x=0;\ \left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \cos 3x=0;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}5x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ 3x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Наименьший положительный корень уравнения равен: $\frac{\pi}{10}=18°$.

Ответ: 4.



А9. Так как призма правильная, то треугольник ABC — равносторонний. По формуле $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ найдем высоту треугольника ABC: $BH=\sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике BB_1H известно, что $BB_1=1$, $BH=\sqrt{3}$, тогда $\operatorname{tg}\angle BHB_1=\frac{BB_1}{BH}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $\angle BHB_1=30°$.

Ответ: 3.

Часть B

В1. $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1$; $\frac{16}{x^2+5x-6}-\frac{20}{x^2+5x+6}=1$. Пусть $t=x^2+5x$, тогда уравнение принимает вид $\frac{16}{t-6}-\frac{20}{t+6}=1$; $\frac{16(t+6)-20(t-6)-(t-6)(t+6)}{(t-6)(t+6)}=0$; $\frac{t^2+4t-252}{(t-6)(t+6)}=0$; $\begin{cases}t^2+4t-252=0,\\ t\neq\pm6;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-18,\\ t=14;\end{array}\right.\\ t\neq\pm6;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t=-18,\\ t=14.\end{array}\right.$

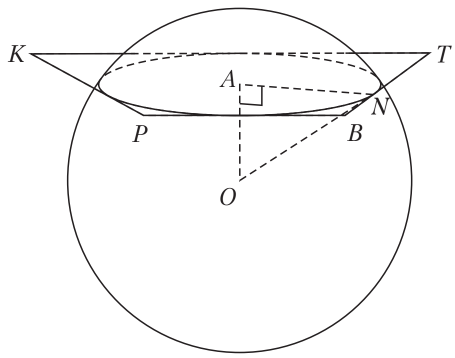
То есть $\left[\begin{array}{l}x^2+5x=-18,\\ x^2+5x=14;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2+5x+18=0,\\ x^2+5x-14=0.\end{array}\right.$ Первое уравнение системы не имеет корней $(D<0)$, сумма корней второго уравнения системы равна -5.

Ответ: -5.

В2. $5^x+|x-4|-5>5^{\log_5|x-4|}$; $\begin{cases}5^x+|x-4|-5>|x-4|,\\ |x-4|>0;\end{cases}$ $\begin{cases}5^x>5,\\ x\neq4;\end{cases}$ $\begin{cases}x>1,\\ x\neq4;\end{cases}$ $x\in(1;\,4)\cup(4;\,+\infty)$. Целыми решениями данного неравенства на промежутке $[1;\,5]$ являются числа 2; 3 и 5. Их сумма равна 10.

Ответ: 10.

В3. Шар с центром в точке O касается всех сторон равнобедренной трапеции $KPBT$ с основаниями $KT=32$ и $PB=18$.



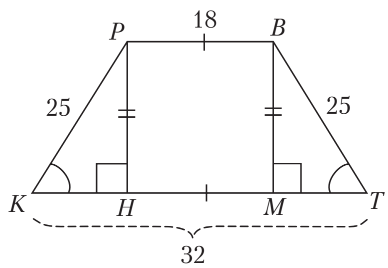
Сечение шара плоскостью трапеции есть круг, вписанный в данную трапецию.

По свойству четырехугольника, описанного около круга, $KP+BT=PB+KT$; $KP+BT=50$. Так как трапеция равнобедренная, то $KP=BT=25$.

Радиус круга, вписанного в трапецию, равен половине высоты трапеции.

$KH=\frac{KT-PB}{2}=7.$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника KPH найдем: $PH=\sqrt{KP^2-KH^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$.



Тогда радиус круга, вписанного в трапецию, равен 12.

В прямоугольном треугольнике AON известно, что $AN=12$; $ON=37$. Тогда по теореме Пифагора $AO=35$.

Ответ: 35.

В4. По свойству арифметической прогрессии

$$\lg\left(3^x-3\right)=\frac{\lg2+\lg\left(3^x+9\right)}{2};\quad 2\lg\left(3^x-3\right)=\lg\left(2\cdot\left(3^x+9\right)\right);\quad \begin{cases}\lg\left(3^x-3\right)^2=\lg\left(2\cdot\left(3^x+9\right)\right),\\ 3^x-3>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(3^x-3\right)^2=2\cdot\left(3^x+9\right),\\ 3^x>3;\end{cases}\quad \begin{cases}9^x-6\cdot 3^x+9=2\cdot 3^x+18,\\ 3^x>3;\end{cases}\quad \begin{cases}9^x-8\cdot 3^x-9=0,\\ 3^x>3;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}3^x=9,\\ 3^x=-1;\end{array}\right.\\ 3^x>3;\end{cases} 3^x=9;\ x=2.$$

Ответ: 2.

B5. Пусть x км/ч — скорость третьего велосипедиста.

Тогда $x=\dfrac{a}{t}$ и $x=\dfrac{b-a}{2}$, т. е. $\dfrac{a}{t}=\dfrac{b-a}{2}$.

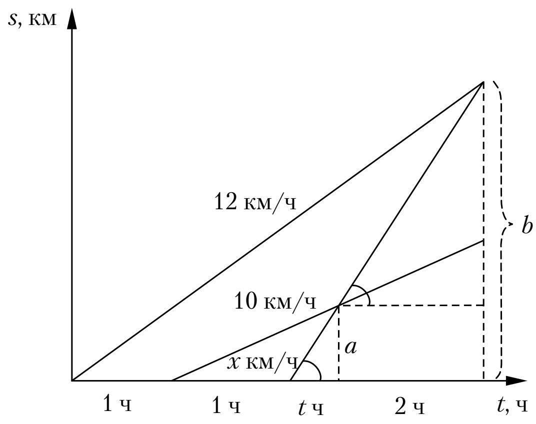
Так как скорость первого велосипедиста равна 12 км/ч, то $12=\dfrac{b}{t+4}$; $b=12t+48$.

Поскольку второй велосипедист двигался со скоростью 10 км/ч, то $10=\dfrac{a}{t+1}$; $a=10t+10$.

Значит, $\dfrac{10t+10}{t}=\dfrac{12t+48-(10t+10)}{2}$; $t^2+9t-10=0$.

$t=-10$ или $t=1$.

По смыслу задачи $t=1$, тогда $a=20$, и скорость третьего велосипедиста равна 20 км/ч.



Ответ: 20.

B6. $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\geq 1.$

Оценим выражения $\left(4x-x^2-3\right)$ и $\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)$.

1) $-x^2+4x-3=-\left(x^2-4x+4\right)+1=-(x-2)^2+1\leq 1$ при $x\in\boldsymbol{R}$;

2) $0\leq\cos^2\pi x\leq 1$; $1\leq\cos^2\pi x+1\leq 2$; $0\leq\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\leq 1$;

3) таким образом, $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\leq 1$ при $x\in\boldsymbol{R}$.

То есть неравенство $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)\geq 1$ равносильно равенству

$$\left(4x-x^2-3\right)\cdot\log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)=1,$$

которое является верным, если

$$\begin{cases}4x-x^2-3=1,\\ \log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)=1;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2,\\ \log_2\left(\cos^2\pi x+1\right)=1;\end{cases}\quad x=2.$$

Ответ: 2.

ТЕСТ 30

Часть А

А1. Воспользуемся равенствами $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ и $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$ и получим, что верным является равенство $a^{-\frac{3}{7}}=\dfrac{1}{\sqrt[7]{a^3}}$.

Ответ: 4.

А2. Число кратно 6, если оно четно и делится на 3.
Четными являются числа 852, 126, 714, 1603 и 282.
Из них на 3 делятся числа 852, 126, 714 и 282.

Ответ: 1.

А3. Пусть одна книга стоит x руб. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases}56\,000<9x<57\,000,\\80\,000<13x<81\,000;\end{cases}\quad \begin{cases}56\,000<9x<57\,000,\\80\,000<13x<81\,000;\end{cases}\quad \begin{cases}6222\frac{2}{9}<x<6333\frac{1}{3},\\6153\frac{11}{13}<x<6230\frac{10}{13};\end{cases}\quad 6222\frac{2}{9}<x<6230\frac{10}{13}.$$

Из предложенных вариантов ответов данному неравенству удовлетворяет $x=6230$.

Ответ: 3.

А4. Если парабола $y=ax^2+bx+c$ проходит через точку $B(0;-5)$, то $c=-5$ и функция принимает вид $y=ax^2+bx-5$.

Поскольку вершиной параболы является точка $A(4;11)$, то $-\dfrac{b}{2a}=4$, т. е. $b=-8a$ и $y=ax^2-8ax-5$.

График функции $y=ax^2-8ax-5$ проходит через точку $A(4;11)$, т. е. $11=a\cdot4^2-8a\cdot4-5$; $16=-16a$; $a=-1$ и $b=8$.

Таким образом, искомая функция имеет вид $y=-x^2+8x-5$.

Ответ: 3.

А5. По формуле $C=2\pi R$ найдем радиус окружности: $8\pi\sqrt{3}=2\pi R$; $R=4\sqrt{3}$.

Хорда, стягивающая дугу 120°, является стороной правильного треугольника, вписанного в эту окружность. Воспользуемся формулой $a_3=R\sqrt{3}$ и получим $a_3=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=12$.

Ответ: 4.

А6. Преобразуем равенство:

$$\frac{3^x+4^{x+1}}{3^{x-1}-2\cdot4^{x+1}}=-\frac{4}{7};\quad \frac{3^x+4^x\cdot4}{\frac{3^x}{3}-2\cdot4^x\cdot4}=-\frac{4}{7};\quad \frac{4^x\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x+4\right)}{4^x\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x-8\right)}=-\frac{4}{7};\quad \frac{0{,}75^x+4}{\frac{1}{3}\cdot0{,}75^x-8}=-\frac{4}{7};$$

$$7\cdot\left(0{,}75^x+4\right)=-4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot0{,}75^x-8\right);\quad 7\cdot0{,}75^x+28=-\frac{4}{3}\cdot0{,}75^x+32;\quad \frac{25}{3}\cdot0{,}75^x=4;\quad 0{,}75^x=\frac{12}{25}.$$

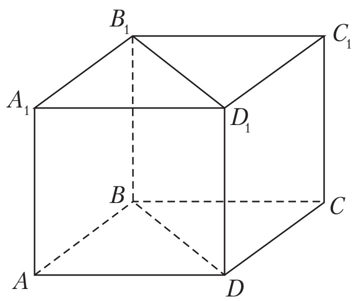
Ответ: 5.

