Факультативные занятия

И. Г. Арефьева, И. Ю. Семина, Т. В. Ячейко

Повторяем математику за курс базовой школы

Решение тематических тестов

Учебное электронное издание

Минск
«Аверсэв»
2018

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я721

А в т о р ы:
Арефьева Ирина Глебовна
Семина Ирина Юрьевна
Ячейко Таиса Владимировна

Учебное электронное издание

Дата размещения 20.01.2020. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Объем 4,3 Мб.

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, г. Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 378-00-00, 379-00-00.
Для писем: а/я 3, 220090, г. Минск.

ISBN 978-985-19-4504-3

Предисловие

Предлагаемый материал содержит подробные решения 25 тематических тестов, условия которых представлены в пособии «Повторяем математику за курс базовой школы. Тестовые задания для 10 класса».

Работа с развернутыми решениями тестовых заданий позволит систематически повторять и обобщать пройденное, так как содержание тестов охватывает ранее изученный материал.

Кроме того, даже в случае правильного ответа на то или иное тестовое задание полезно проанализировать предложенные решения и сравнить их со своими.

Систематическая и ответственная еженедельная работа с пособиями «Повторяем математику за курс базовой школы. Тестовые задания для 10 класса» и «Повторяем математику за курс средней школы. Тестовые задания для 11 класса», а также с предложенными здесь подробными решениями тематических тестов позволит эффективно подготовиться к централизованному тестированию по математике.

Занятие 1 Решения

1. На координатной прямой правее остальных расположено большее число. Из предложенных чисел большим является 5,1.

Ответ: 2.

2. $547{,}698 \approx 547{,}70.$

Нуль в разряде сотых показывает, до какого разряда выполнено округление.

3. Неправильной называется дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему. Неправильными дробями являются $\frac{15}{15}$ и $\frac{22}{3}$.

Ответ: 2.

4. Два числа называются взаимно обратными, если их произведение равно единице. Число $\frac{4}{17}$ является обратным числу $4\frac{1}{4}$, так как

$$4\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{17}=\frac{17\cdot 4}{4\cdot 17}=1.$$

Ответ: 4.

5. $\dfrac{3{,}3-9{,}9}{3{,}3}=\dfrac{3{,}3}{3{,}3}-\dfrac{9{,}9}{3{,}3}=1-\dfrac{9{,}9}{3{,}3}=1-3=-2.$

Ответ: 2.

6. Несократимую обыкновенную дробь можно записать в виде конечной десятичной дроби в том случае, если знаменатель этой дроби не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5. При этом необязательно, чтобы оба числа 2 и 5 входили в разложение, оно может иметь лишь одно из них.

Дроби $\frac{1}{40}$; $\frac{7}{625}$; $\frac{3}{340}$; $\frac{17}{256}$ — несократимые. Сократим дробь $\frac{18}{242}$, получим $\frac{18}{242}=\frac{9}{121}$.

Разложим знаменатель каждой несократимой дроби на простые множители:

$40=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5;$

$625=5\cdot 5\cdot 5\cdot 5;$

$340=2\cdot 2\cdot 5\cdot 17;$

$256 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2;$
$121 = 11\cdot 11.$

Знаменатель дроби $\frac{3}{340}$ и знаменатель дроби $\frac{9}{121}$ содержат множители, отличные от 2 и 5, значит, эти дроби нельзя представить в виде конечной десятичной дроби. Они могут быть представлены в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Ответ: 5.

7. 1) $0,73\cdot 0,01 = 0,0073$; 2) $7,3\cdot 100 = 730$; 3) $7,3 : 0,001 = 7300$; 4) $0,73\cdot 10 = 7,3$; 5) $730\cdot 0,1 = 73$.

Ответ: 5.

8. $17\frac{5}{23} - 4\frac{21}{23} = 16\frac{28}{23} - 4\frac{21}{23} = 12\frac{7}{23}.$

Ответ: 1.

9. Самое большое из чисел —531; самое маленькое — 135.

$531 - 135 = 396.$

Ответ: 1.

10. $A = (20 - 5^2) : 100 = (20 - 25) : 100 = -5 : 100 = -0,05.$ $|A| = 0,05.$

Ответ: 5.

11. $\left(12\frac{3}{7} - 18\frac{3}{14} + 15\frac{3}{28}\right) : 3 = \left((12 + 15 - 18) + \left(\frac{12}{28} + \frac{3}{28} - \frac{6}{28}\right)\right) : 3 =$
$= \left(9 + \frac{9}{28}\right) : 3 = 9 : 3 + \frac{9}{28} : 3 = 3 + \frac{3}{28} = 3\frac{3}{28}.$

Ответ: 1.

12. $ax - 3y = 10\cdot(-5) - 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -50 + 1 = -49.$

Ответ: 2.

13. $\left(3 : 2\frac{2}{3} + 7\frac{3}{59}\right) - 1,125 = 7\frac{3}{59}.$

1) $3 : 2\frac{2}{3} = 3 : \frac{8}{3} = 3\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8};$

Полезно помнить, что $\frac{1}{2} = 0,5;$ $\frac{1}{4} = 0,25;$ $\frac{1}{8} = 0,125.$

2) так как $(a+b)-c=(a-c)+b$, то $\left(1\frac{1}{8}+7\frac{3}{59}\right)-1{,}125=\left(1\frac{1}{8}-1{,}125\right)+$ $+7\frac{3}{59}=0+7\frac{3}{59}=7\frac{3}{59}$.

Ответ: 3.

14. $A=(-11{,}5-0{,}05):11=-11{,}55:11=-1{,}05$; $B=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{10}-\frac{5}{10}\right)^2=$ $=\left(-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{9}{100}$. $A-B=-1{,}05-0{,}09=-1{,}14$.

Ответ: 2.

15. $K=\left|\frac{1}{7}-7\right|=\left|6\frac{7}{7}-\frac{1}{7}\right|=6\frac{6}{7}$; $N=\left|\frac{1}{14}-14\right|=\left|13\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right|=13\frac{13}{14}$;

$N:K=13\frac{13}{14}:6\frac{6}{7}=\frac{195}{14}:\frac{48}{7}=\frac{195\cdot 7}{14\cdot 48}=\frac{65}{32}=2\frac{1}{32}$.

Ответ: 3.

16. $\left(4{,}63\cdot 3\frac{1}{2}-0{,}84\right)\cdot 2\frac{1}{2}-4{,}9\cdot 3{,}1=23{,}2225\approx 23$.

1) $3\frac{1}{2}=3{,}5$, тогда $\begin{array}{r} 4{,}63\\ \times\ 3{,}5\\ \hline 2315\\ +\ 1389\\ \hline 16{,}205\end{array}$; 2) $\begin{array}{r} 16{,}205\\ -\ 0{,}84\\ \hline 15{,}365\end{array}$; 3) $\begin{array}{r} 15{,}365\\ \times\ 2{,}5\\ \hline 76825\\ +\ 30730\\ \hline 38{,}4125\end{array}$; 4) $\begin{array}{r} 4{,}9\\ \times\ 3{,}1\\ \hline 4\,9\\ +\ 147\\ \hline 15{,}19\end{array}$;

5) $\begin{array}{r} 38{,}4125\\ -\ 15{,}19\\ \hline 23{,}2225\end{array}$; 6) $23{,}2225\approx 23$.

Ответ: 23.

17. $10\,005:23-12^2-9^3=-438$.

1) $\begin{array}{r|l} 10\,005 & 23\\ \cline{2-2} -\ 92 & 435\\ \cline{1-1} -\ 80 & \\ 69 & \\ \cline{1-1} -\ 115 & \\ 115 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$; 2) $12^2=144$; 3) $9^3=81\cdot 9=729$; 4) $435-144=291$;

5) $291-729=-438$.

Ответ: –438.

18. $A=1\frac{15}{28}\cdot 0{,}4+3:1{,}75-0{,}4:3{,}5=1\frac{15}{28}\cdot\frac{2}{5}+3:\frac{7}{4}-\frac{2}{5}:\frac{7}{2}=1\frac{15}{28}\cdot\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}+$

$+3\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{5}\left(1\frac{15}{28}-\frac{2}{7}\right)+\frac{12}{7}=\frac{2}{5}\left(1\frac{15}{28}-\frac{8}{28}\right)+\frac{12}{7}=\frac{2}{5}\cdot 1\frac{7}{28}+1\frac{5}{7}=\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{4}+1\frac{5}{7}=$

$=\frac{2\cdot 5}{5\cdot 4}+1\frac{5}{7}=1\frac{10}{14}+\frac{7}{14}=2\frac{3}{14}.$

Натуральные числа из промежутка $\left[-2;2\frac{3}{14}\right]$ — это числа 1 и 2, т. е. их два. (Напомним, что 0 не является натуральным числом!)

Ответ: 2.

19. $K=\dfrac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5{,}5-3\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{\left(\frac{13}{44}-\frac{8}{44}-\frac{5}{66}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{6}{5}}{3{,}2+\frac{4}{5}(5{,}5-3{,}25)}=\dfrac{\left(\frac{5}{44}-\frac{1}{33}\right)\cdot\frac{6}{5}}{3{,}2+0{,}8\cdot 2{,}25}=$

$=\dfrac{\frac{3}{22}-\frac{2}{55}}{3{,}2+1{,}8}=\dfrac{\frac{15}{110}-\frac{4}{110}}{5}=\dfrac{15-4}{110}:5=0{,}1:5=0{,}02.$

Цифра, стоящая в разряде сотых, — 2.

Ответ: 2.

20. 1) $H=11-\dfrac{84{,}81-3{,}9+0{,}9}{1{,}1^2-1{,}1\cdot 0{,}3^2}=11-\dfrac{81{,}81}{1{,}1(1{,}1-0{,}09)}=11-\dfrac{81{,}81}{1{,}1\cdot 1{,}01}=$

$=11-\frac{810}{11}=11-73\frac{7}{11}=-62\frac{7}{11};$

2) $11H=-62\frac{7}{11}\cdot 11=-(682+7)=-689.$

Ответ: –689.

21. $\dfrac{2{,}375:\left(2\frac{3}{8}+3\frac{5}{12}-6\frac{3}{16}\right)}{\left(2\frac{5}{21}-4\frac{1}{7}+1\frac{1}{14}\right)\cdot 1\frac{5}{9}}\cdot 5\frac{5}{6}=\dfrac{2\frac{3}{8}:\left(2\frac{18}{48}+3\frac{20}{48}-6\frac{9}{48}\right)}{\left(2\frac{10}{42}-4\frac{6}{42}+1\frac{3}{42}\right)\cdot\frac{14}{9}}\cdot 5\frac{5}{6}=$

$=\dfrac{\frac{19}{8}:\left(-\left(6\frac{9}{48}-5\frac{38}{48}\right)\right)}{\left(-\left(4\frac{6}{42}-3\frac{13}{42}\right)\right)\cdot\frac{14}{9}}\cdot 5\frac{5}{6}=\dfrac{\frac{19}{8}:\frac{19}{48}}{\frac{35}{42}\cdot\frac{14}{9}}\cdot 5\frac{5}{6}=\dfrac{\frac{19}{8}\cdot\frac{48}{19}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{14}{9}}\cdot 5\frac{5}{6}=\dfrac{6}{\frac{35}{27}}\cdot 5\frac{5}{6}=$

$=\dfrac{6\cdot 27\cdot 35}{35\cdot 6}=27.$

Ответ: 27.

22. Доля — это каждая из равных частей целого.

$$\frac{101}{119} = \underbrace{\frac{1}{119} + \frac{1}{119} + \ldots + \frac{1}{119}}_{101\ \text{раз}}.$$

Количество слагаемых — 101.

Ответ: 101.

23. Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц исходного числа, тогда $(10x + y)$ — само число. Так как само число в девять раз больше цифры его единиц, то $10x + y = 9y$; $10x = 8y$; $x = \frac{4y}{5}$; так как x и y — цифры, то y делится нацело на 5, т. е. $y = 5$, тогда $x = \frac{4 \cdot 5}{5} = 4$.

Искомое число: $10 \cdot 4 + 5 = 45$.

Ответ: 45.

24. $\left|\left|223^2 + 3\right| - \left|1 - 224^2\right| - \left|-5\right|\right| = \left|223^2 + 3 - (224^2 - 1) - 5\right| =$
$= \left|223^2 + 3 - 224^2 + 1 - 5\right| = \left|223^2 - 224^2 - 1\right| = \left|(223 - 224)(223 + 224) - 1\right| =$
$= \left|-1 \cdot 447 - 1\right| = \left|-448\right| = 448.$

Ответ: 448.

25. $10\,100\left(\frac{1}{101 \cdot 104} + \frac{1}{104 \cdot 107} + \ \ldots\ + \frac{1}{161 \cdot 164}\right) =$

$$= 10\ 100\left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{104}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{104} - \frac{1}{107}\right) + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{161} - \frac{1}{164}\right)\right) =$$

$$= \frac{10\ 100}{3}\left(\frac{1}{101} - \frac{1}{104} + \frac{1}{104} - \frac{1}{107} + \ldots + \frac{1}{161} - \frac{1}{164}\right) =$$

$$= \frac{10\,100}{3} \cdot \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{164}\right) = \frac{10\ 100}{3} \cdot \frac{164 - 101}{101 \cdot 164} = \frac{100 \cdot 63}{164 \cdot 3} =$$

$$= \frac{525}{41} = 12{,}8\ldots \approx 13.$$

Ответ: 13.

Занятие 2

Решения

1. Напомним, что натуральные числа – это числа, которые используют при счете предметов. Их можно записать как ряд чисел 1, 2, 3, 4, … .

Делителем натурального числа a называется натуральное число, на которое a делится без остатка.

Кратным натуральному числу a называется число, которое делится без остатка на a.

Признаки делимости

	Признак
На 2	Числа, оканчивающиеся четной цифрой
На 4	Числа, у которых две последние цифры — нули или образуют число, делящееся на 4
На 3	Числа, сумма цифр которых делится на 3
На 9	Числа, сумма цифр которых делится на 9
На 5	Числа, оканчивающиеся нулем или цифрой 5
На 25	Числа, у которых две последние цифры — нули или образуют число, делящееся на 25
На 10	Числа, оканчивающиеся нулем

Сумма цифр числа 26 373 равна $2+6+3+7+3=21$.

21 делится на 3, значит, число 26 373 тоже делится на 3.

Утверждение 1: число 3 — делитель 26 373 — верно.

Число 769 538 оканчивается цифрой 8, значит, 769 538 делится на 2. Утверждение 2: число 769 538 кратно 2 — верно.

Утверждение 3: число 0 — делитель 17 — неверно. На нуль делить нельзя.

Число 55 556 оканчивается цифрой 6, значит, не делится на 5.

Утверждение 4: число 55 556 кратно 5 — неверно.

Сумма цифр числа 12 345 678 равна $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.

36 делится на 9, значит, число 12 345 678 тоже делится на 9.

Утверждение 5: число 12 345 678 делится на 9 — верно.

Верными являются утверждения 1; 2; 5.

Ответ: 4.

2. Натуральное число называется простым, если оно имеет только два делителя: единицу и само это число.

Натуральное число называется составным, если оно имеет более двух делителей.

> 1 — самое маленькое натуральное число. Число 1 имеет только один делитель: само это число. Число 1 не относят ни к простым, ни к составным.
> 2 — самое маленькое простое число. Оно является единственным четным простым числом.

Истинными являются утверждения 2 и 5.

Ответ: 4.

3. Разложить число на простые множители — это значит представить его в виде произведения простых чисел. Произведение $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$, и все множители в нем простые, значит, это и есть разложение 210 на простые множители.

Ответ: 4.

4. Натуральные числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Взаимно простыми являются числа 21 и 10, так как $\text{НОД}(21;10)=1$.

Ответ: 2.

5. Наименьшим двузначным простым числом является число 11, а наибольшим простым числом пятого десятка является число 47. Сумма этих чисел равна 58.

Ответ: 4.

6. Число 24 делится на 1; 2; 12; 24.

Ответ: 3.

7. Разделить натуральное число a на натуральное число b $(a>b)$ с остатком — значит найти такое натуральное число q и такое неотрицательное целое число r $(r<b)$, что $a=b\cdot q+r$, где a — делимое, b — делитель, q — неполное частное, r — остаток.

Чтобы найти делитель при делении с остатком, надо из делимого вычесть остаток и полученную разность разделить на неполное частное.

Делитель равен $(624-9):41=615:41=15$.

Ответ: 3.

8. Число кратно 10, если последняя цифра этого числа 0.

1) $38\cdot681:3\cdot15=(38\cdot15)\cdot(681:3)$.

681 делится на 3 нацело. При умножении 38 на 15 последней цифрой будет 0 $(8\cdot5=40)$. Таким образом, значение выражения кратно десяти.

2) $(536+824-312)\cdot 365$.

Значение выражения в скобках — четное число. При умножении четного числа на 365 получим число, последней цифрой которого будет 0.

3) $1024:4\cdot 5$.

$1024:4$ — четно, значит, значение выражения кратно 10.

4) $(839-127-222):10$.

Значение выражения $839-127-222$ является число, цифра единиц которого — нуль $(9-7-2=0)$, а цифра десятков не равна нулю $(3-2-2\neq 0)$. После деления выражения в скобках на 10 останется число, не кратное 10.

5) $(1111-111):(2\cdot 5)$.

Значением выражения $1111-111$ является число, цифра десятков и цифра единиц которого равны нулю. Значит, значение исходного выражения будет кратно 10.

Ответ: 4.

9. $52=2\cdot 2\cdot 13$, а $143=11\cdot 13$. Таким образом, общим простым делителем чисел 52 и 143 является число 13.

Ответ: 3.

10. Разложим числа 150 и 175 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 5 \\ 30 & 3 \\ 10 & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 175 & 5 \\ 35 & 7 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда $\text{НОД}(150;175)=5\cdot 5=25$.

Ответ: 2.

11. Разложим числа 80; 240 и 360 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 80 & 5 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 240 & 3 \\ 80 & 5 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 360 & 3 \\ 120 & 5 \\ 24 & 3 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда $\text{НОК}(80;240;360)=5\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=720$.

Ответ: 5.

12. 1) НОК $(6; 6) = 6$;

2) НОК $(6; 36) = 36$;

3) НОК $(12; 3) = 12$;

4) НОК $(9; 4) = 36$;

5) НОК $(18; 2) = 18$.

Ответ: 2.

13. Число 18 делится на 1; 2; 3; 6; 9; 18.

Найдем сумму делителей числа 18: $1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$.

Ответ: 1.

14. Если число делится на 5, то оно оканчивается нулем или цифрой 5. На 3 делятся те числа, сумма цифр которых делится на 3.

Сумма цифр числа 63 555 равна 24, и оно оканчивается цифрой 5, значит, число 63 555 делится на 3 и на 5.

Сумма цифр числа 57 630 равна 21, и оно оканчивается цифрой 0, значит, число 57 630 делится на 3 и на 5.

Ответ: 3.

15. При любом натуральном значении n четно значение выражения $2n$.

Ответ: 2.

16. Чтобы число делилось на 12, оно должно делиться на 3 и на 4. Число кратно 4, если его последние две цифры образуют число, делящееся на 4. В числе 596 172 сумма цифр равна 30, и число 72 кратно 4.

Ответ: 596 172.

17. 2 — наименьшее простое число; 999 — наибольшее трехзначное составное число. Их сумма равна $2 + 999 = 1001$.

Разложим число 1001 на простые множители: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Сумма простых множителей равна $7 + 11 + 13 = 31$.

Ответ: 31.

18. *I способ.*

Разложим числа 210; 150 и 180 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 7 \\ 30 & 5 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 5 \\ 30 & 5 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 3 \\ 60 & 2 \\ 30 & 5 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда $\text{НОК}(210;150;180) = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7 = 6300$,
$\text{НОД}(210;150;180) = 5\cdot3\cdot2 = 30$.

Таким образом, $\dfrac{\text{НОК}(210;150;180)}{\text{НОД}(210;150;180)} = \dfrac{6300}{30} = 210$.

II способ.

Заметим, что $210 = 21\cdot10$; $150 = 15\cdot10$; $180 = 18\cdot10$, тогда
$\text{НОК}(210;150;180) = 10\cdot\text{НОК}(21;15;18) = 630\cdot10$,
$\text{НОД}(210;150;180) = 10\cdot\text{НОД}(21;15;18) = 3\cdot10$ и т. д.

Вообще говоря, $\text{НОК}(a\cdot c; b\cdot c) = c\cdot\text{НОК}(a;b)$
и $\text{НОД}(a\cdot c; b\cdot c) = c\cdot\text{НОД}(a;b)$.

Ответ: 210.

19. Если $a = 2\cdot3^3\cdot5$; $b = 3^2\cdot5\cdot7$; $c = 2^2\cdot3\cdot5^2$,
то $\text{НОК}(a;b;c) = 2^2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7 = 18\,900$.

Ответ: 18 900.

20. Разложим числа 123 и 82 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 123 & 3 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 82 & 2 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда $\text{НОД}(123; 82) = 41$. То есть 41 призер олимпиады был награжден подарками. Найдем, сколько дисков было в каждом подарке: $123 : 41 = 3$ (диска).

Ответ: 3.

21. 1) 2 ч 30 мин = 150 мин; 3 ч 20 мин = 200 мин; 2 ч = 120 мин.

2) Разложим числа 150; 200 и 120 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 5 \\ 30 & 5 \\ 6 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 5 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 3 \\ 40 & 2 \\ 20 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда $\text{НОК}(150; 200; 120) = 5\cdot5\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2 = 600$.

Таким образом, маршрутные такси впервые снова встретятся на станции через 600 мин = 10 ч.

Ответ: 10.

22. Искомое число можно представить в виде $x = 31 \cdot 17 + r$, где r — остаток. Наибольший возможный остаток при делении на 17 равен 16, т. е. искомое число $x = 31 \cdot 17 + 16 = 543$.

Ответ: 543.

23. Если число кратно четырем, то оно четно.

Наименьшее простое число — 2. Остаток от деления четного числа на 2 равен 0.

Ответ: 0.

24. Сумма цифр числа $\overline{143A75B}$ равна $1 + 4 + 3 + A + 7 + 5 + B = 20 + A + B$. Чтобы число делилось на 9, сумма $A + B$ может быть равна 7 или 16. Если $A = 0$, а $B = 7$, то число 1 430 757 будет наименьшим из возможных.

Ответ: 1 430 757.

25. ‖ Полезно помнить, что НОД$(a; b) \cdot$ НОК$(a; b) = ab$.

Требуется найти такие натуральные числа a и b, что $a - b = 40$, а $ab = 1536$. $a(a - 40) = 1536$, $a^2 - 40a - 1536 = 0$; $a_1 = 64$, $a_2 = -24$. Так как a — натуральное число, то $a = 64$.

Ответ: 64.

Занятие 3

Решения

1. $\frac{1}{5}\cdot 100\,\% = 20\,\%.$

Ответ: 3.

2. Верной является пропорция $4:5 = 28:35$ (так как $4\cdot 35 = 28\cdot 5$).

Ответ: 2.

3. $18\cdot 0{,}18 = 3{,}24.$

Ответ: 2.

4. 3 ц = 0,3 т; $0{,}3:12 = 0{,}025$; $0{,}025\cdot 100\,\% = 2{,}5\,\%.$

Ответ: 2.

5. Составим пропорцию:

$$32 - 25\,\%$$
$$x - 100\,\%,$$

тогда $x = \frac{32\cdot 100\ \%}{25\ \%} = 128.$

Ответ: 4.

6. Составим пропорцию:

$$3000 - 100\,\%$$
$$2640 - x\,\%,$$

тогда $x = \frac{2640\cdot 100\,\%}{3000} = 88\,\%$. То есть цена журнала снизилась на $100\ \% - 88\ \% = 12\ \%.$

Ответ: 5.

7. $2\frac{2}{9}:x = 3\frac{19}{27}:3\frac{1}{3};\ x = \frac{2\frac{2}{9}\cdot 3\frac{1}{3}}{3\frac{19}{27}} = \frac{20\cdot 10\cdot 27}{9\cdot 3\cdot 100} = 2.$

Ответ: 2.

8. 152 % числа x равны 114, значит, $x = 114:1{,}52 = 75.$

Ответ: 5.

9. $12\frac{3}{5}:7 = \frac{63}{5}:7 = \frac{63:7}{5} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$ оборота.

Ответ: 1.

10. Пусть первоначальное число равно A, после увеличения его на 150 % стало: $A+1{,}5A=2{,}5A$, т. е. число увеличилось в 2,5 раза.

Ответ: 3.

11. Так как число 360 представлено в виде суммы трех слагаемых, которые относятся как 3 : 2 : 7, то $3x+2x+7x=360$; $12x=360$; $x=30$.

Тогда меньшая часть равна $2\cdot x=2\cdot 30=60$.

Ответ: 2.

12. $\frac{x}{8{,}1}=8{,}1:y$; $y=x-0{,}19x=0{,}81x$; $\frac{x}{8{,}1}=\frac{8{,}1}{0{,}81x}$; $0{,}81x^2=8{,}1^2$.

Так как $x>0$ по условию, то $0{,}9x=8{,}1$; $x=8{,}1:0{,}9=9$; $y=0{,}81\cdot 9=7{,}29$; $x+y=9+7{,}29=16{,}29$.

Ответ: 4.

13. Пусть x м — первоначальная высота елки, тогда $(1{,}25x)$ м — первоначальная высота сосны. После того как деревья подросли на 1,8 м, высота елки стала равной $(x+1{,}8)$ м, а высота сосны — $(1{,}25x+1{,}8)$ м. Известно, что сосна окажется на 10 % выше елки, тогда составим уравнение: $1{,}25x+1{,}8=1{,}1(x+1{,}8)$; $1{,}25x-1{,}1x=1{,}1\cdot 1{,}8-1{,}8$; $0{,}15x=0{,}1\cdot 1{,}8$; $x=\frac{0{,}1\cdot 1{,}8}{0{,}15}$; $x=\frac{18}{15}$; $x=\frac{6}{5}$; $x=1{,}2$ (м).

Ответ: 2.

14. Пусть x руб. — первоначальная цена товара. После увеличения цены товар стал стоить $(1{,}1x)$ руб., а после снижения цены — $(0{,}75\cdot 1{,}1x)$ руб. Так как товар подешевел на 7000 руб. по сравнению с первоначальной ценой, то составим уравнение: $x-0{,}75\cdot 1{,}1x=7000$; $x-0{,}825x=7000$; $0{,}175x=7000$; $x=40\,000$ (руб.).

Ответ: 2.

15. Пусть x руб. — первоначальная стоимость первого предмета, y руб. — второго. После того как стоимость первого предмета уменьшили на 10 %, а второго — на 40 %, они стали стоить $(0{,}9x)$ руб. и $(0{,}6y)$ руб. соответственно.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}x+y=40\,000,\\0{,}9x+0{,}6y=33\,000;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=40\,000,\\9x+6y=330\,000;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=40\,000,\\3x+2y=110\,000;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x-2y=-80\,000,\\3x+2y=110\,000;\end{cases}\quad\begin{cases}x=30\,000,\\y=10\,000.\end{cases}$$

Положительная разность между стоимостью предметов до изменения цен равна 20 000 руб.

Ответ: 3.

16. Три насоса наполнят весь бассейн за 35 ч, так как $\frac{1}{7}$ часть бассейна они наполняют за 5 ч.

Количество насосов и время наполнения бассейна — обратно пропорциональные величины, поэтому $\frac{3}{5}=\frac{x}{35}$, где x — искомое время; $x=21$ ч.

Ответ: 21.

17. Составим пропорцию:

$$8-96\,\%$$
$$12-x\,\%,$$

тогда $x=\frac{12\cdot 96\,\%}{8}=144\,\%$ — столько процентов плана выполнил рабочий за 12 месяцев. Таким образом, годовой план перевыполнен на 44 %.

Ответ: 44.

18. $n=m+0{,}24m=1{,}24m$; найдем, сколько процентов разность чисел n и m составляет от n: $\frac{0{,}24m}{1{,}24m}\cdot 100\,\%=19{,}35\ldots\,\%\approx 19\,\%$.

Ответ: 19.

19.

	Масса, кг	Процентное содержание
Медь	x	60 %
Олово	$x-2$	$100\,\%-60\,\%=40\,\%$

Тогда $\frac{x}{x-2}=\frac{60\,\%}{40\,\%}$; $\frac{x}{x-2}=\frac{3}{2}$; $2x=3(x-2)$; $x=6$ кг.

Ответ: 6.

20. 1) $100\,\%-30\,\%=70\,\%$ дев. — было в начале года;
2) $21:0{,}7=30$ чел. — было в классе в начале года;
3) $30-21=9$ мал. — было в начале года;
4) $9+6=15$ мал. — стало в середине года;
5) $21-6=15$ дев. — стало в середине года.

Так как мальчиков и девочек стало поровну, то мальчики стали составлять 50 % всех учащихся класса.

Ответ: 50.

21. 1) $400\cdot 0{,}08=32$ г — соль в первом растворе;

2) $600\cdot 0{,}13=78$ г — соль во втором растворе;

3) $400+600=1000$ г — масса смеси;

4) $32+78=110$ г — масса соли в смеси;

5) $\frac{110}{1000}\cdot 100\,\%=11\,\%$ — концентрация соли в смеси.

Ответ: 11.

22. Через x обозначим массу первого сплава, а через y — массу второго сплава, входящих в новый сплав. Тогда в новом сплаве содержится $\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}$ первого металла и $\frac{2x}{3}+\frac{3y}{5}$ второго металла.

Получим $\dfrac{\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}}{\frac{2x}{3}+\frac{3y}{5}}=\frac{17}{27}$; $\frac{5x+6y}{10x+9y}=\frac{17}{27}$; $27(5x+6y)=17(10x+9y)$; $\frac{x}{y}=\frac{9}{35}$.

Итак, второго сплава нужно взять 35 частей.

Ответ: 35.

23. Пусть первоначальная сумма вклада A у. е., тогда:

1) через год сумма станет $A+0{,}1A=1{,}1A$ у. е.;

2) через два года сумма станет $1{,}1A+0{,}1(1{,}1A)=1{,}1^2A$ у. е.;

3) через три года сумма станет $1{,}1^2A+0{,}1\cdot 1{,}1^2A=1{,}1^3A$ у. е.

Найдем разность $1{,}1^3A-A=0{,}331A$; $0{,}331A=662$; $A=662:0{,}331$; $A=2000$ у. е.

Ответ: 2000.

24. Пусть на факультете X учится S студентов, тогда на факультете Y учится $(1{,}5S)$ студентов, а на факультете Z — $(0{,}5S)$ студентов.

Тогда на факультете X учится $(0{,}1S)$ отличников, на факультете Y — $0{,}2\cdot(1{,}5S)=0{,}3S$ (отличников), а на факультете Z — $0{,}04\cdot(0{,}5S)=0{,}02S$ (отличников).

Искомая величина равна $\frac{0{,}1S+0{,}3S+0{,}02S}{S+1{,}5S+0{,}5S}=\frac{0{,}42}{3}=0{,}14=14\,\%$.

Ответ: 14.

25. По условию задачи составим таблицу:

	Было	Взяли	Осталось
Всего шаров	x		$x-y$
Синих шаров	$0{,}01x$		$0{,}01x$
Красных шаров	$0{,}99x$	y	$0{,}99x-y$

Так как доля синих от общего числа оставшихся в коробке шаров составила 2 %, то составим уравнение: $0{,}01x=0{,}02(x-y)$; $x=2x-2y$; $x=2y$.

Первоначальное число шаров в 2 раза больше числа взятых красных шаров.

Ответ: 2.

Занятие 4 Решения

1. 1) $2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}\neq -4;$

2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}=7$ — верное равенство;

3) $(0{,}3)^2=0{,}09\neq 0{,}9;$

4) $(5{,}1)^0=1\neq 5{,}1;$

5) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=0{,}2^2=0{,}04$ — верное равенство.

Ответ: 5.

2. $2^{-5}=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}.$

Ответ: 5.

3. 1) $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}\neq -10;$

2) $(3\cdot 4)^2=9\cdot 16\neq 48;$

3) $\dfrac{15^3}{25^5}=\dfrac{(5\cdot 3)^3}{\left(5^2\right)^5}=\dfrac{5^3\cdot 3^3}{5^{10}}=\dfrac{3^3}{5^7}\neq\dfrac{3^3}{5^5};$

4) $10^{-3}=\dfrac{1}{10^{-3}}=\dfrac{1}{1000}=0{,}001$ — равенство верно;

5) $7^3\cdot 7^4=7^{3+4}=7^7\neq 49^{12}.$

Ответ: 4.

4. $0{,}0000076=7{,}6\cdot 10^{-6}.$

Ответ: 3.

5. $1^{-43}-(0{,}2)^{-1}+(15{,}1)^0=-3.$

1) $1^{-43}=1;$

2) $(0{,}2)^{-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}=5;$

3) $(15{,}1)^0=1;$

4) $1-5+1=-3.$

Ответ: 1.

6. $\left(43^{-5}\right)^3:\left(43^8\right)^{-2}=43^{-15}:43^{-16}=43^{-15-(-16)}=43^{-15+16}=43^1=43.$

Ответ: 3.

7. $\dfrac{\left(4m^2\right)^{-2}\cdot m^5}{2m^6\cdot m^{-2}}=\dfrac{2^{-4}\,m^{-4}\,m^5}{2m^4}=2^{-5}\,m^{-3}=\dfrac{1}{32m^3}.$

Ответ: 4.

8. $4\dfrac{1}{2}\cdot 6^{-2}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}-\left(2^3\right)^{-1}=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{36}+\dfrac{125}{8}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{125}{8}=15\dfrac{5}{8}.$

Ответ: 2.

9. $9\cdot 3^8\cdot\dfrac{1}{81}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=3^2\cdot 3^8\cdot 3^{-4}\cdot 3^2=3^8.$

Ответ: 1.

10. $0{,}3^{-3}+\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}+(-0{,}5)^{-2}\cdot\dfrac{3}{4}+(-1)^{-8}\cdot 6=\dfrac{1000}{27}+\dfrac{7}{3}+3+6=48\dfrac{10}{27}.$

Ответ: 1.

11. 1) $3+(7{,}5\cdot 2-15)^0=3+0^0$ — выражение не имеет значения, так как нуль в нулевой степени не имеет смысла;

2) $-6^4+12^{-1}=-1\cdot 6^4+\dfrac{1}{12}=\ldots$ — выражение имеет значение;

3) $\dfrac{49\cdot 7^3}{-5^2+33-2^3}=\dfrac{49\cdot 7^3}{-1\cdot 5^2+33-2^3}=\dfrac{49\cdot 7^3}{-25+33-8}=\dfrac{49\cdot 7^3}{0}$ — выражение не имеет значения, так как на нуль делить нельзя;

4) $\dfrac{18}{5^{-15}\cdot\left(5^7\right)^2\cdot 5}=\dfrac{18}{5^{-15}\cdot 5^{14}\cdot 5^1}=\dfrac{18}{5^{-15+14+1}}=\dfrac{18}{5^0}=\dfrac{18}{1}=18$ — выражение имеет значение;

5) $\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-29^0+7^{10}:\left(7^3\cdot 7^2\right)^2}=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-1\cdot 29^0+7^{10}:\left(7^{3+2}\right)^2}=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-1\cdot 1+7^{10}:\left(7^5\right)^2}=$

$=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-1+7^{10}:7^{10}}=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-1+7^{10}:7^{10}}=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-1+7^{10-10}}=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-1+7^0}=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{-1+1}=$

$=\dfrac{12^6\cdot 6^{12}}{0}$ — выражение не имеет значения, так как на нуль делить нельзя;

6) $\dfrac{33}{5^{-12}-5^{12}}=\dfrac{33}{\dfrac{1}{5^{12}}-5^{12}}=\ldots$ — выражение имеет значение.

Ответ: 1.

12. $\left(a^{-2}-b^{-2}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-2}-1=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-2}-1=$

$=\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-2}-1=\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)\cdot\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{2}-1=$

$=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot\frac{a^2b^2}{(b-a)^2}-1=\frac{(b-a)(b+a)\cdot a^2b^2}{a^2b^2\cdot(b-a)^2}-1=$

$=\frac{b+a}{b-a}-1=\frac{b+a-(b-a)}{b-a}=\frac{b+a-b+a}{b-a}=\frac{2a}{b-a}.$

Ответ: 4.

13. $\frac{4^5\cdot 2^6}{32^3}=\frac{2^{10}\cdot 2^6}{2^{15}}=2$; 120 % от числа 2 равны: $2\cdot 1{,}2=2{,}4$.

Ответ: 5.

14. Найдем значение выражения $\frac{2^{23}\cdot 9^8}{6^{15}\cdot 3^4}=\frac{2^{23}\cdot 3^{16}}{3^{15}\cdot 2^{15}\cdot 3^4}=\frac{2^8}{3^3}=\frac{256}{27}$;

$\frac{256}{27}$ составляет $\frac{16}{27}$ частей, тогда искомое число будет равно: $\frac{256}{27}\cdot\frac{27}{16}=16.$

Ответ: 1.

15. $\dfrac{\frac{49^{12}}{7^{21}}+\frac{81^{10}}{27^{13}}}{2}=\dfrac{\frac{7^{24}}{7^{21}}+\frac{3^{40}}{3^{39}}}{2}=\frac{7^3+3}{2}=\frac{346}{2}=173.$

Ответ: 4.

16. $\dfrac{16^{-3}\cdot 16^0\cdot\frac{1}{64}}{\left(2^{-7}\right)^8}=\dfrac{\left(2^4\right)^{-3}\cdot 2^{-6}}{2^{-56}}=\frac{2^{-12}\cdot 2^{-6}}{2^{-56}}=\frac{2^{-18}}{2^{-56}}=2^{38}=$

$=2^{2\cdot 19}=\left(2^2\right)^{19}=4^{19}.$

Ответ: 19.

17. $14\cdot\left(\frac{35}{48}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6\cdot\left(1\frac{3}{5}\right)^5=14\cdot\left(\frac{35}{48}\cdot 1\frac{3}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6=14\cdot\left(\frac{35}{48}\cdot\frac{8}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6=$

$=14\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6=14\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6=14\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{-5+6}=14\cdot\frac{6}{7}=12.$

Ответ: 12.