А7. Пусть V — объем куба, тогда длина его ребра равна $a=\sqrt[3]{V}$, т. е.

$$a=\sqrt[3]{4\sqrt[4]{2}}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^9}}=\sqrt[12]{2^9}=\sqrt[4]{2^3}.$$

Диагональным сечение куба является прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{2}$ и площадью $S=a^2\sqrt{2}$; $S=\left(\sqrt[4]{2^3}\right)^2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{2}=4$.

Ответ: 3.



A8. По условию задачи $a_2 = 1{,}07 \cdot a_1$, т. е. $a_1 + d = 1{,}07 \cdot a_1$; $\quad d = 0{,}07 a_1$.

Найдем, сколько процентов от первого составляет десятый член этой прогрессии:

$$\frac{a_{10}}{a_1} \cdot 100\ \% = \frac{a_1 + 9d}{a_1} \cdot 100\ \% = \frac{a_1 + 9 \cdot 0{,}07 a_1}{a_1} \cdot 100\ \% = \frac{1{,}63 a_1}{a_1} \cdot 100\ \% = 163\ \%.$$

Ответ: 2.

A9. Сравним с 1 основание логарифма: $\sqrt{31} - \sqrt{21} \vee 1$; $\sqrt{31} \vee 1 + \sqrt{21}$; $\left(\sqrt{31}\right)^2 \vee \left(1 + \sqrt{21}\right)^2$; $31 \vee 1 + 2\sqrt{21} + 21$; $9 \vee 2\sqrt{21}$; $4{,}5 \vee \sqrt{21}$; $20{,}25 < 21$, значит, $\sqrt{31} - \sqrt{21} < 1$.

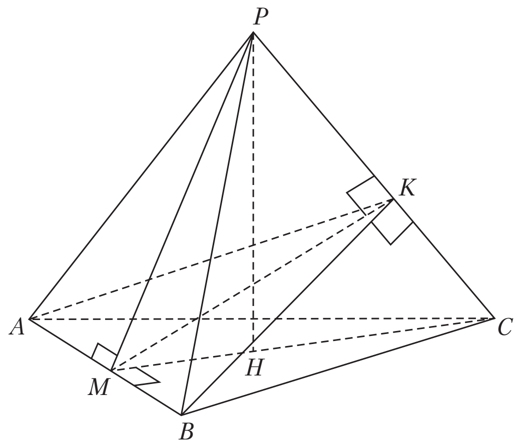
Тогда неравенство $\log_{\sqrt{31} - \sqrt{21}}\left(x^2 - 9\right) \ge 0$ равносильно:

$$\begin{cases} x^2 - 9 \le 1, \\ x^2 - 9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \le 10, \\ x^2 > 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \left[-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right], \\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty); \end{cases} \quad x \in \left[-\sqrt{10}; -3\right) \cup \left(3; \sqrt{10}\right].$$

Ответ: 4.

Часть B

B1. Поскольку в основании правильной пирамиды находится равносторонний треугольник, то по формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ найдем $MC = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ и $HC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



В треугольнике ABK известно, что его площадь равна $\frac{12}{7}$, а $AB = 2$, тогда по формуле площади треугольника получим, что $MK = \frac{2S}{AB} = \frac{12}{7}$.

В прямоугольном треугольнике MKC найдем:

$$\sin \angle KCM = \frac{MK}{MC} = \frac{\frac{12}{7}}{\sqrt{3}} = \frac{12}{7\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Поскольку пирамида правильная, то $\angle KCM$ — острый, тогда $\cos \angle KCM = \sqrt{1 - \sin^2 \angle KCM} = \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}$ и $\operatorname{tg} \angle KCM = 4\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника PHC найдем: $PH = HC \cdot \operatorname{tg} \angle KCM = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 8$.

Ответ: 8.

B2. $f'(x) = 6 + x - x^2 = -(x - 3)(x + 2)$;

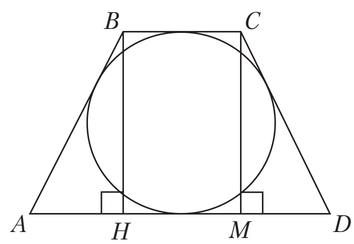
$$\begin{array}{c|ccccc} f'(x) & - & & + & & - \\ \hline f(x) & \searrow & -2 & \nearrow & 3 & \searrow \quad x \end{array}$$

$x_{\min} = -2$.

$f_{\min} = f(-2) = -12 + 2 + \frac{8}{3} + \frac{22}{3} = 0$.

Ответ: 0.

B3. Так как синусы углов при основании трапеции равны, то трапеция является равнобедренной.



Пусть h — высота трапеции.

Так как $\sin \angle A = 0{,}8$, то из прямоугольного треугольника ABH найдем, что $AB = \frac{5h}{4}$. Тогда по теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{25h^2}{16} - h^2} = \frac{3h}{4}$.

Так как трапеция описана около окружности, то $AB+CD=BC+AD$, т. е. $\frac{5h}{4}+\frac{5h}{4}=2\cdot BC+\frac{3h}{4}+\frac{3h}{4}$; $BC=HM=\frac{h}{2}$.

По формуле площади трапеции получим, что $S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot BH$; $20=\frac{2h+\frac{h}{2}}{2}\cdot h$; $h^2=16$; $h=4$.

Тогда длина средней линии трапеции равна: $\frac{AD+BC}{2}=\frac{2{,}5h}{2}=\frac{2{,}5\cdot 4}{2}=5$.

Ответ: 5.

B4. $\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{\sin 2x-1}-1=0$; $\quad\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x-\sin 2x+1}{\sin 2x-1}=0$;

$\frac{2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2}{\sin 2x-1}=0$; $\quad\begin{cases}2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0,\\ \sin 2x\neq 1;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=\sqrt{2};\end{array}\right.\\ \sin 2x\neq 1.\end{cases}$

Второе уравнение совокупности не имеет корней, так как $\sqrt{2}>1$.

Решим систему: $\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin 2x\neq 1;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ 2x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z};\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z};\end{cases}$ $\quad x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Наименьший положительный корень данного уравнения равен 135°.

Ответ: 135.

B5. $\frac{1}{2}\log^2_{\sqrt{3}}(2x+3)-\log_3(2x+3)\cdot\log_3\left(x+\sqrt{3}\right)^3=2\log^2_3\left(x+\sqrt{3}\right)$;

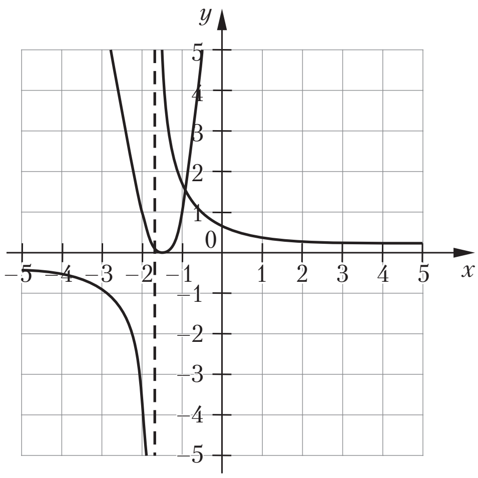
$2\log^2_3(2x+3)-3\log_3(2x+3)\cdot\log_3\left(x+\sqrt{3}\right)-2\log^2_3\left(x+\sqrt{3}\right)=0$.

Пусть $a=\log_3(2x+3)$; $b=\log_3\left(x+\sqrt{3}\right)$, тогда уравнение принимает вид $2a^2-3ab-2b^2=0$.

Рассматривая полученное уравнение как квадратное относительно a, получим $\left[\begin{array}{l}a=2b,\\ a=-\frac{b}{2}.\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}\log_3(2x+3)=2\log_3\left(x+\sqrt{3}\right),\\ \log_3(2x+3)=-\frac{1}{2}\log_3\left(x+\sqrt{3}\right);\end{array}\right.$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2x+3=\left(x+\sqrt{3}\right)^2,\\ (2x+3)^2=\frac{1}{x+\sqrt{3}};\end{array}\right.\\ x>-1{,}5;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)x=0,\\ (2x+3)^2=\frac{1}{x+\sqrt{3}};\end{array}\right.\\ x>-1{,}5.\end{cases}$



Первое уравнение совокупности имеет корни $x=0$ и $x=-2-2\sqrt{3}$. Условию $x>-1{,}5$ удовлетворяет $x=0$.

С помощью графиков функций $y=(2x+3)^2$ и $y=\frac{1}{x+\sqrt{3}}$ убедимся, что уравнение $(2x+3)^2=\frac{1}{x+\sqrt{3}}$ имеет единственный корень (поскольку графики функций имеют только одну общую точку), причем этот корень удовлетворяет условию $x>-1{,}5$.

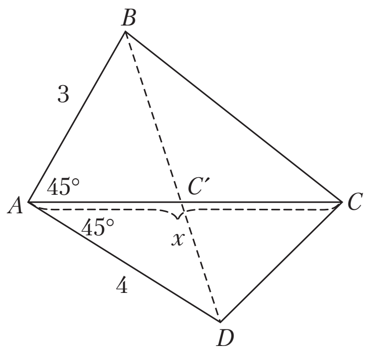
Таким образом, уравнение имеет два корня.

Ответ: 2.

В6. Представим функцию в виде

$$f(x)=\sqrt{3^2+x^2-2\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x}+\sqrt{4^2+x^2-2\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

или $f(x)=\sqrt{3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot \cos 45^\circ}+\sqrt{4^2+x^2-2\cdot 4\cdot x\cdot \cos 45^\circ}$.



Выражение $\sqrt{3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot \cos 45^\circ}$ можно рассматривать как длину стороны BC треугольника с двумя другими сторонами, равными $AB = 3$ и $AC = x$, причем угол между этими сторонами составляет 45°. Рассуждая аналогично, получим треугольник ACD, в котором

$$AC=x;\ AD=4;\ \angle CAD=45^\circ,\ \text{а}\ CD=\sqrt{4^2+x^2-2\cdot 4\cdot x\cdot \cos 45^\circ}.$$

Тогда сумму $\sqrt{3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot \cos 45^\circ}+\sqrt{4^2+x^2-2\cdot 4\cdot x\cdot \cos 45^\circ}$ можно рассматривать как сумму длин отрезков BC и CD.

Очевидно, что сумма длин отрезков BC и CD будет наименьшей, если точки B, C и D будут лежать на одной прямой, т. е. $C' \in BD$.

Из прямоугольного треугольника ABD найдем длину отрезка BD по теореме Пифагора $BD=5$.

Ответ: 5.

ТЕСТ 31

Часть А

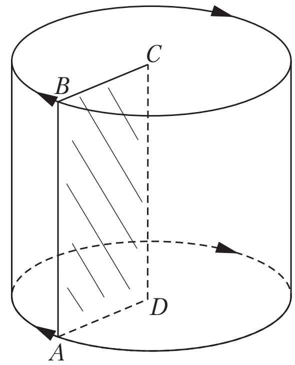
А1. Так как встреча пешеходов произошла через 1 ч 30 мин после начала движения, значит, в течение этого времени первый пешеход был ближе к A, чем второй.

Ответ: 1.

А2. При вращении квадрата вокруг одной из сторон образуется цилиндр, образующая и радиус основания которого равны 6.

По формуле $V = \pi r^2 h$ найдем объем цилиндра: $V = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi$.

Ответ: 4.



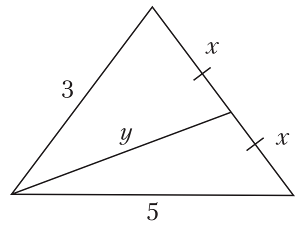
А3. $2c - \left(3c + \left(2c - (c+1)\right) + 3\right) = 2c - \left(3c + (2c - c - 1) + 3\right) =$

$= 2c - \left(3c + (c-1) + 3\right) = 2c - (3c + c - 1 + 3) = 2c - (4c + 2) = 2c - 4c - 2 = -2c - 2.$

Ответ: 5.

А4. $P_1 - P_2 = (5 + x + y) - (3 + x + y) = 2.$

Ответ: 4.

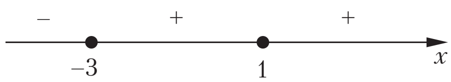


А5. $4^x \cdot 5^x = 6^x$; $\quad 20^x = 6^x$; $\quad \left(\dfrac{20}{6}\right)^x = 1$; $\quad x = 0$; $\quad 0 \in (-0{,}1;\ 0{,}5)$.

Ответ: 3.

А6. Воспользуемся методом интервалов:

$\left|x^3 - 1\right| \cdot (x+3) \le 0$



$x \in (-\infty;\ -3] \cup \{1\}$.

Ответ: 2.

А7. $\left(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}\right) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = \left(5^{2+2\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}\right) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = 5^{2\sqrt{2}} \cdot \left(5^2 - 1\right) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}} = 5^{2\sqrt{2}-1-2\sqrt{2}} \cdot \left(5^2 - 1\right) = 5^{-1} \cdot 24 = \dfrac{24}{5}.$

Ответ: 2.

А8. Так как функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 4, то $f(x_0) = f(x_0 + 4 \cdot n)$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Тогда

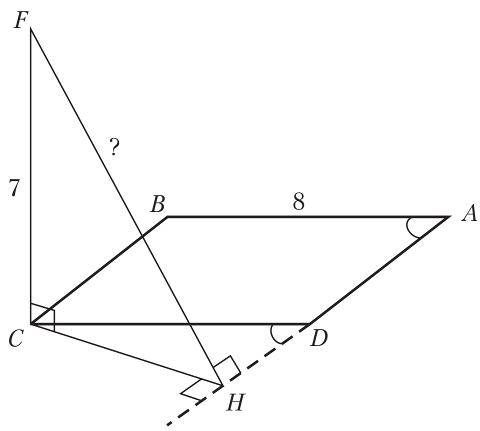
$f(7) = f(-1 + 4 \cdot 2) = f(-1) = 3$; $\quad f(-4) = f(-4 + 4 \cdot 1) = f(0) = 2$;

$$f(-10) = f\left(2 + 4 \cdot (-3)\right) = f(2) = -2.$$

Найдем значение выражения:

$$\left(f(7) + 2 \cdot f(-4)\right) \cdot f(-10) = (3 + 2 \cdot 2) \cdot (-2) = -14.$$

Ответ: 5.



А9. Расстояние от точки F до прямой AD равно длине отрезка FH.

В прямоугольном треугольнике CDH известно, что $\angle CDH = 45°$, $CD = 8$, тогда $CH = 4\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника FCH получим, что

$$FH = \sqrt{FC^2 + CH^2} = \sqrt{7^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 9.$$

Ответ: 1.

В1. $\left(\dfrac{|x|+x}{x-3}\right)^2-\dfrac{12x}{x-3}+5=0.$

1) Если $x\ge 0$, то $\left(\dfrac{2x}{x-3}\right)^2-\dfrac{12x}{x-3}+5=0;$ $\dfrac{4x^2-12x(x-3)+5(x-3)^2}{(x-3)^2}=0;$ $\dfrac{x^2-2x-15}{(x-3)^2}=0;$ $\begin{cases}x^2-2x-15=0,\\ x\ne 3;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-3;\end{array}\right.\\ x\ne 3;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-3.\end{array}\right.$ Так как $x\ge 0$, то $x=5$.

2) Если $x<0$, то $\left(\dfrac{x-x}{x-3}\right)^2-\dfrac{12x}{x-3}+5=0;$ $\begin{cases}\dfrac{12x}{x-3}=5,\\ x\ne 3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{15}{7},\\ x\ne 3;\end{cases}$ $x=-\dfrac{15}{7}$. Тогда $3x_1\cdot\dfrac{1}{x_2}=3\cdot 5\cdot\dfrac{1}{-\dfrac{15}{7}}=-7.$

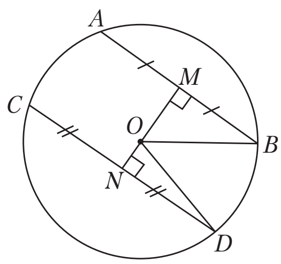
Ответ: –7.

В2. $\sqrt{2-2^{x^2}}\cdot\sin\pi x=0;$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-2^{x^2}\ge 0,\\ \sin\pi x=0;\end{cases}\\ 2-2^{x^2}=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}\le 2,\\ \pi x=\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{cases}\\ 2^{x^2}=2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\le 1,\\ x=n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{cases}\\ x^2=1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ x=n,\ n\in\boldsymbol{Z};\end{cases}\\ x=\pm 1;\end{array}\right.$ $x=-1;\ 0;\ 1.$

Таким образом, уравнение имеет три корня.

Ответ: 3.

В3. Через центр окружности проведем отрезок MN перпендикулярно хордам AB и CD.



По свойству хорд $MB=\dfrac{AB}{2}=6$ и $ND=\dfrac{CD}{2}=8$.

Пусть $ON=x$, тогда $OM=14-x$.

По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках MOB и NDO получим $OB^2=MO^2+MB^2$ и $OD^2=NO^2+ND^2$.

Поскольку $OB=OD$ как радиусы окружности, то $MO^2+MB^2=NO^2+ND^2$, т. е. $(14-x)^2+36=x^2+64;$ $\quad x=6.$

Тогда $OD^2=NO^2+ND^2;$ $\quad OD^2=36+64;$ $\quad OD=10$.

Ответ: 10.

В4. $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 7\cdot\log_7 y=1+\log_5 2,\\ 3+2\log_2 y=\log_2 5\cdot(2+3\log_5 x);\end{cases}$ $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 7^{\log_7 y}=1+\log_5 2,\\ \dfrac{3}{\log_2 5}+\dfrac{2\log_2 y}{\log_2 5}=2+3\log_5 x;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1+\log_5 2,\\ 3\log_5 2+2\log_5 y=2+3\log_5 x;\end{cases}$

$\begin{cases}\log_5 x+\log_5 y=1+\log_5 2,\\ 2\log_5 y-3\log_5 x=2-3\log_5 2;\end{cases}$ $\begin{cases}3\log_5 x+3\log_5 y=3+3\log_5 2,\\ 2\log_5 y-3\log_5 x=2-3\log_5 2;\end{cases}$ $\begin{cases}5\log_5 y=5,\\ \log_5 x+\log_5 y=1+\log_5 2;\end{cases}$

$\begin{cases}\log_5 y=1,\\ \log_5 x=\log_5 2;\end{cases}$ $\begin{cases}y=5,\\ x=2.\end{cases}$ Тогда $x_0+y_0=2+5=7$.

Ответ: 7.

В5. Сумма первых одиннадцати членов данной прогрессии равна: $S_{11}=\dfrac{b_1\left(q^{11}-1\right)}{q-1}$.

Сумма последних одиннадцати членов данной прогрессии равна: $S'_{11}=\dfrac{b_1\cdot q^{n-11}\left(q^{11}-1\right)}{q-1}$.

Так как отношение суммы первых 11 членов к сумме последних 11 членов равно $\dfrac{1}{8}$, то

$$\frac{b_1\left(q^{11}-1\right)}{q-1}:\frac{b_1\cdot q^{n-11}\left(q^{11}-1\right)}{q-1}=\frac{1}{8};\quad q^{n-11}=8.$$

Сумма всех членов данной прогрессии без первых девяти равна: $S'_{n-9}=\dfrac{b_1\cdot q^9\cdot\left(q^{n-9}-1\right)}{q-1}$.