18. $\dfrac{49\cdot 10^6}{25^3\cdot 14^2}=\dfrac{7^2\cdot 2^6\cdot 5^6}{5^6\cdot 2^2\cdot 7^2}=\dfrac{2^6}{2^2}=2^4=\left(2^2\right)^2=4^2$, т. е. искомое число равно 4.

Ответ: 4.

19. $\dfrac{(-2)(-3)^{17}-(-3)^{16}}{9^7\cdot 15}=\dfrac{(-3)^{16}\left((-2)\cdot(-3)-1\right)}{9^7\cdot 15}=\dfrac{3^{16}\cdot 5}{3^{14}\cdot 15}=3.\quad \dfrac{1}{3}\cdot 3=1.$

Ответ: 1.

20. $(x:y)^{-20}\cdot\left(\left(\dfrac{1}{2}y\right):x\right)^{-10}=\dfrac{x^{-20}}{y^{-20}}\cdot\dfrac{y^{-10}}{2^{-10}\cdot x^{-10}}=\dfrac{2^{10}\cdot y^{10}}{x^{10}}=\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{10};$

$x=\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-1}=32;\ y=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-1}=16;$ тогда $\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{10}=\left(\dfrac{2\cdot 16}{32}\right)^{10}=1^{10}=1.$

Ответ: 1.

21. Пусть $A=\left(a+\left(1+\left(\dfrac{3-a}{a+1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$, тогда $A=\left(a+\left(1+\dfrac{a+1}{3-a}\right)^{-1}\right)^{-1}=$

$=\left(a+\left(\dfrac{3-a+a+1}{3-a}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(a+\left(\dfrac{4}{3-a}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(a+\dfrac{3-a}{4}\right)^{-1}=$

$=\left(\dfrac{4a+3-a}{4}\right)^{-1}=\left(\dfrac{3a+3}{4}\right)^{-1}=\dfrac{4}{3a+3}.$

При $a=-1\dfrac{1}{3}$ $A=\dfrac{4}{3\cdot\left(-1\dfrac{1}{3}\right)+3}=\dfrac{4}{3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)+3}=\dfrac{4}{-4+3}=\dfrac{4}{-1}=-4.$

Ответ: –4.

22. $A=\dfrac{2^{-3}-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2}}{2^{-2}+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{0}+\dfrac{3}{4}}\cdot 144.$

Так как $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ (a\neq 0);\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}\ (a\neq 0; b\neq 0)$ и $a^0=1\ (a\neq 0)$, то $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8};\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2}=\dfrac{16}{9};\ \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{0}=1$ и $2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}.$

Тогда

$$A=\frac{\frac{1}{8}-\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1+\frac{3}{4}}\cdot 144=\frac{\frac{1}{8}-\frac{4}{9}}{2}\cdot 144=\frac{\frac{9-4\cdot 8}{72}}{2}\cdot 144=\frac{-23}{72\cdot 2}\cdot 144=-23.$$

Ответ: -23.

23. $A=\dfrac{3^{300}\cdot 4^{50}\cdot 2^{200}}{6^{300}}+\dfrac{\left(3^{6}\right)^{7}}{9^{10}\cdot 3^{21}}$.

Воспользуемся свойствами степеней

$$\left(\left(a^{n}\right)^{m}=a^{mn};\ a^{n}\cdot b^{n}=\left(ab\right)^{n};\ a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m};\ a^{n}:a^{m}=a^{n-m}\right)$$

и получим:

$$A=\frac{3^{300}\cdot\left(2^{2}\right)^{50}\cdot 2^{200}}{\left(2\cdot 3\right)^{300}}+\frac{3^{42}}{\left(3^{2}\right)^{10}\cdot 3^{21}}=\frac{3^{300}\cdot 2^{100}\cdot 2^{200}}{2^{300}\cdot 3^{300}}+\frac{3^{42}}{3^{20}\cdot 3^{21}}=$$

$$=\frac{3^{300}\cdot 2^{300}}{2^{300}\cdot 3^{300}}+\frac{3^{42}}{3^{41}}=1+3=4.$$

Ответ: 4.

24. $\dfrac{10^{20}-90^{10}}{3^{20}-10^{10}}=\dfrac{10^{10}\left(10^{10}-9^{10}\right)}{9^{10}-10^{10}}=-10^{10}$. Это число оканчивается десятью нулями.

Ответ: 10.

25. $K=2^{30}+3^{30}+4^{30}$. Определим последнюю цифру каждого слагаемого.

Последние цифры чисел вида 2^{n}, $n\in\boldsymbol{N}$, при увеличении n равны 2; 4; 8; 6; 2; 4; ...; 30 : 4 = 7 (остаток 2), значит, последняя цифра 2^{30} равна 4.

Последние цифры чисел вида 3^{n}, $n\in\boldsymbol{N}$, при увеличении n равны 3; 9; 7; 1; 3; 9; ...; 30 : 4 = 7 (остаток 2), значит, последняя цифра 3^{30} равна 9.

Последние цифры чисел вида 4^{n}, $n\in\boldsymbol{N}$, при увеличении n равны 4; 6; 4; 6; 4; 6; ...; 30 : 2 = 15, значит, последняя цифра 4^{30} равна 6. Сумма этих трех степеней будет оканчиваться цифрой 9, так как $4+9+6=19$.

Ответ: 9.

Занятие 5 Решения

1. Одночленом называется выражение, являющееся произведением чисел, переменных и натуральных степеней этих переменных.

Следует помнить, что числа и степени переменных (например, $15x$; b^4) также считаются одночленами.

Таким образом, одночленом не является выражение $\frac{3}{a}$.

Ответ: 4.

2. Степень многочлена определяется наибольшей степенью входящих в него одночленов. В данном случае одночлен a^5b^3, имеющий степень 8 ($5+3=8$), определяет степень многочлена.

Ответ: 4.

3. 1) $(5x-y)^2 = 25x^2 - 10xy + y^2 \neq 5x^2 - 10xy + y^2$;

2) $(-a-7b)^2 = \left(-(a+7b)\right)^2 = (-1)^2(a+7b)^2 = (a+7b)^2$ — верное равенство;

3) $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - xy = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot y + y^2 = \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 = \left(y - \frac{x}{2}\right)^2$ — верное равенство;

4) $(m+4)^2 = m^2 + 8m + 16 \neq m^2 + 16$;

5) $(3+2c)(2c-3) = 4c^2 - 9 \neq 9 - 4c^2$;

6) $a^2 + 4b^2 \neq (a+2b)(a-2b)$, так как $(a+2b)(a-2b) = a^2 - 4b^2$.

Таким образом, неверными являются равенства под номерами 1; 4; 5 и 6.

Ответ: 2.

4. Воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений и получим: $(5a+4)(4-5a) = 4^2 - (5a)^2 = 16 - 25a^2$.

Ответ: 3.

5. $\frac{1}{2}ac - 2ac^3 + 3ac + \frac{1}{2}ac^3 = \frac{1}{2}ac + 3ac - 2ac^3 + \frac{1}{2}ac^3 = 3\frac{1}{2}ac - 1\frac{1}{2}ac^3 =$

$= 3{,}5ac - 1{,}5ac^3$.

Ответ: 4.

6. $-2a(b-4a)+(8-4a)b+6ab=-2ab+8a^2+8b-4ab+6ab=$
$=8a^2+8b=8(a^2+b).$

Ответ: 1.

7. $(n-3m)(n+4m)=n^2+4nm-3mn-12m^2=n^2+mn-12m^2.$

Ответ: 5.

8. $(8a^5b^2-2a^2b):(2a^2b)-(2a^2b-1)a=$
$=(8a^5b^2:(2a^2b)-2a^2b:(2a^2b))-(2a^3b-a)=$
$=(4a^3b-1)-2a^3b+a=4a^3b-1-2a^3b+a=2a^3b+a-1.$

Ответ: 4.

9. Полезно помнить, что $(a-b)^2=(b-a)^2.$

Тогда $-5(n-m)^3+2(m-n)^2-m+n=-5(n-m)^3+2(n-m)^2+$
$+(n-m)=(n-m)(-5(n-m)^2+2(n-m)+1).$

Ответ: 1.

10. Воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений и получим:

$25m^2-(4m-5)^2=(5m)^2-(4m-5)^2=$
$=(5m-(4m-5))(5m+(4m-5))=(5m-4m+5)(5m+4m-5)=$
$=(9m-5)(m+5).$

Ответ: 1.

11. Разложим многочлен на множители с помощью способа группировки:

$a^3-4a^2+5a-20=(a^3-4a^2)+(5a-20)=a^2(a-4)+5(a-4)=$
$=(a-4)(a^2+5).$

Ответ: 2.

12. $\frac{2{,}7^2-2\cdot 2{,}7\cdot 4{,}3+4{,}3^2}{2{,}7^2-4{,}3^2}=\frac{(2{,}7-4{,}3)^2}{(2{,}7-4{,}3)(2{,}7+4{,}3)}=\frac{2{,}7-4{,}3}{2{,}7+4{,}3}=$
$=\frac{-1{,}6}{7}=-\frac{16}{70}=-\frac{8}{35}.$

Ответ: 3.

13. $A=(2a-b)^2+2(b-2a)(3b+7a)+(3b+7a)^2$;

$A=(b-2a)^2+2(b-2a)(3b+7a)+(3b+7a)^2$.

Воспользуемся формулой квадрата суммы двух выражений $\left(a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\right)$ и получим:

$$A=\left((b-2a)+(3b+7a)\right)^2=(4b+5a)^2.$$

При $a=2\frac{1}{5};\ b=\frac{1}{2}\ A=\left(4\cdot\frac{1}{2}+5\cdot 2\frac{1}{5}\right)^2=(2+11)^2=13^2=169.$

Ответ: 2.

14. $A=36m^2-9n^2+6nk-k^2$;

$A=36m^2-\left(9n^2-6nk+k^2\right)=36m^2-(3n-k)^2=(6m)^2-(3n-k)^2=$
$=\left(6m+(3n-k)\right)\left(6m-(3n-k)\right)=(6m+3n-k)(6m-3n+k).$

Ответ: 3.

15. $A=a^2+ab-2b^2$;

$A=a^2+ab-2b^2=a^2+ab-b^2-b^2=\left(a^2-b^2\right)+\left(ab-b^2\right)=$
$=(a-b)(a+b)+b(a-b)=(a-b)\left((a+b)+b\right)=(a-b)(a+2b).$

Ответ: 2.

16. $(-2a+4c)(6c-a)(c+a)=\left(-12ac+2a^2+24c^2-4ac\right)(c+a)=$
$=\left(2a^2+24c^2-16ac\right)(c+a)=2a^2c+2a^3+24c^3+24ac^2-$
$-16ac^2-16a^2c=2a^3+24c^3-14a^2c+8ac^2$.
$2\cdot 24\cdot(-14)\cdot 8=-5376.$

Ответ: –5376.

17. $1002\cdot 998-1003\cdot 997=(1000+2)(1000-2)-(1000+3)(1000-3)=$
$=1000^2-4-1000^2+9=5.$

Ответ: 5.

18. $(a-3)^2-2(a-3)(a+3)+(a+3)^2=\left((a-3)-(a+3)\right)^2=$
$=(a-3-a-3)^2=(-6)^2=36.$

Ответ: 36.

19. Воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений и получим:

$46{,}9^2-23{,}7^2-70{,}6\cdot 13{,}2=(46{,}9-23{,}7)(46{,}9+23{,}7)-70{,}6\cdot 13{,}2=$

$=23{,}2\cdot 70{,}6-70{,}6\cdot 13{,}2=70{,}6\cdot(23{,}2-13{,}2)=70{,}6\cdot 10=706.$

Ответ: 706.

20. $-4x^2+16x+48=-4\left(x^2-4x-12\right)=-4\left(\left(x^2-4x+4\right)-16\right)=$

$=-4(x-2)^2+64.$

Так как $-4(x-2)^2+64\le 64$ при всех действительных значениях переменной, то выражение достигает своего наибольшего значения, равного 64, при $x=2$.

Ответ: 2.

21. $98^3+2\cdot 98^2+98\cdot 200=98^2\cdot(98+2)+98\cdot 200=98^2\cdot 100+98\cdot 200=$

$=98\cdot 100\cdot(98+2)=98\cdot 100\cdot 100=980\ 000.$

Ответ: 980 000.

22. $A=\dfrac{a^4+1}{a^2};\ a+\dfrac{1}{a}=4.$

Возведем обе части равенства $a+\dfrac{1}{a}=4$ в квадрат: $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=4^2;$

$a^2+2\cdot a\cdot\dfrac{1}{a}+\left(\dfrac{1}{a}\right)^2=16;\quad a^2+2+\dfrac{1}{a^2}=16;\quad a^2+\dfrac{1}{a^2}=14;\ \dfrac{a^4+1}{a^2}=14,$ т. е. $A=14.$

Ответ: 14.

23. Сократим дробь:

$$\frac{64+a^4}{a^2+4a+8}=\frac{\left(64+a^4+16a^2\right)-16a^2}{a^2+4a+8}=\frac{\left(8+a^2\right)^2-(4a)^2}{a^2+4a+8}=$$

$$=\frac{\left(8+a^2-4a\right)\left(8+a^2+4a\right)}{a^2+4a+8}=8+a^2-4a=a^2-4a+8.$$

Найдем наименьшее значение выражения $a^2-4a+8=$ $=\left(a^2-4a+4\right)+4=(a-2)^2+4\ge 4$ при любых действительных значениях a. Таким образом, наименьшее значение выражения 4.

Ответ: 4.

24. $A=\left(\frac{3}{a(a+3)}+\frac{3}{(a+3)(a+6)}+\frac{3}{(a+6)(a+9)}+\frac{3}{(a+9)(a+12)}+\right.$

$\left.+\frac{3}{(a+12)(a+15)}\right)^{-1}.$

Заметим, что $\frac{3}{a(a+3)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+3}$; $\frac{3}{(a+3)(a+6)}=\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+6}$; ...;

$\frac{3}{(a+12)(a+15)}=\frac{1}{a+12}-\frac{1}{a+15}$. Тогда $A=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+3}+\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+6}+\right.$

$\left.+\frac{1}{a+6}-\frac{1}{a+9}+\frac{1}{a+9}-\frac{1}{a+12}+\frac{1}{a+12}-\frac{1}{a+15}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+15}\right)^{-1}=$

$=\left(\frac{a+15-a}{a(a+15)}\right)^{-1}=\left(\frac{15}{a(a+15)}\right)^{-1}=\frac{a(a+15)}{15}.$

При $a=15$ $A=\frac{15\cdot(15+15)}{15}=30.$

Ответ: 30.

25. $4x(x-5)+(y+17)4y=-314;$ $4x^2-20x+4y^2+68y+314=0;$
$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5+25+(2y)^2+2\cdot 2y\cdot 17+289=0;$
$(2x-5)^2+(2y+17)^2=0;$ $x=2{,}5;$ $y=-8{,}5.$
$2{,}5+(-8{,}5)=-6.$

Ответ: –6.

Занятие 6

Решения

1. Алгебраической дробью называется выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены, $B \neq 0$. Таким образом, все предложенные выражения являются алгебраическими дробями.

Ответ: 5.

2. Алгебраическая дробь не имеет смысла при тех значениях переменных, при которых знаменатель этой дроби равен нулю.

Выражения 2 и 5: $\frac{x}{x+5}$ и $\frac{12}{|x|-5}$ — не имеют смысла при $x = -5$.

Ответ: 3.

3. Равенство 1: $\frac{2a+b}{2c} = \frac{a+b}{c}$ — неверное равенство, так как при сокращении дробей используется основное свойство дроби, поэтому на 2 надо делить весь числитель, а не один его член $2a$.

Равенство 2: $\frac{(a-b)^2}{b-a} = \frac{-(b-a)^2}{b-a}$ — неверное равенство. Так как $(a-b)^2 = (-1\cdot(b-a))^2 = (-1)^2 \cdot (b-a)^2 = (b-a)^2$, поэтому $\frac{(a-b)^2}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{b-a}$.

Равенство 4: $\frac{a-b}{a(a-b)} = 0$ — неверно.

Числитель и знаменатель разделили на $a-b$, и в числителе осталось 1, значит, $\frac{a-b}{a(a-b)} = \frac{1}{a}$.

Верными будут равенства 3 и 5: $\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}a^2$ и $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b}$.

Ответ: 4.

4. $\left(\frac{y+1}{2x}\right)^3 = \frac{(y+1)^3}{(2x)^3} = \frac{(y+1)^3}{8x^3}$.

Ответ: 1.

5. $\dfrac{a-a^2}{a^2-1}=\dfrac{a(1-a)}{(a-1)(a+1)}=\dfrac{a(1-a)}{-(1-a)(a+1)}=-\dfrac{a}{a+1}.$

Ответ: 1.

6. Полезно помнить, что $(a-b)^2=(b-a)^2$.

Тогда $\dfrac{4x-2}{(x-1)^2}-\dfrac{3-x}{(1-x)^2}=\dfrac{4x-2}{(x-1)^2}-\dfrac{3-x}{(x-1)^2}=\dfrac{4x-2-(3-x)}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{4x-2-3+x}{(x-1)^2}=\dfrac{5x-5}{(x-1)^2}=\dfrac{5(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{5}{x-1}.$

Ответ: 3.

7. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$\dfrac{m^2-9}{m+5}=0$, когда $\begin{cases} m^2-9=0, \\ m+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \text{ или } m=3, \\ m\neq -5. \end{cases}$

Значит, правильный ответ 2.

Ответ: 2.

8. Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

$\dfrac{x-y}{y}:\dfrac{x^2-2xy+y^2}{xy^2}=\dfrac{(x-y)\cdot xy^2}{y(x-y)^2}=\dfrac{xy}{x-y}.$

Ответ: 5.

9. $\dfrac{xy-y^2}{6x}\cdot\dfrac{12xy}{(y-x)^2}=\dfrac{y(x-y)\cdot 12xy}{6x\cdot(y-x)^2}=\dfrac{y(x-y)\cdot 12xy}{6x\cdot(x-y)^2}=\dfrac{2y^2}{x-y}.$

Ответ: 2.

10. $A-B=-\dfrac{x+y}{25x}-\left(-\dfrac{y+x}{5x}\right)=-\dfrac{x+y}{25x}+\dfrac{x+y}{5x}=\dfrac{-x-y+5(x+y)}{25x}=$

$=\dfrac{-x-y+5x+5y}{25x}=\dfrac{4x+4y}{25x}.$

Ответ: 2.

11. $$\frac{6}{(a-b)^2}-\frac{3}{b^2-a^2}=\frac{6}{(a-b)^2}+\frac{3}{a^2-b^2}=\frac{6}{(a-b)^2}+\frac{3}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{6(a+b)+3(a-b)}{(a-b)^2(a+b)}=\frac{6a+6b+3a-3b}{(a-b)^2(a+b)}=\frac{9a+3b}{(a-b)^2(a+b)}.$$

Итак, $C=9a+3b$.

Ответ: 4.

12. $$\left(\frac{x+y}{x}-\frac{2x}{x-y}\right)\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)-2x^2}{x(x-y)}\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2-2x^2}{x(x-y)}\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=\frac{-\left(x^2+y^2\right)(y-x)}{x(x-y)\left(x^2+y^2\right)}=\frac{x-y}{x(x-y)}=\frac{1}{x}.$$

Ответ: 1.

13. $$\frac{5x+6}{x^2-4}-\frac{x}{x^2-4}:\frac{x}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{5x+6}{x^2-4}-\frac{x}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x-2}{x}-\frac{x+2}{x-2}=$$

$$=\frac{5x+6}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{5x+6}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=$$

$$=\frac{5x+6-(x-2)-(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{5x+6-x+2-x^2-4x-4}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{-x^2+4}{(x-2)(x+2)}=-\frac{x^2-4}{(x-2)(x+2)}=-1.$$

Ответ: 5.

14. $$\frac{10}{m+5}+\frac{(5-m)^2}{m}\cdot\left(\frac{m}{(m-5)^2}-\frac{m}{25-m^2}\right)=$$

$$=\frac{10}{m+5}+\frac{(5-m)^2}{m}\cdot\left(\frac{m}{(5-m)^2}-\frac{m}{(5-m)(5+m)}\right)=\frac{10}{m+5}+$$

$$+\frac{(5-m)^2}{m}\cdot\frac{m}{(5-m)^2}-\frac{(5-m)^2}{m}\cdot\frac{m}{(5-m)(5+m)}=\frac{10}{m+5}+1-\frac{5-m}{m+5}=$$

$$=\frac{10}{m+5}-\frac{5-m}{m+5}+1=\frac{10-5+m}{m+5}+1=\frac{5+m}{m+5}+1=1+1=2.$$

Ответ: 2.

15. $\left(\dfrac{a^2}{a+5}-\dfrac{a^3}{a^2+10a+25}\right):\left(\dfrac{a}{a+5}-\dfrac{a^2}{a^2-25}\right)=$

$=\left(\dfrac{a^2}{a+5}-\dfrac{a^3}{(a+5)^2}\right):\left(\dfrac{a}{a+5}-\dfrac{a^2}{(a-5)(a+5)}\right)=$

$=\dfrac{a^2(a+5)-a^3}{(a+5)^2}:\dfrac{a(a-5)-a^2}{(a+5)(a-5)}=\dfrac{a^3+5a^2-a^3}{(a+5)^2}:\dfrac{a^2-5a-a^2}{(a+5)(a-5)}=$

$=\dfrac{5a^2}{(a+5)^2}:\dfrac{-5a}{(a+5)(a-5)}=\dfrac{5a^2}{(a+5)^2}\cdot\dfrac{(a+5)(a-5)}{-5a}=-\dfrac{a(a-5)}{a+5}=\dfrac{a(5-a)}{a+5}.$

Ответ: 4.

16. $\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+p^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{p}-p\right)-\dfrac{1}{p}=\dfrac{p\cdot(1+p)(1-p)}{p^2(1+p)}-\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-p}{p}-\dfrac{1}{p}=$

$=\dfrac{1-p-1}{p}=\dfrac{-p}{p}=-1.$

Ответ: –1.

17. $\dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{1-\left(\dfrac{1-x}{2x}\right)^{-1}}=\dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{1-\dfrac{2x}{1-x}}=\dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{\dfrac{1-x-2x}{1-x}}=\dfrac{\dfrac{2x}{1-x}}{\dfrac{1-3x}{1-x}}=\left.\dfrac{2x}{1-3x}\right|_{x=\frac{3}{10}}=\dfrac{2\cdot\dfrac{3}{10}}{1-3\cdot\dfrac{3}{10}}=6.$

Ответ: 6.

18. Упростим выражение: $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b}:\dfrac{m}{n}\left(b-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{n}{m}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{bn-1}{n}+\dfrac{n}{m}=$

$=\dfrac{1}{b}-\dfrac{bn-1}{bm}+\dfrac{n}{m}=\dfrac{m-bn+1+bn}{bm}=\dfrac{m+1}{bm}.$

Значение выражения не зависит от n, вычислим его при данных значениях переменных. Если $b=\dfrac{1}{5},\ m=\dfrac{1}{7}$, то $\dfrac{m+1}{bm}=\dfrac{\dfrac{1}{7}+1}{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{7}}=\dfrac{8}{7}:\dfrac{1}{35}=$

$=\dfrac{8\cdot 35}{7}=8\cdot 5=40.$

Ответ: 40.

19. *I способ.*

Пусть $A=\frac{b+3}{b-1}\cdot\left(\frac{b-1}{b-3}-\frac{b^2-1}{b^2-9}\right)=\frac{b+3}{b-1}\cdot\left(\frac{b-1}{b-3}-\frac{b^2-1}{(b-3)(b+3)}\right)=$

$$=\frac{b+3}{b-1}\cdot\left(\frac{(b-1)(b+3)-(b^2-1)}{(b-3)(b+3)}\right)=\frac{b+3}{b-1}\cdot\frac{b^2+3b-b-3-b^2+1}{(b-3)(b+3)}=$$

$$=\frac{b+3}{b-1}\cdot\frac{2b-2}{(b-3)(b+3)}=\frac{(b+3)\cdot 2\cdot(b-1)}{(b-1)(b-3)(b+3)}=\frac{2}{b-3}.$$

При $b=2{,}8$ $A=\frac{2}{2{,}8-3}=\frac{2}{-0{,}2}=\frac{20}{-2}=-10.$

II способ.

$$A=\frac{b+3}{b-1}\cdot\left(\frac{b-1}{b-3}-\frac{b^2-1}{b^2-9}\right)=\frac{b+3}{b-1}\cdot\frac{b-1}{b-3}-\frac{b+3}{b-1}\cdot\frac{b^2-1}{(b-3)(b+3)}=$$

$$=\frac{b+3}{b-3}-\frac{b+1}{b-3}=\frac{2}{b-3}.$$

И т. д.

Ответ: -10.

20. Следует помнить, что, прежде чем выполнять сложение или вычитание алгебраических дробей, нужно их сократить, если это возможно, а также что $(a-b)^n=(b-a)^n$ при четных n. Используя это, упростим выражение:

$$\left(\frac{(m-3)^3}{(3-m)^2}-\frac{6m-18}{3-m}\right)^2=\left(\frac{(m-3)^3}{(m-3)^2}-\frac{6(m-3)}{-(m-3)}\right)^2=(m-3+6)^2=(m+3)^2.$$

Решая уравнение $(m+3)^2=25$, получим $m+3=5,\ m=2$ или $m+3=-5,\quad m=-8.$

Итак, сумма найденных значений равна $2+(-8)=-6.$

Ответ: -6.

21. 1) $\frac{3}{y+3}+\frac{y^2+9}{y^2-9}-\frac{3}{3-y}=\frac{3}{y+3}+\frac{y^2+9}{(y-3)(y+3)}+\frac{3}{y-3}=$

$$=\frac{3(y-3)+(y^2+9)+3(y+3)}{(y-3)(y+3)}=\frac{3y-9+y^2+9+3y+9}{(y-3)(y+3)}=$$

$$= \frac{y^2+6y+9}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y+3)^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{y+3}{y-3};$$

2) $$\frac{y^2+3y}{(y-3)^2} : \frac{y+3}{y-3} = \frac{y(y+3)}{(y-3)^2} \cdot \frac{y-3}{y+3} = \frac{y}{y-3}.$$

Если $y = \frac{12}{5}$, то $\dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{12}{5}-3} = \dfrac{2{,}4}{2{,}4-3} = \dfrac{2{,}4}{-0{,}6} = -\dfrac{24}{6} = -4.$

Ответ: –4.

22. 1) $$\frac{-4+x}{x} - x + 3 = \frac{-4+x-x^2+3x}{x} = \frac{-(x-2)^2}{x};$$

2) $$\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x^2-4x+4} = \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{(x-2-(x+2))(x-2+x+2)}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{(-4)(2x)}{(x+2)(x-2)^2} = -\frac{8x}{(x+2)(x-2)^2};$$

3) $$\left(\frac{-(x-2)^2}{x} \cdot \left(-\frac{8x}{(x+2)(x-2)^2}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{8}{x+2}\right)^{-1} = \frac{x+2}{8};$$

4) $$\left(\frac{x+2}{8} - \frac{x}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{x+2-x}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4.$$

Ответ: 4.

23. $$\frac{\frac{3}{x}+\frac{x+3}{x^2-x}}{\frac{2}{x}-\frac{x-2}{x^2-x}} = \left(\frac{3}{x} + \frac{x+3}{x(x-1)}\right) : \left(\frac{2}{x} - \frac{x-2}{x(x-1)}\right) =$$

$$= \frac{3(x-1)+x+3}{x(x-1)} : \frac{2(x-1)-(x-2)}{x(x-1)} = \frac{4x}{x(x-1)} : \frac{x}{x(x-1)} = \frac{4x \cdot (x-1)}{x(x-1)} = 4.$$

Ответ: 4.

24. Пусть $A = \dfrac{4xy+81-4x^2-y^2}{y+9-2x} - 2x = \dfrac{81-4x^2-y^2+4xy}{y+9-2x} - 2x =$

$$=\frac{81-\left(4x^2-4xy+y^2\right)}{y+9-2x}-2x=\frac{81-(2x-y)^2}{y+9-2x}-2x=$$

$$=\frac{81-(2x-y)^2}{y+9-2x}-2x=\frac{(9-(2x-y))(9+(2x-y))}{y+9-2x}-2x=$$

$$=\frac{(9-2x+y)(9+2x-y)}{y+9-2x}-2x=9+2x-y-2x=9-y.$$

Значение выражения не зависит от значения переменной x. Тогда при $y=-232$ $A=9-(-232)=9+232=241$.

Ответ: 241.

25. $\dfrac{15x-13}{(3x-1)\left(x^2-5x+6\right)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{b+cx}{3x^2-7x+2}$.

Заметим, что

$3x^2-7x+2=(3x-1)(x-2)$ и $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

Выполним сложение:

$$\frac{a}{x-3}+\frac{b+cx}{(3x-1)(x-2)}=\frac{a\left(3x^2-7x+2\right)+(b+cx)(x-3)}{(x-3)(3x-1)(x-2)}=$$

$$=\frac{3ax^2-7ax+2a+bx-3b+cx^2-3cx}{(x-3)(3x-1)(x-2)}=$$

$$=\frac{(3a+c)x^2+(-7a+b-3c)x+2a-3b}{(x-3)(3x-1)(x-2)}.$$

В силу исходного равенства имеем систему

$$\begin{cases}-7a+b-3c=15,\\ 2a-3b=-13,\\ 3a+c=0.\end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\begin{cases}a=4,\\ b=7,\\ c=-12.\end{cases}$$

Сумма этих чисел $4+7+(-12)=-1$.

Ответ: -1.

Занятие 7 Решения

1. Из указанных чисел иррациональными являются $\sqrt{5}; \frac{\sqrt{6}}{3}; -\pi$.

Ответ: 2.

2. Арифметическим квадратным корнем из числа a ($a \geq 0$) называется неотрицательное число b, квадрат которого равен a, т. е. $\sqrt{a}$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$ и принимает только неотрицательные значения.

Из данных имеют смысл выражения 2, 3 и 4.

Ответ: 3.

3. 1) $\sqrt{81} = 9$ — верное равенство;

2) $\sqrt{(-3)^2} = -3$ — равенство неверно, так как $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$;

3) $-\sqrt{36} = 6$ — равенство неверно, так как $-\sqrt{36} = -6$;

4) $\sqrt{25^2} = 5$ — равенство неверно, так как $\sqrt{25^2} = 25$;

5) $\sqrt{4} = -2$ — равенство неверно, так как $\sqrt{4} = 2$ (по определению арифметического квадратного корня);

6) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ — равенство верно, так как $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;

7) $\sqrt{0} = 0$ — верное равенство.

Ответ: 4.

4. Из определения арифметического квадратного корня следует, что $-y^3 \geq 0$. Умножим обе части этого неравенства на -1 и получим $y^3 \leq 0$, следовательно, $y \leq 0$. При $y = 0$ знаменатель дроби обращается в нуль, значит, $y < 0$.

Ответ: 4.

5. Сократим подкоренное выражение и найдем значение выражения:

$$\sqrt{\frac{-75}{-48}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Ответ: 2.

6. $\sqrt{(-7)^2} + \sqrt{5\frac{1}{16}} = |-7| + \sqrt{\frac{81}{16}} = 7 + \frac{9}{4} = 7 + 2{,}25 = 9{,}25.$

Ответ: 5.

7. $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}.$

Ответ: 3.

8. Воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений и получим:

$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)^2=2-\frac{1}{9}\cdot 6=2-\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}.$$

Ответ: 2.

9. Чтобы сравнить эти числа, возведем каждое из них в квадрат:

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2=18;\ 5^2=25;\ \left(3\sqrt{3}\right)^2=27;\left(\sqrt{21}\right)^2=21;\left(2\sqrt{7}\right)^2=28.$$

Поскольку все данные числа положительные, большим будет то из них, квадрат которого больше, т. е. $2\sqrt{7}$.

Ответ: 4.

10. $\left(\sqrt{28}-\sqrt{175}+2\sqrt{63}\right):\left(2\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{4\cdot 7}-\sqrt{25\cdot 7}+2\sqrt{9\cdot 7}\right):\left(2\sqrt{7}\right)=$
$=\left(2\sqrt{7}-5\sqrt{7}+2\cdot 3\sqrt{7}\right):\left(2\sqrt{7}\right)=\left(2\sqrt{7}-5\sqrt{7}+6\sqrt{7}\right):\left(2\sqrt{7}\right)=$
$=\left(3\sqrt{7}\right):\left(2\sqrt{7}\right)=1{,}5.$

Ответ: 4.

11. Пусть $A=-a\sqrt{2ac}$. Так как $c<0$, то выражение имеет смысл, если $a\le 0$ (в противном случае подкоренное выражение окажется отрицательным). Тогда $-a\ge 0$ и $A=-a\sqrt{2ac}=(-a)\sqrt{2ac}=\sqrt{(-a)^2\cdot 2ac}=\sqrt{a^2\cdot 2ac}=$ $=\sqrt{2a^3c}.$

Ответ: 1.

12. $\sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)^2}=\left|1-\sqrt{6}\right|+\left|3-\sqrt{6}\right|=\sqrt{6}-1+3-\sqrt{6}=2.$

Ответ: 1.

13. $A=(7-m)\sqrt{\dfrac{1}{m-7}}.$

Выражение имеет смысл, если $m-7>0$, тогда

$$A=-(m-7)\sqrt{\frac{1}{m-7}}=-\sqrt{(m-7)^2\cdot\frac{1}{m-7}}=-\sqrt{(m-7)^3}.$$

Ответ: 3.

14. $A=\sqrt{72a^3b^8c}$, если $c<0$.

Если $c<0$, то выражение имеет смысл при $a\le 0$. С помощью тождества $\sqrt{a^2}=|a|$ получим: $A=\sqrt{36\cdot 2\cdot a^2\cdot a\cdot\left(b^4\right)^2\cdot c}=6|a|\cdot\left|b^4\right|\cdot\sqrt{2ac}$.
Так как $a<0$, то $|a|=-a$. Так как $b^4\ge 0$ при всех $b\in\boldsymbol{R}$, то $\left|b^4\right|=b^4$, тогда $A=-6ab^4\sqrt{2ac}$.

Ответ: 1.

15. $A=\sqrt{a^2+100a+2500}+\sqrt{a^2-100a+2500}$.

$A=\sqrt{(a+50)^2}+\sqrt{(a-50)^2}$. Так как $\sqrt{a^2}=|a|$, то $A=|a+50|+|a-50|$.

При $a=-101$ $A=|-101+50|+|-101-50|=101-50+101+50=202$.

Ответ: 5.

16. Воспользуемся формулой квадрата суммы двух выражений и получим:

$$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2}{2+\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2+\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=2.$$

Ответ: 2.

17. *I способ.*

Воспользуемся формулой квадрата разности двух выражений и получим:

$$\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2-2\cdot\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}+$$

$$+\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=7-2\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(7+2\sqrt{6}\right)}+7+2\sqrt{6}=$$

$$=14-2\cdot\sqrt{7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=14-2\cdot\sqrt{49-24}=14-2\cdot\sqrt{25}=14-2\cdot 5=4.$$

II способ.

Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов:

$7\pm 2\sqrt{6}=6+1\pm 2\cdot 1\cdot\sqrt{6}=\left(\sqrt{6}\right)^2\pm 2\cdot 1\cdot\sqrt{6}+1^2=\left(\sqrt{6}\pm 1\right)^2$, тогда

$$\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{6}+1\right)^2}\right)^2=$$

$$=\left(\left|\sqrt{6}-1\right|-\left|\sqrt{6}+1\right|\right)^2=\left(\sqrt{6}-1-\left(\sqrt{6}+1\right)\right)^2=\left(\sqrt{6}-1-\sqrt{6}-1\right)^2=$$

$$=(-2)^2=4.$$

Ответ: 4.

18. $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}+\dfrac{2-x}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}+\dfrac{2-x}{\sqrt{(x-2)^2}}=\dfrac{|x-3|}{x-3}+\dfrac{2-x}{|x-2|}.$

Так как $2<x<3$, то $|x-3|=-(x-3)$ и $|x-2|=x-2$, тогда

$$\frac{|x-3|}{x-3}+\frac{2-x}{|x-2|}=\frac{-(x-3)}{x-3}+\frac{2-x}{x-2}=-1-1=-2.$$

Ответ: −2.

19. $\left(16\sqrt{50}-9\sqrt{200}+4\sqrt{450}\right)^2\sqrt{(-0{,}2)^2}=\left(80\sqrt{2}-90\sqrt{2}+60\sqrt{2}\right)^2\cdot 0{,}2=$

$$=\left(50\sqrt{2}\right)^2\cdot 0{,}2=2500\cdot 2\cdot 0{,}2=25\cdot 0{,}4\cdot 100=1000.$$

Ответ: 1000.

20. $\dfrac{-\sqrt{44}\cdot\sqrt{28}}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)^2}=$

$$=\frac{-\sqrt{4\cdot 11}\cdot\sqrt{4\cdot 7}}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}-\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}+\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)}=\frac{-2\cdot 2\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}}{-2\sqrt{11}\cdot 2\sqrt{7}}=1.$$

Ответ: 1.

21. $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}+1\right)^{-1}+\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}+1\right)=$

$$=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}+1\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1\right)^{-1}=\left(\frac{1+2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{-1}+\left(\frac{1+2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3+6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{6}=1.$$

Ответ: 1.

22. Избавимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби и получим:

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left(\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}+\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}-\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left(\frac{15\left(\sqrt{6}-1\right)}{5}+\frac{4\left(\sqrt{6}+2\right)}{2}-\frac{12\left(3+\sqrt{6}\right)}{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left(3\left(\sqrt{6}-1\right)+2\left(\sqrt{6}+2\right)-4\left(3+\sqrt{6}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=\left(3\sqrt{6}-3+2\sqrt{6}+4-12-4\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=\left(\sqrt{6}-11\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)=$$

$$=6-121=-115.$$

Ответ: –115.