Сумма всех членов данной прогрессии без последних девяти равна: $S_{n-9}=\dfrac{b_1\left(q^{n-9}-1\right)}{q-1}$.

Поскольку отношение суммы всех членов без первых девяти к сумме всех членов без последних девяти равно 2, то $\dfrac{b_1\cdot q^9\cdot\left(q^{n-9}-1\right)}{q-1}:\dfrac{b_1\left(q^{n-9}-1\right)}{q-1}=2;\ \ q^9=2;\ \ q=2^{\frac{1}{9}}$.

Тогда $\left(2^{\frac{1}{9}}\right)^{n-11}=8;\quad 2^{\frac{n-11}{9}}=2^3;\quad \dfrac{n-11}{9}=3;\ \ n=38.$

Ответ: 38.

B6. Выражение $\log_2 x+6\log_{x^2}2+\sqrt{x^2+x-2}$ определено, если

$$\begin{cases}x^2+x-2\ge 0,\\ x>0,\\ x\ne\pm 1;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty),\\ x>0,\\ x\ne\pm 1;\end{cases}\qquad x\in(1;+\infty).$$

Докажем, что исходное неравенство выполняется при всех $x\in(1;+\infty)$.

$\log_2 x+6\log_{x^2}2+\sqrt{x^2+x-2}>3;\quad \log_2 x-3+\dfrac{3}{\log_2 x}+\sqrt{x^2+x-2}>0;$

$\dfrac{\log_2^2 x-3\log_2 x+3}{\log_2 x}+\sqrt{x^2+x-2}>0;\quad \dfrac{(\log_2 x-1{,}5)^2+0{,}75}{\log_2 x}+\sqrt{x^2+x-2}>0.$

Так как $\dfrac{(\log_2 x-1{,}5)^2+0{,}75}{\log_2 x}>0$ и $\sqrt{x^2+x-2}>0$ при $x\in(1;+\infty)$, то неравенство

$$\frac{(\log_2 x-1{,}5)^2+0{,}75}{\log_2 x}+\sqrt{x^2+x-2}>0$$

верно на промежутке $(1;+\infty)$.

Таким образом, наименьшим целым решением данного неравенства является число 2.

Ответ: 2.

ТЕСТ 32

Часть А

А1. Если $b<0$, то $-b>0$, тогда $-b\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{5b^4}$.

Ответ: 3.

А2. Линейными углами двугранных улов, образованных боковыми гранями шестиугольной призмы, являются углы правильного многоугольника, лежащего в основании этой призмы. Градусную меру внутреннего угла правильного шестиугольника найдем по формуле $\alpha_n=\dfrac{(n-2)\cdot180°}{n}$, т. е. искомый угол равен

$$\frac{(6-2)\cdot180°}{6}=120°.$$

Ответ: 4.

А3. $\dfrac{4^{n+1}-4^{n-1}}{4^{n-2}}=\dfrac{4^{n-2}\cdot\left(4^3-4^1\right)}{4^{n-2}}=4^3-4=60.$

Ответ: 1.

А4. Пусть x — первоначальная цена товара. После того как цена возросла на 20 %, товар стал стоить $(1{,}2x)$. После снижения на 10 % цена товара стала $0{,}9\cdot(1{,}2x)=1{,}08x$.

Таким образом, цена товара повысилась на 8 % по сравнению с первоначальной.

Ответ: 3.

А5. При $x<0$ график функции $y=a^x$ проходит ниже прямой $y=1$, если $a>1$.

Сравним значения предложенных выражений с единицей:

1) $\pi-3\approx0{,}14<1;$

2) $\dfrac{1}{\pi}<1;$

3) $2\cdot\cos61°<2\cdot\cos60°=2\cdot\dfrac{1}{2}=1;$

4) $\cos2<1;$

5) $\pi-2\approx1{,}14>1.$

Таким образом, $a=\pi-2$.

Ответ: 5.

А6. $\left(\sqrt7-3\right)^2\left(16+6\sqrt7\right)-4\cdot\sqrt{3\frac{1}{16}}=\left(7-6\sqrt7+9\right)\left(16+6\sqrt7\right)-4\cdot\sqrt{\frac{49}{16}}=\left(16-6\sqrt7\right)\left(16+6\sqrt7\right)-4\cdot\frac{7}{4}=$

$=16^2-\left(6\sqrt7\right)^2-7=256-252-7=-3.$

Ответ: 1.

А7. Пусть $t=\left(x-\sqrt3\right)^2$, тогда уравнение принимает вид $t^2-5t+4=0;$ $\left[\begin{array}{l}t=1,\\t=4.\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}\left(x-\sqrt3\right)^2=1,\\\left(x-\sqrt3\right)^2=4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x-\sqrt3=1,\\x-\sqrt3=-1,\\x-\sqrt3=2,\\x-\sqrt3=-2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\sqrt3+1,\\x=\sqrt3-1,\\x=\sqrt3+2,\\x=\sqrt3-2.\end{array}\right.$

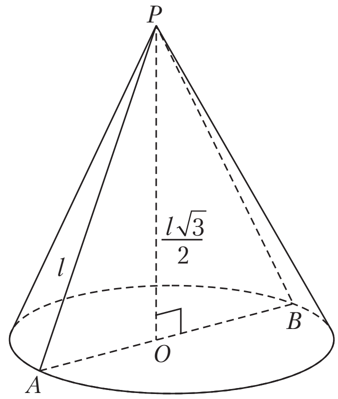
Сумма корней уравнения равна $4\sqrt3$.

Ответ: 2.

А8. $\dfrac37\left(\log_2 32+27^{\log_3 4}\right)^{\log_{69}14}=\dfrac37\left(5+3^{3\log_3 4}\right)^{\log_{69}14}=\dfrac37\left(5+3^{\log_3 64}\right)^{\log_{69}14}=\dfrac37(5+64)^{\log_{69}14}=\dfrac37\cdot69^{\log_{69}14}=\dfrac37\cdot14=6.$

Ответ: 5.

A9. Так как угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°, то треугольник APB — равносторонний.



Пусть образующая конуса $PA = l$, тогда $PO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

По условию задачи $PA + PO = 2$, т. е. в прямоугольном треугольнике APO угол APO равен 30°.

Найдем радиус основания конуса: $r = AO = \frac{1}{2}AP = \frac{4(2-\sqrt{3})}{2} = 2(2-\sqrt{3})$.

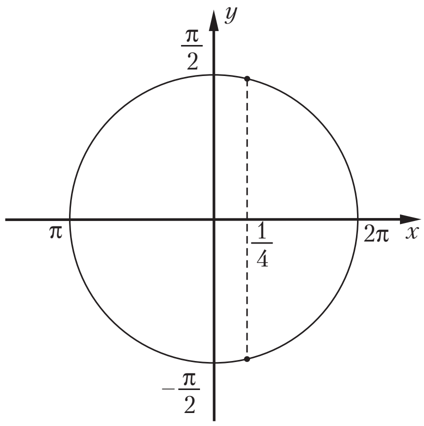
$$S_{\text{полн}} = \pi r(r+l);\quad S_{\text{полн}} = \pi\cdot 2(2-\sqrt{3})\left(2(2-\sqrt{3})+4(2-\sqrt{3})\right);$$

$$S_{\text{полн}} = \pi\cdot 12(2-\sqrt{3})^2;\quad S_{\text{полн}} = \pi\cdot 12(4-4\sqrt{3}+3);\qquad S_{\text{полн}} = 12\pi(7-4\sqrt{3}).$$

Ответ: 2.

Часть B

B1. $\sin 2x + 4\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1;\ \ 2\sin x\cos x + 4\cos x - \frac{1}{2}\sin x - 1 = 0;$



$2\cos x(\sin x + 2) - \frac{1}{2}(\sin x + 2) = 0;\ (\sin x + 2)\left(2\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0;$

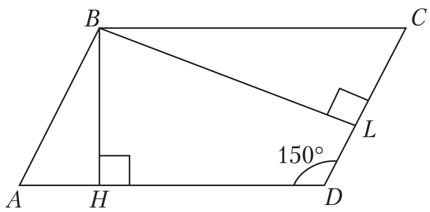
$\left[\begin{array}{l}\sin x + 2 = 0,\\ 2\cos x - \frac{1}{2} = 0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\sin x = -2 \notin [-1;\ 1],\\ \cos x = \frac{1}{4};\end{array}\right.\qquad \cos x = \frac{1}{4}.$

На промежутке длиной 2π уравнение $\cos x = \frac{1}{4}$ имеет два корня.

Длина промежутка $[-3\pi;\ 5\pi]$ равна 8π, значит, на данном промежутке уравнение имеет 8 корней.

Ответ: 8.

B2. Так как $\angle D = 150°$, тогда $\angle A = \angle C = 30°$.



Пусть $BH = a$, тогда $BL = 10 - a$.

В прямоугольных треугольниках ABH и BCL катеты BH и BL лежат против углов в 30°, тогда $AB = 2BH = 2a$ и $BC = 2BL = 20 - 2a$.

Периметр параллелограмма равен:

$$P_{ABCD} = 2\cdot(AB + BC) = 2\cdot(2a + 20 - 2a) = 40.$$

Ответ: 40.

B3. Упростим выражение $\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - 1 = \left|\sqrt{2}+1\right| - 1 = \sqrt{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}$.

Тогда неравенство принимает вид $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2+4x+1} - \left(\sqrt{2}\right)^x \le 0;\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2+4x+1} \le \left(\sqrt{2}\right)^x;\ 2^{\frac{x^2+4x+1}{3}} \le 2^{\frac{x}{2}};$

$\frac{x^2+4x+1}{3} \le \frac{x}{2};\ 2x^2 + 8x + 2 \le 3x;\ 2x^2 + 5x + 2 \le 0;\ x \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right].$

Произведение наибольшего и наименьшего решений неравенства равно $-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Ответ: 1.