23. $A=\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a^3b}}{a+b}-\dfrac{2b}{a-b}.$

$$A=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right)\cdot\frac{a\sqrt{ab}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\frac{a\sqrt{ab}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}=$$

$$=\frac{a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b+a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{\sqrt{a}\sqrt{b}\left(a-b\right)}\cdot\frac{a\sqrt{ab}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}=\frac{2a+2b}{\sqrt{ab}\left(a-b\right)}\cdot\frac{a\sqrt{ab}}{a+b}-$$

$$-\frac{2b}{a-b}=\frac{2\left(a+b\right)\cdot a\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\left(a-b\right)\left(a+b\right)}-\frac{2b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}-\frac{2b}{a-b}=\frac{2a-2b}{a-b}=\frac{2\left(a-b\right)}{a-b}=2.$$

Ответ: 2.

24. Пусть $A=\sqrt{28-10\sqrt{3}}-\sqrt{52-14\sqrt{3}}.$

Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов:

$$28-10\sqrt{3}=25+3-2\cdot5\cdot\sqrt{3}=5^2-2\cdot5\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(5-\sqrt{3}\right)^2;$$

$$52-14\sqrt{3}=49+3-2\cdot7\cdot\sqrt{3}=7^2-2\cdot7\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(7-\sqrt{3}\right)^2.$$

Тогда $A=\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(7-\sqrt{3}\right)^2}=\left|5-\sqrt{3}\right|-\left|7-\sqrt{3}\right|=$
$=\left(5-\sqrt{3}\right)-\left(7-\sqrt{3}\right)=5-\sqrt{3}-7+\sqrt{3}=-2.$

Ответ: –2.

25. В каждом слагаемом суммы освободимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)}+$$

$$+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}+\ldots+$$

$$+\frac{\sqrt{81}-\sqrt{79}}{\left(\sqrt{79}+\sqrt{81}\right)\left(\sqrt{81}-\sqrt{79}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\ldots+$$

$$+\frac{\sqrt{81}-\sqrt{79}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{81}-\sqrt{79}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-1+9)=4.$$

Ответ: 4.

Занятие 8 Решения

1. Линейным называется уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Рассмотрим предложенные уравнения:

1) $3x = 2$; $a = 3$; $b = 2$, и уравнение является линейным;

2) $2x^2 = 7$ — уравнение не является линейным;

3) $0 \cdot x = 5$; $a = 0$; $b = 5$, и уравнение является линейным;

4) $\frac{4}{x} = 13$ — уравнение не является линейным;

5) $\frac{x}{7} = 0$; $\frac{1}{7} \cdot x = 0$; $a = \frac{1}{7}$; $b = 0$, и уравнение является линейным;

6) $\sqrt{x} = 2$ — уравнение не является линейным;

7) $0 \cdot x = 0$; $a = 0$; $b = 0$, и уравнение является линейным;

8) $x^3 = 27$ — уравнение не является линейным.

Ответ: 5.

2. Утверждение 2 неверно, так как уравнение $0 \cdot x = 4$ не имеет корней. Остальные утверждения верны.

Корень уравнения — это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство. Значит, утверждения 1 и 3 — верные.

Бесконечно много корней имеет линейное уравнение вида $0 \cdot x = 0$. Не имеет корней, например, линейное уравнение $0 \cdot x = 4$.

Ответ: 5.

3. При $x = \frac{4}{3}$ уравнение $4 - 3x = 0$ обращается в верное числовое равенство ($4 - 3 \cdot \frac{4}{3} = 0, 4 - 4 = 0$); значит, это число и есть корень уравнения.

Ответ: 2.

4. $\frac{6}{7}x = 1\frac{3}{4}$; $x = 1\frac{3}{4} : \frac{6}{7}$; $x = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{6}$; $x = \frac{49}{24}$; $x = 2\frac{1}{24}$.

Ответ: 2.

5. $4\frac{1}{3}-y=y+2\frac{2}{3}$; перенесем все слагаемые в одну часть, изменив знак слагаемых, которые переходят из одной части в другую:

$$4\frac{1}{3}-y-y-2\frac{2}{3}=0;\ \ -2y+1\frac{2}{3}=0;\ 2y-1\frac{2}{3}=0.$$

Ответ: 2.

6. $7-4(3x-1)=5(1-2x)$.

Раскроем скобки:

$7-(12x-4)=5-10x$,

$7-12x+4=5-10x$.

Перенесем слагаемое 5 в левую часть, а слагаемое $-12x$ — в правую часть, меняя их знаки:

$7+4-5=12x-10x; 6=2x; x=6:2; x=3.$

Ответ: 1.

7. $3(x-1{,}5)+2x=5(x-0{,}9); 3x-4{,}5+2x=5x-4{,}5; 5x-5x=4{,}5-4{,}5;$ $0\cdot x=0.$

Все числа являются корнями данного уравнения.

Ответ: 4.

8. $2{,}5(x+1)-(1{,}5x+3)=x-13{,}5; 2{,}5x+2{,}5-1{,}5x-3=x-13{,}5;$

$2{,}5x-1{,}5x-x=-13{,}5-2{,}5+3; (2{,}5-1{,}5-1)x=-13; 0\cdot x=-13.$

Уравнение не имеет корней.

Ответ: 5.

9. $\frac{(1-4x)(1+4x)}{4}=1-(2x-1)^2; \frac{1^2-(4x)^2}{4}=1-\left(4x^2-4x+1\right);$

$\frac{1-16x^2}{4}=1-4x^2+4x-1; \frac{1-16x^2}{4}=-4x^2+4x;$

$1-16x^2=4\cdot\left(-4x^2+4x\right); 1-16x^2=-16x^2+16x; 1=16x; x=\frac{1}{16}.$

Ответ: 1.

10. 1) Решим уравнение: $\frac{4}{7}x=16; x=16:\frac{4}{7}; x=16\cdot\frac{7}{4}; x=28;$

2) так как искомое число на 60 % меньше 28, оно составляет 40 % от 28 (100 % – 60 % = 40 %), тогда $0{,}4\cdot 28=11{,}2.$

Ответ: 3.

11. Составим уравнение:

$0{,}7(2x-3)-1{,}3(6-5x)=5{,}9;\ 1{,}4x-2{,}1-7{,}8+6{,}5x=5{,}9;$
$1{,}4x+6{,}5x=5{,}9+2{,}1+7{,}8;\ 7{,}9x=15{,}8;\ x=15{,}8:7{,}9;\ x=2.$

Ответ: 5.

12. Чтобы определить, при каком значении выполняется условие задания, нужно решить уравнение:

$3(2y+1{,}5)=(2y+1{,}5+3)+8;$
$6y+4{,}5=2y+12{,}5;\ 4y=12{,}5-4{,}5;\ 4y=8;\ y=2.$

Ответ: 3.

13. $\frac{1{,}2a-1}{6}=\frac{3-0{,}3a}{2};\ \frac{1{,}2a-1}{6}=\frac{0{,}3a-3}{2}.$ Воспользуемся свойством пропорции: $2(1{,}2a-1)=6(0{,}3a-3);\ 2{,}4a-2=1{,}8a-18;\ 2{,}4a-1{,}8a=-18+2;$ $0{,}6a=-16;\ a=(-16):0{,}6;\ a=-16:\frac{3}{5};\ a=-\frac{16\cdot 5}{3};\ a=-\frac{80}{3};\ a=-26\frac{2}{3}.$

Ответ: 4.

14. Решим уравнение:

$\frac{0{,}5t-4}{4}=2(0{,}25t-1{,}5);\ 0{,}5t-4=8(0{,}25t-1{,}5);\ 0{,}5t-4=2t-12;$
$2t-0{,}5t=12-4;\ 1{,}5t-8;\ t=8:1{,}5;\ t=5\frac{1}{3}.$

Ответ: 1.

15. Найдем корень уравнения $\frac{y}{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{20}+4\sqrt{6}.$

$y=\left(2\sqrt{5}+4\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{6}-\sqrt{5}\right);$

$y=2\left(\left(2\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right);\ y=2\cdot(24-5);\ y=38.$

38 — число натуральное.

Ответ: 1.

16. $\frac{5+k}{2}-\frac{6-k}{3}=11\frac{1}{3}.$ Умножим обе части уравнения на 6:

$6\left(\frac{5+k}{2}-\frac{6-k}{3}\right)=6\cdot 11\frac{1}{3};\ 3(5+k)-2(6-k)=68;\ \ 15+3k-12+2k=68;$
$5k=65;\ \ k=13.$

Ответ: 13.

17. Умножим обе части уравнения $\frac{7x-12}{10}-\frac{x-2}{2}=\frac{x}{2}-\frac{x-1}{5}$ на 10 и получим:

$$(7x-12)-5(x-2)=5x-2(x-1);\ 7x-12-5x+10=5x-2x+2;$$
$2x-2=3x+2; -x=4; x=-4.$

Ответ: –4.

18. $-0{,}1(2x-3)-(x+1{,}2)=-2(0{,}6x+0{,}4)-0{,}1;$

$-0{,}2x+0{,}3-x-1{,}2=-1{,}2x-0{,}8-0{,}1; -1{,}2x-0{,}9=-1{,}2x-0{,}9; 0\cdot x=0;$ x — любое число.

На промежутке $[-5;11]$ данное уравнение имеет 17 целых корней.

Ответ: 17.

19. По определению модуля

$\sqrt{3}x-2=1;$	или	$\sqrt{3}x-2=-1;$
$\sqrt{3}x=3;$		$\sqrt{3}x=1;$
$x=\sqrt{3}$		$x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Произведение корней $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=1.$

Ответ: 1.

20. Решая уравнение, получим:

$3\lvert x\rvert-21=0;$	или	$\lvert 4x-12\rvert=0;$
$3\lvert x\rvert=21;$		$4x-12=0;$
$\lvert x\rvert=7;$		$4x=12;$
$x=\pm7$		$x=3.$

Таким образом, меньший корень уравнения равен –7.

Ответ: –7.

21. Пусть x — первое число. Тогда $(0{,}48x)$ — второе число, а $\frac{1}{3}\cdot(0{,}48x)$ — третье число. Так как сумма трех чисел равна 24,6, то составим уравнение:

$$x+0{,}48x+\frac{1}{3}\cdot(0{,}48x)=24{,}6;\ x+0{,}48x+0{,}16x=24{,}6;\ 1{,}64x=24{,}6;$$

$$x=24{,}6:1{,}64;\ x=15.$$

Ответ: 15.

22. Пусть x — первое число. Тогда $(x+1)$ — второе число, а $(x+2)$ — третье число. В этом случае $2\cdot((x+1)+(x+2))$ — удвоенная сумма второго и третьего чисел, а $3x$ — утроенное первое число. Так как разность удвоенной суммы второго и третьего чисел и утроенного первого числа равна 28, то составим уравнение:

$$2\cdot((x+1)+(x+2))-3x=28; 2\cdot(x+1+x+2)-3x=28;$$

$$2\cdot(2x+3)-3x=28; 4x+6-3x=28; x=22.$$

В этом случае большим из чисел является $x+2=22+2=24$.

Ответ: 24.

23. Наименьшее составное число — 4. Так как 4 — корень уравнения $\frac{a-x}{2x}-\frac{2x-a}{4}=\frac{a+x}{2x}$, то верно равенство $\frac{a-4}{2\cdot 4}-\frac{2\cdot 4-a}{4}=\frac{a+4}{2\cdot 4}$. Решив его относительно a, получим искомое значение: $\frac{a-4}{8}-\frac{8-a}{4}=\frac{a+4}{8}$; $\frac{a-4}{8}-\frac{a+4}{8}=\frac{8-a}{4}$; $\frac{-8}{8}=\frac{8-a}{4}$; $8-a=-4$; $a=12$.

Ответ: 12.

24. Найдем корни уравнений $\frac{x}{a}-\frac{15}{a}=b$; $x-15=ab$; $x=15+ab$.

$$\frac{x}{b^2}-\frac{a}{b}=\left(a+\frac{1}{b}\right)^2; \frac{x-ab}{b^2}=\frac{(ab+1)^2}{b^2}; \ x=(ab+1)^2+ab.$$

Так как a и b — взаимно обратные числа, то корни уравнений равны $x=15+1=16$ и $x=(1+1)^2+1=4+1=5$. НОК$(5;16)=80$.

Ответ: 80.

25. $|1{,}5|x|+5|+|19-1{,}5|x||=24$. Выполним замену переменной $t=1{,}5|x|$, тогда уравнение примет вид $|t+5|+|19-t|=24$. Для его решения воспользуемся геометрическим смыслом модуля разности чисел: $|a-c|$ — это расстояние в единичных отрезках между числами a и c. Необходимо найти такие значения t, при которых сумма расстояний от t до чисел 19 и -5 равна 24. Но расстояние между 19 и -5 равно 24, значит, все $t\in[-5;19]$ и являются корнями уравнения.

Вернемся к переменной x и решим неравенство, которое равносильно неравенству $1{,}5|x|\le 19$; $|x|\le 12\frac{2}{3}$; $-12\frac{2}{3}\le x\le 12\frac{2}{3}$. Целых чисел, удовлетворяющих этому неравенству, 25: -12; -11; ...; 0; 1; ...; 11; 12.

Ответ: 25.

Занятие 9 Решения

1. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a\neq 0$.

Числа a, b и c — коэффициенты квадратного уравнения. Число a называют первым коэффициентом, b — вторым коэффициентом и c — свободным членом.

Из представленных уравнений квадратными являются уравнения 1 и 4: $x^2-49=0$ и $-3x^2+x+2=0$.

Ответ: 3.

2. Приведем уравнение $3x-9x^2=1$ к виду $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$:

$9x^2-3x+1=0.$

Тогда $a=9;\ b=-3;\ c=1.$

Ответ: 3.

3. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни, если его дискриминант $D=b^2-4ac$ неотрицателен $(D\geq 0)$.

1) $15x^2-8x-1=0;\ D=(-8)^2-4\cdot 15\cdot(-1)=64+60>0$, т. е. уравнение имеет корни;

2) $-9x^2+x-11=0;\ D=1^2-4\cdot(-9)\cdot(-11)=1-4\cdot 9\cdot 11<0$, т. е. уравнение не имеет корней;

3) $24x^2+5x=0;\ x(24x+5)=0;\ x=0$ или $24x+5=0$ и т. д. — уравнение имеет корни;

4) $\frac{1}{8}x^2-2x+17=0;\ D=(-2)^2-4\cdot\frac{1}{8}\cdot 17=4-\frac{17}{2}<0$, т. е. уравнение не имеет корней;

5) $39x^2+2=0;\ 39x^2=-2$ — уравнение не имеет корней;

6) $25x^2-10x+1=0;\ (5x-1)^2=0;\ 5x-1=0;\ x=\frac{1}{5}$, т. е. уравнение имеет корни.

Ответ: 3.

4. Уравнения, в которых первый коэффициент $a=1$, называют приведенными квадратными уравнениями. Сумму и произведение корней приведенного квадратного уравнения можно выразить через его коэффициенты с помощью теоремы Виета.

Найдем сумму и произведение корней уравнения $x^2+7x-1=0$. $D=7^2-4\cdot 1\cdot(-1)=49+4=53>0$, значит, уравнение имеет корни.

Сумма корней равна -7 (второй коэффициент, взятый с противоположным знаком), а произведение равно -1 (свободный член).

Ответ: 2.

5. 1) Если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называется неполным квадратным уравнением. Утверждение 1 — верное;

2) найдем дискриминант уравнения $5x^2 - 7x + 1 = 0$: $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\cdot 5\cdot 1 = 29 > 0$. Утверждение 2 — верное;

3) уравнение $27x^2 - 5 = 0$ имеет два противоположных корня. Утверждение 3 — неверное;

4) уравнение $5x - 7x^2 = 0$, т. е. $x(5 - 7x) = 0$ имеет корни $x = 0$ или $x = \frac{5}{7}$. Утверждение 4 — верное;

5) число корней квадратного уравнения не превосходит степень этого уравнения, т. е. может иметь не больше двух корней. Значит, последнее утверждение неверно.

Ответ: 4.

6. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x = 0$ — неполное квадратное уравнение.

Умножим обе части исходного уравнения на 9 и получим:

$3x^2 + x = 0$; или $x(3x+1) = 0$;

$x = 0$ $\quad$ $3x + 1 = 0$;

$x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: 4.

7. Квадратным трехчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Корнем квадратного трехчлена называется значение переменной, при котором значение этого трехчлена равно нулю.

Теорема (о разложении квадратного трехчлена на множители): если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Так как корни квадратного трехчлена являются и корнями квадратного уравнения, то решим уравнение $-4x^2 - 9x + 9 = 0$. Умножим обе его части на -1.

$4x^2+9x-9=0,$

$D=9^2-4\cdot4\cdot(-9)=81+144=225>0,$ уравнение имеет два корня:

$x_{1,2}=\dfrac{-9\pm\sqrt{225}}{8};\ x_1=\dfrac{-9+15}{8}=\dfrac{3}{4};\ x_2=\dfrac{-9-15}{8}=-3.$

$-4x^2-9x+9=-4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)(x+3)=(3-4x)(x+3).$

Ответ: 2.

8. $y^2-\dfrac{9y-2}{7}=0.$ Умножим обе части уравнения на 7. Тогда $7y^2-(9y-2)=0;\ 7y^2-9y+2=0;\ D=9^2-4\cdot7\cdot2=81-56=25>0.$

Получим $x_{1,2}=\dfrac{9\pm5}{14};\ x_1=1;\quad x_2=\dfrac{2}{7}.$

Ответ: 2.

9. $(8x-5)^2=(2x-3)^2;\ (8x-5)^2-(2x-3)^2=0.$

Воспользуемся формулой разности квадратов:

$\big((8x-5)-(2x-3)\big)\big((8x-5)+(2x-3)\big)=0;$

$(8x-5-2x+3)(8x-5+2x-3)=0;$

$(6x-2)(10x-8)=0.$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$6x-2=0;$ или $10x-8=0;$

$6x=2;\qquad 10x=8;$

$x=\dfrac{1}{3}\qquad x=0{,}8.$

Ответ: 5.

10. $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(2-x)^2}{4}=\dfrac{1-x}{2}.$ Умножим обе части уравнения на 16.

Тогда $(x-3)^2-4\cdot(2-x)^2=8\cdot(1-x);\ x^2-6x+9-4\cdot\left(4-4x+x^2\right)=$ $=8-8x;\ x^2-6x+9-16+16x-4x^2-8+8x=0;\ -3x^2+18x-15=0;$

$x^2-6x+5=0.$

С помощью теоремы Виета (или формулы корней квадратного уравнения) находим, что $x_1=1;\quad x_2=5.$

Ответ: 4.

11. Если $2-\sqrt{7}$ и $2+\sqrt{7}$ — корни уравнения, то согласно теореме Виета в приведенном квадратном уравнении $c=\left(2-\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{7}\right)=$ $=2^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=4-7=-3$ и $b=-\left(2+\sqrt{7}+2-\sqrt{7}\right)=-4$. Итак, искомое уравнение: $y^2-4y-3=0$.

Ответ: 2.

12. Пусть $A=\dfrac{5x^2-3x-2}{4-25x^2}$. С помощью формулы $ax^2+bx+c=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, разложим на множители квадратный трехчлен $5x^2-3x-2$.

$5x^2-3x-2=0$; $D=3^2-4\cdot5\cdot(-2)=9+40=49>0$,
тогда $x_{1,2}=\dfrac{3\pm7}{10}$; $x_1=1$; $x_2=-\dfrac{2}{5}$.

Получим $5x^2-3x-2=5(x-1)\left(x+\dfrac{2}{5}\right)=(x-1)(5x+2)$,

т. е. $A=\dfrac{(x-1)(5x+2)}{4-25x^2}=\dfrac{(x-1)(5x+2)}{(2-5x)(2+5x)}=\dfrac{x-1}{2-5x}$.

При $x=20{,}4$ $A=\dfrac{20{,}4-1}{2-5\cdot20{,}4}=\dfrac{19{,}4}{-100}=-0{,}194\in(-1;\ 0)$.

Ответ: 2.

13. $\dfrac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}=\dfrac{x^2(x+5)-4(x+5)}{x^2+3x-10}=\dfrac{(x+5)\left(x^2-4\right)}{x^2+3x-10}$.

По формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен в знаменателе дроби.

$x^2+3x-10=0$; $x_1=-5$; $x_2=2$.

Тогда $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$, и дробь принимает вид

$$\frac{(x+5)\left(x^2-4\right)}{x^2+3x-10}=\frac{(x+5)(x-2)(x+2)}{(x+5)(x-2)}=x+2.$$

Ответ: 3.

14. Квадратное уравнение $3x^2+5x-1=0$ имеет корни, так как $D>0$, тогда $x_1+x_2=-\dfrac{5}{3}$; $x_1x_2=-\dfrac{1}{3}$.

Найдем значение искомого выражения:
$x_1^2x_2^4+x_1^4x_2^2=x_1^2x_2^2\left(x_2^2+x_1^2\right)=\left(x_1x_2\right)^2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)=$
$=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{25}{9}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{31}{9}=\frac{31}{81}.$

Ответ: 3.

15. Уравнение $(6x-14)^9=(x-1)^{18}$ равносильно уравнению $6x-14=(x-1)^2$.

$x^2-2x+1-6x+14=0;\ x^2-8x+15=0.$

Полученное уравнение имеет корни $(D>0)$, тогда воспользуемся теоремой Виета и получим сумму корней уравнения, равную 8.

Ответ: 3.

16. $7\left(4-\frac{x}{7}\right)^2=3\left(\frac{x}{7}-4\right)$. Так как $(a-b)^2=(b-a)^2$, то уравнение можно записать в виде $7\left(\frac{x}{7}-4\right)^2-3\left(\frac{x}{7}-4\right)=0;\ \left(\frac{x}{7}-4\right)\left(7\left(\frac{x}{7}-4\right)-3\right)=0;$
$\left(\frac{x}{7}-4\right)(x-28-3)=0;\ \left(\frac{x}{7}-4\right)(x-31)=0;$

$\frac{x}{7}-4=0;$ или $x-31=0;$

$\frac{x}{7}=4;$ $\qquad x=31.$

$x=28$

Найдем сумму корней уравнения: $28+31=59.$

Ответ: 59.

17. Решим оба уравнения: $\frac{1}{5}x^2-5=0;\ x^2=25;\ x_{1,2}=\pm5.$

$x^2-4x-12=0;\ x_1=6; x_2=-2.$ Меньший корень первого уравнения -5, а больший корень второго равен 6, их сумма: $6+(-5)=1$.

Ответ: 1.

18. $x^2+3x-15=0.$ Так как $D>0$, то по теореме Виета $x_1+x_2=-3;$ $x_1\cdot x_2=-15.$

Воспользуемся формулой $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

Тогда $x_1^2 + x_2^2 = (-3)^2 - 2(-15) = 9 + 30 = 39$.

Ответ: 39.

19. $\left(x^2 - 2x + 6\right)^2 = 9x^2$; $\left(x^2 - 2x + 6\right)^2 - 9x^2 = 0$;

$\left(x^2 - 2x + 6 - 3x\right)\left(x^2 - 2x + 6 + 3x\right) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x^2 + x + 6 = 0. \end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности не имеет корней $(D < 0)$.

Сумма корней исходного уравнения равна 5.

Ответ: 5.

20. $\left(x^2 + 2x\right)^2 - (x+1)^2 = 55$; $\left(x^2 + 2x\right)^2 - \left(x^2 + 2x + 1\right) = 55$.

Пусть $x^2 + 2x = t$, тогда уравнение принимает вид $t^2 - (t + 1) = 55$; $t^2 - t - 56 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -7, \\ t = 8. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = -7, \\ x^2 + 2x = 8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 7 = 0, \\ x^2 + 2x - 8 = 0. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности не имеет корней. Произведение корней второго уравнения равно –8.

Ответ: –8.

21. Уравнение вида $|a| = |b|$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b. \end{array}\right.$

Решим уравнение $\left|3x^2 + 5x - 9\right| = |6x + 15|$.

$\left[\begin{array}{l} 3x^2 + 5x - 9 = 6x + 15, \\ 3x^2 + 5x - 9 = -6x - 15; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x^2 - x - 24 = 0, \\ 3x^2 + 11x + 6 = 0. \end{array}\right.$

Решим первое уравнение совокупности: $3x^2 - x - 24 = 0$; $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-24) = 1 + 288 = 289 > 0$,

тогда $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 17}{6}$; $x_1 = 3$; $x_2 = -\dfrac{8}{3} = -2\dfrac{2}{3}$.

Решим второе уравнение совокупности: $3x^2 + 11x + 6 = 0$; $D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 121 - 72 = 49 > 0$,

тогда $x_{1,2} = \dfrac{-11 \pm 7}{6}$; $x_1 = -3$; $x_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Таким образом, числа $3;\ -2\frac{2}{3};\ \ -3;\ \ -\frac{2}{3}$ являются корнями исходного уравнения. Меньший корень равен –3.

Ответ: –3.

22. Уравнение вида $|a| = b$ равносильно системе $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b, \end{array}\right. \\ b \geq 0. \end{cases}$

Решим уравнение $|x^2 - x - 15| = -x$.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 15 = -x, \\ x^2 - x - 15 = x, \end{array}\right. \\ -x \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - 15 = 0, \\ x^2 - 2x - 15 = 0, \end{array}\right. \\ x \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 15, \\ x = 5, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x \leq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{15}, \\ x = 5, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x \leq 0; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{15}, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Таким образом, уравнение имеет два корня. Тогда $n = 2$, а $x_0 = -3$ и $n \cdot x_0 = 2 \cdot (-3) = -6$.

Ответ: –6.

23. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Для корней уравнения $cx^2 + bx + a = 0$ x_1' и x_2' справедливы равенства: $x_1' \cdot x_2' = \frac{a}{c}$; $x_1' + x_2' = -\frac{b}{c}$. По условию $x_1 = \frac{1}{12}$; $x_2 = -\frac{1}{7}$, тогда $\frac{c}{a} = -\frac{1}{84}$; $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{84}$. Разделив последние два равенства почленно, имеем $-\frac{b}{c} = 5$. Решив систему уравнений $\begin{cases} x_1' \cdot x_2' = -84, \\ x_1' + x_2' = 5, \end{cases}$ получим корни уравнения $cx^2 + bx + a = 0$: $x_1' = 12$; $x_2' = -7$. Модуль разности этих чисел равен 19.

Ответ: 19.

24. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Сумма и произведение корней уравнения $x^2 - 2nx - 7n^2 = 0$ равны $2n$ и $-7n^2$ соответственно (по теореме Виета). Таким образом, $(2n)^2 + 2 \cdot 7n^2 = 54$, $18n^2 = 54$, $n^2 = 3$.

Ответ: 3.

25. Рассмотрим квадратное уравнение $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$.

Квадратное уравнение имеет единственный корень, если $D = 0$.
Перепишем уравнение в виде $(a-2)x^2 + 2(2-a)x + 3 = 0$.
Найдем $\frac{D}{4} = (2-a)^2 - 3(a-2) = 4 - 4a + a^2 - 3a + 6 = a^2 - 7a + 10$.

Решим уравнение $a^2 - 7a + 10 = 0$. Воспользуемся теоремой Виета: $a = 2$, $a = 5$.

Так как при $a = 2$ исходное уравнение не является квадратным, то квадратное уравнение $(a-2)x^2 + (4-2a)x + 3 = 0$ имеет единственное решение только при $a = 5$.

Ответ: 5.

Занятие 10 Решения

1. Только число 1 обращает уравнение в верное числовое равенство, значит, оно является корнем уравнения.

Ответ: 1.

2. 1) Уравнение называется биквадратным, если оно имеет вид $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$, т. е. уравнение $4x^4-2x^2+1=0$ — биквадратное;

2) решим уравнение $\dfrac{7-x}{5-x}=1$; $7-x=5-x$, $0\cdot x=12$. Уравнение не имеет корней;

3) уравнение $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+kx+m=0$ $(a\neq 0)$ не может иметь шесть корней, так как это уравнение пятой степени, а количество корней уравнения не превосходит степени уравнения;

4) оба уравнения не имеют корней. Такие уравнения равносильны;

5) если число n — корень биквадратного уравнения $ax^4+bx^2+c=0$, то противоположное число $(-n)$ также является корнем этого уравнения, поскольку переменная x входит в уравнение только в четных степенях. Значит, сумма корней биквадратного уравнения, если они есть, равна нулю.

Ответ: 3.

3. Корнями уравнения $\dfrac{x(x-1)(3x+6)(8-x)}{x+4}=0$ являются числа 0; 1; -2 и 8. Число -4 не является корнем данного уравнения.

Ответ: 5.

4. $\dfrac{9x^2-4}{x-1}=\dfrac{5-10x}{1-x}$; $\dfrac{9x^2-4}{x-1}-\dfrac{5-10x}{1-x}=0$; $\dfrac{9x^2-4}{x-1}-\dfrac{5-10x}{-(x-1)}=0$;

$\dfrac{9x^2-4}{x-1}+\dfrac{5-10x}{x-1}=0$; $\dfrac{9x^2-4+5-10x}{x-1}=0$; $\dfrac{9x^2-10x+1}{x-1}=0$.

Дробь равна нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель нулю не равен, тогда $\begin{cases}9x^2-10x+1=0;\\ x-1\neq 0.\end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$9x^2-10x+1=0$; $D=(-10)^2-4\cdot 9\cdot 1=100-36=64>0$.

$$x_{1,2}=\frac{10\pm 8}{2\cdot 9};\ x_1=1;\ x_2=\frac{1}{9}.$$

Но $x-1\neq 0$, т. е. $x\neq 1$. Тогда единственным корнем уравнения является число $\frac{1}{9}$.

Ответ: 3.

5. $\frac{x^2-2x-15}{x^2+6x+9}=0.$

Дробь равна нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель нулю не равен.

Тогда $\begin{cases}x^2-2x-15=0;\\ x^2+6x+9\neq 0.\end{cases}$

Решим первое уравнение системы с помощью теоремы, обратной теореме Виета:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=5,\end{array}\right.\\ (x+3)^2\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=5,\end{array}\right.\\ x+3\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-3,\\ x=5,\end{array}\right.\\ x\neq -3;\end{cases}\quad x=5.$$

Ответ: 4.

6. Найдем корни уравнения $\frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}=1;\ \frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}-1=0;$

$$\frac{10x-8(x-3)-x(x-3)}{x(x-3)}=0;\ \frac{-x^2+5x+24}{x(x-3)}=0;$$

$$\begin{cases}x(x-3)\neq 0,\\ x^2-5x-24=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\neq 0,\ x\neq 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=8,\\ x=-3;\end{array}\right.\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}x=8,\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Меньший корень уравнения $-3\in(-4;-2)$.

Ответ: 2.

7. Многочлен t^4-5t^2-36 — это квадратный трехчлен относительно t^2. Найдем его корни, решив уравнение $\left(t^2\right)^2-5t^2-36=0;\ \left(t^2\right)_1=9;$ $\left(t^2\right)_2=-4$. По формуле разложения квадратного трехчлена на множители имеем: $t^4-5t^2-36=\left(t^2-9\right)\left(t^2+4\right)=(t-3)(t+3)\left(t^2+4\right)$.

Ответ: 4.

8. $\frac{2x}{x-1}=\frac{3x+1}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}$; $\frac{2x}{x-1}-\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}+\frac{3}{x+1}=0$;

$\frac{2x(x+1)-(3x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=0$; $\frac{2x^2+2x-3x-1+3x-3}{(x-1)(x+1)}=0$;

$\frac{2x^2+2x-4}{(x-1)(x+1)}=0$; $\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}=0$. Дробь равна нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель нулю не равен. Тогда

$$\begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x-1\neq 0, \\ x+1\neq 0. \end{cases}$$

Для решения первого уравнения системы воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета.

Получим $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \end{array}\right. \\ x\neq 1, \\ x\neq -1; \end{cases}$ $x=-2$.

Ответ: 2.

9. $\frac{2}{a-3}+1=\frac{15}{a^2-6a+9}$; $\frac{2+a-3}{a-3}-\frac{15}{(a-3)^2}=0$; $\frac{a-1}{a-3}-\frac{15}{(a-3)^2}=0$;

$\frac{(a-1)(a-3)-15}{(a-3)^2}=0$; $\frac{a^2-3a-a+3-15}{(a-3)^2}=0$; $\frac{a^2-4a-12}{(a-3)^2}=0$.

Дробь равна нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель нулю не равен.

Тогда $\begin{cases} a^2-4a-12=0; \\ a-3\neq 0. \end{cases}$

Для решения первого уравнения системы воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета.

Получим $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=6, \\ a=-2, \end{array}\right. \\ a\neq 3; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} a=6, \\ a=-2. \end{array}\right.$

Ответ: 1.

10. $\dfrac{x-2}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{2}{x^2-1}$; $\quad \dfrac{x-2}{x(x-1)}+\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$;

$\dfrac{x-2}{x(x-1)}+\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}=0$; $\quad \dfrac{(x-2)(x+1)+(x-1)-2x}{x(x-1)(x+1)}=0$;

$\dfrac{x^2+x-2x-2+x-1-2x}{x(x-1)(x+1)}=0$; $\quad \dfrac{x^2-2x-3}{x(x-1)(x+1)}=0.$

Дробь равна нулю, если числитель дроби равен нулю, а знаменатель нулю не равен.

Тогда $\begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x\neq 0, \\ x+1\neq 0, \\ x-1\neq 0. \end{cases}$

Для решения первого уравнения системы воспользуемся теоремой, обратной теореме Виета.

Получим $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x\neq 0, \\ x\neq -1, \\ x\neq 1; \end{cases}$ $\quad x=3.$

Ответ: 5.

11. Сделаем замену переменной $y=5x^2-12x$ и решим уравнение: $4y^2+9y+2=0$; $D=81-4\cdot 4\cdot 2=49$; $\left[\begin{array}{l} y=-2, \\ y=-\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$ С учетом замены имеем совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} 5x^2-12x=-2, \\ 5x^2-12x=-\dfrac{1}{4}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 5x^2-12x+2=0, \\ 5x^2-12x+\dfrac{1}{4}=0. \end{array}\right.$ Оба уравнения имеют корни, так как их $\dfrac{D}{4}>0$. Произведение двух корней первого уравнения равно $\dfrac{2}{5}$, а произведение корней второго равно $\dfrac{1}{20}$.

Итак, произведение четырех корней равно $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{20}=0{,}02.$

Ответ: 2.

12. Составим уравнение: $\frac{1}{y}+\frac{y}{y-1}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{y-1}$.

$\frac{y-1+y^2}{y(y-1)}=\frac{y}{y(y-1)}$. Тогда $\begin{cases} y-1+y^2=y, \\ y\neq 0, \\ y-1\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=1, \\ y\neq 0, \\ y\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\pm 1, \\ y\neq 0, \\ y\neq 1; \end{cases}$ $y=-1$.

Ответ: 4.

13. $\frac{x+3}{4x^2-9}+\frac{x-3}{4x^2+12x+9}+\frac{4}{6-4x}=0$.

$\frac{x+3}{(2x-3)(2x+3)}+\frac{x-3}{(2x+3)^2}-\frac{4}{2(2x-3)}=0;$

$\frac{x+3}{(2x-3)(2x+3)}+\frac{x-3}{(2x+3)^2}-\frac{2}{2x-3}=0;$

$\frac{x+3(2x+3)+(x-3)(2x-3)-2(2x+3)^2}{(2x-3)(2x+3)^2}=0;$

$\frac{2x^2+3x+6x+9+2x^2-3x-6x+9-8x^2-24x-18}{(2x-3)(2x+3)^2}=0;$

$\frac{-4x^2-24x}{(2x-3)(2x+3)^2}=0;$ $\begin{cases} x^2+6x=0, \\ x\neq -1{,}5;\ 1{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-6; \end{array}\right. \\ x\neq -1{,}5;\ 1{,}5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-6. \end{array}\right.$

Среднее арифметическое корней данного уравнения равно $\frac{-6+0}{2}=-3$.

Ответ: 4.

14. $\frac{x^2-4}{x^2-9}=\frac{x^2}{7}$; $7\left(x^2-4\right)=x^2\left(x^2-9\right)$ при $x\neq\pm 3$.

$x^4-9x^2-7x^2+28=0;$ $x^4-16x^2+28=0$.

Пусть $x^2=t$, тогда уравнение принимает вид $t^2-16t+28=0;$ $\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=14. \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x^2=2, \\ x^2=14; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{2}, \\ x=\pm\sqrt{14}. \end{array}\right.$

Произведение корней исходного уравнения равно
$-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{14}\right)\cdot\sqrt{14}=28$.

Ответ: 5.

15. $\dfrac{1}{3x-2-x^2}=\dfrac{3}{7x-4-3x^2}$; $\begin{cases} 7x-4-3x^2=3\left(3x-2-x^2\right), \\ 7x-4-3x^2\neq 0, \\ 3x-2-x^2\neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 7x-4-3x^2=9x-6-3x^2, \\ 3x^2-7x+4\neq 0, \\ x^2-3x+2\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ x\neq 1;\ 1\frac{1}{3},\ x\in\varnothing; \\ x\neq 1;\ 2. \end{cases}$

Уравнение не имеет корней.

Ответ: 3.

16. $\dfrac{3x^2+8x-3}{x+3}=x^2-x+2.$

Разложим квадратный трехчлен $3x^2+8x-3$ на множители.

$3x^2+8x-3=0;$

$D=8^2-4\cdot 3\cdot(-3)=64+36=100>0;\ x_{1,2}=\dfrac{-8\pm 10}{2\cdot 3};\ x_1=-3;\ x_2=\dfrac{1}{3}.$

Тогда $3x^2+8x-3=3(x+3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=(x+3)(3x-1).$

$\dfrac{(x+3)(3x-1)}{x+3}=x^2-x+2;\ 3x-1=x^2-x+2$ при $x\neq -3;$

$x^2-x+2-3x+1=0;\ x^2-4x+3=0.$ С помощью теоремы, обратной теореме Виета, получим: $x_1=1,\ x_2=3.$

Оба числа являются корнями уравнения, так как при $x=1$ и $x=3$ знаменатель $x+3$ не обращается в нуль.

Разность большего и меньшего корней уравнения равна $3-1=2.$

Ответ: 2.

17. После замены переменной $y=x^2+3x$ уравнение

$x^2+3x+\dfrac{6}{2-3x-x^2}=1$ примет вид $y+\dfrac{6}{2-y}=1.$

Решая его, получим $y+\dfrac{6}{2-y}-1=0;\ \dfrac{y(2-y)+6-(2-y)}{2-y}=0;$

$\dfrac{-y^2+3y+4}{2-y}=0;$ $\begin{cases} y^2-3y-4=0, \\ y\neq 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=4, \\ y=-1, \end{array}\right. \\ y\neq 2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} y=4, \\ y=-1. \end{array}\right.$

С учетом замены $\left[\begin{array}{l} x^2+3x=4, \\ x^2+3x=-1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2+3x-4=0, \\ x^2+3x+1=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1, \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$

Уравнение имеет четыре корня $(n=4)$, меньший из которых равен -4 $(a=-4)$.

$na=4\cdot(-4)=-16.$

Ответ: -16.

18. $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{3}{a^2+2}=\dfrac{3}{a^3-a^2+2a-2}$; $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{3}{a^2+2}=\dfrac{3}{a^2(a-1)+2(a-1)}$;

$\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{3}{a^2+2}=\dfrac{3}{(a^2+2)(a-1)}$; $\dfrac{a^2+2-3(a-1)}{(a-1)(a^2+2)}=\dfrac{3}{(a^2+2)(a-1)}$;

$\dfrac{a^2+2-3a+3}{(a-1)(a^2+2)}=\dfrac{3}{(a^2+2)(a-1)}$; $\begin{cases} a^2+2-3a+3=3, \\ a-1\neq 0, \\ a^2+2\neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-3a+2=0, \\ a\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=2, \end{array}\right. \\ a\neq 1; \end{cases}$ $a=2.$

Ответ: 2.

19. $\dfrac{2x^2+x-3}{2x+3}-\dfrac{7x^2-8x-12}{x-2}=11.$

Воспользуемся формулой $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, и разложим на множители числители дробей.

Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2+x-3$, решив уравнение $2x^2+x-3=0$.

$D=1^2-4\cdot 2\cdot(-3)=1+24=25>0,$

тогда $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 5}{2\cdot 2}$; $x_1=-\dfrac{3}{2}$; $x_2=1.$

В этом случае $2x^2+x-3=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-1)=(2x+3)(x-1).$

Найдем корни квадратного трехчлена $7x^2-8x-12$, решив уравнение $7x^2-8x-12=0$.

$D=(-8)^2-4\cdot7\cdot(-12)=64+336=400>0,$

тогда $x_{1,2}=\dfrac{8\pm20}{2\cdot7};\ x_1=-\dfrac{6}{7};\ \ x_2=2.$

В этом случае $7x^2-8x-12=7\left(x+\dfrac{6}{7}\right)(x-2)=(7x+6)(x-2).$

Исходное уравнение принимает вид:

$\dfrac{(2x+3)(x-1)}{2x+3}-\dfrac{(7x+6)(x-2)}{x-2}=11$, т. е.

$\begin{cases}(x-1)-(7x+6)=11,\\2x+3\neq0,\\x-2\neq0;\end{cases}\quad \begin{cases}x-1-7x-6=11,\\2x\neq-3,\\x\neq2;\end{cases}\quad \begin{cases}-6x=18,\\x\neq-1{,}5,\\x\neq2;\end{cases}$

$\begin{cases}x=-3,\\x\neq-1{,}5,\\x\neq2;\end{cases}\quad x=-3.$

Ответ: –3.

20. $3x-1+\dfrac{1}{3x-1}=\dfrac{65}{8}$. Заметим, что уравнение можно представить в виде $3x-1+\dfrac{1}{3x-1}=8\dfrac{1}{8}$ или $3x-1+\dfrac{1}{3x-1}=8+\dfrac{1}{8}$.

Тогда $\left[\begin{array}{l}3x-1=8,\\3x-1=\dfrac{1}{8};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}3x=9,\\3x=1\dfrac{1}{8};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\3x=\dfrac{9}{8};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\x=\dfrac{3}{8}.\end{array}\right.$

Больший корень уравнения равен 3.

Ответ: 3.

21. $\dfrac{1+4x}{2}=\dfrac{1-4x}{1+6x}+\dfrac{1+6x}{3};\ \dfrac{1+4x}{2}-\dfrac{1+6x}{3}=\dfrac{1-4x}{1+6x};$

$\dfrac{3(1+4x)-2(1+6x)}{6}=\dfrac{1-4x}{1+6x};\ \dfrac{1}{6}=\dfrac{1-4x}{1+6x};$

$1+6x=6(1-4x)$ при $x\neq-\dfrac{1}{6};\ \ 6x+24x=6-1;\ 30x=5; x=\dfrac{1}{6}.$

Наибольшее целое число, не превосходящее $\dfrac{1}{6}$, равно 0.

Ответ: 0.

22. Решать уравнение $\frac{z-1}{4z-5}=\frac{(4z-1)^2}{(8z-3)^2}$ стандартным способом (раскрыть скобки, привести к общему знаменателю и т. д.) будет весьма затруднительно. Вычтем $\frac{1}{4}$ из обеих частей уравнения, получим:

$$\frac{z-1}{4z-5}-\frac{1}{4}=\frac{(4z-1)^2}{(8z-3)^2}-\frac{1}{4};\ \frac{4(z-1)-(4z-5)}{4(4z-5)}=\frac{4(4z-1)^2-(8z-3)^2}{4(8z-3)^2};$$

$$\frac{1}{4(4z-5)}=\frac{(2(4z-1)-(8z-3))(2(4z-1)+(8z-3))}{4(8z-3)^2};$$

$$\frac{1}{4(4z-5)}=\frac{16z-5}{4(8z-3)^2};\ (4z-5)(16z-5)=(8z-3)^2 \text{ при } z\neq\frac{5}{4};\ z\neq\frac{3}{8};$$

$$64z^2-20z-80z+25=64z^2-48z+9;\ 52z=16;\ z=\frac{4}{13}.$$

$$26\cdot\frac{4}{13}=8.$$

Ответ: 8.

23. $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$. Умножим обе части уравнения на 12, тогда $12\cdot(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6\cdot 12;\ (6x+7)^2\cdot 2\cdot(3x+4)\cdot 6\cdot(x+1)=72;$ $(6x+7)^2\cdot(6x+8)\cdot(6x+6)=72$. Обозначим $y=6x+7$. Тогда получим: $y^2(y+1)(y-1)=72;\ y^4-y^2-72=0;\ \left[\begin{array}{l} y^2=9, \\ y^2=-8; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} y=\pm 3, \\ \text{нет корней}; \end{array}\right.\ y=\pm 3.$

Таким образом, $6x+7=3$ или $6x+7=-3$, следовательно, уравнение имеет два действительных корня.

Ответ: 2.

24. $\frac{3x^2+11x+6}{8+10x-3x^2}=\frac{x+3}{4-x};\ \frac{3x^2+11x+6}{3x^2-10x-8}=\frac{x+3}{x-4}.$

По формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим на множители квадратные трехчлены в числителе и знаменателе дроби и получим:

$$\frac{(3x+3)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{x+3}{x-4};\ \begin{cases}\frac{x+3}{x-4}=\frac{x+3}{x-4}, \\ x\neq-\frac{2}{3};\end{cases}\ \begin{cases}x\in\boldsymbol{R}, \\ x\neq 4, \\ x\neq-\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Корнями уравнения являются все действительные числа, кроме чисел $-\frac{2}{3}$ и 4.

Промежутку $[2; 15]$ принадлежат 13 целых корней уравнения.

Ответ: 13.

25. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2-3x+1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8}$;

$\frac{x(x-1)+1}{x-1}+\frac{x(x-3)+1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8}$;

$x+\frac{1}{x-1}+x+\frac{1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8}$; $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{4x-8}$;

$\frac{x-3+x-1}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4x-8}$; $\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4x-8}$;

$\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4(x-2)}$;

$\begin{cases}8(x-2)^2=-(x-1)(x-3),\\ x\neq 1; 2; 3;\end{cases}$ $\begin{cases}9x^2-36x+35=0,\\ x\neq 1; 2; 3.\end{cases}$

Решим уравнение $9x^2-36x+35=0$; $9x^2-36x+36-1=0$; $(3x-6)^2-1=0$; $(3x-6)^2=1$.

$\left[\begin{array}{l}3x-6=1,\\ 3x-6=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2\frac{1}{3},\\ x=1\frac{2}{3}.\end{array}\right.$

Полученные числа удовлетворяют условию $x\neq 1; 2; 3$.

Таким образом, сумма корней уравнения равна $2\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}=4$.

Ответ: 4.

Занятие 11 Решения

1.

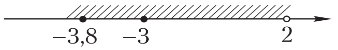


Рис. 1

Наименьшее целое число, принадлежащее промежутку $[-3{,}8; 2)$, равно -3 (рис. 1).

Ответ: 4.

2. Решим предложенные неравенства:

1) $-0{,}5x \ge 0$; $x \le 0$, т. е. $x \in (-\infty;\ 0]$;
2) $x < -0{,}5$, т. е. $x \in (-\infty;\ -0{,}5)$;
3) $-4x \ge 2$; $x \le 2 : (-4)$; $x \le -0{,}5$, т. е. $x \in (-\infty;\ -0{,}5]$;
4) $-2x > 1$; $x < -\dfrac{1}{2}$, т. е. $x \in (-\infty;\ -0{,}5)$;
5) $6x \ge -3$; $x \ge -3 : 6$; $x \ge -0{,}5$, т. е. $x \in [-0{,}5;\ +\infty)$.

Ответ: 3.

3. Число — решение системы неравенств, если оно является решением каждого неравенства системы.

Подставляя число 3 в каждое неравенство, убедимся, что только для системы 4 оно является решением.

Ответ: 4.

4. 1) $5x > 0$. Разделив обе части неравенства на 5, получим $x > 0$, т. е. $x \in (0;\ +\infty)$, значит, утверждение неверно;

2) $(-2^0 - 1)x \le 4$. $-2^0 = (-1)\cdot 2^0 = (-1)\cdot 1 = -1$, тогда $-2x \le 4$; $x \ge -2$; $x \in [-2;\ +\infty)$ — утверждение неверно;

3) решениями каждого из этих неравенств являются все действительные числа, т. е. они равносильны;

4) решением неравенства $-3 < x < -2$ является промежуток $(-3;\ -2)$, который не содержит целых чисел, значит, утверждение неверно;

5) система не имеет решений, значит, утверждение неверно.

Ответ: 3.

5. 1) $7n > 7m$ — верное неравенство, так как если обе части верного числового неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное числовое неравенство того же знака;

2) $-8n > -8m$ — неверное неравенство, так как если обе части верного числового неравенства умножить на одно и то же отрицательное

число, то получится верное числовое неравенство противоположного знака;

3) $n+6>m+6$ — верное числовое неравенство, так как если к обеим частям верного числового неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное числовое неравенство того же знака;

4) $n-5<m-5$ — неверное числовое неравенство, так как если от обеих частей верного числового неравенства отнять одно и то же число, то получится верное числовое неравенство того же знака;

5) $-\frac{n}{2}<-\frac{m}{2}$ — верное неравенство, так как если обе части верного числового неравенства разделить на одно и то же отрицательное число, то получится верное числовое неравенство противоположного знака;

6) $-3n<-3m$ — верное неравенство, так как если обе части верного числового неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то получится верное числовое неравенство противоположного знака.

Итак, верными являются неравенства под номерами 1, 3, 5 и 6.

Ответ: 3.

6. Решим предложенные неравенства:

1) $3x-2(x+1)\le 2+x;\ 3x-2x-2\le 2+x;\ 0\cdot x\le 4;\ x\in \boldsymbol{R}$;
2) $-3x\ge 0;\ x\le 0;\ x\in(-\infty;0]$;
3) $3x-2(x+1)\le x-5;\ 3x-2x-2\le x-5;\ 0\cdot x\le -3$; нет решений;
4) $3x\le 2+x;\ 2x\le -2;\ x\le -1;\ x\in(-\infty;-1]$;
5) $3x\le x;\ 2x\le 0;\ x\in(-\infty;0]$.

Ответ: 3.

7. $\begin{cases}4x>1,\\ -2x\le 3;\end{cases}\quad \begin{cases}x>\frac{1}{4},\\ x\ge -\frac{3}{2};\end{cases}\quad x>\frac{1}{4};\ x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right).$

Ответ: 2.

8. $(x-7)^2\ge x(x-14);\ \ x^2-14x+49\ge x^2-14x;$

$x^2-14x+49-x^2+14x\ge 0;\ \ 49\ge 0$, т. е. $x\in(-\infty;+\infty)$.

Ответ: 5.

9. Умножим обе части неравенства $\frac{3x+5}{4}-\frac{x+2}{3}\le\frac{9-x}{8}$ на 24 и получим:

$6(3x+5)-8(x+2)\le 3(9-x);\ \ 18x+30-8x-16-27+3x\le 0;$

$13x-13\le 0;\ 13x\le 13;\ x\le 1,$ т. е. $x\in(-\infty;\ 1].$

Ответ: 5.

10. *I способ.*

Отнимем 2 от всех частей неравенства $-7\le 2-3x<5$ и получим $-9\le -3x<3.$ Разделим все части полученного неравенства на -3: $3\ge x>-1$ или $-1<x\le 3,$ т. е. $x\in(-1;\ 3].$

II способ.

Заменим неравенство $-7\le 2-3x<5$ равносильной системой

$\begin{cases}2-3x<5,\\2-3x\ge -7\end{cases}$ и решим ее: $\begin{cases}-3x<3,\\-3x\ge -9;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-1,\\x\le 3;\end{cases}$ т. е. $x\in(-1;\ 3].$

Ответ: 1.

11. $\begin{cases}2x-3<4x-2{,}5,\\ \dfrac{x}{5}\ge\dfrac{x}{3}-2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-4x<3-2{,}5,\\3x\ge 5x-30;\end{cases}$ $\begin{cases}-2x<0{,}5,\\3x-5x\ge -30;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0{,}5:(-2),\\-2x\ge -30;\end{cases}$

$\begin{cases}x>-0{,}25,\\x\le 15,\end{cases}$ т. е. $x\in(-0{,}25;\ 15].$

Ответ: 3.

12. Так как модуль числа — число неотрицательное, то неравенство $|7-14x|\le 0$ равносильно уравнению $7-14x=0;\ 14x=7;\ x=0{,}5.$

Ответ: 3.

13. Исходное неравенство равносильно двойному неравенству:

$-17\le 2x-12\le 17;\ -5\le 2x\le 29;\ -2{,}5\le x\le 14{,}5.$

Наибольшее решение неравенства: 14,5.

Наименьшее решение неравенства: $-2{,}5.$

Их сумма: $-2{,}5+14{,}5=12.$

Ответ: 2.

14. Умножим обе части неравенства $\dfrac{7x-2}{3}\le 3-\dfrac{1-x}{2}-\dfrac{2x-7}{6}$ на 6 и получим

$2(7x-2)\le 18-3(1-x)-2(x-7);\ 14x-4\le 18-3+3x-2x+7;$

$13x\le 26;\ x\le 2;\ x\in(-\infty;2].$

Ответ: 1.

15. $\begin{cases} \dfrac{x+12}{5}+\dfrac{9+x}{6}\ge x+2, \\ \dfrac{x+5}{2}+\dfrac{15-x}{7}<x; \end{cases}$ $\begin{cases} 6(x+12)+5(9+x)\ge 30(x+2), \\ 7(x+5)+2(15-x)<14x; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+72+45+5x\ge 30x+60, \\ 7x+35+30-2x<14x; \end{cases}$ $\begin{cases} -19x\ge -57, \\ -9x<-65; \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 3, \\ x>7\dfrac{2}{9}; \end{cases}$ $x\in\varnothing.$

Ответ: 5.

16. $\begin{cases} (2+x)(2-x)<(x+3)(4-x), \\ \dfrac{3+x}{4}-\dfrac{2x-1}{6}\ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 4-x^2<-x^2+4x-3x+12, \\ 3(3+x)-2(2x-1)\ge 12; \end{cases}$

$\begin{cases} 4-x^2<-x^2+x+12, \\ 9+3x-4x+2\ge 12; \end{cases}$ $\begin{cases} -x<12-4, \\ -x\ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -x<8, \\ -x\ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-8, \\ x\le -1. \end{cases}$

Изобразим на координатной прямой множества решений каждого неравенства (рис. 2):

Рис. 2

Оба неравенства системы верны при $-8<x\le -1$. Наименьшее целое решение системы неравенств равно -7. Наибольшее целое решение системы неравенств равно -1. Искомая сумма: $-7+(-1)=-8$.

Ответ: -8.

17. $-2<\dfrac{1-2x}{5}-2<0;$ $0<\dfrac{1-2x}{5}<2;$ $0<1-2x<10;$ $-1<-2x<9;$

$-4{,}5<x<0{,}5.$

Сумма целых значений переменной x, при которых значение выражения $\dfrac{1-2x}{5}-2$ принадлежит промежутку $(-2;\,0)$, равна:

$-4+(-3)+(-2)+(-1)+0=-10.$

Ответ: -10.

18. $\dfrac{12-3x}{x^2-6x+9}\ge 0;$ $\dfrac{12-3x}{(x-3)^2}\ge 0.$

Полученное неравенство равносильно системе:

$\begin{cases} x\ne 3, \\ 12-3x\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ne 3, \\ -3x\ge -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x\ne 3, \\ x\le 4. \end{cases}$

$x \in (-\infty;\ 3) \cup (3;\ 4]$ — решение неравенства. Натуральными решениями неравенства являются числа 1; 2 и 4. Произведение этих чисел $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Ответ: 8.

19. $\left(3-\sqrt{10}\right)x > 19-6\sqrt{10}$.

Представим выражение $19-6\sqrt{10}$ в виде полного квадрата:
$19-6\sqrt{10} = 9+10-6\sqrt{10} = 3^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{10} = \left(3-\sqrt{10}\right)^2$.

Тогда исходное неравенство принимает вид
$\left(3-\sqrt{10}\right)x > \left(3-\sqrt{10}\right)^2$.

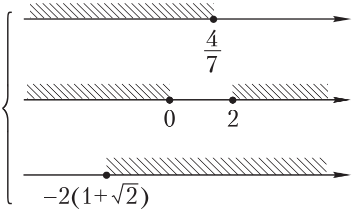
Так как $3-\sqrt{10} < 0$, то $x < \dfrac{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}{3-\sqrt{10}}$; $x < 3-\sqrt{10}$.

Так как $-4 < -\sqrt{10} < -3$, то $-1 < 3-\sqrt{10} < 0$, т. е. наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству, равно -1.

Ответ: -1.

20. $\begin{cases} -(2-x)^2 + 5x \le (2-x)(2+x) - 5x, \\ |x-1| \ge 1, \\ \left(1-\sqrt{2}\right)x \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -4+4x-x^2+5x \le 4-x^2-5x, \\ \left[\begin{array}{l} x-1 \ge 1, \\ x-1 \le -1, \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{2}{1-\sqrt{2}}; \end{cases}$

$\begin{cases} 14x \le 8, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x \le 0, \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le \dfrac{4}{7}, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x \le 0, \end{array}\right. \\ x \ge -2\left(1+\sqrt{2}\right); \end{cases}$



Таким образом, $x \in \left[-2-2\sqrt{2};\ 0\right]$.

Сумма целых решений системы неравенств: $-4-3-2-1+0 = -10$.

Ответ: -10.

21. Так как $|a| = a$ при $a \ge 0$, то уравнение $|8-16x| = 8-16x$ равносильно неравенству $8-16x \ge 0$. Тогда $-16x \ge -8$; $x \le \frac{1}{2}$. Наибольшим целым решением неравенства (а значит, и исходного уравнения) является число нуль.

Ответ: 0.

22. Перейдем от двойного неравенства к системе: $\begin{cases} |x+2| < 5, \\ |x+2| \ge 3. \end{cases}$

Первое неравенство системы равносильно двойному неравенству, а второе — совокупности двух неравенств, тогда

$$\begin{cases} -5 < x+2 < 5, \\ \left[\begin{array}{l} x+2 \ge 3, \\ x+2 \le -3; \end{array} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} -7 < x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x \le -5. \end{array} \right. \end{cases}$$

Изобразим на координатных осях множества решений двойного неравенства и совокупности (рис. 3).

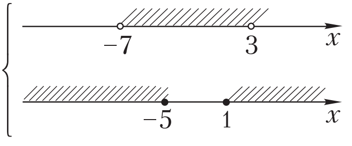


Рис. 3

Общие элементы двух множеств и будут являться решением системы: $x \in (-7; -5] \cup [1; 3)$.

Сумма целых решений: $-6-5+1+2 = -8$.

Ответ: -8.

23. Если $2{,}5 \le a \le 4$, то $5 \le 2a \le 8$.

Так как $3 \le b < 8$, то $1 \le \frac{b}{3} < \frac{8}{3}$, тогда $-1 \ge -\frac{b}{3} > -\frac{8}{3}$; $-2\frac{2}{3} < -\frac{b}{3} \le -1$.

Сложим полученные неравенства:

$$\begin{array}{r} 5 \le 2a \le 8 \\ + \\ -2\frac{2}{3} < -\frac{b}{3} \le -1 \\ \hline 2\frac{1}{3} < 2a - \frac{b}{3} \le 7 \end{array}$$

Наибольшее значение выражения $2a - \frac{b}{3}$ равно 7.

Ответ: 7.

24. $0{,}1 < b < 0{,}4$, следовательно, $-0{,}9 < b-1 < -0{,}6$. Тогда $0{,}6 < 1-b < 0{,}9$;
$\frac{10}{9} < \frac{1}{1-b} < \frac{5}{3}$.

Так как $1{,}5 < a < 2{,}5$, то $\frac{5}{3} < \frac{a}{1-b} < \frac{25}{6}$. Тогда $10 < \frac{6a}{1-b} < 25$;

$-25 < \frac{6a}{b-1} < -10$.

В этот промежуток попадает только одно число, кратное девяти, -18.

Ответ: -18.

25. $\frac{(a^2-49)(4x-1)}{a-7} \le 0$; $\frac{(a-7)(a+7)(4x-1)}{a-7} \le 0$.

При $a = 7$ знаменатель дроби равен нулю и дробь не имеет смысла.

При $a \ne 7$ неравенство принимает вид $(a+7)(4x-1) \le 0$.

1) Пусть $a = -7$. Тогда неравенство примет вид $0 \cdot (4x-1) \le 0$, его решениями будут все числа, в том числе 0 и 5;

2) пусть $a < -7$. Тогда значение выражения $(a+7)$ отрицательно, и неравенство $(a+7)(4x-1) \le 0$ равносильно неравенству $4x-1 \ge 0$, решением которого будет промежуток $\left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. Очевидно, что $0 \notin \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$;

3) пусть $a > -7$. Тогда значение выражения $(a+7)$ положительно, и неравенство $(a+7)(4x-1) \le 0$ равносильно неравенству $4x-1 \le 0$, решением которого будет промежуток $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$. В этом случае $5 \notin \left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$.

Итак, только при $a = -7$ выполняется требование задачи.

Ответ: -7.

Занятие 12 Решения

1. Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2+bx+c\ge 0$ $(ax^2+bx+c\le 0, ax^2+bx+c<0, ax^2+bx+c>0)$, где a, b, c — числа, причем $a\ne 0$. Значит, только неравенство 2 является квадратным.

Ответ: 2.

2. Подставим число $1\frac{1}{3}$ в каждое из предложенных неравенств и определим, какое из них обращается в верное числовое неравенство (заметим, что $\left(1\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}=1\frac{7}{9}$):

1) $x^2<1\frac{1}{9}$; при $x=1\frac{1}{3}$: $1\frac{7}{9}<1\frac{1}{9}$ — неверное числовое неравенство;

2) $x^2\le 1\frac{1}{9}$; при $x=1\frac{1}{3}$: $1\frac{7}{9}\le 1\frac{1}{9}$ — неверное числовое неравенство;

3) $x^2\ge\frac{16}{9}$; при $x=1\frac{1}{3}$: $1\frac{7}{9}\ge\frac{16}{9}$ — верное числовое неравенство, так как $1\frac{7}{9}=\frac{16}{9}$, т. е. число $1\frac{1}{3}$ является решением этого неравенства;

4) $(x-1)^2\le 0$; при $x=1\frac{1}{3}$: $\left(1\frac{7}{9}-1\right)^2\le 0$ — неверное числовое неравенство;

5) $(x+1)^2\le 4\frac{1}{9}$; при $x=1\frac{1}{3}$: $\left(1\frac{1}{3}+1\right)^2=\left(2\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}=5\frac{4}{5}\le 4\frac{1}{9}$ — неверное числовое неравенство.

Ответ: 3.

3. Для решения неравенства $x^2+x-6>0$ необходимо определить, при каких значениях переменной функция $y=x^2+x-6$ принимает положительные значения. Это условие выполняется при $x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$.

Ответ: 1.

4. Решим предложенные неравенства.

1) $3x^2>0; x^2>0; x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$;

2) $8x^2-3x+5\ge 0$. Рассмотрим функцию $y=8x^2-3x+5$.

$a = 8 > 0$ и $D = (-3)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5 < 0.$

В этом случае неравенство $8x^2 - 3x + 5 \geq 0$ выполняется при $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 1);

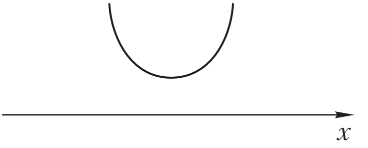


Рис. 1

3) $x^2 + 6x + 9 > 0$; $(x+3)^2 > 0$;

$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$;

4) $2x^2 - 7x + 3 \geq 0$. Рассмотрим функцию $y = 2x^2 - 7x + 3$.

$a = 2 > 0$ и $D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 > 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 5}{2 \cdot 2}$; $x_1 = 3$; $x_2 = 0{,}5$.

Неравенство $2x^2 - 7x + 3 \geq 0$ выполняется при $x \in (-\infty;\ 0{,}5] \cup [3;\ +\infty)$ (рис. 2);

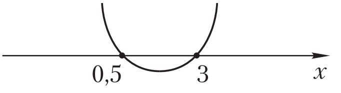


Рис. 2

5) $6x^2 + x \geq 0$. Рассмотрим функцию $y = 6x^2 + x$.

$a = 6 > 0$. Решим уравнение $6x^2 + x = 0$; $x(6x+1) = 0$, т. е. $x = 0$ или $6x + 1 = 0$;

$6x = -1$;

$x = -\dfrac{1}{6}$.

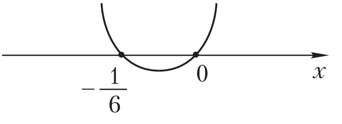


Рис. 3

Неравенство $6x^2 + x \geq 0$ выполняется при $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{6}\right] \cup [0;\ +\infty)$ (рис. 3).

Таким образом, любое действительное число является решением неравенства 2.

Ответ: 2.

5. Решим предложенные неравенства с помощью тождества $\sqrt{y^2} = |y|$:

1) $y^2 \geq 81$; $\sqrt{y^2} \geq \sqrt{81}$; $|y| \geq 9$; $\left[\begin{array}{l} y \geq 9, \\ y \leq -9 \end{array}\right.$; $y \in (-\infty;\ -9] \cup [9;\ +\infty)$;

2) $y^2 \leq 9$; $\sqrt{y^2} \leq \sqrt{9}$; $|y| \leq 3$; $-3 \leq y \leq 3$; $y \in [-3;\ 3]$;

3) $81 \geq y^2$; $\sqrt{81} \geq \sqrt{y^2}$; $|y| \leq 9$; $-9 \leq y \leq 9$; $y \in [-9;\ 9]$;

4) $y^2 \geq 9$; $\sqrt{y^2} \geq \sqrt{9}$; $|y| \geq 3$; $\left[\begin{array}{l} y \geq 3, \\ y \leq -3; \end{array}\right.$ $y \in (-\infty;\ -3] \cup [3;\ +\infty)$;

5) $y^2 + 81 \leq 0$; $y^2 \leq -81$. Так как квадрат некоторого числа не может быть меньше отрицательного числа, то данное неравенство не имеет решений.

Ответ: 3.

6. $3x^2 + 10x + 3 \le 0$.

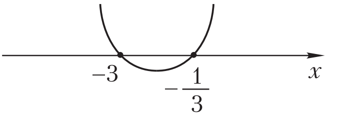


Рис. 4

Рассмотрим функцию
$y = 3x^2 + 10x + 3$.
$a = 3 > 0$
и $D = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64 > 0$;

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2 \cdot 3}; \quad x_1 = -3; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Неравенство $3x^2 + 10x + 3 \le 0$ выполняется при $x \in \left[-3;\ -\frac{1}{3}\right]$ (рис. 4).

Ответ: 2.

7. $x^2 - 14x + 49 > 0$.

I способ.

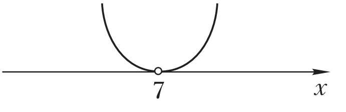


Рис. 5

Рассмотрим функцию
$y = x^2 - 14x + 49$.
$a = 1 > 0$
и $D = 14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 196 - 196 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{14}{2 \cdot 1} = 7.$$

Неравенство $x^2 - 14x + 49 > 0$ выполняется при $x \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$.

II способ.

$x^2 - 14x + 49 > 0$; $(x-7)^2 > 0$; $x \ne 7$, т. е. $x \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$ (рис. 5).

Ответ: 4.

8. $(3 - x)(2x + 5) \ge 0$; $-(x - 3)(2x + 5) \ge 0$; $(x - 3)(2x + 5) \le 0$.

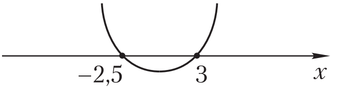


Рис. 6

Рассмотрим функцию
$y = (x - 3)(2x + 5)$.
$a > 0$. Решим уравнение
$(x - 3)(2x + 5) = 0$, т. е.

$x - 3 = 0$; или $2x + 5 = 0$;
$x = 3$ $\quad 2x = -5$;
$\quad x = -2{,}5$.

Неравенство $(x - 3)(2x + 5) \le 0$ выполняется при $x \in [-2{,}5;\ 3]$ (рис. 6).

Ответ: 3.

9. Умножим обе части неравенства $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(x-1)^2}{3} \ge \frac{2x-1}{4}$ на 12 и получим: $(x+1)^2 - 4(x-1)^2 \ge 3(2x-1)$. Воспользуемся формулами

квадрата суммы и квадрата разности двух выражений:
$x^2+2x+1-4\left(x^2-2x+1\right)\geq 3(2x-1)$; $x^2+2x+1-4x^2+8x-4\geq 6x-3$;

$x^2+2x+1-4x^2+8x-4-6x+3\geq 0$; $-3x^2+4x\geq 0$; $3x^2-4x\leq 0$.

Рассмотрим функцию $y=3x^2-4x$ (рис. 7).
$a=3>0$. Решим уравнение $3x^2-4x=0$; $x(3x-4)=0$, т. е.
$x=0$ или $3x-4$;

$3x=4$;

$x=\frac{4}{3}$;

$x=1\frac{1}{3}$.

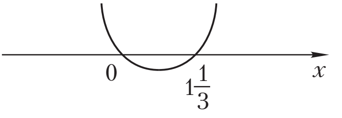


Рис. 7

Неравенство $3x^2-4x\leq 0$ выполняется при $x\in\left[0;\ 1\frac{1}{3}\right]$ и имеет два целых решения (это числа 0 и 1).

Ответ: 4.

10. Неравенство $\frac{5x}{5x-7}\leq 0$ равносильно системе $\begin{cases}x(5x-7)\leq 0,\\5x-7\neq 0.\end{cases}$ Решением первого неравенства системы является промежуток $\left[0;\ \frac{7}{5}\right]$, а так как $x\neq\frac{7}{5}$, то решением исходного неравенства является промежуток $\left[0;\ \frac{7}{5}\right)$.

Ответ: 3.

11. Выражение имеет смысл, если $8-x^2-2x>0$. Решим полученное неравенство: $x^2+2x-8<0$.

Рассмотрим функцию $y=x^2+2x-8$ (рис. 8).

$a=1>0$. Решим уравнение
$x^2+2x-8=0$;

$D=2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36>0$;

$x_{1,2}=\frac{-2\pm 6}{2\cdot 1}$; $x_1=-4$; $x_2=2$.

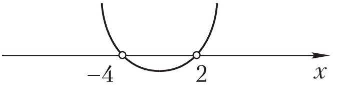


Рис. 8

Неравенство $x^2+2x-8<0$ выполняется при $x\in(-4;\ 2)$.

Ответ: 2.

12. $16-x^4\ge 0$. Воспользуемся формулой разности квадратов $\left(4-x^2\right)\left(x^2+4\right)\ge 0$. $x^2+4>0$ при любом значении x, тогда $4-x^2\ge 0$; $x^2-4\le 0$; $x^2\le 4$; $-2\le x\le 2$ или $x\in[-2;\ 2]$.

Промежутку $[-2;\ 2]$ принадлежат целые числа $-2; -1; 0; 1; 2$.

Их количество равно 5.

Ответ: 5.

13. Область определения функции $f(x)=\sqrt{x^2-6x-7}-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$ совпадает с множеством решений системы неравенств:

$$\begin{cases}x^2-6x-7\ge 0,\\ 2-3x>0;\end{cases}\quad \begin{cases}(x-7)(x+1)\ge 0,\\ x<\dfrac{2}{3};\end{cases}$$

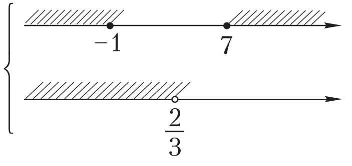


Рис. 9

$x\in(-\infty;-1]$.

Ответ: 2.

14. График функции $y=x^4+x^2-6$ расположен выше оси абсцисс при $x^4+x^2-6>0$. Пусть $x^2=t$, тогда неравенство принимает вид $t^2+t-6>0$; $(t+3)(t-2)>0$, т. е. $\left(x^2+3\right)\left(x^2-2\right)>0$. Так как $x^2+3>0$ при $x\in\boldsymbol{R}$, то $x^2-2>0$; $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)>0$; $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ответ: 4.

15. Двойное неравенство $-3\le 1-3x-x^2<\dfrac{13}{4}$ равносильно системе неравенств $\begin{cases}1-3x-x^2<\dfrac{13}{4},\\ 1-3x-x^2\ge -3;\end{cases}$ $\begin{cases}4-12x-4x^2<13,\\ 4-3x-x^2\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2+12x+9>0,\\ x^2+3x-4\le 0;\end{cases}$

$$\begin{cases}(2x+3)^2>0,\\ (x+4)(x-1)\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\ne 1{,}5,\\ x\in[-4;\ 1];\end{cases}\ x\in[-4;-1{,}5)\cup(-1{,}5;\ 1].$$

Ответ: 5.

16. $\frac{x}{x-2}-\frac{11}{2-x}<0;\ \frac{x}{x-2}+\frac{11}{x-2}<0;\ \frac{x+11}{x-2}<0.$

Решим полученное неравенство методом интервалов (рис. 10): $x\in(-11;2)$.

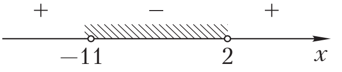


Рис. 10

Наименьшим целым решением неравенства является число –10.

Ответ: –10.

17. $(4-3x)^2\le 81.$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получим: $|4-3x|\le 9;\ |3x-4|\le 9;\ -9\le 3x-4\le 9;\ -5\le 3x\le 13;$
$-\frac{5}{3}\le x\le\frac{13}{3};\ -1\frac{2}{3}\le x\le 4\frac{1}{3}.$

Неравенство имеет шесть целых решений: –1; 0; 1; 2; 3; 4.

Ответ: 6.

18. $(x+25)^2\left(x^2+3x-10\right)\le 0.$

1) Неравенство выполняется, если $x=-25$ или $x^2+3x-10\le 0$;

2) решим неравенство $x^2+3x-10\le 0$. Рассмотрим функцию $y=x^2+3x-10,\ a=1>0$ (рис. 11).

Решим уравнение $x^2+3x-10=0.$

$D=3^2-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49>0;$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm 7}{2\cdot 1};\quad x_1=-5;\quad x_2=2.$

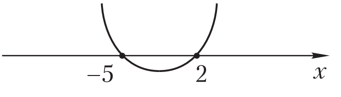


Рис. 11

Неравенство $x^2+3x-10\le 0$ выполняется при $x\in[-5;2]$;

3) итак, $x\in\{-25\}\cup[-5;2]$.

Найдем сумму целых решений:

$$-25-5-4-3-2-1+0+1+2=-37.$$

Ответ: –37.

19. Неравенство $\frac{x-6}{\sqrt{-x^2+10x-12}}\ge 0$ равносильно системе

$\begin{cases}x-6\ge 0,\\ -x^2+10x-12>0;\end{cases}\quad\begin{cases}x\ge 6,\\ x^2-10x+12<0.\end{cases}$

Решим второе неравенство системы $x^2 - 10x + 12 < 0$.

Рассмотрим функцию

$y = x^2 - 10x + 12$, $a = 1 > 0$.

Решим уравнение $x^2 - 10x + 12 = 0$;

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 100 - 48 = 52 > 0$;

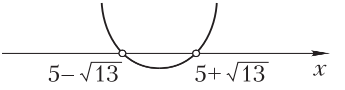


Рис. 12

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{2} = \frac{2\left(5 \pm \sqrt{13}\right)}{2} = 5 \pm \sqrt{13}$$

(рис. 12).

Неравенство $x^2 - 10x + 12 < 0$ выполняется при $x \in \left(5 - \sqrt{13};\ 5 + \sqrt{13}\right)$.

Тогда исходное неравенство выполняется при $x \in \left[6;\ 5 + \sqrt{13}\right)$. Найдем сумму целых чисел из полученного промежутка: $6 + 7 + 8 = 21$.

Ответ: 21.

20. $\dfrac{3x^2 - 11x + 22}{x^2 - 4x - 5} \geq 3$; $\dfrac{3x^2 - 11x + 22 - 3\left(x^2 - 4x - 5\right)}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$;

$\dfrac{x + 37}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$; $\dfrac{x + 37}{(x - 5)(x + 1)} \geq 0$. Воспользуемся методом интервалов (рис. 13): $x \in [-37; -1) \cup (5; +\infty)$.