B4. Так как $a_7 = 9$, то $a_1 = a_7 - 6d = 9 - 6d$ и $a_2 = a_7 - 5d = 9 - 5d$.

Тогда $a_1\cdot a_2\cdot a_7 = (9-6d)(9-5d)\cdot 9 = 9\cdot 3\cdot(3-2d)(9-5d) = 27\cdot(3-2d)(9-5d) = 27\cdot\left(10d^2 - 33d + 27\right)$.

Рассмотрим квадратичную функцию $f(d) = 10d^2 - 33d + 27$.

Данная функция принимает свое наименьшее значение в вершине параболы.

Найдем абсциссу вершины параболы: $d_{\min} = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{33}{20}$.

Тогда $20 \cdot d_{\min} = 33$.

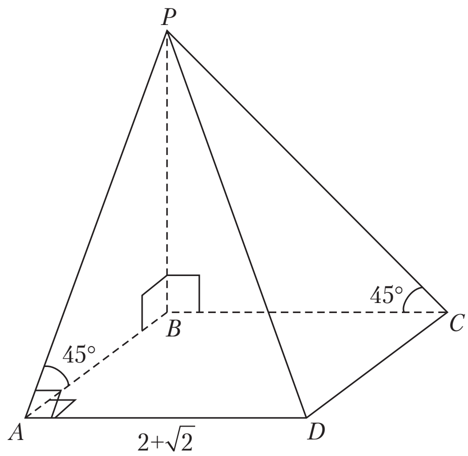
Ответ: 33.

B5. Пусть $x^2 - 2 = t$, тогда уравнение принимает вид $\dfrac{t^2 - xt + x^2}{2t^2 + xt - x^2} = \dfrac{1}{2}$; $\begin{cases} 2t^2 - 2xt + 2x^2 = 2t^2 + xt - x^2, \\ 2t^2 + xt - x^2 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - xt = 0, \\ (x-2t)(x+t) \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = t; \end{array}\right. \\ x \neq 2t, \\ x \neq -t. \end{cases}$ Так как $t = x^2 - 2$, то $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = x^2 - 2; \end{array}\right. \\ x \neq 2\left(x^2 - 2\right), \\ x \neq -x^2 + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -1; \end{array}\right. \\ x \neq 2\left(x^2 - 2\right), \\ x \neq -x^2 + 2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Тогда $n \cdot S = 3 \cdot (-1 + 0 + 2) = 3$.

Ответ: 3.



B6. Так как сфера вписана в пирамиду, то радиус сферы можно найти по формуле $r = \dfrac{3V}{S_{\text{полн}}}$.

Из прямоугольного треугольника ABP найдем $PB = AB = 2 + \sqrt{2}$ и $PA = \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}$.

$$S_{BPC} = S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PB = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^2,$$

а $S_{DPC} = S_{ADP} = \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot PA = \dfrac{1}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^2$

и $S_{ABCD} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2$.

Тогда

$$S_{\text{полн}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 + \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 = 2 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^3.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot PB = \frac{1}{3} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^3.$$

Тогда $r = \dfrac{3V}{S_{\text{полн}}} = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)^3}{\left(2 + \sqrt{2}\right)^3} = 1$.

Ответ: 1.

ТЕСТ 33

Часть А

А1. $\dfrac{b}{\sqrt[4]{-b}}=\dfrac{-(-b)}{\sqrt[4]{-b}}=\dfrac{-\left(\sqrt[4]{-b}\right)^4}{\sqrt[4]{-b}}=-\sqrt[4]{-b^3}$.

Ответ: 3.

А2. Если некоторое число увеличить на 200 %, то оно увеличится в три раза, т. е. $3^{19}\cdot 3=3^{20}$.

Ответ: 3.

А3. Чтобы найти абсциссы точек пересечения графиков функций $y=-2$ и $y=\sqrt[3]{1-36x^2}$, решим уравнение: $\sqrt[3]{1-36x^2}=-2$; $1-36x^2=-8$; $-36x^2=-9$; $x^2=\dfrac{1}{4}$; $x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 5.

А4. $(5x-2)\cdot\log_{0,7}3-\log_{0,7}27>0$; $(5x-2)\cdot\log_{0,7}3-\log_{0,7}3^3>0$; $(5x-2)\cdot\log_{0,7}3-3\log_{0,7}3>0$; $\log_{0,7}3\cdot(5x-2-3)>0$; $\log_{0,7}3\cdot(5x-5)>0$.

Так как $\log_{0,7}3<0$, то полученное неравенство равносильно неравенству $5x-5<0$; $x<1$; $x\in(-\infty;1)$.

Ответ: 4.

А5. $\dfrac{\sqrt[3]{a^5\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a^2\cdot\sqrt[4]{ab^3}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^5\cdot b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}}}{\left(a^2\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\sqrt[3]{b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{19}{4}}}}{\left(a^{\frac{9}{4}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{b^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{19}{12}}}{a^{\frac{9}{12}}\cdot b^{\frac{3}{12}}}=a^{\frac{10}{12}}\cdot b^{-\frac{1}{12}}=a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{-\frac{1}{12}}$.

Ответ: 3.

А6. На рисунке изображен график функции $y=x^{-2}$.

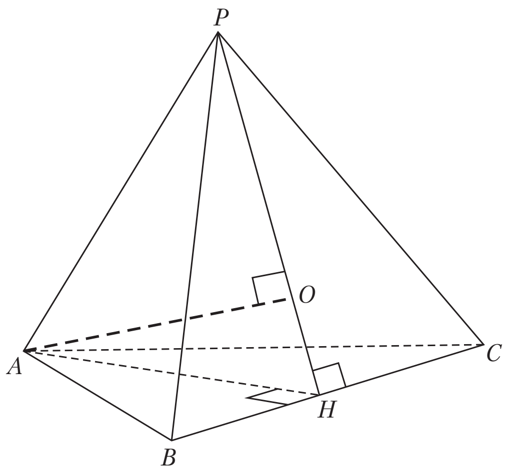
Ответ: 2.

А7. Так как боковая поверхность пирамиды равна 54, то площадь грани PBC равна $54:3=18$.

Пусть точка A — вершина пирамиды, тогда треугольник PBC — ее основание, а отрезок AO — ее высота.

Тогда объем пирамиды равен $V=\dfrac{1}{3}S_{PBC}\cdot AO$; $V=\dfrac{1}{3}\cdot 18\cdot 6=36$.

Ответ: 4.



А8. $\begin{cases}2^x\cdot 3^y=24,\\ 2^y\cdot 3^x=54;\end{cases}$ $\begin{cases}2^x\cdot 3^x\cdot 3^y\cdot 2^y=24\cdot 54,\\ 2^y\cdot 3^x=54;\end{cases}$ $\begin{cases}6^x\cdot 6^y=6^4,\\ 2^y\cdot 3^x=54;\end{cases}$

$\begin{cases}6^{x+y}=6^4,\\ 2^y\cdot 3^x=54;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=4,\\ 2^y\cdot 3^x=54;\end{cases}$ $\begin{cases}y=4-x,\\ 2^{4-x}\cdot 3^x=54;\end{cases}$ $\begin{cases}y=4-x,\\ \dfrac{2^4}{2^x}\cdot 3^x=54;\end{cases}$

$\begin{cases}y=4-x,\\ \dfrac{3^x}{2^x}=\dfrac{27}{8};\end{cases}$ $\begin{cases}y=4-x,\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=1,\\ x=3.\end{cases}$

Тогда $x_0+y_0=3+1=4$.

Ответ: 4.

А9. Пусть a, b и c — измерения прямоугольного параллелепипеда. Тогда $ab=12{,}5$; $bc=2$; $ac=4$. Перемножим полученные равенства и получим $a^2b^2c^2=100$; $abc=10$. То есть $V=10$.

Ответ: 2.

Часть B

B1. $\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2=\frac{x^2-6x+8}{x^2-x-2}$; $\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}=\frac{(x-4)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$; $\begin{cases}\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}=\frac{x-4}{x+1},\\ x\neq 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{(x-2)^2-(x-4)(x+1)}{(x+1)^2}=0,\\ x\neq 2;\end{cases}$

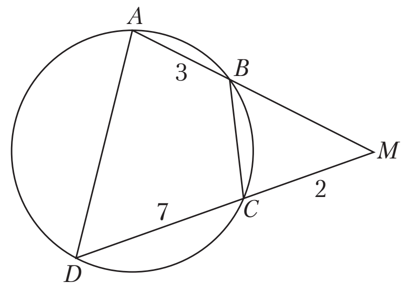
$\begin{cases}\frac{-x+8}{(x+1)^2}=0,\\ x\neq 2;\end{cases}$ $x=8$.

Ответ: 8.

B2. По теореме об отрезках пересекающихся хорд $BM\cdot AM=CM\cdot MD$;

$x\cdot(x+3)=2\cdot 9$; $x^2+3x-18=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-6,\\ x=3.\end{array}\right.$ По смыслу задачи $BM=3$.

Ответ: 3.



B3. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5{,}5)\geq\log_{4-x}1$; $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(2x-5{,}5)\geq 0,\\ 4-x>0,\\ 4-x\neq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}0<2x-5{,}5\leq 1,\\ x<4,\\ x\neq 3;\end{cases}$

$\begin{cases}5{,}5<2x\leq 6{,}5,\\ x<4,\\ x\neq 3;\end{cases}$ $\begin{cases}2{,}75<x\leq 3{,}25,\\ x<4,\\ x\neq 3;\end{cases}$ $x\in(2{,}75;\,3)\cup(3;\,3{,}25]$. Значение выражения $4\cdot M$ равно 13.

Ответ: 13.

B4. 1) Если $\cos x\geq 0$, то уравнение принимает вид $1+\sin x=\cos x$; $\cos x-\sin x=1$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $\left[\begin{array}{l}x=2\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Полученные серии корней удовлетворяют условию $\cos x\geq 0$.