Неравенство имеет 36 целых отрицательных решений.

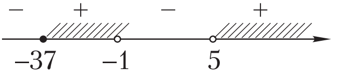


Рис. 13

Ответ: 36.

21. График функции $y = (x + 2)^2$ расположен ниже графика функции $y = 2x(x + 3) + 7$, если $(x + 2)^2 < 2x(x + 3) + 7$; $x^2 + 4x + 4 < 2x^2 + 6x + 7$;

$x^2 + 2x + 3 > 0$; $D = 4 - 12 < 0$; $x \in \boldsymbol{R}$.

Таким образом, график функции $y = (x + 2)^2$ расположен ниже графика функции $y = 2x(x + 3) + 7$ для любых значений аргумента. Значит, на промежутке $[-18; -1]$ расположено 20 целых чисел, удовлетворяющих условию задачи (рис. 14).

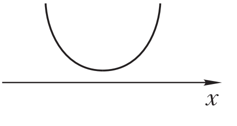


Рис. 14

Ответ: 20.

22. $\left(x^2-2x-3\right)^2\le\left(x^2-3x\right)^2$; $\left(x^2-2x-3\right)^2-\left(x^2-3x\right)^2\le 0.$

Воспользуемся формулой разности квадратов двух выражений:

$\left(x^2-2x-3-\left(x^2-3x\right)\right)\left(x^2-2x-3+\left(x^2-3x\right)\right)\le 0;$

$\left(x^2-2x-3-x^2+3x\right)\left(2x^2-5x-3\right)\le 0;$ $(x-3)\left(2x^2-5x-3\right)\le 0.$

С помощью формулы $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ разложим на множители квадратный трехчлен $2x^2-5x-3.$

$D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=25+24=49>0;$

$x_{1,\,2}=\dfrac{5\pm 7}{2\cdot 2};$ $x_1=3;$ $x_2=-0{,}5.$ Тогда $2x^2-5x-3=2(x-3)(x+0{,}5)$ и неравенство принимает вид $2(x-3)(x-3)(x+0{,}5)\le 0;$ $(x-3)^2(x+0{,}5)\le 0.$ Воспользуемся методом интервалов (рис. 15):

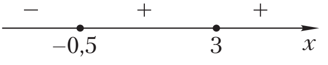


Рис. 15

Таким образом, $x\in(-\infty;\,-0{,}5]\cup\{3\}.$

Наибольшим целым решением неравенства является число 3.

Ответ: 3.

23. $1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2.$

Перейдем от двойного неравенства к равносильной системе:

$$\begin{cases}\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}>1,\\[2mm] \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2.\end{cases}$$

Заметим, что $x^2+1>0$ при любых действительных значениях переменой.

Умножим обе части первого и второго неравенства системы на x^2+1:

$$\begin{cases}3x^2-7x+8>x^2+1,\\ 3x^2-7x+8<2x^2+2;\end{cases}\quad \begin{cases}2x^2-7x+7>0,\\ x^2-7x+6<0.\end{cases}$$

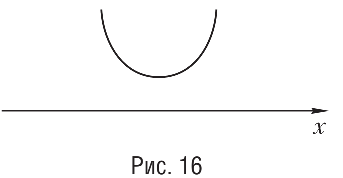


Рис. 16

Решим каждое неравенство системы:

1) $2x^2-7x+7>0.$

Рассмотрим функцию $y=2x^2-7x+7$ (рис. 16).

$a=2>0$ и $D=7^2-4\cdot2\cdot7=49-56<0.$

В этом случае неравенство $2x^2-7x+7>0$ выполняется при $x\in(-\infty;+\infty)$ и решением системы является решение второго неравенства;

2) $x^2-7x+6<0.$

Рассмотрим функцию $y=x^2-7x+6$ (рис. 17).

$a=1>0$ и $D=(-7)^2-4\cdot1\cdot6=49-24=25>0;$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm5}{2\cdot1};\quad x_1=1;\quad x_2=6.$

Неравенство $x^2-7x+6<0$ выполняется при $x\in(1;\,6)$;

3) итак, исходное неравенство выполняется при $x\in(1;\,6)$. Наибольшим целым решением неравенства является число 5.

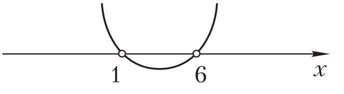


Рис. 17

Ответ: 5.

24. Пусть x — длина искомой стороны треугольника, тогда $(x+1)$ — длина высоты треугольника, проведенной к этой стороне. Используя формулу площади треугольника, получим $\dfrac{x(x+1)}{2}$ — площадь треугольника. Так как площадь треугольника не превышает 10, составим неравенство $\dfrac{x(x+1)}{2}\le10$ (с учетом того, что $x>0$).

Решим полученное неравенство:

$\dfrac{x(x+1)}{2}\le10;\ x(x+1)\le20;\ x^2+x-20\le0.$

Рассмотрим функцию $y=x^2+x-20$ (рис. 18).

$a=1>0$ и $D=1^2-4\cdot1\cdot(-20)=1+80=81>0;$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm9}{2\cdot1};\quad x_1=-5;\quad x_2=4.$

Неравенство $x^2+x-20\le0$ выполняется при $x\in[-5;4]$.

Так как $x>0$, длина искомой стороны треугольника может находиться в промежутке $(0;\ 4]$. Наибольшее возможное значение длины стороны треугольника равно 4.

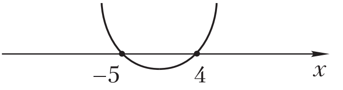


Рис. 18

Ответ: 4.

25. $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}\le 5$. Заметим, что оба слагаемых в левой части неравенства — квадраты выражений. Выделим квадрат разности в левой части неравенства:

$$x^2+\left(\frac{2x}{x+2}\right)^2-2x\cdot\frac{2x}{x+2}+2x\cdot\frac{2x}{x+2}\le 5;$$

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+2x\cdot\frac{2x}{x+2}\le 5;\ \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}\le 5.$$

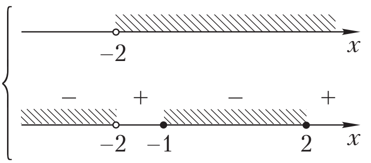
Выполним замену переменной $\dfrac{x^2}{x+2}=y$: $y^2+4y-5\le 0$; $-5\le y\le 1$.

Получим систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{x+2}\ge -5,\\ \dfrac{x^2}{x+2}\le 1;\end{cases}\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{x+2}+5\ge 0,\\ \dfrac{x^2}{x+2}-1\le 0;\end{cases}\ \begin{cases}\dfrac{x^2+5x+10}{x+2}\ge 0,\\ \dfrac{x^2-x-2}{x+2}\le 0.\end{cases}$$

Так как $x^2+5x+10>0$ при всех $x\in\boldsymbol{R}$, то полученная система равносильна системе

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}\ge 0,\\ \dfrac{(x-2)(x+1)}{x+2}\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x>-2,\\ (x-2)(x+1)(x+2)\le 0,\\ x\ne -2;\end{cases}$$



$$\begin{cases}x>-2,\\ x\in(-\infty;\,-2)\cup[-1;\,2];\end{cases}\quad x\in[-1;\,2].$$

Неравенство имеет четыре целых решения: -1; 0; 1; 2.

Ответ: 4.

Занятие 13 Решения

1. Функция вида $y = kx + b$, где k и b — любые числа, называется линейной. Функция $y = \frac{x}{2}$ — линейная, так как ее можно записать в виде $y = \frac{1}{2} \cdot x + 0.$

Ответ: 1.

2. Гиперболой называется график функции вида $y = \frac{k}{x}$; $k \neq 0$. Такой вид имеет функция $y = -\frac{3}{x}$.

Ответ: 1.

3. 1) Функция $y = kx$ является линейной — верное утверждение, так как она имеет вид $y = kx + b$, где $b = 0$;

2) графиком функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ является прямая — неверное утверждение, так как графиком обратной пропорциональности является гипербола;

3) множеством значений функции $y = -x - 3$ является множество всех отрицательных чисел — неверное утверждение, так как множеством значений линейной функции при $k \neq 0$ является множество всех действительных чисел;

4) число 4,75 является нулем функции $y = \sqrt{19 - 4x}$ — верное утверждение, так как при $x = 4{,}75$ $y = \sqrt{19 - 4 \cdot 4{,}75} = \sqrt{19 - 19} = 0$;

5) график функции $y = x^3$ проходит через начало координат — верное утверждение, так как точка с координатами $(0;\ 0)$ принадлежит графику данной функции.

Ответ: 4.

4. 1) Графиком функции $y = \frac{8}{x}$ является гипербола — верное утверждение;

2) графиком функции $y = 8x$ является луч — неверное утверждение, так как графиком любой линейной функции является прямая;

3) график функции $y = 8 - 3x$ проходит через начало координат — неверное утверждение, так как точка $(0;\ 0)$ не принадлежит графику функции $y = 8 - 3x$ $(0 \neq 8 - 3 \cdot 0)$;

4) функция $y=\sqrt{x}$ — возрастающая на области определения $D(y)=[0;+\infty)$, т. е. утверждение верное;

5) функция $y=x^3$ — убывающая на множестве $\boldsymbol{R}$. Это неверное утверждение, так как данная функция возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Ответ: 4.

5. 1) $y=\dfrac{3}{x-8}$; $D(y)=(-\infty;\ 8)\cup(8;+\infty)$; $8\notin D(y)$;

2) $y=\sqrt{7-x}$; $D(y)=(-\infty;\ 7]$; $8\notin D(y)$;

3) $y=\dfrac{x-8}{5}$; $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $8\in D(y)$;

4) $y=8x^3$; $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $8\in D(y)$;

5) $y=12$; $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $8\in D(y)$.

Ответ: 3.

6. 1) $\sqrt{x}\geq 0$ при $x\in[0;+\infty)$, поэтому функция $y=\sqrt{x}$ неотрицательна на $[0;+\infty)$;

2) любая линейная функция $y=kx+b$ при $k\neq 0$ имеет единственный нуль, так как уравнение $0=kx+b$ имеет один корень, если $k\neq 0$;

3) обратная пропорциональность $y=\dfrac{k}{x}$, $k\neq 0$ — функция, убывающая на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, если $k>0$;

4) график функции $y=x^3$ — кубическая парабола. Если $x=0$, то $y=0$, т. е. кубическая парабола проходит через начало координат;

5) областью значений линейной функции вида $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ являются все действительные числа.

Ответ: 4.

7. Так как график функции $y=\dfrac{k}{x}-1$ проходит через точку с координатами $C\left(-\dfrac{1}{2};\ -3\right)$, то $-3=\dfrac{k}{-\dfrac{1}{2}}-1$; $-3=-2k-1$; $-2=-2k$; $k=1$.

Ответ: 3.

8. Чтобы найти нули функции, решим уравнение $\dfrac{-\frac{1}{3}x-2}{0{,}6x+6}=0$:

$$-\frac{1}{3}x-2=0; \qquad \text{или} \qquad 0{,}6x+6\neq 0;$$

$$-\frac{1}{3}x=2; \qquad\qquad 0{,}6x\neq -6;$$

$$x=-6 \qquad\qquad x\neq -10.$$

Таким образом, число –6 является единственным нулем данной функции.

Ответ: 2.

9. Чтобы найти, при каких значениях x функция $y=6-1{,}5x$ принимает отрицательные значения, решим неравенство:

$6-1{,}5x<0;\ -1{,}5x<-6;\ x>-6:(-1{,}5);\ x>4;\ x\in(4;\ +\infty).$

Ответ: 1.

10. Так как график искомой функции вида $y=kx+b$ не пересекает график функции $y=1-3x$, то они параллельны, т. е. $k=-3$ (напомним, что графики двух линейных функций вида $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны, если $k_1=k_2;\ b_1\neq b_2$).

Тогда искомая функция принимает вид $y=-3x+b$. Функциями такого вида являются функции под номерами 2 и 5.

Проверим, график какой из этих функций проходит через точку $A(3;\ 2)$.

Так как $-3\cdot 3+11=-9+11=2$, то точка $A(3;\ 2)$ принадлежит графику функции $y=-3x+11$.

Так как $-3\cdot 3-7=-9-7=-16\neq 2$, то точка $A(3;\ 2)$ не принадлежит графику функции $y=-3x-7$.

Ответ: 2.

11. Обратная пропорциональность задается формулой $y=\dfrac{k}{x};\ k\neq 0$. Используя то, что график обратной пропорциональности проходит через точку $D(2;\ -2{,}5)$, найдем коэффициент k:

$k=x\cdot y=2\cdot(-2{,}5)=-5.$

Выясним, для какой из предложенных точек $k=-5$:

1) $(1;\ -5)$; $k=1\cdot(-5)=-5$;

2) $(-2;\ 0{,}4)$; $k=-2\cdot 0{,}4\neq -5$;

3) $(1;\ -0{,}8)$; $k = 1\cdot(-0{,}8) \neq -5$;

4) $(0{,}2;\ 25)$; $k = 0{,}2\cdot 25 = 5 \neq -5$;

5) $(0{,}1;\ -500)$; $k = 0{,}1\cdot(-500) = -50 \neq -5$.

Ответ: 1.

12. Построим графики данных функций:

1) $y = \sqrt{x}$ и $y = -\dfrac{6}{x}$ (рис. 1);

2) $y = x^3$ и $y = -\dfrac{6}{x}$ (рис. 2);

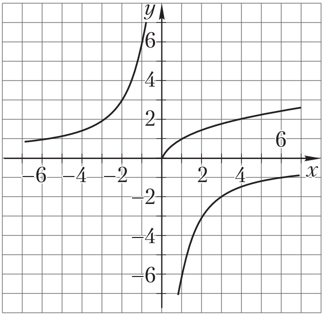


Рис. 1

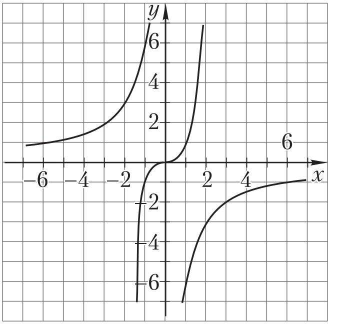


Рис. 2

3) $y = 2x + 2$ и $y = -\dfrac{6}{x}$ (рис. 3);

4) $y = \sqrt{17}$ и $y = -\dfrac{6}{x}$ (рис. 4);

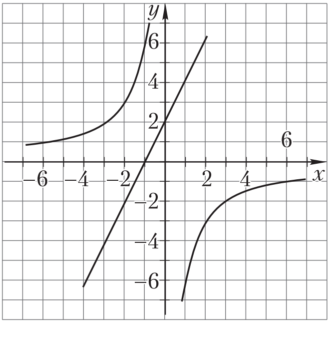


Рис. 3

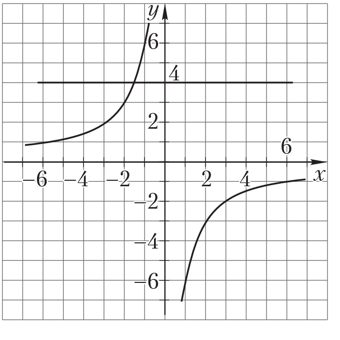


Рис. 4

5) $y = \frac{4}{x}$ и $y = -\frac{6}{x}$ (рис. 5);

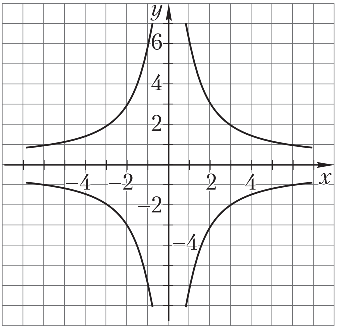


Рис. 5

6) $y = -x - 3$ и $y = -\frac{6}{x}$ (рис. 6);

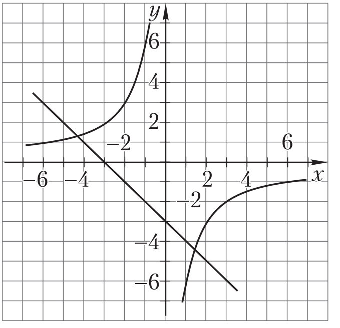


Рис. 6

7) $y = -6x$ и $y = -\frac{6}{x}$ (рис. 7).

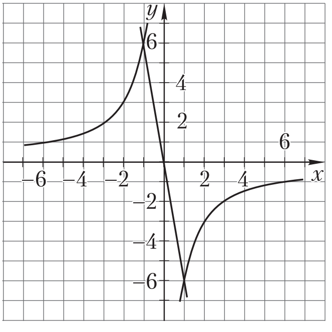


Рис. 7

Таким образом, не имеют общих точек с графиком функции $y = -\frac{6}{x}$ графики функций под номерами 1, 2, 3 и 5.

Ответ: 1.

13. График функции $y = \frac{k}{x-2} + 3$ получен из графика функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ смещением его на 2 единичных отрезка вправо вдоль оси абсцисс и на 3 единичных отрезка вверх вдоль оси ординат.

Ответ: 2.

14. Построим графики функций $y = x$, $y = \sqrt{x^2}$ и $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

1) $y = x$ (рис. 8);

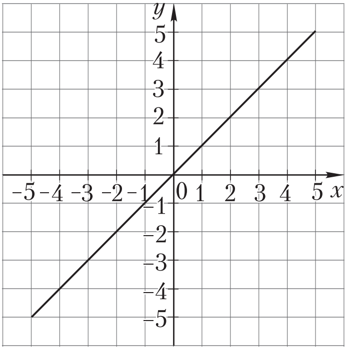


Рис. 8

2) $y = \sqrt{x^2}$; $y = |x|$ (рис. 9);

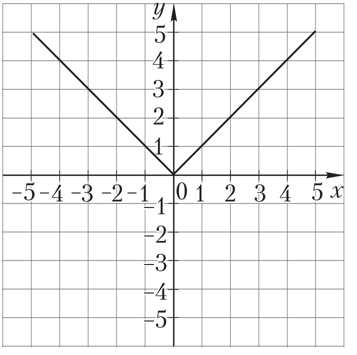


Рис. 9

3) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$; $\begin{cases} y = x, \\ x \geq 0. \end{cases}$ (рис. 10).

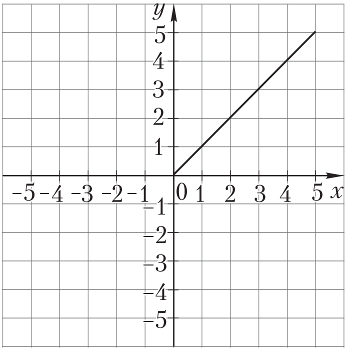


Рис. 10

Графики всех функций различны.

Ответ: 5.

15. Неверным является четвертое утверждение, поскольку на промежутке $(-1; 5)$ функция имеет и промежуток убывания, и промежуток возрастания.

Ответ: 4.

16. Центром окружности $x^2+y^2=1$ является точка $A(0;0)$, а центром окружности $(x-3)^2+(y+4)^2=49$ — точка $B(3;-4)$.

По формуле расстояния между двумя точками

$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ найдем $AB=\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=5.$

Ответ: 5.

17. В точке $C(x_3;y_3)$ график функции $y=-9x^4+10x^2-1$ пересекает ось ординат, значит, $x_3=0$, тогда $y_3=-1$.

Абсцисы точек $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ являются нулями функции $y=-9x^4+10x^2-1$. Найдем нули данной функции:

$-9x^4+10x^2-1=0;\ 9x^4-10x^2+1=0.$

Пусть $x^2=t$, тогда $9t^2-10t+1=0$.

$D=100-4\cdot 9=64;\ t_1=\dfrac{10-8}{18}=\dfrac{1}{9};\ t_2=\dfrac{10+8}{18}=1.$

То есть $x^2=\dfrac{1}{9}$ или $x^2=1$, тогда $x=\pm\dfrac{1}{3}$ или $x=\pm 1$.

Таким образом, точки A и B имеют координаты $A(-1;0),\ B(1;0)$.

Найдем значение выражения: $x_1\cdot x_2+y_3=-1\cdot 1+(-1)=-2.$

Ответ: –2.

18. Для нахождения абсцисс точек пересечения графиков функций, заданных формулами $y=-\dfrac{8}{x}$ и $y=2-x$, решим уравнение $-\dfrac{8}{x}=2-x$.

$-8=2x-x^2$ при $x\neq 0;\ x^2-2x-8=0;$

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36;\ x_{1,2}=\dfrac{2\pm 6}{2\cdot 1};$

$x_1=4;\ x_2=-2.$

Итак, графики функций $y=-\dfrac{8}{x}$ и $y=2-x$ пересекаются в точках с абсциссами 4 и –2. Их произведение: $4\cdot(-2)=-8$.

Ответ: –8.

19. Построим графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=5-x$ (рис. 11).

Корнем уравнения $\sqrt{x}=5-x$ является абсцисса точки пересечения графиков функций $y=\sqrt{x}$ и $y=5-x$. Корень уравнения находится между числами 3 и 4. Их сумма: $3+4=7$.

Ответ: 7.

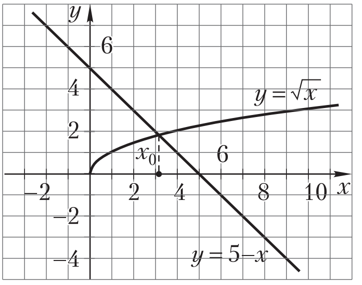


Рис. 11

20. Нули функции — это значения аргумента, при которых функция равна нулю.

С помощью таблицы находим, что $y=0$ при $x=-\sqrt{11}$; $\sqrt{11}$; 5.

Найдем произведение нулей функции: $-\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}\cdot 5=-55$.

Ответ: −55.

21. Так как точка $A(m;\ n)$ находится в первой четверти, то $n>0$; $m>0$.

Так как точка $A(m;\ n)$ принадлежит графику функции $y=x^3$, то верным является равенство $n=m^3$. Воспользуемся условием $n=16m$ и получим: $16m=m^3$. Решим полученное уравнение:

$m^3-16m=0$; $m(m^2-16)=0$; $m(m-4)(m+4)=0$; $m=0$, или $m=4$, или $m=-4$. Так как $m>0$, то $m=4$, тогда $n=16\cdot 4=64$.

Найдем значение выражения:
$m+n=4+64=68$.

Ответ: 68.

22. Отметим данные точки на координатной плоскости (рис. 12).

Очевидно, что на одной прямой могут располагаться только точки A, B и C. Докажем, что они лежат на одной прямой.

Найдем уравнение прямой, заданной формулой $y=kx+b$ и проходящей через точки $A(0;\ 3)$ и $B(-1;\ -1)$.

Так как точка $A(0;\ 3)$ принадлежит графику функции $y=kx+b$, то $3=k\cdot 0+b$; $b=3$, и функция принимает вид $y=kx+3$.

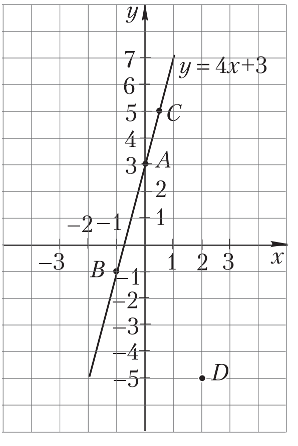


Рис. 12

Так как точка $B(-1;\ -1)$ принадлежит графику функции $y = kx + 3$, то $-1 = k \cdot (-1) + 3$; $k = 4$, и функция принимает вид $y = 4x + 3$.

Убедимся, что точка $C(0{,}5;\ 5)$ лежит на графике функции $y = 4x + 3$: $5 = 4 \cdot 0{,}5 + 3$ — верное числовое равенство.

Таким образом, искомая функция имеет вид $y = 4x + 3$, тогда $k = 4$.

Ответ: 4.

23. Функция вида $y = kx + b$ убывает на множестве действительных чисел, если $k < 0$. В данном случае $k = a^2 + a - 30$. Решим неравенство $a^2 + a - 30 < 0$.

Рассмотрим функцию $y = a^2 + a - 30$ (рис. 13).

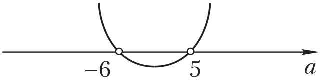


Рис. 13

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 1 + 120 = 121 > 0;$

$a_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 11}{2 \cdot 1};\quad a_1 = -6;\quad a_2 = 5.$

Неравенство $a^2 + a - 30 < 0$ выполняется при $a \in (-6;\ 5)$. Наименьшее целое число из полученного промежутка –5.

Ответ: –5.

24. Так как графики функций $y = (a-1)x + b$ и $y = 5x + 6$ симметричны относительно оси ординат, то они пересекают ее в одной и той же точке (рис. 14). В этом случае $b = 6$, и функция $y = (a-1)x + b$ принимает вид $y = (a-1)x + 6$.

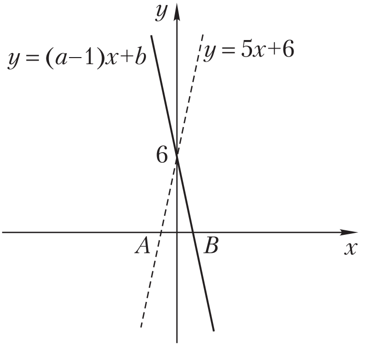


Рис. 14

Воспользуемся также симметрией относительно оси ординат точек пересечения графиков функций $y = (a-1)x + 6$ и $y = 5x + 6$ с осью абсцисс (точки B и A). Найдем абсциссу точки A: $5x + 6 = 0$; $x = -\dfrac{6}{5}$.

Следовательно, точка A имеет координаты $\left(-\dfrac{6}{5};\ 0\right)$. Тогда точка B имеет координаты $\left(\dfrac{6}{5};\ 0\right)$. Так как точка B принадлежит графику функции $y=(a-1)x+6$, то должно выполняться равенство $0=(a-1)\cdot\dfrac{6}{5}+6$. Найдем a: $(a-1)\cdot\dfrac{6}{5}=-6$; $(a-1)\cdot\dfrac{1}{5}=-1$; $a-1=-5$; $a=-4$.

Найдем значение выражения: $a\cdot b=-4\cdot 6=-24$.

Ответ: -24.

25. Изобразим графики функций $y=x^3$ и $y=4-x$ (рис. 15).

Решениями неравенства $4-x>x^3$ являются все значения аргумента, для которых график функции $y=4-x$ расположен выше, чем график функции $y=x^3$, т. е. решениями неравенства являются все действительные числа из промежутка $(-\infty;\ x_0)$.

Так как $1<x_0<2$, то неравенство имеет 11 целых решений, удовлетворяющих условию $x>-10$.

Ответ: 11.

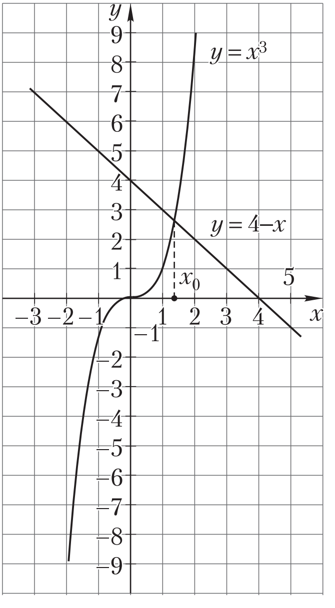


Рис. 15

Задание 14 Решения

1. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа, причем $a \neq 0$, называется квадратной. Квадратными являются функции 1 и 5.

Ответ: 4.

2. 1) График квадратной функции — парабола;

2) парабола не всегда проходит через начало координат, точка $(0; 0)$ принадлежит только параболе вида $y = ax^2$;

3) $y = \frac{1}{3} \cdot x^2$ — квадратная функция;

4) ось ординат пересекает любая парабола. Так как число 0 входит в область определения функции, координаты точки пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью Oy — $(0; c)$;

5) множество значений (область значений) квадратной функции — промежуток $[y_{\text{в}}; +\infty)$, если $a > 0$, и $(-\infty; y_{\text{в}}]$, если $a < 0$.

Ответ: 4.

3. Вершиной параболы, заданной формулой $y = a(x-n)^2 + m$, является точка с координатами $(n; m)$. Таким образом, вершина параболы $y = -(x+3)^2 - 1$ находится в точке $(-3; -1)$.

Ответ: 1.

4. Графиком функции, заданной формулой $y = -x^2 + 4$, является парабола, ветви которой направлены вниз $(a = -1 < 0)$ и вершина которой находится в точке с координатами $(0; 4)$.

Ответ: 4.

5. Для нахождения координат вершины параболы воспользуемся формулами: $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$; $y_{\text{в}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Тогда $x_{\text{в}} = -\frac{-5}{2 \cdot (-1)} = -2{,}5$

и $y_{\text{в}} = \frac{4 \cdot (-1) \cdot (-6) - (-5)^2}{4 \cdot (-1)} = \frac{24 - 25}{-4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Ответ: 4.

6. Так как ветви параболы, являющейся графиком функции $y = x^2 - 2x - 8$, направлены вверх, то функция возрастает на промежутке $[x_{\text{в}}; +\infty)$. Воспользуемся формулой $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$. Получим $x_{\text{в}} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$. Таким образом, данная функция возрастает на промежутке $[1; +\infty)$.

Ответ: 5.

7. Для нахождения нулей функции решим уравнение $3x^2-10x+3=0$.

$D=(-10)^2-4\cdot3\cdot3=100-36=64>0$, тогда

$x_{1,2}=\dfrac{10\pm8}{2\cdot3}$; $x_1=3$; $x_2=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: 1.

8. Так как ветви параболы, являющейся графиком функции $y=-x^2+$ $+6x-8$, направлены вниз $(a=-1<0)$, то наибольшего значения данная функция достигает в вершине. С помощью формулы $y_{\text{в}}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ найдем $y_{\text{в}}=\dfrac{4\cdot(-1)\cdot(-8)-6^2}{4\cdot(-1)}=\dfrac{32-36}{-4}=\dfrac{-4}{-4}=1$.

Ответ: 1.

9. Так как ветви параболы, являющейся графиком функции $y=-x^2+$ $+5x-2$, направлены вниз $(a=-1<0)$, то множеством значений данной функции является промежуток $(-\infty;\ y_{\text{в}}]$. С помощью формулы $y_{\text{в}}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ найдем:

$$y_{\text{в}}=\frac{4\cdot(-1)\cdot(-2)-5^2}{4\cdot(-1)}=\frac{8-25}{-4}=\frac{-17}{-4}=4\frac{1}{4}=4{,}25.$$

Множеством значений данной функции является промежуток $(-\infty;\ 4{,}25]$.

Ответ: 1.

10. Решим неравенство $-x^2-3x+4\le0$; $x^2+3x-4\ge0$.

$D=3^2-4\cdot1\cdot(-4)=9+16=25>0$, тогда

$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm5}{2\cdot1}$; $x_1=-4$; $x_2=1$ (рис. 1).

Неравенство $x^2+3x-4\ge0$ выполняется при $x\in(-\infty;\ -4]\cup[1;\ +\infty)$.

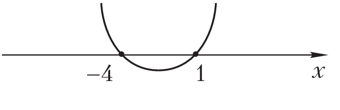


Рис. 1

Ответ: 2.

11. Функция $y=(5-x)^2-6$ при $x=0$ принимает значение $y=(5-0)^2-$ $-6=25-6=19$. Следовательно, ордината точки пересечения параболы с осью Oy равна 19.

Ответ: 3.

12. Формулой $y=-9x+7x^2$ задается квадратная функция, ее график — парабола, ветви которой направлены вверх $(a=7>0)$. Найдем нули данной функции:

$-9x+7x^2=0;\ 7x^2-9x=0;\ x(7x-9)=0;$

$x=0$ или $7x-9=0;$
$7x=9;$
$x=\frac{9}{7};$
$x=1\frac{2}{7}.$

График функции $y=-9x+7x^2$ изображен на рисунке 2.

Ответ: 2.

13. Осью симметрии параболы является прямая $x=x_{\text{в}}$. Найдем абсциссу вершины каждой параболы:

1) $y=3(x-6)^2-8;\ x_{\text{в}}=6;$

2) $y=x^2-6x+2;\ x_{\text{в}}=\frac{6}{2}=3;$

3) $y=x^2+12x-1;\ x_{\text{в}}=\frac{-12}{2}=-6;$

4) $y=-2(x-4)^2-6;\ x_{\text{в}}=4;$

5) $y=2x^2-24x+7;\ x_{\text{в}}=\frac{24}{4}=6.$

Таким образом, прямая $x=-6$ является осью симметрии параболы $y=x^2+12x-1.$

Ответ: 3.

14. Так как вершиной параболы является точка с координатами $(0;-2)$, а ветви параболы направлены вверх, то парабола имеет вид $y=ax^2-2.$ Из предложенных вариантов ответов данный вид имеет парабола $y=x^2-2.$

Ответ: 1.

15. Неверным является утверждение под номером 2. Найдем координаты точки пересечения параболы $y=-(x+4)^2-5$ и оси ординат. При $x=0$ получим $y=-(0+4)^2-5=-21.$ Таким образом, парабола $y=-(x+4)^2-5$ пересекает ось ординат в точке $(0;-21).$

Ответ: 2.

16. Приведем заданную функцию к виду $y = ax^2 + bx + c$.

$y = (1-x)(x+5)$; $y = x + 5 - x^2 - 5x$; $y = -x^2 - 4x + 5$.

Так как ветви параболы, являющейся графиком функции $y = -x^2 - 4x + 5$, направлены вниз $(a = -1 < 0)$, то наибольшего значения данная функция достигает в вершине. С помощью формулы $y_в = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ найдем:

$$y_в = \frac{4 \cdot (-1) \cdot 5 - (-4)^2}{4 \cdot (-1)} = \frac{-20 - 16}{-4} = \frac{-36}{-4} = 9.$$

Ответ: 9.

17. Так как график функции $y = ax^2 - 5x - 3$ проходит через точку $F(-1;\ 3)$, составим уравнение: $3 = a(-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 3$. Тогда

$3 = a + 5 - 3$; $3 = a + 2$; $a = 1$.

Ответ: 1.

18. 1) Найдем координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2 + 2x$ и $y = 6x - x^2$.

$x^2 + 2x = 6x - x^2$; $2x^2 - 4x = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x-2) = 0$;
$x = 0$ или $x = 2$.

При $x = 0$ $y = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$; при $x = 2$ $y = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$.

Таким образом, точки с координатами $(0;\ 0)$ и $(2;\ 8)$ являются точками пересечения графиков заданных функций.

2) Так как прямая $y = kx + b$ проходит через точки с координатами $(0;\ 0)$ и $(2;\ 8)$, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot 0 + b, \\ 8 = k \cdot 2 + b; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0, \\ k = 4. \end{cases}$$

Следовательно, прямая имеет вид $y = 4x$.

Ответ: 4.

19. Так как ветви параболы, являющейся графиком функции $y = x^2 + px + q$, направлены вверх $(a = 1 > 0)$, то наименьшего значения данная функция достигает в вершине, т. е. $x_в = 2$, а $y_в = -5$.

Воспользуемся формулами $x_в = -\dfrac{b}{2a}$; $y_в = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ и составим систему:

$$\begin{cases} 2 = -\dfrac{p}{2}, \\ -5 = \dfrac{4 \cdot 1 \cdot q - p^2}{4}; \end{cases} \begin{cases} p = -4, \\ 4q - p^2 = -20; \end{cases} \begin{cases} p = -4, \\ 4q - (-4)^2 = -20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = -4, \\ 4q - 16 = -20; \end{cases} \begin{cases} p = -4, \\ 4q = -4; \end{cases} \begin{cases} p = -4, \\ q = -1. \end{cases}$$

Тогда $p + q = -4 + (-1) = -5.$

Ответ: –5.

20. Так как парабола, заданная формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, проходит через точки $A(3;\ 3)$; $B(-1;\ 3)$; $C(5;\ 15)$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c, \\ 3 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c, \\ 15 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c; \end{cases} \begin{cases} 9a + 3b + c = 3, \\ a - b + c = 3, \\ 25a + 5b + c = 15. \end{cases}$$

Вычтем из первого и третьего уравнений второе:

$$\begin{cases} 8a + 4b = 0, \\ a - b + c = 3, \\ 24a + 6b = 12; \end{cases} \begin{cases} 2a + b = 0, \\ 4a + b = 2, \\ a - b + c = 3; \end{cases} \begin{cases} b = -2a, \\ 4a + (-2a) = 2, \\ a - b + c = 3; \end{cases} \begin{cases} b = -2a, \\ 2a = 2, \\ a - b + c = 3; \end{cases} \begin{cases} b = -2a, \\ a = 1, \\ a - b + c = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2 \cdot 1, \\ a = 1, \\ a - b + c = 3; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ a = 1, \\ a - b + c = 3; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ a = 1, \\ 1 - (-2) + c = 3; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ a = 1, \\ 3 + c = 3; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ a = 1, \\ c = 0. \end{cases}$$

Таким образом, парабола имеет вид $y = x^2 - 2x$.

Воспользуемся формулами $x_в = -\dfrac{b}{2a}$; $y_в = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ и получим $x_в = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ и $y_в = \dfrac{4 \cdot 1 \cdot 0 - (-2)^2}{4 \cdot 1} = \dfrac{-4}{4} = -1.$

Тогда $x_в \cdot y_в = 1 \cdot (-1) = -1.$

Ответ: –1.

21. Абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ является серединой отрезка $[x_1; x_2]$, где $x_1; x_2$ — нули функции $f(x) = ax^2 + bx + c.$

Тогда $x_в = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3} + 24 - 2\sqrt{3}}{2} = 11.$

Ответ: 11.

22. Пусть x — первое число, тогда $(40+x)$ — второе число. Их произведение равно $x(x+40)$. Рассмотрим функцию $f(x)=x(x+40)$ и найдем, при каком значении переменной данная функция принимает свое наименьшее значение.

Так как ветви параболы $y=x^2+40x$ направлены вверх, то своего наименьшего значения функция достигает в вершине, т. е. $x=x_{\text{в}}=-20$. Тогда первое число равно -20, а второе 20, и их сумма равна 0.

Ответ: 0.

23. Найдем уравнение оси симметрии параболы, заданной формулой $y=ax^2-10ax+c$. Воспользуемся формулой $x_{\text{в}}=-\dfrac{b}{2a}$, тогда $x_{\text{в}}=-\dfrac{-10a}{2a}=5$, т. е. осью симметрии заданной параболы является прямая $x=5$ (рис. 2).

Точка $B(8;\ 8)$ симметрична точке $A(2;\ 8)$ относительно прямой $x=5$. Найдем сумму координат точки B: $8+8=16$.

Ответ: 16.

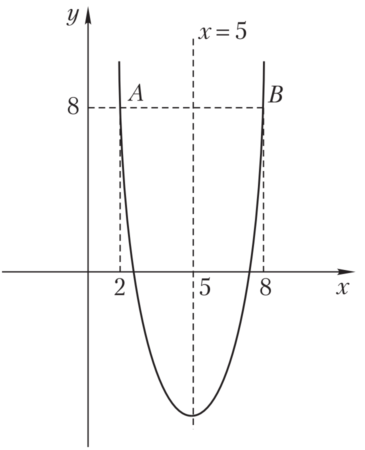


Рис. 2

24. 1) Если $m=0$, то функция $y=mx^2-4mx+9$ примет вид $y=9$.

Это постоянная функция, ее график — прямая, проходящая через точку с координатами $(0;\ 9)$ параллельно оси абсцисс. Осью симметрии такой прямой является любая прямая $x=x_0$, $x_0\in\boldsymbol{R}$.

Вторая функция $y=3x^2-(m^2-5)x+7$ при $m=0$ является квадратной: $y=3x^2+5x+7$. График — парабола, ось симметрии: $x=x_{\text{в}}$, где $x_{\text{в}}$ — абсцисса вершины параболы. Следовательно, если $m=0$, то графики имеют одну и ту же ось симметрии.

2) Пусть $m\neq 0$, тогда обе функции — квадратные: $y_1=mx^2-4mx+9$ и $y_2=3x^2-(m^2-5)x+7$. Найдем абсциссу вершины каждой параболы: $x_{\text{в}_1}=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4m}{2\cdot m}=\dfrac{4m}{2m}=2$; $x_{\text{в}_2}=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-(m^2-5)}{2\cdot 3}=\dfrac{m^2-5}{6}$.

Чтобы графики имели одну и ту же ось симметрии, абсциссы вершин парабол должны быть равны. Найдем такие значения m, при которых $x_{в_1} = x_{в_2}$: $\frac{m^2-5}{6} = 2$; $m^2 - 5 = 12$; $m^2 = 17$; $m = \pm\sqrt{17}$. Итак, при трех значениях m $\left(0;\ -\sqrt{17};\ \sqrt{17}\right)$ графики данных функций имеют одну и ту же ось симметрии.

Ответ: 3.

25. Составим уравнение:

$2mx^2 + 2x + 1 = 5x^2 + 2mx - 2$; $(2m-5)x^2 + (2-2m)x + 3 = 0$.

Полученное уравнение имеет один корень (а графики заданных функций имеют только одну общую точку) в следующих случаях.

1) Уравнение $(2m-5)x^2 + (2-2m)x + 3 = 0$ является линейным, т. е. $2m - 5 = 0$; $m = 2{,}5$. Проверим, сколько корней имеет составленное уравнение при найденном значении параметра m:

$0 \cdot x^2 - 3x + 3 = 0; x = 1$, т. е. уравнение имеет единственный корень.

2) Уравнение $(2m-5)x^2 + (2-2m)x + 3 = 0$ является квадратным, и $D = 0$, т. е.

$(2-2m)^2 - 4 \cdot (2m-5) \cdot 3 = 0$; $4 \cdot (1-m)^2 - 4 \cdot (2m-5) \cdot 3 = 0$;

$(1-m)^2 - 3 \cdot (2m-5) = 0$; $m^2 - 2m + 1 - 6m + 15 = 0$; $m^2 - 8m + 16 = 0$;

$(m-4)^2 = 0; m = 4$.

3) Найдем произведение найденных значений параметра m: $2{,}5 \cdot 4 = 10$.

Ответ: 10.

Задание 15 Решения

1. Решением системы уравнений является упорядоченная пара чисел, которая обращает оба уравнения системы в верные числовые равенства.

Проверим, какая из предложенных пар чисел будет решением системы $\begin{cases} xy = -6, \\ x + 2y = -11. \end{cases}$

Заметим, что первое уравнение системы $(xy = -6)$ обращается в верное числовое равенство для каждой из пяти предложенных пар чисел. Проверим, при каких значениях переменных второе уравнение системы $(x + 2y = -11)$ обращается в верное числовое равенство:

1) $(2; -3)$; тогда $2 + 2 \cdot (-3) = -4 \neq -11$;

2) $(3; -2)$; тогда $3 + 2 \cdot (-2) = -1 \neq -11$;

3) $(-6; 1)$; тогда $-6 + 2 \cdot 1 = -4 \neq -11$;

4) $\left(36; -\frac{1}{6}\right)$; тогда $36 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 35\frac{2}{3} \neq -11$;

5) $(1; -6)$; тогда $1 + 2 \cdot (-6) = -11$.

Таким образом, решением системы является пара чисел $(1; -6)$.

Ответ: 5.

2. Система линейных уравнений вида $\begin{cases} ax + by = n, \\ cx + dy = m \end{cases}$ не имеет решений, если $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{n}{m}$. Данному условию удовлетворяет система под номером 3 $\left(\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{5}{12}\right)$.

Ответ: 3.

3. Для каждой из предложенных систем проверим, является ли пара чисел $(3; -2)$ ее решением:

1) $\begin{cases} x = 3, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ 2 \cdot 3 - (-2) \neq 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 5x - 6y = 27; \end{cases}$ $\begin{cases} 3 + (-2) = 1, \\ 5 \cdot 3 - 6 \cdot (-2) = 27 \end{cases}$ — верные числовые равенства;

$3)\begin{cases} x-y=3, \\ y=-2; \end{cases} \begin{cases} 3-(-2)\neq 3, \\ y=-2; \end{cases}$

$4)\begin{cases} 3\cdot 3-2\cdot(-2)\neq 0, \\ 3+(-2)=1; \end{cases}$

$5)\begin{cases} 3\cdot(-2)=-6, \\ -2-3\neq 1. \end{cases}$

Ответ: 2.

4. На предложенном рисунке изображены окружность с центром в точке $(0;\ 0)$ и радиусом, равным 4, и прямая, проходящая через точки с координатами $(3;\ 0)$ и $(0;\ 3)$.

Данная окружность задается уравнением $x^2+y^2=16$. Прямая — уравнением $y=-x+3$, или $y+x=3$. Таким образом, на рисунке изображена графическая иллюстрация системы $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$

Ответ: 4.

5. $0{,}6x-\frac{3}{4}y=6;\qquad \frac{3}{4}y=0{,}6x-6.$

Разделим обе части последнего равенства на 3: $\frac{1}{4}y=0{,}2x-2.$

Умножим обе части последнего равенства на 4 и получим: $y=0{,}8x-8.$

Ответ: 4.

6. $\begin{cases} 26x+45=15y, \\ 21x+2y=6; \end{cases} \begin{cases} 26x-15y=-45, \\ 21x+2y=6. \end{cases}$

Умножим обе части первого уравнения системы на 2, а второго — на 15 и воспользуемся методом сложения:

$\begin{cases} 52x-30y=-90, \\ 315x+30y=90; \end{cases} \begin{cases} 367x=0, \\ 21x+2y=6; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ 21x+2y=6; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ 21\cdot 0+2y=6; \end{cases}$

$\begin{cases} x=0, \\ 2y=6; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=3. \end{cases}$

Ответ: 1.

7. $\begin{cases} \frac{2-x}{3}-\frac{y+6}{6}=0, \\ x+2y=-1. \end{cases}$

Умножим обе части первого уравнения системы на 6:

$\begin{cases} 2(2-x)-(y+6)=0, \\ x+2y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 4-2x-y-6=0, \\ x+2y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} -2x-y=2, \\ x+2y=-1. \end{cases}$

Затем умножим обе части первого уравнения системы на 2 и воспользуемся методом сложения:

$\begin{cases} -4x-2y=4, \\ x+2y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x=3, \\ x+2y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ x+2y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ -1+2y=-1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-1, \\ 2y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$

Ответ: 5.

8. $\begin{cases} xy-x=4, \\ 2x+y=7; \end{cases}$ $\begin{cases} xy-x=4, \\ y=7-2x; \end{cases}$ $\begin{cases} x(7-2x)-x=4, \\ y=7-2x. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$x(7-2x)-x=4;\ 7x-2x^2-x-4=0;\ -2x^2+6x-4=0;\ x^2-3x+2=0;$

$D=3^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1>0$, тогда $x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}$, $x_1=1;\quad x_2=2.$

При $x_1=1$ $y_1=7-2\cdot1=7-2=5;$ при $x_2=2$ $y_2=7-2\cdot2=7-4=3.$

Таким образом, система имеет два решения: $(1;5)$ и $(2;3)$.

Наименьшая из сумм x_0+y_0 равна $2+3=5$.

Ответ: 1.

9. Умножим обе части первого уравнения системы на 10, а второго — на 3 и воспользуемся методом сложения:

$\begin{cases} -33x+50y=66, \\ 33x-50y=-66; \end{cases}$ $\begin{cases} 0x+0y=0, \\ 33x-50y=-66; \end{cases}$ $\begin{cases} x=x_0,\ x_0\in \boldsymbol{R}, \\ y=\dfrac{33x_0+66}{50}. \end{cases}$

Итак, решениями системы являются упорядоченные пары чисел $\left(x_0;\ \dfrac{33x_0+66}{50}\right)$, где $x_0\in \boldsymbol{R}$.

Ответ: 5.

10. Так как искомая точка принадлежит и параболе $y=x^2+3x-1$, и прямой $y=x-2$, то ее координаты являются решением системы $\begin{cases} y=x^2+3x-1, \\ y=x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=x^2+3x-1, \\ y=x-2. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$x-2=x^2+3x-1;\quad x^2+2x+1=0;\quad (x+1)^2=0;\quad x+1=0;\quad x=-1.$

При $x=-1$ $y=-1-2=-3.$

Искомая сумма: $-1+(-3)=-4.$

Ответ: 5.

11. $\begin{cases}x^2+xy=2,\\ y-3x=7;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+xy=2,\\ y=3x+7;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x(3x+7)=2,\\ y=3x+7.\end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$x^2+x(3x+7)=2;\quad x^2+3x^2+7x-2=0;\quad 4x^2+7x-2=0;$

$D=7^2-4\cdot4\cdot(-2)=49+32=81>0,$ тогда

$x_{1,2}=\dfrac{-7\pm9}{2\cdot4};\ x_1=-2;\ x_2=\dfrac{1}{4}.$

При $x_1=-2$ $y_1=3\cdot(-2)+7=-6+7=1;$

при $x_2=\dfrac{1}{4}$ $y_2=3\cdot\dfrac{1}{4}+7=7\dfrac{3}{4}.$

Таким образом, система имеет два решения:

$(-2;1)$ и $\left(\dfrac{1}{4};7\dfrac{3}{4}\right)$, т. е. $n=2.$

Наибольшая из возможных сумм $S=x_0+y_0=\dfrac{1}{4}+7\dfrac{3}{4}=8.$

Тогда $n\cdot S=2\cdot8=16.$

Ответ: 4.

12. $\begin{cases}x^2+y^2=2xy+4,\\ x+y=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=4,\\ x+y=6;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-y)^2=4,\\ x+y=6.\end{cases}$

Тогда $\begin{cases}x-y=2,\\ x+y=6;\end{cases}$ или $\begin{cases}x-y=-2,\\ x+y=6;\end{cases}$

$\begin{cases}2x=8,\\ x+y=6;\end{cases}$ $\begin{cases}2x=4,\\ x+y=6;\end{cases}$

$\begin{cases}x=4,\\ y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\ y=4.\end{cases}$

Таким образом, исходная система имеет два решения: $(4;\ 2);\ (2;\ 4).$

Ответ: 2.

13. Умножим первое уравнение системы $\begin{cases}\dfrac{3x-7}{4}-\dfrac{2y-3}{5}=1,\\ \dfrac{2x-y}{2}-1=y-2\end{cases}$ на 20, а второе — на 2 и получим: $\begin{cases}5(3x-7)-4(2y-3)=20,\\ 2x-y-2=2y-4;\end{cases}$ $\begin{cases}15x-35-8y+12=20,\\ 2x-y-2=2y-4;\end{cases}$

$\begin{cases}15x-8y=43,\\ 2x-3y=-2;\end{cases}\left|\begin{array}{l}\cdot 2\\ \cdot(-15)\end{array}\right.$ $\begin{cases}30x-16y=86,\\ -30x+45y=30;\end{cases}$ $\begin{cases}29y=116,\\ 2x-3y=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}y=4,\\ 2x-3\cdot 4=-2;\end{cases}$

$\begin{cases}y=4,\\ x=5.\end{cases}$ Тогда $x_0+y_0=4+5=9.$

Ответ: 4.

14. $\begin{cases}2y-x=5,\\ x^2-xy-y^2=-29;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y-5,\\ (2y-5)^2-(2y-5)y-y^2=-29;\end{cases}$

$\begin{cases}x=2y-5,\\ 4y^2-20y+25-2y^2+5y-y^2=-29;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y-5,\\ y^2-15y+54=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x=2y-5,\\ \left[\begin{array}{l}y=6,\\ y=9;\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\cdot 6-5,\\ y=6;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\cdot 9-5,\\ y=9;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=7,\\ y=6;\end{cases}\\ \begin{cases}x=13,\\ y=9.\end{cases}\end{array}\right.$

Система имеет два решения, а наибольшая из сумм x_0+y_0 равна 22, тогда $S\cdot n=22\cdot 2=44.$

Ответ: 1.

15. Пусть $t=\dfrac{1}{2x+y}$, тогда система $\begin{cases}\dfrac{1}{2x+y}+y=4,\\ \dfrac{y}{2x+y}=3\end{cases}$ принимает вид

$\begin{cases}t+y=4,\\ ty=3;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=1,\\ y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}t=3,\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$

То есть $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{1}{2x+y}=1,\\ y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{2x+y}=3,\\ y=1;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y=1,\\ y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}2x+y=\dfrac{1}{3},\\ y=1;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+3=1,\\ y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1=\dfrac{1}{3},\\ y=1;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\ y=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3},\\ y=1.\end{cases}\end{array}\right.$

Решения системы: $(-1;3)$; $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$.

Ответ: 3.

16. $\begin{cases}2x+y=2,\\ x^2+16xy+4y^2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2-2x,\\ x^2+16xy+4y^2=1;\end{cases}$

$\begin{cases}y=2-2x,\\ x^2+16x(2-2x)+4(2-2x)^2=1.\end{cases}$

Решим второе уравнение системы:

$x^2+16x(2-2x)+4(2-2x)^2=1;$ $x^2+32x-32x^2+4\left(4-8x+4x^2\right)=1;$

$x^2+32x-32x^2+16-32x+16x^2=1;$ $-15x^2=-15;$ $x^2=1;$ $x=\pm1.$

При $x=1$ $y=2-2\cdot1=0$; при $x=-1$ $y=2-2\cdot(-1)=4$.

Таким образом, исходная система имеет два решения: $(1;\ 0)$; $(-1;\ 4)$, т. е. $n=2$.

Наибольшая из возможных сумм $S=x_0+y_0=-1+4=3$.

Тогда $n\cdot S=2\cdot3=6$.

Ответ: 6.

17. $\begin{cases}4x+\dfrac{15-x}{4}=2y+5+\dfrac{7x+11}{16},\\ 3y-\dfrac{2x+y}{5}=2x+\dfrac{2y+4}{3}.\end{cases}$

Умножим обе части первого уравнения системы на 16, а второго — на 15:

$\begin{cases}64x+4(15-x)=32y+80+7x+11,\\ 45y-3(2x+y)=30x+5(2y+4);\end{cases}$

$\begin{cases}64x+60-4x=32y+80+7x+11,\\ 45y-6x-3y=30x+10y+20;\end{cases}$

$\begin{cases}64x-4x-7x-32y=80+11-60,\\ -6x-30x+45y-10y-3y=20;\end{cases}$ $\begin{cases}53x-32y=31,\\ -36x+32y=20.\end{cases}$

Сложим первое и второе уравнения системы и получим:
$\begin{cases}17x = 51,\\ 53x - 32y = 31;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 3,\\ 53x - 32y = 31;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 3,\\ 53\cdot 3 - 32y = 31;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 3,\\ 159 - 32y = 31;\end{cases}$
$\begin{cases}x = 3,\\ 32y = 128;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 3,\\ y = 4.\end{cases}$

Найдем значение выражения $x_0 \cdot y_0 = 3\cdot 4 = 12.$

Ответ: 12.

18. $\begin{cases}\dfrac{y-2}{x-1} = 2,\\ y - 2x = x^2 - 1;\end{cases}$ $\begin{cases}y - 2 = 2(x-1),\\ x \neq 1,\\ y - 2x = x^2 - 1;\end{cases}$ $\begin{cases}y - 2 = 2x - 2,\\ x \neq 1,\\ y - 2x = x^2 - 1;\end{cases}$ $\begin{cases}y = 2x,\\ x \neq 1,\\ y - 2x = x^2 - 1;\end{cases}$

$\begin{cases}y = 2x,\\ x \neq 1,\\ 2x - 2x = x^2 - 1;\end{cases}$ $\begin{cases}y = 2x,\\ x \neq 1,\\ x^2 - 1 = 0;\end{cases}$ $\begin{cases}y = 2x,\\ x \neq 1,\\ x^2 = 1;\end{cases}$ $\begin{cases}y = 2x,\\ x \neq 1,\\ x = \pm 1.\end{cases}$

С учетом условия $x \neq 1$ $\begin{cases}y = 2x,\\ x = -1;\end{cases}$ $\begin{cases}y = -2,\\ x = -1.\end{cases}$

Найдем значение выражения $x_0 + y_0 = -1 + (-2) = -3.$

Ответ: –3.

19. Пусть $x + y = t$, тогда первое уравнение системы
$\begin{cases}(x+y)^2 - 2(x+y) = 15,\\ x + xy + y = 11\end{cases}$ запишем в виде $t^2 - 2t - 15 = 0;$ $\left[\begin{array}{l}t = 5,\\ t = -3,\end{array}\right.$
т. е. $\left[\begin{array}{l}x + y = 5,\\ x + y = -3.\end{array}\right.$

При $x + y = 5$ получим систему $\begin{cases}x + y = 5,\\ x + xy + y = 11;\end{cases}$ $\begin{cases}x + y = 5,\\ xy = 6;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 2,\\ y = 3;\end{cases}\\ \begin{cases}x = 3,\\ y = 2.\end{cases}\end{array}\right.$

При $x + y = -3$ имеем $\begin{cases}x + y = -3,\\ x + xy + y = 11;\end{cases}$ $\begin{cases}x + y = -3,\\ xy = 14;\end{cases}$ $\begin{cases}x = -y - 3,\\ (-y-3)y = 14;\end{cases}$
$\begin{cases}x = -y - 3,\\ y^2 + 3y + 14 = 0.\end{cases}$

Так как уравнение $y^2+3y+14=0$ не имеет корней $(D<0)$, то система не имеет решений.

Таким образом, решениями исходной системы являются пары чисел $(2;3)$; $(3;2)$. Найдем значение искомого выражения: $\left(x_0^2+y_0^2\right)\cdot n=$ $=\left(2^2+3^2\right)\cdot 2=13\cdot 2=26.$

Ответ: 26.

20. Умножим первое уравнение системы $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\x^2+2xy-2y^2=6\end{cases}$ на -2 и получим $\begin{cases}-4x^2+6xy-2y^2=-6,\\x^2+2xy-2y^2=6.\end{cases}$ Сложим первое и второе уравнения системы, тогда $\begin{cases}-3x^2+8xy-4y^2=0,\\x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2-8xy+4y^2=0,\\x^2+2xy-2y^2=6.\end{cases}$

Рассмотрим уравнение $3x^2-8xy+4y^2=0$ как квадратное относительно x. $D=(8y)^2-4\cdot 3\cdot 4y^2=64y^2-48y^2=16y^2$.

$x_1=\dfrac{8y-4y}{6}=\dfrac{2y}{3}$; $x_2=\dfrac{8y+4y}{6}=2y$.

При $x=\dfrac{2y}{3}$ получим $\begin{cases}x=\dfrac{2y}{3},\\x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{2y}{3},\\\left(\dfrac{2y}{3}\right)^2+2\cdot\dfrac{2y}{3}\cdot y-2y^2=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{2y}{3},\\y^2=-27.\end{cases}$

Система не имеет решений.

При $x=2y$ имеем $\begin{cases}x=2y,\\x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y,\\(2y)^2+2\cdot 2y\cdot y-2y^2=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y,\\y^2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2y,\\y=\pm 1.\end{cases}$

Решениями исходной системы являются пары чисел $(2;1)$; $(-2;-1)$. Наименьшая из сумм x_0+y_0 равна -3. Тогда $S\cdot n=-3\cdot 2=-6$.

Ответ: -6.

21. $\begin{cases}xy=6,\\(x-1)^2+(y+1)^2=49;\end{cases}$ $\begin{cases}y=\dfrac{6}{x},\\(x-1)^2+(y+1)^2=49.\end{cases}$

Изобразим графическую иллюстрацию данной системы (рис. 1). График функции $y=\frac{6}{x}$ — гипербола, а графиком уравнения $(x-1)^2+$ $+(y+1)^2=49$ является окружность с центром в точке $(1;\ -1)$ и радиусом 7.

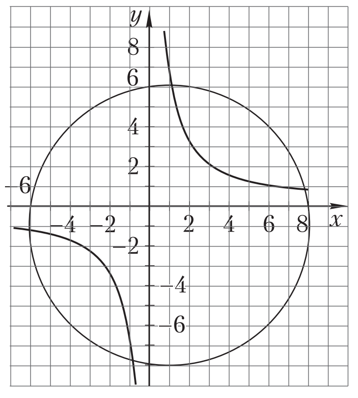


Рис. 1

Очевидно, что графики уравнений имеют четыре общие точки, значит, соответствующая система имеет четыре решения.

Ответ: 4.

22. $\begin{cases}\dfrac{5}{4x+3y}+\dfrac{1}{4x-3y}=2,\\ \dfrac{15}{4x+3y}-\dfrac{11}{4x-3y}=-8.\end{cases}$

Запишем систему в виде

$$\begin{cases}5\cdot\dfrac{1}{4x+3y}+\dfrac{1}{4x-3y}=2,\\ 15\cdot\dfrac{1}{4x+3y}-11\cdot\dfrac{1}{4x-3y}=-8\end{cases}$$

и обозначим $\dfrac{1}{4x+3y}=a;\ \dfrac{1}{4x-3y}=b.$

Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}5\cdot a+b=2,\\15\cdot a-11\cdot b=-8;\end{cases}\quad \begin{cases}-15\cdot a-3b=-6,\\15\cdot a-11\cdot b=-8;\end{cases}\quad \begin{cases}-14\cdot b=-14,\\15\cdot a-11\cdot b=-8;\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=1,\\15\cdot a-11\cdot 1=-8;\end{cases}\quad \begin{cases}b=1,\\a=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases}\dfrac{1}{4x-3y}=1,\\\dfrac{1}{4x+3y}=\dfrac{1}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}4x-3y=1,\\4x+3y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}8x=6,\\4x+3y=5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\4\cdot\dfrac{3}{4}+3y=5;\end{cases}$

$$\begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\3+3y=5;\end{cases}\quad \begin{cases}x=\dfrac{3}{4},\\y=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Тогда $14\cdot x_0\cdot y_0=14\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}=7.$

Ответ: 7.

23. $\begin{cases}2x+y=7,\\|y-x|=2.\end{cases}$

Тогда

$\begin{cases}2x+y=7,\\y-x=2;\end{cases}$ или $\begin{cases}2x+y=7,\\y-x=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=7,\\x-y=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+y=7,\\x-y=2;\end{cases}$

$$\begin{cases}3x=5,\\x-y=-2;\end{cases}\quad \begin{cases}3x=9,\\x-y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\dfrac{2}{3},\\y=3\dfrac{2}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$$

Наименьшее значение суммы $x_0+y_0=3+1=4.$

Ответ: 4.

24. Система $\begin{cases}2x+ay=a+3,\\(a+1)x+6y=a+9\end{cases}$ не имеет решений, если $\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{a}{6}\neq$ $\neq\dfrac{a+3}{a+9}.$

Решим уравнение $\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{a}{6}$;

$a(a+1)=12;\ a^2+a-12=0;\ a_1=-4;\ a_2=3.$

Проверим выполнение условия $\dfrac{a}{6}\neq\dfrac{a+3}{a+9}$ при найденных значениях параметра a.

При $a_1=-4$ $\dfrac{-4}{6}\neq\dfrac{-4+3}{-4+9}$; $-\dfrac{2}{3}\neq-\dfrac{1}{5}$ — верно, при $a_2=3\ \dfrac{3}{6}\neq\dfrac{3+3}{3+9}$; $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{1}{2}$ — неверно.

Таким образом, при $a=-4$ система не имеет решений.

Ответ: -4.

25. $\begin{cases} x^2(y+2)^2+x^4=1, \\ 3x^2+4xy+y^2=-1. \end{cases}$

Запишем систему в виде

$\begin{cases} x^2(y+2)^2=1-x^4, \\ 4x^2+4xy+y^2-x^2=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2(y+2)^2=1-x^4, \\ (2x+y)^2=x^2-1. \end{cases}$

Заметим, что система имеет решения, если $1-x^4\geq0$ и $x^2-1\geq0$, что возможно, только если $x=\pm1$. Тогда

$\begin{cases} x=1, \\ (y+2)^2=0, \\ (2+y)^2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-1, \\ (y+2)^2=0, \\ (-2+y)^2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ y=2 \end{cases}$ — система не имеет решений.

Таким образом, исходная система имеет единственное решение: $(1;\ -2)$.

Ответ: 1.

Задание 16
Решения

1. Арифметическая прогрессия — числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называемым разностью прогрессии.

Последовательность 2: 7; 5; 3; 1; −1; ... — арифметическая прогрессия, $a_1 = 7$; $d = -2$;

Последовательность 4: 6; 12; 18; 24; 30; ... — арифметическая прогрессия, $a_1 = 6$; $d = 6$.

Ответ: 4.

2. Геометрическая прогрессия — числовая последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, называемое знаменателем прогрессии.

1) n-й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ — верно;

2) сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{2}n$ — неверно. Сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$; $q \neq 1$;

3) число −4 является знаменателем арифметической прогрессии 32; 28; 24; 20; ... — неверно. Число −4 называется разностью арифметической прогрессии;

4) прогрессия 7; 7; 7; 7; ... является и арифметической (с разностью, равной нулю) и геометрической (со знаменателем, равным единице) — верно;

5) последовательность $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... не является геометрической прогрессией — верно.

Значит, верными являются утверждения 1, 4, 5.

Ответ: 5.

3. Воспользуемся формулой n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Последовательность (a_n): 2; 5; 8; 11; ... — арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 2$ и $d = 3$.

Запишем формулу n-го члена: $a_n = 2 + 3(n-1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$.

Ответ: 3.

4. Воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Найдем восьмой член геометрической прогрессии (b_n): $-96; -48; \dots$ — в которой $b_1 = -96$ и $q = \frac{1}{2}$. Имеем: $b_8 = -96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = -96 \cdot \frac{1}{128} = -\frac{3}{4}$.

Ответ: 2.

5. По определению разности арифметической прогрессии $d = 25 - x$, $d = x - 3$. Решим уравнение $25 - x = x - 3$; $2x = 28$; $x = 14$.

Ответ: 3.

6. По определению геометрической прогрессии

$b_{48} = b_{47} \cdot q = (b_{46} \cdot q) \cdot q = b_{46} \cdot q^2$.

Тогда $q^2 = \frac{b_{48}}{b_{46}} = \frac{-4}{-1} = 4$.

$b_{50} = b_{49} \cdot q = (b_{48} \cdot q) \cdot q = b_{48} \cdot q^2 = -4 \cdot 4 = -16$.

Ответ: 4.

7. Воспользуемся формулой $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Так как $a_1 = -2$; $d = 0{,}4$, то $S_6 = \frac{2 \cdot (-2) + (6-1) \cdot 0{,}4}{2} \cdot 6 = \frac{-4+2}{2} \cdot 6 =$ $= -1 \cdot 6 = -6$.

Ответ: 5.

8. Воспользуемся формулой $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Так как $S_n = 430$; $a_1 = -7$; $d = 3$, составим уравнение:

$430 = \frac{2 \cdot (-7) + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$; $430 = \frac{-14 + 3n - 3}{2} \cdot n$; $430 = \frac{-17 + 3n}{2} \cdot n$;

$860 = (3n - 17) \cdot n$; $3n^2 - 17n - 860 = 0$;

$D = 17^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-860) = 289 + 10\,320 = 10\,609 = 103^2$; $n_{1,2} = \frac{17 \pm 103}{2 \cdot 3}$;

$n_1 = 20$; $n_2 = -\frac{86}{6}$.

Так как n — натуральное число, то $n = 20$.

Ответ: 1.

9. По формуле n-го члена геометрической прогрессии $\left(b_n = b_1 q^{n-1}\right)$ имеем $\begin{cases} b_8 = b_1 q^{8-1}, \\ b_{12} = b_1 q^{12-1}; \end{cases}$ $\begin{cases} 12 = b_1 q^7, \\ \frac{1}{3} = b_1 q^{11}. \end{cases}$ Разделив второе уравнение на первое, получим: $q^4 = \frac{1}{36}$; $q = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$.

По условию $q > 0$, тогда $q = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: 1.

10. Формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

$a_6 = 64$; $d = -0{,}4$; $64 = a_1 - 0{,}4 \cdot 5$; $a_1 = 66$.

$a_n = 66 - 0{,}4(n-1) < 0$; $66 - 0{,}4n + 0{,}4 < 0$; $-0{,}4n < -66{,}4$; $n > 166$.

Значит, первый отрицательный член этой прогрессии находится на 167-м месте.

$a_{167} = 66 - 0{,}4 \cdot 166 = -0{,}4$.

Ответ: 2.

11. Если -1; x; y; $-\frac{8}{27}$ — первые четыре члена геометрической прогрессии (a_n), то $a_1 = -1$; $a_2 = x$; $a_3 = y$; $a_4 = -\frac{8}{27}$. Найдем знаменатель прогрессии, используя формулу n-го члена:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $-\frac{8}{27} = -1 \cdot q^{4-1}$; $q^3 = \frac{8}{27}$; $q = \frac{2}{3}$.

По формуле $S_6 = \frac{a_1\left(q^6 - 1\right)}{q-1}$ найдем сумму первых шести членов:

$$S_6 = \frac{-1\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6 - 1\right)}{\frac{2}{3} - 1} = 3\left(\frac{2^6}{3^6} - 1\right) = \frac{64}{3^5} - 3 = \frac{64}{243} - 2\frac{243}{243} = -2\frac{179}{243}.$$

Ответ: 2.

12. Так как $a_1 = -5{,}6$; $a_2 = -4{,}8$, то

$d = a_2 - a_1 = -4{,}8 - (-5{,}6) = -4{,}8 + 5{,}6 = 0{,}8$.

Кроме того, $a_n = 16$. Воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$, тогда

$16 = -5{,}6 + (n-1)\cdot 0{,}8;\ 16 = -5{,}6 + 0{,}8n - 0{,}8;\ 16 = 0{,}8n - 6{,}4;$
$22{,}4 = 0{,}8n;\ n = 28.$

Ответ: 5.

13. Найдем первый член и знаменатель прогрессии: $b_1 = 3\cdot 2^1 = 6;$ $b_2 = 3\cdot 2^2 = 12;\ q = \dfrac{b_2}{b_1} = 2.$

По формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии найдем сумму первых пяти членов данной прогрессии:

$$S_5 = \frac{b_1\left(q^5 - 1\right)}{q-1};\ S_5 = \frac{6\cdot\left(2^5 - 1\right)}{2-1} = 6\cdot 31 = 186.$$

Ответ: 1.

14. Найдем знаменатель прогрессии: $b_1 = 0{,}1;\ b_2 = 0{,}3;\ q = \dfrac{b_2}{b_1} = 3.$

Известно, что $b_n = 218{,}7$. По формуле n-го члена геометрической прогрессии получим: $b_n = b_1\cdot q^{n-1}; 218{,}7 = 0{,}1\cdot 3^{n-1}; 3^{n-1} = 2187; 3^{n-1} = 3^7;$ $n - 1 = 7;\ n = 8.$

Ответ: 2.

15. $b_{43}\cdot b_{36} = b_1\cdot q^{42}\cdot b_1\cdot q^{35} = b_1^2\cdot q^{77}$, т. е. $b_1^2\cdot q^{77} = 57.$

Тогда $b_{33}\cdot b_{46} = b_1\cdot q^{32}\cdot b_1\cdot q^{45} = b_1^2\cdot q^{77} = 57.$

Ответ: 5.

16. Воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{a_1\cdot\left(q^n - 1\right)}{q-1}$. Так как $a_2 = -1;\ a_3 = -\dfrac{1}{2}$, то $q = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-1} = \dfrac{1}{2}$. Тогда $a_1 = \dfrac{a_2}{q} = \dfrac{-1}{\frac{1}{2}} = -2.$

Найдем $$S_5 = \frac{-2\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-2\cdot\left(\frac{1}{32} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{-2\cdot\frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{-62}{32} : \frac{1}{2} = \frac{-62}{16}.$$

Тогда $16\cdot S_5 = 16\cdot\dfrac{-62}{16} = -62.$

Ответ: –62.

17. Из равенств $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8;$ $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ имеем $a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 = 8;$ $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7,$ из первого равенства $a_1^3 q^3 = 8;$ $a_1 q = 2.$

$$\begin{cases} a_1 q = 2, \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7; \end{cases} \begin{cases} a_1 q = 2, \\ a_1 + 2 + 2q = 7; \end{cases} \begin{cases} a_1 q = 2, \\ a_1 = 5 - 2q; \end{cases} \begin{cases} q(5-2q) = 2, \\ a_1 = 5 - 2q; \end{cases}$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0; \quad q_1 = \frac{1}{2}; \; q_2 = 2.$$

Так как прогрессия — возрастающая (по условию), то $q = 2.$ Тогда $a_1 = \frac{2}{q} = 1.$

Ответ: 1.

18. 1) Воспользуемся формулой $a_n = a_1 + (n-1)d,$ тогда $a_5 = a_1 + 4d;$ $a_8 = a_1 + 7d$ (по условию $a_5 = 11;$ $a_8 = 17$).
Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 11, \\ a_1 + 7d = 17; \end{cases} \begin{cases} 3d = 6, \\ a_1 + 7d = 17; \end{cases} \begin{cases} d = 2, \\ a_1 + 7d = 17; \end{cases} \begin{cases} d = 2, \\ a_1 + 7 \cdot 2 = 17; \end{cases} \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

2) С помощью формулы $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ найдем сумму первых десяти членов данной прогрессии:

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 2}{2} \cdot 10 = \frac{6+18}{2} \cdot 10 = 120.$$

Ответ: 120.

19. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5600.$

Так как $a_2 = a_1 + d;$ $a_3 = a_1 + 2d;$ $a_4 = a_1 + 3d,$ то уравнение принимает вид:

$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 5600,$ т. е. $4a_1 + 6d = 5600;$ $2a_1 + 3d = 2800$ или $a_1 + (a_1 + 3d) = 2800;$ $a_1 + a_4 = 2800.$

По условию задачи $a_4 = 3a_1.$ Получим: $a_1 + 3a_1 = 2800;$ $4a_1 = 2800;$ $a_1 = 700.$ Значит, $a_4 = 2100.$ Самая дорогая марка стоит 2100 (руб.).

Ответ: 2100.

20. $b_1^2 + b_9^2 = (b_1 + b_9)^2 - 2 \cdot b_1 \cdot b_9, 17 = 5^2 - 2 \cdot b_1 \cdot b_9, b_1 \cdot b_9 = 4.$

Так как $b_9 = b_1 \cdot q^8,$ то $b_1^2 \cdot q^8 = 4.$ Тогда $b_4 \cdot b_6 = (b_1 \cdot q^3) \cdot (b_1 \cdot q^5) = b_1^2 \cdot q^8 = 4.$

Ответ: 4.

21. Обозначим искомую сумму членов с 6-го по 10-й включительно — K, тогда

$$K=(a_1+a_2+\ldots+a_{10})-(a_1+a_2+\ldots+a_5)=S_{10}-S_5=$$

$$=\frac{a_1\left(q^{10}-1\right)}{q-1}-\frac{a_1\left(q^5-1\right)}{q-1}=\frac{a_1\left(\left(q^{10}-1\right)-\left(q^5-1\right)\right)}{q-1}=$$

$$=\frac{a_1\left(\left(q^5-1\right)\left(q^5+1\right)-\left(q^5-1\right)\right)}{q-1}=\frac{a_1\left(q^5-1\right)\left(q^5+1-1\right)}{q-1}=$$

$$=\frac{0{,}5\left((-2)^5-1\right)(-2)^5}{-2-1}=\frac{-33\cdot(-32)}{2\cdot(-3)}=-176.$$

Ответ: -176.

22. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия, тогда $b_1+b_2+b_3=78$ или $b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2=78$.

Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, тогда $a_1=b_1$; $a_3=b_2$; $a_9=b_3$ или $a_1=b_1$; $a_3=b_1\cdot q$; $a_9=b_1\cdot q^2$.

Выразим разность прогрессии через первый и третий, первый и девятый ее члены:

$$d=\frac{a_3-a_1}{2};\quad d=\frac{a_9-a_1}{8}.$$

Тогда $\frac{a_3-a_1}{2}=\frac{a_9-a_1}{8}$ или $\frac{b_1\cdot q-b_1}{2}=\frac{b_1\cdot q^2-b_1}{8}$;

$4\left(b_1\cdot q-b_1\right)=b_1\cdot q^2-b_1$; $4(q-1)=q^2-1$;

$4(q-1)=(q-1)(q+1)$; $(q-1)(q+1)-4(q-1)=0$; $(q-1)(q-3)=0$, т. е. $q=1$ или $q=3$. Так как геометрическая прогрессия является возрастающей (по условию), то $q=3$.