2) Если $\cos x<0$, то уравнение принимает вид $1+\sin x=-\cos x$; $\cos x+\sin x=-1$; $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; $\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Условию $\cos x<0$ удовлетворяют корни $x=\pi+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Объединяя полученные корни, получим $\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Наибольший отрицательный корень уравнения $-90°$, наименьший положительный корень уравнения $180°$, их сумма равна $90°$.

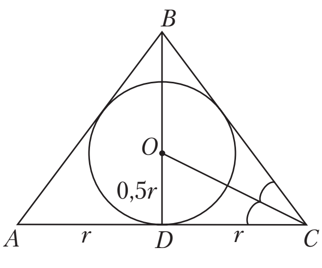
Ответ: 90.

B5. Рассмотрим осевое сечение конуса — треугольник ABC. Окружность, радиус которой равен радиусу шара, вписанного в конус, вписана в треугольник ABC. Тогда CO — биссектриса угла BAC, значит,

$$\frac{BC}{BO}=\frac{DC}{DO};\quad \frac{BC}{BO}=\frac{r}{0{,}5r};\quad \frac{BC}{BO}=2;\ BC=2BO.$$

Пусть $BO=x$, тогда $BC=2x$.

Поскольку периметр треугольника ABC равен 64, то $4x+2r=64$; $r=32-2x$.



По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BDC получим:

$$BC^2 = DC^2 + DB^2;\ \ 4x^2 = r^2 + (x+0{,}5r)^2;\ \ 4x^2 = (32-2x)^2 + 16^2;\ \ x = 10.$$

Тогда $BC = 20$, $r = 12$ и $S_{\text{полн}} = \pi r(l + r)$; $S_{\text{полн}} = 384\pi$.
Значение искомого выражения равно 384.

Ответ: 384.

B6. Пусть x и y — суммы членов прогрессии, стоящих до b_n и стоящих после b_n соответственно. Тогда

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{6} + y = 0{,}75, \\ \dfrac{x}{y} = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 7y = \dfrac{7}{12}, \\ x = 6y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{12}, \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть q — знаменатель прогрессии.

Найдем сумму прогрессии, начиная с b_n ее члена: $S = b_n + y = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$.

Тогда по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ получим: $\dfrac{1}{4} = \dfrac{\frac{1}{6}}{1-q}$; $q = \dfrac{1}{3}$.

Тогда $b_{n-1} = \dfrac{b_n}{q} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$, т. е. $b_{n-1} = x$, значит, $n = 2$.

Ответ: 2.

ТЕСТ 34

Часть А

А1. Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.

Ответ: 3.

А2. $\sqrt[5]{128\cdot 81\cdot 24}=\sqrt[5]{32\cdot 4\cdot 81\cdot 3\cdot 8}=\sqrt[5]{2^5\cdot 2^5\cdot 3^5}=2\cdot 2\cdot 3=12.$

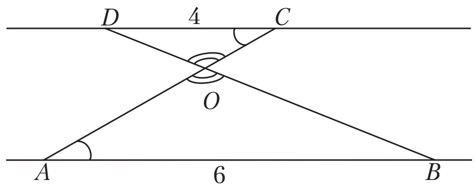
Ответ: 5.

А3. $5m^4-\left(8m(m-3)+\left(m^2-2\right)\cdot 5m^2\right)=5m^4-\left(8m^2-24m+5m^4-10m^2\right)=5m^4-\left(5m^4-2m^2-24m\right)=$

$=5m^4-5m^4+2m^2+24m=2m^2+24m\Big|_{m=-0,5}=2\cdot(-0,5)^2+24\cdot(-0,5)=0,5-12=-11,5.$

Ответ: 1.

А4. Треугольники AOB и COD подобны по двум углам, тогда



$$\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{DC};\quad \frac{AO}{OC}=\frac{6}{4};\quad \frac{AO}{OC}=\frac{3}{2}.$$

То есть $AO=3x,\quad OC=2x$, тогда

$$AC=AO+OC=5x \text{ и } AO:AC=\frac{3x}{5x}=0,6.$$

Ответ: 2.

А5. Для любого $x_0>0$ получим $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_0}<0,5^{x_0}<2^{x_0}<3^{x_0}<4^{x_0}$, т. е. точка A имеет координаты $\left(x_0;\,3^{x_0}\right)$.

Ответ: 4.

А6. $\cos^2\frac{x}{3}-7\cos\frac{x}{3}+4=\sin^2\frac{x}{3};\;\; \cos^2\frac{x}{3}-7\cos\frac{x}{3}+4=1-\cos^2\frac{x}{3};\;\; 2\cos^2\frac{x}{3}-7\cos\frac{x}{3}+3=0;\;\; \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{3}=3\notin[-1;1],\\ \cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2};\end{array}\right.$

$\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2};\;\; \frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\;\; x=\pm\pi+6\pi n,\;\; n\in\boldsymbol{Z}.$

Ответ: 1.

А7. $\log_4 24-\log_4 9\cdot\log_9 13\cdot\log_{13}6+3^{\log_5 7}-7^{\log_5 3}=\log_4 24-\log_4 9\cdot\frac{\log_4 13}{\log_4 9}\cdot\frac{\log_4 6}{\log_4 13}+3^{\log_5 7}-3^{\log_5 7}=$

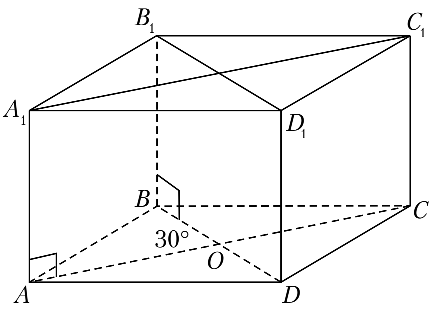
$=\log_4 24-\log_4 6=\log_4 4=1.$

Ответ: 3.

А8. $x^2+\left(\sqrt{x-2}\right)^2-10=0;\;\; \begin{cases}x^2+x-2-10=0,\\ x-2\ge 0;\end{cases}\;\; \begin{cases}x^2+x-12=0,\\ x\ge 2;\end{cases}\;\; \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=3;\end{array}\right.\\ x\ge 2;\end{cases}\quad x=3.$

Ответ: 4.

А9. Диагональными сечениями прямой призмы являются прямоугольники AA_1C_1C и BB_1D_1D, площади которых равны 16 и 12.



Тогда $AC=16:4=4$ и $BD=12:4=3$.

Площадь параллелограмма BB_1D_1D найдем по формуле

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOB:\quad S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3.$$

Тогда $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\cdot AA_1=3\cdot 4=12.$

Ответ: 2.

Часть В

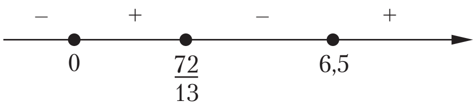
B1. $5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right)=5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=5\sqrt{2}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)}}=$

$=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{50}{49}}}=7.$

Ответ: 7.

B2. $\left|x^2-13x+36\right|\geq\left|36-x^2\right|$; $\left|x^2-13x+36\right|\geq\left|x^2-36\right|$; $\left(x^2-13x+36\right)^2-\left(x^2-36\right)^2\geq 0$;

$\left(x^2-13x+36-x^2+36\right)\left(x^2-13x+36+x^2-36\right)\geq 0$; $(-13x+72)\left(2x^2-13x\right)\geq 0$; $(13x-72)x(2x-13)\leq 0$;

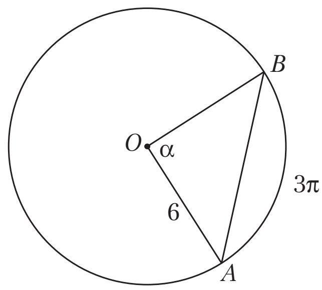


$x\in(-\infty;\,0]\cup\left[\frac{72}{13};\,\frac{13}{2}\right].$

Произведение наименьшего и наибольшего положительных решений неравенства равно $\frac{72}{13}\cdot\frac{13}{2}=36.$

Ответ: 36.

B3. По формуле длины дуги $l=\frac{\pi R}{180^\circ}\cdot\alpha$ найдем градусную меру центрального угла AOB: $\alpha=\frac{3\pi\cdot 180^\circ}{6\pi}=90^\circ$. То есть отрезок AB является стороной квадрата, вписанного в данную окружность. Из треугольника OAB по теореме Пифагора найдем $AB=6\sqrt{2}$. Тогда площадь квадрата равна: $S=\left(6\sqrt{2}\right)^2=72.$



Ответ: 72.

B4. Заметим, что $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)=\sqrt{\left(7+4\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)}=\sqrt{49-48}=1$, тогда

$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}=\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{-1}$ и уравнение принимает вид $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}}+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{-\frac{1}{\cos x}}=14.$

Пусть $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=t$, тогда $t+t^{-1}=14$; $t^2-14t+1=0$; $t_{1,2}=7\pm 4\sqrt{3}$. Значит,

$$\left[\begin{aligned}&\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=7-4\sqrt{3},\\&\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=7+4\sqrt{3};\end{aligned}\right.\quad\left[\begin{aligned}&\left(7+4\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2\cos x}}=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1},\\&\left(7+4\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2\cos x}}=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{1};\end{aligned}\right.\quad\left[\begin{aligned}&\frac{1}{2\cos x}=-1,\\&\frac{1}{2\cos x}=1;\end{aligned}\right.\quad\left[\begin{aligned}&\cos x=-\frac{1}{2},\\&\cos x=\frac{1}{2};\end{aligned}\right.\quad\left[\begin{aligned}&x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\\&x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in\boldsymbol{Z}.\end{aligned}\right.$$

Наибольший отрицательный корень уравнения равен -60°.

Ответ: –60.

B5. Пусть $PO=AO=R$, тогда из прямоугольных треугольников AKO и AOM по теореме Пифагора получим, что $AK=\sqrt{R^2-3}$ и $AM=\sqrt{R^2-5}$.