Найдем первый член геометрической прогрессии (b_n):
$b_1+b_1\cdot 3+b_1\cdot 9=78$; $13b_1=78$; $b_1=6$.

Тогда большее из чисел равно $b_1\cdot q^2=6\cdot 3^2=54$.

Ответ: 54.

23. Используя формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, запишем:

$$\frac{S_{25}}{S_{10}}=\frac{\frac{2a_1+d(25-1)}{2}\cdot 25}{\frac{2a_1+d(10-1)}{2}\cdot 10}=\frac{25}{4};\quad \frac{\left(2a_1+24d\right)\cdot 25}{\left(2a_1+9d\right)\cdot 10}=\frac{25}{4};$$

$2(2a_1+24d)=5(2a_1+9d);\quad 4a_1+48d=10a_1+45d;\quad d=2a_1.$

Тогда $\dfrac{19\cdot a_{25}}{a_{10}}=\dfrac{19(a_1+24d)}{a_1+9d}=\dfrac{19(a_1+24\cdot 2a_1)}{a_1+9\cdot 2a_1}=\dfrac{19\cdot 49}{19}=49.$

Ответ: 49.

24. Пусть $b_1;\ b_1q;\ b_1q^2$ — три исходных числа, образующие геометрическую прогрессию.

Тогда $b_1;\ b_1q+2;\ b_1q^2$ — арифметическая прогрессия, а $b_1;\ b_1q+2;\ b_1q^2+9$ — геометрическая прогрессия.

Воспользуемся свойствами арифметической и геометрической прогрессий и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1q+2=\dfrac{b_1+b_1q^2}{2}, \\ (b_1q+2)^2=b_1\cdot(b_1q^2+9); \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ b_1^2q^2+4b_1q+4=b_1^2q^2+9b_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ 4b_1q+4=9b_1; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q^2-(4{,}5b_1-2)-4=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-4{,}5b_1-2=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1q^2-3{,}5b_1-2=0, \\ 2b_1q-4{,}5b_1+2=0. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения системы и получим:
$b_1q^2+2b_1q-8b_1=0;\ b_1(q^2+2q-8)=0.$

Так как число 0 не может являться членом геометрической прогрессии, то $q^2+2q-8=0;\ \left[\begin{array}{l} q=-4, \\ q=2. \end{array}\right.$

Поскольку геометрическая прогрессия является возрастающей, то $q=2.$

Из равенства $2b_1q-4{,}5b_1+2=0$ найдем искомое число:
$4b_1-4{,}5b_1+2=0;\ -0{,}5b_1=-2;\ b_1=4.$

Ответ: 4.

25. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия, а (b_n) — геометрическая прогрессия.

Пусть $a_1=a;\ a_3=a+d;\ a_5=a+2d$, где d — удвоенная разность исходной арифметической прогрессии.

Пусть $b_1 = b$; $b_3 = b \cdot q$; $b_5 = b \cdot q^2$, где q — квадрат знаменателя исходной арифметической прогрессии. По условию задачи $b_1 = -3 - a_1$; $b_3 = 1 - a_3$; $b_5 = 5 - a_5$. Тогда по свойству геометрической прогрессии $(1 - a_3)^2 = (-3 - a_1)(5 - a_5)$, т. е. $\left(1 - a - d\right)^2 = (-3 - a)\left(5 - a - 2d\right)$; $d^2 - 8d + 16 = 0$; $d = 4$. Тогда искомая разность исходной арифметической прогрессии равна 2.

Ответ: 2.

Задание 17

Решения

1. Неверным является утверждение 5, так как если z — некоторое натуральное число, то значение выражения $5z$ (а не 5^z) соответствует числу, в пять раз большему, чем z.

Ответ: 5.

2. С помощью выражения $2\frac{2}{3}:1{,}2\cdot 100\,\%$ можно ответить на вопрос, сколько процентов число $2\frac{2}{3}$ составляет от числа 1,2.

Ответ: 1.

3. Так как отношение числа мужчин к числу женщин составляет 3 : 4, то количество туристов в группе должно быть кратно 7 $(3+4=7)$. Из предложенных чисел только число 36 не делится на 7.

Ответ: 4.

4. Раствор состоит из соли и воды, значит, его масса равна 465 г + 15 г = = 480 г. Чтобы узнать, какую часть составляет соль от общей массы, разделим 15 г на 480 г: $\frac{15}{480}=\frac{1}{32}$. Теперь переведем эту дробь в проценты, умножив на 100 %: $\frac{1}{32}\cdot 100\,\%=\frac{25}{8}\,\%=3{,}125\,\%$.

Ответ: 3.

5. Составим пропорцию:

7,5 кг — 1,5 нити
17,5 кг — x,

$$x=\frac{1{,}5\cdot 17{,}5}{7{,}5}=\frac{17{,}5}{5}=3{,}5\text{ нити}.$$

Ответ: 1.

6. Примем объем бассейна за 1.

1) $1:18=\frac{1}{18}$ часть — такой объем бассейна за 1 мин одновременной работы опорожнят две трубы;

2) $1:30=\frac{1}{30}$ часть — такой объем бассейна опорожняет за 1 мин первая труба;

3) $\frac{1}{18}-\frac{1}{30}=\frac{1}{45}$ часть — такой объем бассейна опорожняет за 1 мин вторая труба;

4) $1:\frac{1}{45}=45$ мин — за столько времени вторая труба опорожнит бассейн.

Ответ: 5.

7. За 1 ч первый пешеход преодолеет $\frac{1}{5}$ часть пути AB, а второй — $\frac{1}{7}$ часть AB. За 2 ч первый пройдет $\frac{2}{5}$, а второй — $\frac{2}{7}$ всего пути AB, и им останется пройти до встречи:

$$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right)=1-\frac{2\cdot7+2\cdot5}{35}=1-\frac{24}{35}=\frac{35}{35}-\frac{24}{35}=\frac{11}{35}\text{ часть.}$$

Ответ: 4.

8. $\frac{312-300}{300}\cdot100\,\%=\frac{12}{300}\cdot100\,\%=\frac{1}{25}\cdot100\,\%=0{,}04\cdot100\,\%=4\,\%$.

Ответ: 1.

9. Пусть x деталей делал за час первый рабочий, а y деталей за час — второй. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}3x+4y=44,\\x+y=13;\end{cases}\quad\begin{cases}3x+4y=44,\\-4x-4y=-52;\end{cases}\quad\begin{cases}-x=-8,\\x+y=13;\end{cases}\quad\begin{cases}x=8,\\y=5.\end{cases}$$

Так как первый рабочий работал 3 ч, то он сделал $3\cdot8=24$ детали.

Ответ: 2.

10.

	Скорость (км/ч)	Расстояние (км)	Время (ч)
Велосипедист	x	120	$\frac{120}{x}$
Мотоциклист	$x+10$	120	$\frac{120}{x+10}$

Известно, что мотоциклист находился в пути на 6 ч меньше, чем велосипедист. Составим уравнение:

$$\frac{120}{x}-\frac{120}{x+10}=6;\quad\frac{20}{x}-\frac{20}{x+10}=1;\quad\frac{20(x+10)-20x}{x(x+10)}=1;\quad\frac{200}{x(x+10)}=1;$$

$x^2+10x-200=0$ при $x\neq0$; $x\neq-10$.

Решив уравнение, найдем, что $x_1 = -20$; $x_2 = 10$. По смыслу задачи скорость велосипедиста равна 10 км/ч.

Ответ: 3.

11. 25 мин $= \frac{25}{60}$ ч $= \frac{5}{12}$ ч. Автобус, двигаясь со скоростью 50 км/ч, за это время проедет расстояние $s = \frac{5}{12} \cdot 50 = \frac{250}{12}$ км.

Скорость грузовика равна $50 + 0{,}2 \cdot 50 = 60$ км/ч.

Скорость сближения — это разность скоростей грузовика и автобуса: $60 - 50 = 10$ км/ч.

Найдем время, через которое грузовик догонит автобус:

$t = \frac{250}{12} : 10 = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$ ч; $2\frac{1}{12}$ ч $= 2\frac{1}{12} \cdot 60$ мин $= 2 \cdot 60 + 5$ мин $=$ $= 125$ мин.

Ответ: 3.

12.

	Скорость (км/ч)	Расстояние (км)	Время (ч)
По плану	x	4	$\frac{4}{x}$
После остановки	$x+1$	4	$\frac{4}{x+1}$

По условию задачи привал длился 20 мин $= \frac{1}{3}$ ч. Составим уравнение:

$$\frac{4}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{1}{3}; \quad \frac{4(x+1) - 4x}{x(x+1)} = \frac{1}{3}; \quad \frac{4}{x(x+1)} = \frac{1}{3};$$

$x(x+1) - 12 = 0$; $x^2 + x - 12 = 0$, при $x \neq 0$; $x \neq -1$.

Решив уравнение, получим $x_1 = -4$; $x_2 = 3$. По смыслу задачи первоначальная скорость путника 3 км/ч.

Ответ: 1.

13. 1) $0{,}4 \cdot 15 = 6$ (кг) — меди содержится в сплаве;

2) $6 : 0{,}3 = 20$ (кг) — должна быть масса нового сплава;

3) $20 - 15 = 5$ (кг) — олова нужно добавить.

Ответ: 2.

14. Пусть x км занимает ровная дорога. Составим таблицу.

	Расстояние (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Ровная дорога	x	80	$\frac{x}{80}$
Бездорожье	$160-x$	20	$\frac{160-x}{20}$

Тогда весь путь автомобиль преодолел за $\left(\frac{x}{80}+\frac{160-x}{20}\right)$ч.

Так как средняя скорость составляла 40 км/ч, то
$160:\left(\frac{x}{80}+\frac{160-x}{20}\right)=40;\ 160:\frac{x+4(160-x)}{80}=40;\ 160:\frac{640-3x}{80}=40;$
$\frac{640-3x}{80}=160:40;\ \frac{640-3x}{80}=4;\ 640-3x=320;\ 3x=320;\ x=\frac{320}{3};$
$x=106\frac{2}{3}.$

Ответ: 3.

15. Составим таблицу.

	Время, если бы каждая линия работала отдельно (ч)	Производительность	Время совместной работы (ч)	Объем выполненной работы
Первая линия	x	$\frac{1}{x}$	3	$\frac{3}{x}$
Вторая линия	y	$\frac{1}{y}$	4	$\frac{4}{y}$

По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{1}{2},\\ x-y=6;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{3}{y+6}+\frac{4}{y}=\frac{1}{2},\\ x=y+6.\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы и получим $\frac{3}{y+6}+\frac{4}{y}-\frac{1}{2}=0;$

$\frac{6y+8(y+6)-y(y+6)}{2y(y+6)}=0;\ \frac{y^2-8y-48}{2y(y+6)}=0;\ \left[\begin{array}{l}y=12,\\ y=-4.\end{array}\right.$

Таким образом, вторая линия выполнит всю работу за 12 ч, а первая — за 18 ч.

Если будут работать обе линии одновременно, то за час они выполнят $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{5}{36}$ всей работы. То есть на выполнение всей партии продукции им понадобится $\left(\frac{36}{5}\right)$ч $= 7$ ч 12 мин.

Ответ: 1.

16. Так как на расстоянии 30 м первое колесо обернулось 20 раз, то длина окружности первого колеса равна $30:20=1{,}5$ (м).

Тогда длина окружности второго колеса равна $1{,}5+0{,}5=2$ (м).

На расстоянии 30 м второе колесо сделает $30:2=15$ (оборотов).

Ответ: 15.

17. Пусть x — искомое число. Так как это число при делении на 7 дает остаток 2, то $x=7n+2$. Поскольку при делении на 15 это число дает остаток 6, то $x=15m+6$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}7n+2=15m+6,\\ n:m=2{,}2:1;\end{cases} \begin{cases}7n=15m+4,\\ n=2{,}2m;\end{cases} \begin{cases}7\cdot 2{,}2m=15m+4,\\ n=2{,}2m;\end{cases} \begin{cases}15{,}4m=15m+4,\\ n=2{,}2m;\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=10,\\ n=2{,}2m.\end{cases}$$

Тогда искомое число $x=15\cdot 10+6=156$.

Ответ: 156.

18. Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц двузначного числа. Тогда $10x+y$ — само число, $x+y$ — сумма цифр числа, $x\cdot y$ — произведение цифр числа, x^2 — квадрат числа десятков. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}10x+y=4(x+y),\\ xy+x^2=10x+y;\end{cases} \begin{cases}10x+y=4x+4y,\\ xy+x^2=10x+y;\end{cases} \begin{cases}y=2x,\\ xy+x^2=10x+y;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=2x,\\ x\cdot 2x+x^2=10x+2x.\end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$2x^2+x^2=12x;\ 3x^2-12x=0;\ x(x-4)=0;\ x_1=0;\quad x_2=4.$$

Так как число десятков не может быть равным нулю, то $x=4$, тогда $y=2x=8$. Искомое число — 48.

Ответ: 48.

19. 1) Пусть x руб. — стоимость блокнота, тогда $0{,}4x$ руб. — стоимость тетради;

2) выясним, на сколько процентов блокнот дороже тетради:

$$\frac{x-0{,}4x}{0{,}4x}\cdot 100\,\% = \frac{0{,}6x}{0{,}4x}\cdot 100\,\% = \frac{3}{2}\cdot 100\,\% = 150\,\%.$$

Ответ: 150.

20. Пусть в каждом ряду было x мест, тогда рядов получим $\frac{260}{x}$. После реконструкции количество мест в ряду $x+3$, а рядов $\frac{260}{x+3}$. При этом известно, что рядов стало на 6 меньше, чем было. Составим уравнение:

$$\frac{260}{x}-\frac{260}{x+3}=6;\ \ \frac{130}{x}-\frac{130}{x+3}-3=0;\ \ \frac{130(x+3)-130x-3x(x+3)}{x(x+3)}=0;$$

$$3x^2+9x-390=0;\ x^2+3x-130=0;\ x_1=-13;\ \ x_2=10.$$

Если $x=10$ (мест), то количество рядов $\frac{260}{x}=260:10=26$.

Ответ: 26.

21. Пусть скорость автобуса в экспрессном режиме равна x км/ч, тогда первоначальная скорость автобуса $(x-8)$ км/ч. На весь маршрут (т. е. на 16 км) автобус в экспрессном режиме затратит $\frac{16}{x}$ ч, а не в часы пик на этот же путь ему потребуется $\frac{16}{x-8}$ ч.

$$4\text{ мин} = \frac{4}{60}\text{ ч} = \frac{1}{15}\text{ ч}.$$

По условию задачи составим уравнение:

$$\frac{16}{x-8}-\frac{16}{x}=\frac{1}{15};\ \ \frac{16\cdot 15x-16\cdot 15(x-8)-x(x-8)}{15x(x-8)}=0;\ \ x^2-8x-1920=0;$$

$$\frac{D}{4}=4^2+1920=1936=44^2;\ x_1=4+44=48;\ \ x_2=4-44<0.$$

Итак, искомая скорость равна 48 км/ч.

Ответ: 48.

22. Проследим, что происходит с трехзначным числом, если его последнюю цифру 2 перенести в начало записи. Например, число 562 станет числом 256, т. е. $\frac{562-2}{10}+2\cdot 100=256$. Пусть первоначальное число — x, тогда число, полученное после переноса цифры 2 в начало записи, $\frac{x-2}{10}+200$. По условию последнее число больше первого на 18, получим уравнение:

$$\frac{x-2}{10}+200-x=18;\ \ x-2+2000-10x=180;\ 9x=1818;\ x=202.$$

Ответ: 202.

23. Пусть x кг — масса чистой меди, добавленной в сплав.

	Масса меди (кг)	Масса цинка (кг)
Первый сплав	$\frac{4}{7}\cdot 140=80$	$\frac{3}{7}\cdot 140=60$
Второй сплав	$\frac{2}{5}\cdot 150=60$	$\frac{3}{5}\cdot 150=90$
Новый сплав	$80+60+x=140+x$	$60+90=150$

Так как меди в новом сплаве на 20 кг больше, чем цинка, то

$$(140+x)-150=20;\ \ x=30.$$

Тогда масса нового сплава:

$$140+30+150=320\text{ кг.}$$

Ответ: 320.

24. Пусть в альбоме x листов. Если наклеить по 20 марок на каждый, будет использовано $20x$ марок. Если школьнику подарить еще один такой же альбом (x листов), где на каждом листе наклеено по 21 марке, то всего в этом альбоме получится $21x$ марок.

Известно, что если сложить марки, которые уже есть у школьника, с подаренными марками $(21x)$, то их общее количество составит 500 штук. Отсюда получим: $500-21x$ — марки, которые есть у школьника. Их количество больше чем $20x$ (по условию задачи школьнику не хватит альбома, если он наклеит на лист по 20 марок).

Если все марки наклеить по 23 марки на лист, то они займут $\frac{500-21x}{23}$ листов, и это количество листов меньше или равно $(x-1)$ листов (по условию по крайней мере один лист останется пустым). Составим и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 20x < 500-21x, \\ \dfrac{500-21x}{23} \le x-1; \end{cases} \begin{cases} 41x < 500, \\ 500-21x \le 23(x-1); \end{cases} \begin{cases} x < 12\dfrac{8}{41}, \\ 23x+21x \ge 523; \end{cases} \begin{cases} x < 12\dfrac{8}{41}, \\ 44x \ge 523; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 12\dfrac{8}{41}, \\ x \ge 11\dfrac{39}{44}. \end{cases}$$

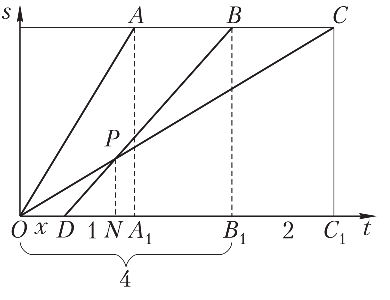
Целым решением этой системы неравенств является единственное число — 12.

Ответ: 12.

25. Изобразим графики движения мотоциклистов A, B и C (см. рис.):

1) пусть x — время, которое прошло между стартами мотоциклистов A и C и мотоциклиста B;

2) рассмотрим $\Delta OPD \sim \Delta CPB$, тогда $\frac{PB}{DP} = \frac{2}{x}$;



3) рассмотрим $\Delta NPD \sim \Delta B_1BD$, тогда $\frac{DB}{PD} = \frac{DB_1}{DN}$, т. е. $\frac{DP+PB}{PD} = \frac{4-x}{1}$;

$1+\frac{PB}{PD} = 4-x$; $\frac{PB}{PD} = 3-x$.

Однако $\frac{PB}{DP} = \frac{2}{x}$ (из пункта 1).

Составим уравнение:

$3-x = \frac{2}{x}$; $x^2-3x+2=0$;

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$;

4) пусть v_A, v_B, v_C — скорости мотоциклистов A, B и C соответственно:

$$v_A = \frac{AA_1}{OA_1}; \quad v_B = \frac{BB_1}{DB_1}; \quad v_C = \frac{CC_1}{OC_1}.$$

Так как известно, что мотоциклист A двигался в 1,6 раза медленнее мотоциклиста B, то $v_B = 1{,}6 \cdot v_A$; $\frac{BB_1}{DB_1} = 1{,}6 \cdot \frac{AA_1}{OA_1}$.

$BB_1 = AA_1$, следовательно, $5\,OA_1 = 8DB_1$; $OA_1 = \frac{8}{5}(4-x)$;

5) если $x_1 = 1$, то $OA_1 = \frac{8}{5}(4-1) = 4{,}8$ ч, что больше 4 ч (отрезка времени OB_1);

6) если $x_2 = 2$, то $OA_1 = \frac{8}{5}(4-2) = 3{,}2$ ч;

7) найдем требуемое отношение скоростей:
$\frac{V_A}{V_C} = \frac{AA_1}{OA_1} : \frac{CC_1}{OC_1} = \frac{AA_1 \cdot OC_1}{OA_1 \cdot CC_1} = \frac{OC_1}{OA_1} = \frac{6}{3{,}2} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$. Увеличим отношение скоростей в 8 раз: $\frac{15}{8} \cdot 8 = 15$.

Ответ: 15.

Задание 18
Решения

1. 1) Точка B лежит между точками A и C — утверждение верно;

2) через любую точку можно провести бесконечно много прямых. Утверждение 2 в условии задачи неверно;

3) точка D не лежит между точками A и C — утверждение неверно;

4) через две различные точки можно провести единственную прямую, поэтому через точки A и D нельзя провести прямую, отличную от данной прямой, — утверждение неверно;

5) прямые AB и AD — совпадающие прямые, поэтому все их точки общие — утверждение неверно.

Ответ: 4.

2. Точка называется серединой отрезка, если она делит отрезок на два равных отрезка. Точка N является серединой отрезка KD, так как по условию $KN = ND$.

Ответ: 4.

3. 1) Так как M — общая точка прямых AB и CD, то $AB \cap CD = M$ (утверждение верно);

2) расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Таким образом, только длина отрезка AH является расстоянием от точки A до прямой a (утверждение неверно);

3) углы 1 и 2 являются односторонними (верное утверждение);

4) $\angle AOB$ и $\angle COD$ являются вертикальными, а $\angle BOD$ и $\angle COD$ — смежными (утверждение верно);

5) так как углы 1 и 2 — накрест лежащие и $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$ (утверждение верно).

Ответ: 2.

4. Выразим длины отрезков в одинаковых единицах измерения:

$AB = 6{,}3$ см; $CB = 1{,}12$ дм $= 11{,}2$ см и $AC = 49$ мм $= 4{,}9$ см.

Так как $11{,}2 = 6{,}3 + 4{,}9$, т. е. $CB = AB + AC$, то точка A лежит между точками B и C.

Ответ: 1.

5. 1) По признаку параллельности прямых $a \parallel b$ (накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c равны по $80°$) (рис. 1);

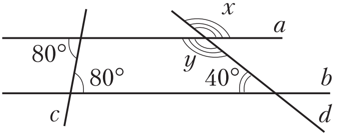


Рис. 1

2) угол x равен углу y (как вертикальные);

3) $y + 40° = 180°$ (сумма односторонних углов при параллельных прямых a и b и секущей d), следовательно, $y = 180° - 40° = 140°$, тогда $x = 140°$.

Ответ: 5.

6. 1) $\angle BOD + \angle DOA = 180°$ (как смежные), тогда $\angle BOD = 180° - \angle DOA = 180° - 44° = 136°$ (рис. 2);

2) так как $\angle BOC = \angle COD$ (OC — биссектриса угла BOD), то $\angle BOC = 136° : 2 = 68°$.

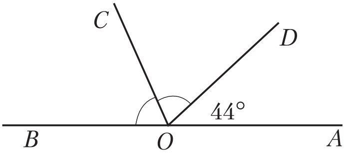


Рис. 2

Ответ: 4.

7. 1) Пусть угол 1 и угол 2 — смежные. Так как их величины пропорциональны числам 5 и 7, то $\angle 1 = 5x$ и $\angle 2 = 7x$. Сумма смежных углов равна 180°, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, т. е. $5x + 7x = 180°$; $12x = 180°$; $x = 180° : 12 = 15°$;

2) найдем разность этих углов: $\angle 2 - \angle 1 = 7x - 5x = 2x = 2 \cdot 15° = 30°$.

Ответ: 2.

8. 1) $\angle AOB + \angle BOC = 180°$ (как смежные). Пусть $\angle BOC = x$ (рис. 3). Так как угол BOC составляет пятую часть угла AOB, то $\angle AOB = 5x$.

Тогда $5x + x = 180°$; $6x = 180°$; $x = 180° : 6 = 30°$;

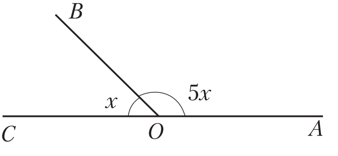


Рис. 3

2) найдем градусную меру угла AOB: $\angle AOB = 5 \cdot 30° = 150°$;

3) так как вертикальные углы равны, то градусная мера угла, вертикального углу AOB, равна 150°.

Ответ: 2.

9. 1) Пусть угол 1 и угол 2 — односторонние, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей (рис. 4). Тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Пусть $\angle 2 = x$. Так как угол 1 составляет 150 % угла 2, то $\angle 1 = 1{,}5x$.

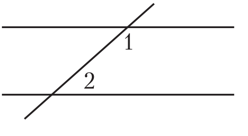


Рис. 4

Тогда $x + 1{,}5x = 180°$; $2{,}5x = 180°$; $x = 180° : 2{,}5 = 72°$;

2) найдем разность большего и меньшего углов:
$\angle 1 - \angle 2 = 1{,}5x - x = 0{,}5x = 0{,}5 \cdot 72° = 36°$.

Ответ: 3.

10. Так как длина отрезка BC больше длин отрезков AC и AB, то точка A лежит между точками B и C.

Тогда $BC - BA = AC$. По условию BC больше BA на 3,6, значит, $BC - BA = 3{,}6$, т. е. $AC = 3{,}6$.

Ответ: 1.

11. 1) Так как луч OC — биссектриса угла AOK (рис. 5), а луч OK — биссектриса угла BOC, то углы AOC, COK и KOB равны между собой;

2) так как $\angle AOB = 60°$, то $\angle COK = 60° : 3 = 20°$.

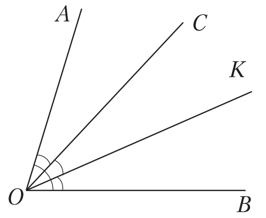


Рис. 5

Ответ: 1.

12. 1) Так как $a \perp b$ и $a \perp c$, то $b \parallel c$ (рис. 6);

2) углы 1 и 3 являются односторонними при параллельных прямых b и c и секущей d. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, $\angle 3 = 180° - 48° = 132°$;

3) так как $a \perp c$, то $\angle 4 = \angle 3 - 90° = 132° - 90° = 42°$;

4) $\angle 2 = \angle 4$ (как вертикальные), $\angle 2 = 42°$.

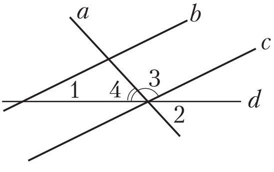


Рис. 6

Ответ: 1.

13. 1) $CM = AM - AC$; $CM = 60 - 35 = 25$.

2) $BC = BM - CM$; $BC = 46 - 25 = 21$.

Ответ: 2.

14. 1) Пусть $\angle(ac) = x$, (рис. 7) тогда $\angle(bc) = x + 29°$.

2) $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$, т. е. $143° = x + x + 29°$; $2x = 114°$; $x = 57°$.

3) $\angle(bc) = 57° + 29° = 86°$.

Ответ: 5.

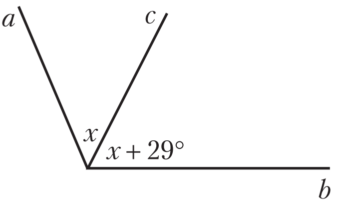


Рис. 7

15. 1) $\angle 1 + \angle 5 = 180°$, тогда $\angle 5 = 180° - 43° = 137°$ (рис. 8).

2) $\angle 2$ и $\angle 5$ являются соответственными при прямых a и b и секущей d. Так как $\angle 2 = \angle 5$, то $a \| b$.

3) $\angle 6 = \angle 3$ (как вертикальные).

4) $\angle 6 + \angle 4 = 180°$ (сумма односторонних углов при $a \| b$ и секущей c.

По условию $\angle 4 = \angle 3 + 24°$, т. е. $\angle 4 = \angle 6 + 24°$, тогда $\angle 6 + \angle 6 + 24° = 180°$; $\angle 6 = 78°$; $\angle 4 = 78° + 24° = 102°$.

Ответ: 1.

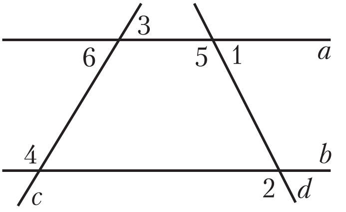


Рис. 8

16. 1) $x + y = 90°$ (рис. 9).

2) По условию $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$, т. е. $x = \frac{2y}{3}$, тогда $\frac{2y}{3} + y = 90°$; $\frac{5y}{3} = 90°$; $y = 54°$.

Ответ: 54.

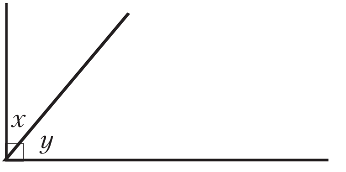


Рис. 9

17. 1) Пусть $\angle AOC = x$, тогда $\angle AOD = 1{,}4x$ (рис. 10).

2) $\angle BOD + \angle AOD = 180°$, тогда $\angle AOD = 180° - 124° = 56°$, значит, $1{,}4x = 56°$; $x = 40°$, т. е. $\angle AOC = 40°$.

Ответ: 40.

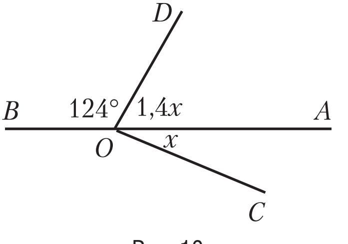


Рис. 10

18. 1) Пусть $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — два равных тупых угла с общей стороной OB, тогда $\angle AOC = 90°$ (рис. 11);

2) пусть $\angle AOB = \angle BOC = x$.

Так как $\angle AOB + \angle BOC + \angle AOC = 360°$, то $x + x + 90° = 360°$; $2x = 270°$;

$x = 270° : 2 = 135°$.

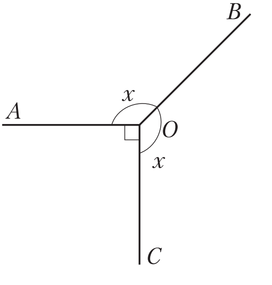


Рис. 11

Ответ: 135.

19. 1) Так как ME — биссектриса $\angle AMK$, то $\angle AMK = 2 \cdot \angle AME = 2 \cdot 35° = 70°$ (рис. 12);

2) так как $\angle AMK$ и $\angle AMC$ — смежные, то $\angle AMK + \angle AMC = 180°$, тогда $\angle AMC = 180° - \angle AMK = 180° - 70° = 110°$;

3) так как вертикальные углы равны, то $\angle BMK = \angle AMC$ и $\angle BMK + \angle AMC = 110° \cdot 2 = 220°$.

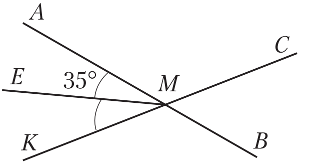


Рис. 12

Ответ: 220.

20. 1) $\angle KOM = \angle AOK$, так как OK — биссектриса $\angle AOM$ (рис. 13);

2) пусть x — градусная мера $\angle AOK$, тогда $4x$ — градусная мера $\angle COM$;

3) составим и решим уравнение: $x + x + 4x = 180$, $6x = 180$, $x = 30$. Значит, $\angle KOM = 30°$.

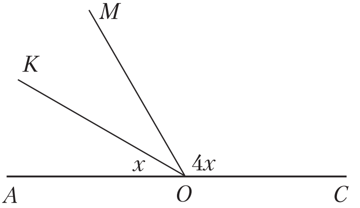


Рис. 13

Ответ: 30.

21. Наибольшая длина отрезка BM возможна при следующем расположении точек (рис. 14):

1) $BC = 12$; $CK = BC : 3 = 12 : 3 = 4$;

2) $BK = 12 + 4 = 16$; $KM = BK \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$; $BM = BK + KM = 16 + 32 = 48$.

Рис. 14

Ответ: 48.

22. 1) Так как $\angle ABD + \angle BAC = 137° + 43° = 180°$, то прямые BD и AC параллельны (по признаку параллельности прямых) (рис. 15);

2) $\angle BDC + \angle ACD = 180°$, так как $\angle BDC$ и $\angle DCA$ — односторонние при параллельных прямых BD и AC и секущей DC. Тогда $\angle ACD = 180° - \angle BDC = 180° - 45° = 135°$.

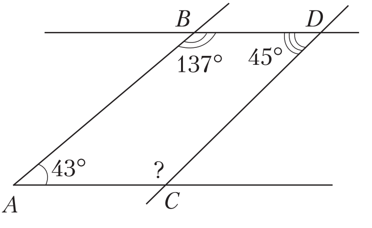


Рис. 15

Ответ: 135.

23. Так как по условию задачи $BM > BK$, то точки расположены, как показано на рисунке 16.

Рис. 16

Пусть x — длина отрезка BK, тогда $2x$ — длина отрезка BM.

$MK = BK = x$, значит, $6-2x$ — длина отрезка AM; $6-x$ — длина отрезка AK.

По условию задачи $AM = 0{,}8AK$.

Значит, $6-2x = 0{,}8(6-x)$; $6-2x = 4{,}8-0{,}8x$; $1{,}2x = 1{,}2$; $x = 1$. Следовательно, $MK = 1$.

Ответ: 1.

24. 1) Сумма углов $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{n-1}OA_n = 360°$;

2) так как каждый последующий угол больше предыдущего на 10°, то $\angle A_1OA_2$ является первым членом арифметической прогрессии с разностью, равной 10°, и суммой первых n членов, равной 360°;

3) воспользуемся формулой $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Так как $S_n = 360$; $a_1 = 10$; $d = 10$, составим уравнение

$$360 = \frac{2\cdot 10 + (n-1)\cdot 10}{2}\cdot n;\quad 360 = \frac{10+10\cdot n}{2}\cdot n;\quad 36 = \frac{1+n}{2}\cdot n;$$

$n^2 + n - 72 = 0$; $n_1 = 8$; $n_2 = -9$. Так как $n \in \mathbf{N}$, то $n = 8$;

4) с помощью формулы $a_n = a_1 + (n-1)d$ найдем $a_8 = 10 + 7\cdot 10 = 80$. Таким образом, градусная мера угла $A_{n-1}OA_n$ равна 80°.

Ответ: 80.

25. 1) Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, то $AB = A_1B_1 = D_1C_1 = 2$; $C_1N = 3$ (по условию), $D_1N = 2+3 = 5$ (рис. 17);

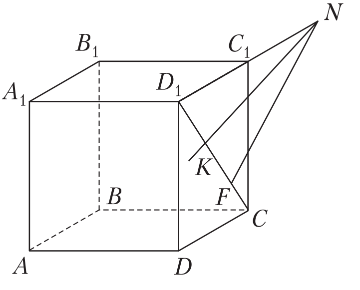


Рис. 17

2) так как NK — серединный перпендикуляр к отрезку FD_1, то K — середина D_1F, $NK \perp D_1F$ и $FN = D_1N = 5$ (по свойству серединного перпендикуляра);

3) рассмотрим треугольники D_1KN и D_1C_1C.

$\angle D_1KN = \angle D_1C_1C = 90°$; $\angle CD_1C_1$ — общий; $KN = CC_1$ (по условию). Следовательно, треугольники равны по катету и противолежащему острому углу. Тогда $D_1C = D_1N = 5$; $D_1K = D_1C_1 = 2$;

4) поскольку K — середина D_1F, то $D_1F = 2\cdot D_1K = 2\cdot 2 = 4$.

$CF = D_1C - DF = 5 - 4 = 1$.

Итак, $FN + CF = 5 + 1 = 6$.

Ответ: 6.

Занятие 19 Решения

1. Треугольник называется прямоугольным, если у него есть прямой угол. Две взаимно перпендикулярные стороны прямоугольного треугольника называются катетами, третья сторона называется гипотенузой.

1) Утверждение 1 — неверно. Стороны AC и BC — катеты треугольника ABC, сторона AB — гипотенуза;

2) сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, значит, утверждение 2 $(\angle A + \angle B = \angle C)$ — верно;

3) так как гипотенуза длиннее каждого из катетов, значит, утверждение 3 $(AB > AC$ и $AB > BC)$ — верно;

4) утверждение 4 $(AB > AC + BC)$ — неверно. Гипотенуза меньше суммы катетов (неравенство треугольника);

5) катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы, значит, утверждение 5 (если $\angle A = 30°$ и $AB = 1$, то $BC = 0{,}5$) — верно.

Итак, верными являются утверждения 2, 3 и 5.

Ответ: 5.

2. 1) Так как $\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$, то $AB^2 = CB^2 + AC^2$, значит, ΔABC является прямоугольным (по теореме, обратной теореме Пифагора) (утверждение верно);

2) синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе, т. е. $\sin\angle A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ (утверждение верно);

3) против большей стороны в треугольнике лежит больший угол; $CB > AC$, значит, $\angle A > \angle B$ (утверждение верно);

4) расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к прямой, т. е. расстояние от точки B до прямой CA равно катету $BC = \sqrt{3}$ (утверждение неверно);

5) периметр многоугольника — это сумма длин всех его сторон. Тогда $P_{ABC} = \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{10}$ (утверждение неверно);

6) площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, т. е. $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (утверждение верно);

7) центр вписанной в треугольник окружности — это точка пересечения биссектрис треугольника, а центр описанной около треугольника окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; совпадают эти точки только у равностороннего треугольника (утверждение неверно);

8) катеты прямоугольного треугольника являются двумя его высотами. Для нахождения третьей высоты воспользуемся методом площадей: площадь данного треугольника равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (см. п. 6), с другой стороны, ее можно найти как половину произведения гипотенузы и высоты h, проведенной к гипотенузе: $\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{5}h}{2}$, $h = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Ответ: 4.

3. Верными являются следующие равенства:

1) $S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$, где S — площадь ΔABC;

3) $S = pr$, где S, p — площадь и полупериметр ΔABC соответственно; r — радиус вписанной в ΔABC окружности;

4) $\frac{c}{2} = m = R$, где R — радиус описанной около ΔABC окружности;

5) $a^2 = a_c \cdot c$;

7) $\alpha + \beta = 90°$.

Неверными являются утверждения: 2: $h = \frac{a_c + b_c}{2}$ (так как $h^2 = a_c \cdot b_c$); 8: $\sin\alpha = \frac{b}{c}$, так как $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Ответ: 1.

4. Воспользуемся теоремой, обратной теореме Пифагора (если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник является прямоугольным), и выясним, что прямоугольный треугольник можно составить из набора отрезков $\sqrt{13}$; 3; 2, так как $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 3^2 + 2^2$.

Ответ: 2.