Так как отрезок OK является серединным перпендикуляром к отрезку AP, то $AP=2\sqrt{R^2-3}$.

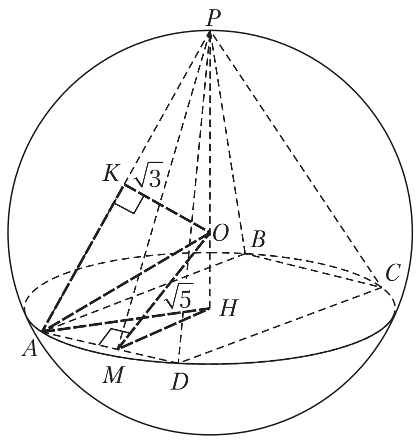
Из треугольников AMH и MHO найдем

$$MH=\sqrt{R^2-5}\ \text{ и }\ OH=\sqrt{10-R^2}.$$

В треугольнике AMP $MP=\sqrt{R^2-5}$.

Из треугольника MHP по теореме Пифагора получим:

$R^2-1=R^2-5+\left(R+\sqrt{10-R^2}\right)^2$; $\sqrt{10-R^2}=2-R$; $R^2-2R-3=0$; $R=3.$



Ответ: 3.

В6. Заметим, что уравнение имеет корни, если $1-x^2 \geq 0$, т. е. $x \in [-1; 1]$.

Пусть $x = \sin\alpha$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (на данном промежутке функция синус принимает все свои значения). Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha; \quad \sqrt{\cos^2\alpha} = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha; \quad |\cos\alpha| = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha.$$

При $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ получим $|\cos\alpha| = \cos\alpha$, тогда $\cos\alpha = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha$.

$$\cos\alpha = \sin\alpha\left(4\sin^2\alpha - 3\right); \quad \cos\alpha = \sin\alpha\left(4\left(1-\cos^2\alpha\right)-3\right); \quad \cos\alpha = \sin\alpha\left(1-4\cos^2\alpha\right);$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha - 4\cos^2\alpha\sin\alpha; \quad \cos\alpha + 4\cos^2\alpha\sin\alpha = \sin\alpha; \quad \cos\alpha\left(1+4\cos\alpha\sin\alpha\right) = \sin\alpha;$$

$$\cos\alpha\left(1+2\sin 2\alpha\right) = \sin\alpha; \quad \cos\alpha + 2\sin 2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha; \quad \cos\alpha + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 3\alpha + \sin\alpha\right) = \sin\alpha; \quad \cos\alpha + \sin 3\alpha = 0;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \sin 3\alpha = 0; \quad 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right) = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}+\alpha = \pi n, \\ 2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Так как $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\left[\begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{\pi}{4}, \\ \alpha_2 = -\frac{\pi}{8}, \\ \alpha_3 = \frac{3\pi}{8}. \end{array}\right.$ Тогда $\left[\begin{array}{l} x_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right), \\ x_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right), \\ x_3 = \sin\frac{3\pi}{8}. \end{array}\right.$

Найдем произведение корней данного уравнения:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\sin\frac{3\pi}{8} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$

Значение искомого выражения равно 2.

Ответ: 2.

ТЕСТ 35

Часть А

А1. Верным является высказывание «наименьшим простым числом третьего десятка является число 23».

Ответ: 5.

А2. Парабола является графиком квадратичной функции вида $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Из предложенных функций квадратичной является функция $y = 7 - x^2$.

Ответ: 3.

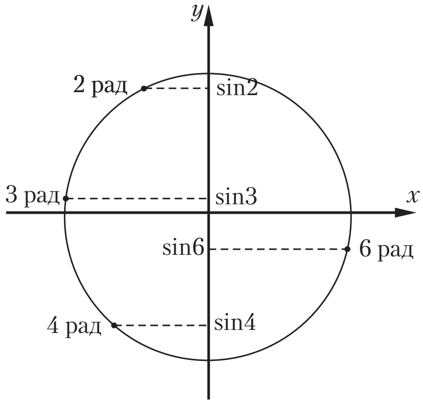
А3. Пусть R — радиус шара. Так как объем шара численно равен его поверхности, то

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2;\ \frac{R}{3} = 1;\ R = 3.$$

Ответ: 3.

А4. Отметим данные числа на тригонометрической окружности и получим, что $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 2 < 1$.

Ответ: 4.

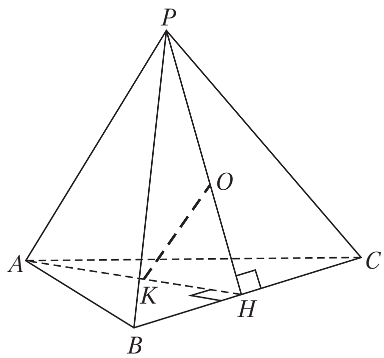


А5. Так как тетраэдр является правильным, то $KH = \frac{1}{3}AH$ и $OH = \frac{1}{3}PH$.

Воспользуемся подобием треугольников APH и OKH и получим, что

$$OH = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 3.



А6. $\dfrac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x} = 0;\ \begin{cases}\cos 2x = 0,\\ \sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{cases} \begin{cases}2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\\ x \neq (-1)^n\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\end{cases} \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z},\\ x \neq (-1)^n\dfrac{\pi}{4} + \pi n;\end{cases} \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$

Наименьший положительный корень уравнения равен 225°.

Ответ: 2.

А7. $\dfrac{a}{b^2+ab} - \dfrac{1}{b^2} : \dfrac{a+b}{ab}\cdot\left(\dfrac{4ab}{a^2+b^2+2ab} : \left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right)\right) = \dfrac{a}{b^2+ab} - \dfrac{1}{b^2}\cdot\dfrac{ab}{a+b}\cdot\left(\dfrac{4ab}{(a+b)^2} : \dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}\right) =$

$= \dfrac{a}{b^2+ab} - \dfrac{1}{b^2}\cdot\dfrac{ab}{a+b}\cdot\dfrac{4ab}{(a+b)^2} : \dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)} = \dfrac{a}{b^2+ab} - \dfrac{1}{b^2}\cdot\dfrac{ab}{a+b}\cdot\dfrac{4ab}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{(a-b)(a+b)}{4ab} =$

$= \dfrac{a}{b^2+ab} - \dfrac{a(a-b)}{b(a+b)^2} = \dfrac{a}{b(a+b)} - \dfrac{a(a-b)}{b(a+b)^2} = \dfrac{a(a+b)-a(a-b)}{b(a+b)^2} = \dfrac{2ab}{b(a+b)^2} = \dfrac{2a}{(a+b)^2}.$

При $a=0,2;\ b=0,3$ значение выражения равно: $\frac{2\cdot0,2}{(0,2+0,3)^2}=\frac{0,4}{0,25}=1,6.$

Ответ: 1.

A8. $1+\log_{0,25}\left(\log_3(4-x)\right)>0;\ \log_{0,25}\left(\log_3(4-x)\right)>-1;\ -\log_4\left(\log_3(4-x)\right)>-1;\ \log_4\left(\log_3(4-x)\right)<1;$

$$\begin{cases}\log_3(4-x)<4,\\ \log_3(4-x)>0;\end{cases}\ \begin{cases}4-x<81,\\ 4-x>0,\\ 4-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}4-x<81,\\ 4-x>1;\end{cases}\ \begin{cases}x>-77,\\ x<3;\end{cases}\quad x\in(-77;\,3).$$

Неравенство имеет 79 целых решений.

Ответ: 3.

A9. $$2^x\cdot3^{2-x}-\frac{8^{\frac{x+1}{3}}}{9^{\frac{x-2}{2}}}+\frac{\left(\sqrt2\right)^{2x+4}}{\left(\sqrt3\right)^{2x-2}}=2^x\cdot3^{2-x}-\frac{\left(2^3\right)^{\frac{x+1}{3}}}{\left(3^2\right)^{\frac{x-2}{2}}}+\frac{\left(2^{\frac12}\right)^{2x+4}}{\left(3^{\frac12}\right)^{2x-2}}=\frac{9\cdot2^x}{3^x}-\frac{2^{x+1}}{3^{x-2}}+\frac{2^{x+2}}{3^{x-1}}=\frac{9\cdot2^x}{3^x}-\frac{2\cdot9\cdot2^x}{3^x}+\frac{4\cdot3\cdot2^x}{3^x}=$$

$$=\frac{2^x}{3^x}\cdot(9-18+12)=\frac{2^x}{3^x}\cdot3=2^x\cdot3^{1-x}.$$

Ответ: 1.

Часть B

B1. $$\log_2\left(1-\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{-1}-\left|\log_{0,5}\left(1+\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right|=\log_2\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)^{-1}-\left|\log_{0,5}\left(1+\frac{\sqrt3}{2}\right)\right|=\log_2\left(\frac{2-\sqrt3}{2}\right)^{-1}-\left|\log_{0,5}\left(\frac{2+\sqrt3}{2}\right)\right|=$$

$$=\log_2\left(\frac{2}{2-\sqrt3}\right)-\left|\log_2\left(\frac{2+\sqrt3}{2}\right)\right|=\log_2 2-\log_2\left(2-\sqrt3\right)-\left|\log_2\left(2+\sqrt3\right)-\log_2 2\right|=1-\log_2\left(2-\sqrt3\right)-\log_2\left(2+\sqrt3\right)+1=$$

$$=2-\log_2\left(2-\sqrt3\right)-\log_2\left(2-\sqrt3\right)^{-1}==2-\log_2\left(2-\sqrt3\right)+\log_2\left(2-\sqrt3\right)=2.$$

Ответ: 2.

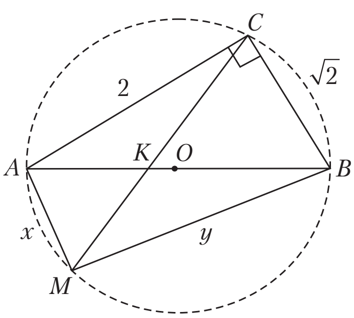
B2. $x\cdot\sqrt{3x^2+13}-\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{3x^2+13}=2.$

Пусть $t=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{3x^2+13}$, тогда $t^2-t-2=0;$ $\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=-1.\end{array}\right.$ Так как $t\ge0$, то $t=2$, значит,

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{3x^2+13}=2;\ \begin{cases}x^2\left(3x^2+13\right)=16,\\ x\ge0;\end{cases}\ \begin{cases}3x^4+13x^2-16=0,\\ x\ge0;\end{cases}\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=-\frac{16}{3},\\ x^2=1;\end{array}\right.\\ x\ge0;\end{cases}\ \begin{cases}x^2=1,\\ x\ge0;\end{cases}\ \begin{cases}x=\pm1,\\ x\ge0;\end{cases}\quad x=1.$$

Ответ: 1.

B3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является диаметром описанной около этого треугольника окружности.



Так как угол AMB опирается на диаметр AB, то треугольник ABM — прямоугольный. По теореме Пифагора $AB^2=AC^2+BC^2;\ \ AB^2=6.$

Пусть $AM=x,\ \ MB=y$, тогда $x^2+y^2=6.$

Рассмотрим треугольники AMK и BKC. Поскольку $\angle AKM=\angle CKB$ (как вертикальные), а $\angle BAM=\angle MCB$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу), то треугольники AMK и BKC подобны.

Тогда $\frac{AM}{BC}=\frac{AK}{CK}$. Из подобия треугольников BMK и AKC получим, что

$$\frac{BM}{AC}=\frac{BK}{CK}.$$

Из полученных равенств имеем, что $CK=\frac{BC\cdot AK}{AM}$ и $CK=\frac{BK\cdot AC}{BM}$, т. е. $\frac{BC\cdot AK}{AM}=\frac{BK\cdot AC}{BM}$; $\frac{BC\cdot BM}{AM\cdot AC}=\frac{BK}{AK}$; $\frac{\sqrt{2}\cdot y}{x\cdot 2}=\frac{BK}{AK}$. Так как по условию задачи $BK:AK=3:1$, то $y=3\sqrt{2}x$.

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=6,\\ y=3\sqrt{2}x;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=\frac{6}{19},\\ y=3\sqrt{2}x.\end{cases}$ $S_{ABM}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot x^2=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{6}{19}=\frac{9\sqrt{2}}{19}$.

Тогда $19\sqrt{2}S=19\sqrt{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{19}=38$.

Ответ: 38.

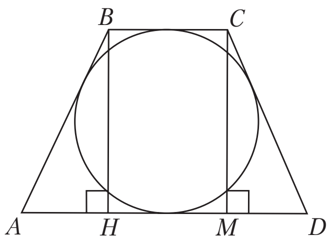
B4. $\left||x^2-6x+8|-3\right|\ge x-1$; $\left[\begin{aligned}&|x^2-6x+8|-3\ge x-1,\\ &|x^2-6x+8|-3\le -x+1;\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}&|x^2-6x+8|\ge x+2,\\ &|x^2-6x+8|\le -x+4;\end{aligned}\right.$ $x\in(-\infty;\,3]\cup\{4\}\cup[6;\,+\infty)$.

$\left[\begin{aligned}&x^2-6x+8\ge x+2,\\ &x^2-6x+8\le -x-2;\\ &\begin{cases}x^2-6x+8\le -x+4,\\ x^2-6x+8\ge x-4;\end{cases}\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}&x^2-7x+6\ge 0,\\ &x^2-5x+10\le 0;\\ &\begin{cases}x^2-5x+4\le 0,\\ x^2-7x+12\ge 0;\end{cases}\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}&x\in(-\infty;1]\cup[6;+\infty),\\ &x\in\varnothing;\\ &\begin{cases}x\in[1;4],\\ x\in(-\infty;3]\cup[4;+\infty);\end{cases}\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}&x\in(-\infty;1]\cup[6;+\infty),\\ &x\in[1;3]\cup\{4\}.\end{aligned}\right.$

Найдем сумму целых решений неравенства, принадлежащих промежутку $(1;\,7]$: $2+3+4+6+7=22$.

Ответ: 22.

B5. Равнобедренная трапеция $ABCD$ — осевое сечение конуса. Тогда круг радиуса, равного радиусу шара, вписан в трапецию $ABCD$.



Пусть $BC=2r_1$, $AD=2r_2$, $AB=CD=l$.

$S_{\text{бок}}=\pi(r_1+r_2)l$, т. е. $(r_1+r_2)l=400$.

Поскольку трапеция описана около круга, то $BC+AD=AB+CD$, т. е. $2r_1+2r_2=2l$; $r_1+r_2=l$. Тогда $l^2=400$; $l=20$.

В прямоугольном треугольнике ABH известно, что $AB=20$; $BH=2R=12$ (где R — радиус шара, вписанного в конус), тогда по теореме Пифагора $AH=16$.

Так как $2r_1+2r_2=2l$, то $2r_1+2r_2=40$; $2r_1+16+2r_1+16=40$; $r_1=2$. Тогда $r_2=18$.

$V=\frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2+r_2^2+r_1r_2\right)$; $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 12(4+324+36)=1456\pi$.

Значение искомого выражения равно 1456.

Ответ: 1456.

B6. $\sqrt{x^2-7x+10}+9\log_4\frac{x}{8}\ge 2x+\sqrt{14x-20-2x^2}-13$.

Выясним, при каких значениях переменной неравенство имеет смысл:

$$\begin{cases}x^2-7x+10\ge 0,\\ \frac{x}{8}>0,\\ 14x-20-2x^2\ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-7x+10\ge 0,\\ x>0,\\ x^2-7x+10\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in(-\infty;2]\cup[5;\,+\infty),\\ x>0,\\ x\in[2;\,5];\end{cases}\quad \left[\begin{aligned}&x=2,\\ &x=5.\end{aligned}\right.$$

Проверим, являются ли найденные значения переменной решениями неравенства.

При $x=2$ получим $\sqrt{4-14+10}+9\log_4\frac{2}{8}\ge 4+\sqrt{28-20-8}-13$; $-9\ge -9$ — верное неравенство. При $x=5$ получим $\sqrt{25-35+10}+9\log_4\frac{5}{8}\ge 10+\sqrt{70-20-50}-13$; $3\log_4\frac{5}{8}\ge -1$; $\log_4\frac{125}{512}\ge\log_4\frac{1}{4}$; $\frac{125}{512}\ge\frac{1}{4}$ — неверное неравенство.

Таким образом, $x=2$ является единственным решением данного неравенства.

Ответ: 1.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

3000 конкурсных задач по математике / Е. Д. Куланин [и др.]. — М. : Айрис Рольф, 1997.

Азевич, А. И. Рубежные тестовые работы по математике для 5—11 классов / А. И. Азевич. — М. : Школьная пресса, 2002.

Алтынов, П. И. 2600 тестов и проверочных заданий по математике / П. И. Алтынов, Л. И. Звавич, А. И. Медяник. — М. : Дрофа, 2000.

Амелькин, В. В. Геометрия на плоскости / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, В. Л. Тимохович. — М. : Асар, 2003.

Арефьева, И. Г. Задания для подготовки к контрольным работам по математике. 5—11 классы / И. Г. Арефьева, Т. А. Адамович. — Минск : Нар. асвета, 2013.

Арефьева, И. Г. Контрольные работы по математике: 5—11 классы / И. Г. Арефьева, Т. А. Адамович. — Минск : Нар. асвета, 2011.

Арефьева, И. Г. Математика : пособие-репетитор / И. Г. Арефьева. — Минск : Аверсэв, 2009.

Арефьева, И. Г. Повторяем математику за курс базовой школы / И. Г. Арефьева, И. Ю. Семина, Т. В. Ячейко. — Минск : Аверсэв, 2013.

Арефьева, И. Г. Повторяем математику за курс средней школы / И. Г. Арефьева. — Минск : Аверсэв, 2015.

Арефьева, И. Г. Повторяем математику за курс средней школы. Тестовые задания для 11 класса / И. Г. Арефьева. — Минск : Аверсэв, 2015.

Галицкий, М. Л. Сборник задач по алгебре для 8—9 классов / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. — М. : Просвещение, 1992.

Гольдич, В. А. 3000 задач по алгебре для 5—9 классов / В. А. Гольдич, С. Е. Злотин. — СПб. : Издательский дом «Литера», 2001.

Задачи по математике: алгебра / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Алехник [и др.]. — М. : Наука, 1987.

Звавич, Л. И. Геометрия: 8—11 классы / Л. И. Звавич, М. В. Чинкина, Л. Я. Шляпочник. — М. : Дрофа, 2001.

Зив, Б. Г. Задачи к урокам геометрии: 7—11 классы / Б. Г. Зив. — СПб. : НПО «Мир и семья-95» ; М. : Русское слово, 1998.

Кучмель, Т. Ф. Математика для поступающих в колледжи и техникумы / Т. Ф. Кучмель, И. Н. Соболь, В. Н. Теслюк. — Минск : Аверсэв, 2005.

Мерзляк, А. Г. Алгебраический тренажер / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Киев : А. С. К., 1997.

Райхмист, Р. Б. Задачник по математике / Р. Б. Райхмист. — М. : Московский лицей, 2004.

Сборник задач для поступающих во ВТУЗы / под ред. М. И. Сканави. — М. : Оникс XXI век, 2005.

Тесты по математике: 5—11 классы. — М. : Олимп ; Астрель, 1999.

Учебно-методическая газета «Математика». — М. : Первое сентября, 2000—2004.

Учебно-методический журнал «Математика в школе». — М. : Школа-Пресс, 2004.

Шахмейстер, А. Х. Дроби / А. Х. Шахмейстер. — СПб., М. : ЧеРо-на-Неве, 2003.

Шлыков, В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Шлыков. — Минск : Асар, 1997.

СОДЕРЖАНИЕ