5. 1) Найдем тангенс большего острого угла прямоугольного треугольника: по определению тангенса нужно разделить катет, противолежащий этому углу, на другой катет; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7\sqrt{3}}{7} = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$ (утверждение верно);

2) второй острый угол этого треугольника $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Против угла 30° в прямоугольном треугольнике лежит катет, равный половине гипотенузы, следовательно, гипотенуза равна $2 \cdot 7 = 14$ (утверждение верно);

3) меньшей является высота, проведенная к большей стороне, т. е. к гипотенузе.

Пусть искомая высота равна x, тогда $\frac{7 \cdot 7\sqrt{3}}{2} = \frac{14 \cdot x}{2}$ (площадь треугольника, записанная двумя способами), отсюда $x = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ (утверждение верно);

4) в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — середина гипотенузы, т. е. радиус описанной окружности есть половина гипотенузы; в треугольнике с углом 30° меньший катет также равен половине гипотенузы (утверждение верно);

5) центр вписанной в треугольник окружности — точка пересечения его биссектрис. В разностороннем треугольнике ни одна из биссектрис не совпадает с медианой (утверждение неверно).

Ответ: 5.

6. Так как тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему, то $\operatorname{tg} \angle K = \frac{MN}{NK}$ (рис. 1).

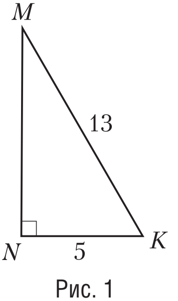


Рис. 1

По теореме Пифагора $MK^2 = MN^2 + NK^2$, тогда $MN^2 = MK^2 - NK^2$, т. е. $MN^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$; $MN = 12$.

Тогда $\operatorname{tg} \angle K = \frac{12}{5}$.

Ответ: 5.

7. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, значит, гипотенуза — 30. Если больший острый угол прямоугольного треугольника равен 60°, следовательно, меньший угол равен 30°. В прямоугольном треугольнике против угла $30°$ лежит катет, который равен половине гипотенузы. Так как в треугольнике против меньшего угла лежит меньшая сторона, то меньший катет равен 15.

Ответ: 3.

8. Так как треугольник является равнобедренным и прямоугольным, то его катеты равны. Пусть x — длина катета данного треугольника. Тогда по теореме Пифагора получим:

$$x^2 + x^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2;\ 2x^2 = 200;\ x^2 = 100;\ x = 10.$$

Ответ: 2.

9. 1) Найдем c — гипотенузу прямоугольного треугольника. По теореме Пифагора $c = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29$;

2) $R = \frac{c}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, т. е. $R = \frac{29}{2} = 14{,}5$;

3) $r = \frac{a + b - c}{2}$, где r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник; $a,\ b$ — катеты прямоугольного треугольника.

$r = \frac{20 + 21 - 29}{2} = 6$;

4) $R - r = 14{,}5 - 6 = 8{,}5$.

Ответ: 5.

10. 1) Пусть $a_c = x$, тогда $b_c = 8 - x$. Воспользуемся формулой $h^2 = a_c \cdot b_c$ (рис. 2) и составим уравнение:

$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = x \cdot (8 - x);\ 12 = 8x - x^2;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

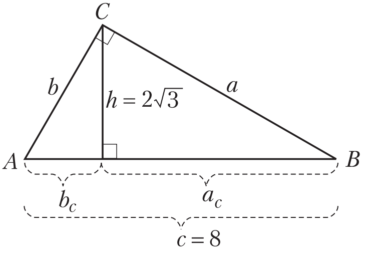


Рис. 2

То есть $x = 2$ или $x = 6$. Если $a_c = 2$, то $b_c = 8 - 2 = 6$, или если $a_c = 6$, то $b_c = 8 - 6 = 2$. Так как $b < a$, то $b_c < a_c$, т. е. $b_c = 2$;

2) по формуле $b^2 = b_c \cdot c$ найдем $b = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$;

3) вычислим значение искомого выражения: $a_c \cdot b_c \cdot b = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$.

Ответ: 1.

11. 1) Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 3, *б*). Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\angle A_1 = 90° - \angle B_1 = 90° - 72° = 18°$.

Поскольку $\angle A_1 < \angle B_1$, то $C_1B_1 < A_1C_1$, т. е. $C_1B_1 = 15$;

2) так как $\angle A_1 = \angle A = 18°$ и $\angle C_1 = \angle C = 90°$, то треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ (по двум углам) (рис. 3). Тогда

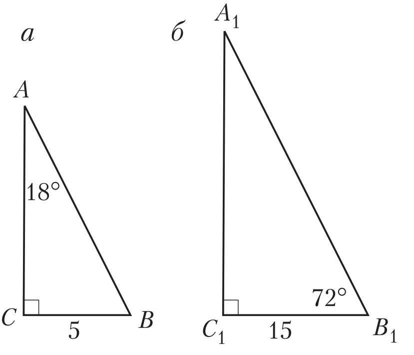


Рис. 3

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \left(\frac{B_1C_1}{BC}\right)^2 = \left(\frac{15}{5}\right)^2 = 9.$$

Таким образом, площадь треугольника $A_1B_1C_1$ больше площади треугольника ABC в девять раз.

Ответ: 5.

12. 1) Так как $BC < CM$, то $AB < AM$. Пусть $AB = x$, тогда $AM = x + 5$ (рис. 4);

2) для треугольников ABC и ACM воспользуемся теоремой Пифагора: $AC^2 = AB^2 - BC^2$ и $AC^2 = AM^2 - CM^2$, т. е. $AC^2 = x^2 - 9^2$ и $AC^2 = (x+5)^2 - 16^2$.

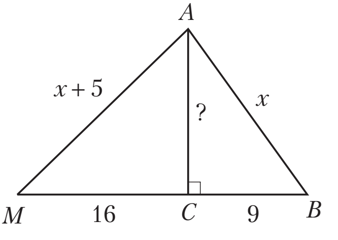


Рис. 4

Решим уравнение

$x^2 - 9^2 = (x+5)^2 - 16^2$;

$x^2 - 81 = x^2 + 10x + 25 - 256$;

$10x = 150$; $x = 15$.

Тогда $AC^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$; $AC = 12$.

Ответ: 3.

13. 1) По условию $AC + CB = 28$; $CM = 10$ (рис. 5).

2) Так как медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $AB = 2 \cdot CM$; $AB = 2 \cdot 10 = 20$.

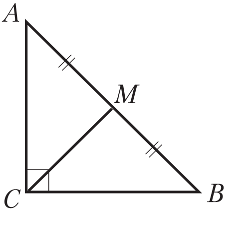


Рис. 5

3) Воспользуемся формулой $r=\dfrac{a+b-c}{2}$; $r=\dfrac{28-20}{2}=4$.

Ответ: 4.

14. 1) Рассмотрим рисунок 6. Пусть $BC=x$, тогда $AC=x+10$.

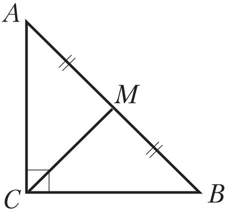


Рис. 6

Воспользуемся формулой площади прямоугольного треугольника: $S_{ABC}=\dfrac{AC\cdot BC}{2}$; так как $S_{ABC}=100$ (по условию), то $100=\dfrac{x(x+10)}{2}$; $x^2+10x-200=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-20, \\ x=10; \end{array}\right.$ $x=10$, тогда $CB=10$; $AC=10+10=20$.

2) Так как радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы, то найдем длину гипотенузы по теореме Пифагора: $AB^2=AC^2+BC^2$; $AB^2=500$; $AB=10\sqrt{5}$, тогда $R=\dfrac{AB}{2}$; $R=5\sqrt{5}$; $R^2=\left(5\sqrt{5}\right)^2=125$.

Ответ: 2.

15. 1) Рассмотрим рисунок 7. По теореме Пифагора $AB^2=BC^2-AC^2$; $AB^2=13^2-5^2$; $AB=12$.

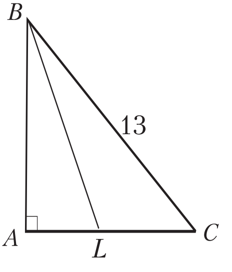


Рис. 7

2) Меньший угол треугольника расположен напротив меньшей его стороны, т. е. $\angle B$ — меньший в треугольнике ABC.

3) Пусть $AL=x$, тогда $CL=5-x$. По теореме о биссектрисе угла треугольника $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AL}{LC}$, т. е. $\dfrac{12}{13}=\dfrac{x}{5-x}$; $60-12x=13x$; $60=25x$; $x=\dfrac{12}{5}$, т. е. $AL=\dfrac{12}{5}$.

4) Из ΔABL по теореме Пифагора $BL^2=AC^2+AL^2$;

$$BL^2=12^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=144+\frac{144}{25}=144\left(1+\frac{1}{25}\right)=144\cdot\frac{26}{25}.$$

$$\frac{25}{26}\cdot l=\frac{25}{26}\cdot144\cdot\frac{26}{25}=144.$$

Ответ: 3.

16. 1) Рассмотрим ΔABC. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{(10-6)(10+6)} = \sqrt{4 \cdot 16} = 2 \cdot 4 = 8$. Так как больший угол треугольника лежит против его большей стороны, то проведем AD — биссектрису угла CAB (рис. 8);

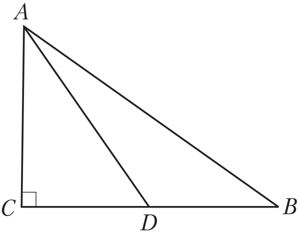


Рис. 8

2) пусть x — длина CD, тогда $8-x$ — длина BD. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$.

Составим уравнение:

$\frac{6}{10} = \frac{x}{8-x}$; $10x = 6 \cdot (8-x)$;

$10x = 48 - 6x$; $16x = 48$; $x = 3$. Значит, $CD = 3$;

3) рассмотрим ΔACD. $\angle ACD = 90°$. По теореме Пифагора $AD^2 = AC^2 + CD^2$; $AD^2 = 6^2 + 3^2 = 45$.

Ответ: 45.

17. 1) По определению синуса $\sin A = \frac{CB}{AB}$. Так как по условию $\sin A = 0{,}6$, то $\frac{CB}{AB} = 0{,}6$; $\frac{CB}{AB} = \frac{3}{5}$.

Тогда $CB = 3x$; $AB = 5x$;

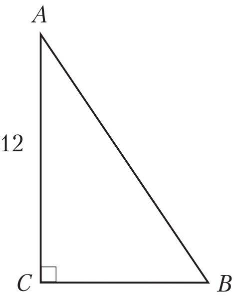


Рис. 9

2) по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$ (рис. 9), т. е. $(5x)^2 = 12^2 + (3x)^2$. Решим полученное уравнение:

$25x^2 = 144 + 9x^2$; $16x^2 = 144$; $x^2 = 9$; $x = 3$.

Имеем: $CB = 3x = 3 \cdot 3 = 9$; $AB = 5x = 5 \cdot 3 = 15$;

3) $P_{ABC} = AB + AC + CB = 15 + 12 + 9 = 36$.

Ответ: 36.

18. 1) Так как центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис этого треугольника, то AO и BO — биссектрисы углов CAB и CBA соответственно (рис. 10).

Тогда $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB$ и $\angle OBA = \frac{1}{2}\angle CBA$;

2) в прямоугольном треугольнике ABC $\angle CAB + \angle CBA = 90°$, значит, $\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA) = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$;

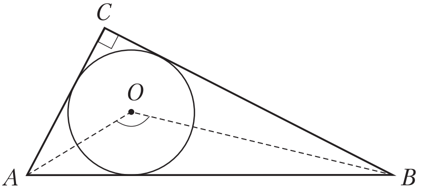


Рис. 10

3) рассмотрим треугольник AOB. По теореме о сумме углов треугольника $\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180°$; $\angle AOB = 180° - (\angle OAB + \angle OBA) = 180° - 45° = 135°$.

Ответ: 135.

19. 1) $\Delta AKE \sim \Delta ABC$ (по двум углам: $\angle A$ — общий и $\angle ACB = \angle EKA = 90°$) (рис. 11), причем коэффициент подобия этих треугольников равен $\frac{1}{6}$, так как гипотенузы треугольников относятся как 1 : 6 по условию;

2) отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta AEK}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{6}\right)^2; \quad \frac{14}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{36}; \quad S_{\Delta ABC} = 14 \cdot 36 = 504.$$

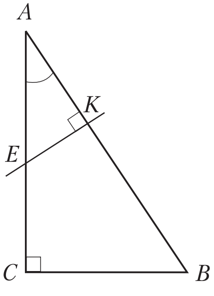


Рис. 11

Тогда $S_{CEKB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AEK} = 504 - 14 = 490$.

Ответ: 490.

20. Пусть окружность $\omega(O, r)$ вписана в ΔABC $(\angle C = 90°)$ (рис. 12). $AC + CB = 18$.

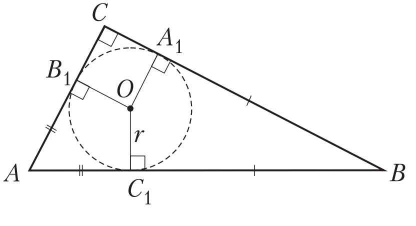


Рис. 12

По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, $A_1C = CB_1 = r$, $AB_1 = AC_1$, $A_1B = BC_1$. Отсюда получаем: $AC = AB_1 + r$; $CB = BA_1 + r$.

Складывая эти равенства, получим:

$AC + BC = 2r + AB_1 + BA_1$, т. е.

$18 = 2r + AC_1 + BC_1 = 2r + AB = 2r + 2R$,

где R — радиус описанной около ΔABC окружности. Итак, сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме катетов.

Ответ: 18.

21. 1) Пусть CH — высота, CO — медиана, а CE — биссектриса $\Delta ABC(\angle C = 90°)$. $CO = AO = OB$ (как радиусы описанной около ΔABC окружности). $\angle ACE = \angle ECB = 45°$ (так как CE — биссектриса $\angle ACB = 90°$) (рис. 13);

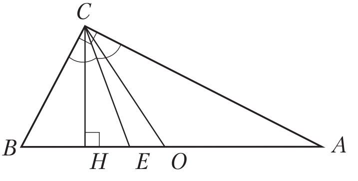


Рис. 13

2) из прямоугольного треугольника COH получим:

$\angle HOC = 90° - \angle HCO = 90° - 32° = 58°$;

3) так как треугольник COB — равнобедренный ($CO = BO$), то

$$\angle BCO = \angle CBO = \frac{180° - \angle COB}{2} = \frac{180° - 58°}{2} = 61°;$$

4) $\angle ECO = \angle BCO - \angle ECB = 61° - 45° = 16°$.

Ответ: 16.

22. 1) Пусть $AC = b$; $BC = a$, тогда $PC = \frac{b}{2}$; $MC = \frac{a}{2}$;

2) рассмотрим прямоугольные треугольники ACM и PBC (рис. 14). По теореме Пифагора $AM^2 = AC^2 + MC^2$ и $PB^2 = PC^2 + CB^2$.

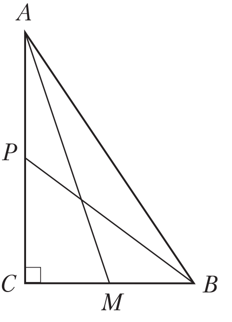


Рис. 14

Тогда $\left(2\sqrt{73}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

и $\left(4\sqrt{13}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2$.

Сложим полученные равенства:

$4 \cdot 73 + 16 \cdot 13 = b^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + a^2$;

$$4\cdot(73+4\cdot13)=\frac{5b^2}{4}+\frac{5a^2}{4};\ 4\cdot125=\frac{5\left(a^2+b^2\right)}{4};$$

$$4\cdot25=\frac{a^2+b^2}{4};\ a^2+b^2=16\cdot25;$$

3) по теореме Пифагора из треугольника ABC
$AB^2=AC^2+BC^2$; $AB^2=a^2+b^2=16\cdot25$; $AB=\sqrt{16\cdot25}=4\cdot5=20$;

4) так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то длина искомой медианы равна $AB:2=20:2=10$.

Ответ: 10.

23. 1) Так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$, то:

из ΔNBM ($\angle B=90°$):
$\angle M=90°-\angle N$ (рис. 15);
из ΔBHM ($\angle H=90°$):
$\angle NBH=90°-\angle N$, т. е. $\angle M=\angle NBH$;

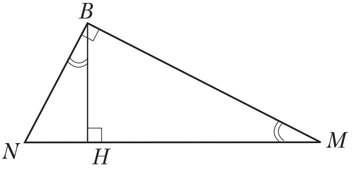


Рис. 15

2) следовательно, $\Delta MBH \sim \Delta BHN$ (по двум углам), причем коэффициент подобия $k=\dfrac{BH}{NH}$ (BH и NH — сходственные катеты подобных треугольников);

3) из ΔBHN $(\angle H=90°)$ по определению тангенса острого угла $\operatorname{tg}\angle N=5$, следовательно, $\dfrac{BH}{NH}=5=k$.

Поскольку отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия, то $\dfrac{P_{MBH}}{P_{BHN}}=k=5$.

Ответ: 5.

24. 1) $CMON$ — квадрат; CO — диагональ этого квадрата и искомое расстояние (рис. 16), тогда $CO=a\sqrt{2}$; так как $a=r$, то $CO=r\sqrt{2}$.

2) По теореме Пифагора $AB^2=AC^2+CB^2$, тогда

$$AB^2=\left(24\sqrt{2}\right)^2+\left(7\sqrt{2}\right)^2;$$

$$AB^2=576\cdot2+49\cdot2=2\cdot625;\ AB=25\sqrt{2}.$$

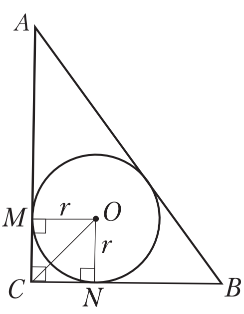


Рис. 16

3) Радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности найдем по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$; $r = \frac{24\sqrt{2}+7\sqrt{2}-25\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, тогда $CO = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6$.

Ответ: 6.

25. Пусть $CB = 2$; $AC = \sqrt{5}$; $AB = 3$; так как $3^2 = 2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$, то ΔABC — прямоугольный с гипотенузой AB (по теореме, обратной теореме Пифагора (рис. 17)).

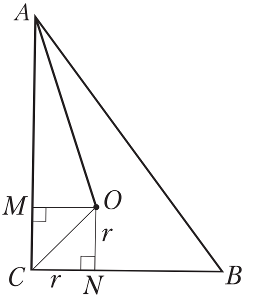


Рис. 17

2) Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной в этот треугольник окружности. По формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$ найдем $r = \frac{2+\sqrt{5}-3}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3) Так как $CMON$ — квадрат, то $MC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, тогда $AM = AC - MC$; $AM = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

4) Так как CB — меньший катет, то $\angle A$ — меньший угол, значит, AO — искомое расстояние.

5) Из ΔAOM по теореме Пифагора $AO^2 = AM^2 + MO^2$;
$AO^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$; $AO^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} + \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{12}{4} = 3$.

Ответ: 3.

Задание 20

Решения

1. 1) Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны. Утверждение 1 — неверно;

2) если два угла треугольника равны, то он является равнобедренным (признак равнобедренного треугольника). Утверждение — верно;

3) в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой. Утверждение 3 — неверно;

4) любой равносторонний треугольник является равнобедренным. Утверждение — верно;

5) в равнобедренном треугольнике равны высоты, проведенные к боковым сторонам. Утверждение 5 — неверно.

Итак, верными являются утверждения 2 и 4.

Ответ: 2.

2. 1) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, значит,

$\angle A = \angle C = (180° - 40°) : 2 = 70°$ (рис. 1).

Утверждение — верно;

2) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 70°$. Утверждение — неверно;

3) если треугольник равносторонний, то $R = \dfrac{2}{3} BH$, где BH — высота. Утверждение — неверно;

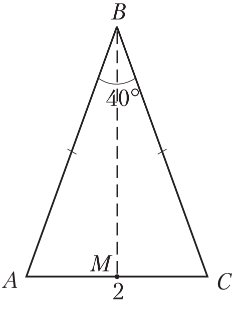


Рис. 1

4) $AC < AB + BC$ (неравенство треугольника), $AC = 2$, $AB = BC$, значит, $AB > 1$. Утверждение — верно;

5) медиана BM является и биссектрисой ΔABC, тогда $\angle ABM = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cdot 40° = 20°$. $\angle BAM = 70°$, т. е. $\angle ABM \neq \angle BAM$, следовательно, и $AM \neq BM$. $AM = \dfrac{1}{2} AC$ (так как BM — медиана ΔABC), тогда $BM \neq \dfrac{1}{2} AC$. Утверждение — неверно.

Итак, верными являются утверждения 1 и 4.

Ответ: 5.

3. 1) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним (внешний угол при вершине равнобедренного треугольника равен сумме углов при основании). Углы при основании равнобедренного треугольника равны, т. е. внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, действительно, равен удвоенному углу при основании;

2) биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и медианой, и высотой треугольника;

3) высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, равна ей; в этом случае треугольник прямоугольный. Она также может быть меньше любой стороны, так как является перпендикуляром к прямой, содержащей боковую сторону, а основание и другая боковая сторона — наклонными (перпендикуляр меньше любой наклонной);

4) для отрезков 3; 7; 3 не выполняется неравенство треугольника: большая сторона меньше суммы двух других ($7 > 3 + 3$). Значит, такой треугольник не существует;

5) высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, и само основание могут быть любой длины.

Ответ: 4.

4. Пусть x — длина одной части, тогда $4x$ — длина основания AC, $3x$ — длина боковой стороны (рис. 2). В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны: $AB = BC$.

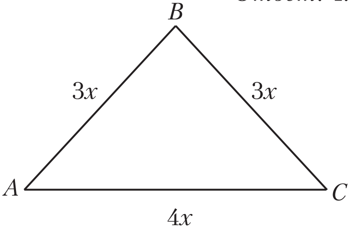


Рис. 2

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$.
Составим уравнение:
$3x + 3x + 4x = 70$; $10x = 70$; $x = 7$.
Значит, $AC = 4 \cdot 7 = 28$.

Ответ: 3.

5. 1) Пусть боковые стороны данного треугольника равны по 4, а основание — 8. В этом случае не выполняется неравенство треугольника ($4 + 4 = 8$), следовательно, такого треугольника не существует;

2) таким образом, равнобедренный треугольник со сторонами 4 и 8 — это треугольник, боковые стороны которого 8, а основание — 4;

3) периметр этого треугольника $P = 8 + 8 + 4 = 20$.

Ответ: 3.

6. 1) $BH = \dfrac{4}{5}AB$ (рис. 3), значит, $AB = 8 : 4 \cdot 5 = 10$;

2) рассмотрим ΔAHB, $\angle AHB = 90°$. По теореме Пифагора
$AB^2 = AH^2 + BH^2$, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$;

3) в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, значит, $AC = 12$;

4) $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 10 + 10 + 12 = 32.$

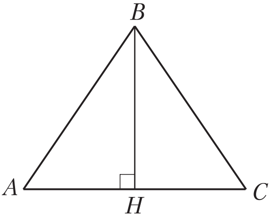


Рис. 3

Ответ: 4.

7. 1) По теореме о сумме углов треугольника

$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - (108° + 36°) = 180° - 144° = 36°$ (рис. 4);

2) так как $\angle A = \angle C = 36°$, то ΔABC является равнобедренным с основанием AC;

3) по свойству равнобедренного треугольника медиана BM, проведенная к основанию, является высотой ΔABC, т. е. $\angle BMC = 90°$.

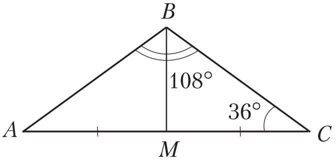


Рис. 4

Ответ: 5.

8. 1) Поскольку $\angle B < 60°$ и $\angle C < 60°$, то $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) > 60°$ (рис. 5). Тогда $\angle A$ — больший угол ΔABC, т. е. напротив него находится большая сторона, и $a > b$;

2) по свойству равнобедренного треугольника медиана AM, проведенная к основанию, является высотой ΔABC, т. е. $\angle AMC = 90°$;

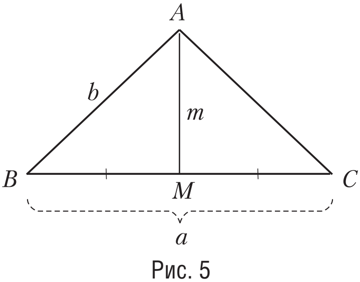


Рис. 5

3) так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета, то из ΔABM $AB > AM$, т. е. $b > m$;

4) так как $a > b$ и $b > m$, то $a > b > m$.

Ответ: 1.

9. *I способ*. Найдем боковую сторону $\Delta ABC\,(AB = BC)$, где $AC = 16$, $BH \perp AC$, $H \in AC, BH = 6$ (рис. 6). По свойству равнобедренного треугольника H — середина AC, тогда по теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 +$ $+ BH^2$, $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

Для нахождения радиуса вписанной окружности воспользуемся формулой площади треугольника: $S = pr$, где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной окружности.

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{16 \cdot 6}{2} = 48,$$

$$p = \frac{16+10+10}{2} = 18,$$

тогда $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{18} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$

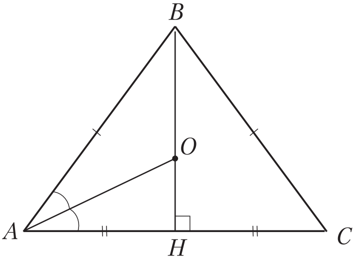


Рис. 6

II способ. Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис треугольника. Пусть точка O — центр вписанной в $\Delta ABC\,(AB = BC)$ окружности, тогда отрезок AO — биссектриса ΔABH. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH}$.

Так как $OH = r$, составим и решим пропорцию:

$$\frac{10}{8} = \frac{6-r}{r};\ 5r = 4(6-r);\ 9r = 24;\ r = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: 3.

10. Вычислим площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54.$$

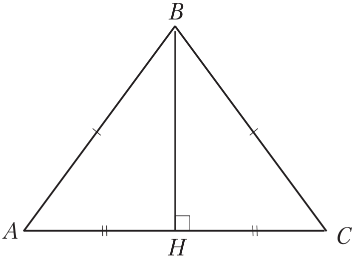


Рис. 7

Из $\Delta ABH\ (\angle H = 90^\circ)$ найдем гипотенузу AB (рис. 7): $AB^2 = AH^2 + BH^2$, $AB = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{36+81} = 3\sqrt{13}$.

Используя формулу площади треугольника $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны треугольника, R — радиус описанной окружности, найдем R:

$$R = \frac{3\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} \cdot 12}{4 \cdot 54} = \frac{13 \cdot 3}{6} = \frac{13}{2} = 6{,}5.$$

Ответ: 5.

11. Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника равна x, а основание — y (рис. 8). Медиана к боковой стороне делит ее на части $\frac{x}{2}$ и $\frac{x}{2}$ (по определению медианы).

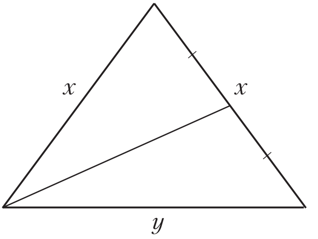


Рис. 8

Рассмотрим два случая:

1) $\frac{x}{2}+x=15,\ \frac{x}{2}+y=6;$

2) $\frac{x}{2}+x=6,\ \frac{x}{2}+y=15.$

В первом случае $x=10,\ y=1,$ во втором $-\ x=4,\ y=13.$ Треугольник со сторонами 10; 10; 1 существует ($10<10+1$), а треугольник со сторонами 4; 4; 13 — нет, так как не выполняется неравенство треугольника: $13>4+4.$

Ответ: 2.

12. 1) $O=AM\cap CE.$ Рассмотрим ΔAOC и ΔMOC (рис. 9): $\angle AOC=\angle MOC=90°$ (так как по условию медиана и биссектриса взаимно перпендикулярны), $\angle ACO=\angle MCO$ (так как CE — биссектриса), OC — общий катет. Значит, треугольники равны по катету и прилежащему острому углу;

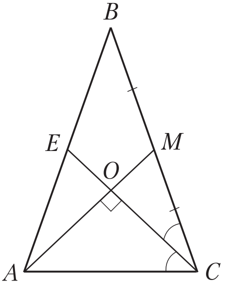


Рис. 9

2) пусть $MC=x$, тогда $AC=x$ (как соответствующие элементы равных треугольников), а $AB=$ $=BC=2MC=2x;$

3) рассмотрим ΔABC. По теореме косинусов $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$, т. е.
$x^2=(2x)^2+(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 2x\cdot\cos\angle ABC,$

$$\cos\angle ABC=\frac{4x^2+4x^2-x^2}{8x^2}=\frac{7}{8}.$$

Ответ: 4.

13. 1) $AH=HC=8$ (по свойству равнобедренного треугольника) (рис. 10).

2) Из ΔBHC по теореме Пифагора $BC^2=BH^2+HC^2;$
$BC^2=16^2+8^2=(8\cdot 2)^2+8^2=8^2\cdot 4+8^2=8^2\cdot 5;\ BC=8\sqrt{5}.$

3) Рассмотрим ΔABC: по теореме синусов $2R = \frac{AB}{\sin C}$, где R — радиус описанной около ΔABC окружности.

$\sin C = \frac{BH}{BC}$ (из ΔBHC по определению синуса). $\sin C = \frac{16}{8\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тогда $2R = \frac{8\sqrt{5}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$;

$2R = \frac{8\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2}$; $R = 10$.

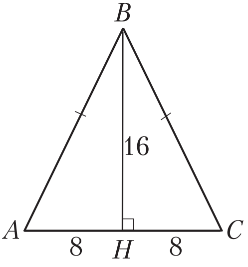


Рис. 10

Ответ: 4.

14. 1) Так как центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения его биссектрис, то $O \in BH$ и AO является биссектрисой угла A и $OH = r = 10$ (рис. 11).

2) $BO = BH - OH$; $BO = 36 - 10 = 26$.

3) Рассмотрим ΔABH. По теореме о биссектрисе угла треугольника $\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH}$; $\frac{AB}{AH} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$, тогда $AB = 13x$; $AH = 5x$.

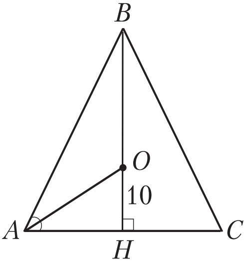


Рис. 11

По теореме Пифагора $AB^2 = AH^2 + BH^2$; $(13x)^2 = (5x)^2 + 36^2$; $169x^2 = 25x^2 + 36^2$; $144x^2 = (12\cdot3)^2$; $144x^2 = 144\cdot9$; $x^2 = 9$; $x = 3$, тогда $AC = 2\cdot AH = 10x = 10\cdot3 = 30$.

4) $S_{ABC} = \frac{BH\cdot AC}{2}$; $S_{ABC} = \frac{36\cdot30}{2} = 540$.

Ответ: 1.

15. 1) ΔAOC — прямоугольный и равнобедренный (так как $AO = \frac{2}{3}AM$; $CO = \frac{2}{3}CN$, $AM = CN$), тогда $AO = OC = a$ (рис. 12). По теореме Пифагора $AO^2 + OC^2 = AC^2$; $a^2 + a^2 = 16$; $a^2 = 8$.

2) $S_{AOC} = \frac{AO\cdot OC}{2}$; $S_{AOC} = \frac{a\cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$; $S_{AOC} = 4$.

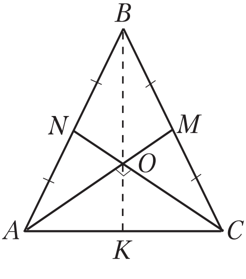


Рис. 12

3) Проведем медиану BK ($O \in BK$). Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих треугольников, значит,

$$S_{ANO} = S_{BNO} = S_{BMO} = S_{CMO} = S_{COK} = S_{AOK} = S,$$

тогда $S_{AOC} = 2S$, а $S_{ABC} = 6S$; так как $S_{AOC} = 4$, то

$$4 = 2S,\ S = 2,\ S_{ABC} = 6 \cdot 2 = 12.$$

Ответ: 3.

16. 1) Предположим, что боковые стороны треугольника равны 5, а основание — 20 (рис. 13). Тогда $5 + 5 = 10 < 20$, т. е. такого треугольника не существует. Значит, $AB = BC = 20$; $AC = 5$.

2) Пусть $LC = x$, тогда $BL = 20 - x$. По теореме о биссектрисе угла треугольника

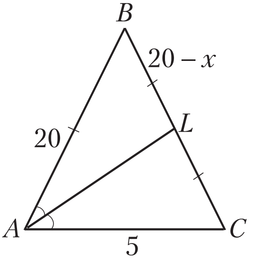


Рис. 13

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC};\ \frac{20}{5} = \frac{20 - x}{x};\ 4x = 20 - x;\ x = 4,$$

т. е. $LC = 4$; $BL = 20 - 4 = 16$.

3) Воспользуемся формулой биссектрисы угла треугольника: $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot LC$, тогда $AL^2 = 20 \cdot 5 - 4 \cdot 16 = 36$; $AL = 6$.

Ответ: 6.

17. 1) $CE = BE = 6$ (по свойству равнобедренного треугольника) (рис. 14).

2) Рассмотрим ΔABK: по теореме о биссектрисе угла треугольника $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{KO}{OB}$, значит,

$\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{3}{4}$, т. е. $AK = 3y$; $AB = 4y$.

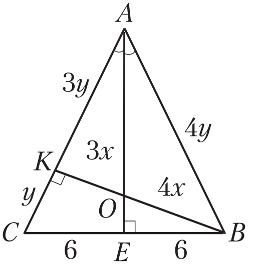


Рис. 14

$CK = AC - AK$; $CK = 4y - 3y = y$.

3) $\Delta ACE \sim \Delta BCK$ ($\angle C$ — общий, $\angle BKC = \angle AEC = 90°$), тогда

$$\frac{CK}{CE} = \frac{BC}{AC};\ \frac{y}{6} = \frac{12}{4y};\ y^2 = 18;\ y = 3\sqrt{2}.$$

4) $AC = 4y$; $AC = 12\sqrt{2}$; $AC^2 = \left(12\sqrt{2}\right)^2 = 288$.

Ответ: 288.

18. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является и высотой, и медианой этого треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении $2:1$, считая от вершины. Следовательно, точка O — это точка пересечения медиан ΔABC (рис. 15).

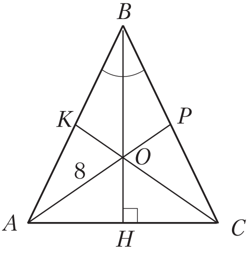


Рис. 15

Отрезок AO составляет $\frac{2}{3}$ медианы, проведенной из вершины A, значит, медиана

$$AP = 8 : \frac{2}{3} = 12.$$

Медианы равнобедренного треугольника, проведенные к боковым сторонам, равны, следовательно, $CK = AP = 12$.

Ответ: 12.

19. 1) Так как $AO = BO = CO$, то точка O равноудалена от вершин ΔABC (рис. 16), значит, O — центр описанной около ΔABC окружности;

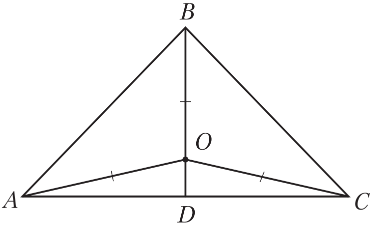


Рис. 16

2) центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а так как ΔABC — равнобедренный, то BD — его медиана и высота, проведенная к основанию.

Значит, прямая BD является серединным перпендикуляром к стороне AC, т. е. $\angle BDC = 90°$.

Ответ: 90.

20. 1) Так как ΔABC — равнобедренный (рис. 17), то центр вписанной в него окружности лежит на BD (биссектрисе, медиане и высоте этого треугольника, проведенной из вершины к основанию);

2) $DC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$;

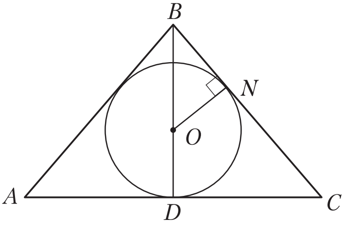


Рис. 17

3) $CN = DC = 5$ (по теореме об отрезках касательных), тогда $BN = BC - CN = 17 - 5 = 12$.

Ответ: 12.

21. 1) Поскольку прямая MK параллельна основанию AC (рис. 18), то по свойству параллельных прямых $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при $MK \| AC$ и секущей BC). $\Delta ABC \sim \Delta BMK$ (по двум углам: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle B$ — общий). Точка O делит медиану BP в отношении 2 : 1, считая от вершины (по свойству медиан). $BP \perp AC$, так как медиана, проведенная к основанию, является и высотой. BP и BO — соответствующие высоты подобных треугольников ABC и BMK, поэтому коэффициент подобия этих треугольников $k = \frac{3}{2}$. Тогда $BP = \frac{3}{2} BO = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$;

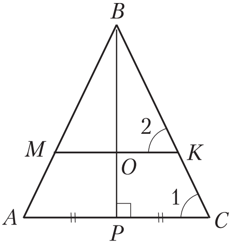


Рис. 18

2) найдем площадь треугольника ABC:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BP = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30.$

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BMK}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ (по теореме об отношении площадей подобных фигур).

Тогда $\frac{30}{S_{\Delta BMK}} = \frac{9}{4}$; $S_{\Delta BMK} = \frac{30 \cdot 4}{9} = \frac{40}{3}$.

$S_{AMKC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMK} = 30 - \frac{40}{3} = \frac{50}{3}$;

3) $S = \frac{50}{3}$; $3 \cdot S = 3 \cdot \frac{50}{3} = 50.$

Ответ: 50.

22. 1) В ΔAHC (рис. 19) $\angle H = 90°$, $CH = 11$, $AC = 22$, т. е. $AC = 2CH$, значит, $\angle A = 30°$;

2) проведем высоту BK ΔABC, тогда в ΔAKB: $\angle K = 90°$, $\angle A = 30°$.

$AK = \frac{22}{2} = 11$; $\mathrm{tg}30° = \frac{BK}{11}$; $BK = 11 \cdot \mathrm{tg}30° = \frac{11}{\sqrt{3}}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK = \frac{22 \cdot 11}{2\sqrt{3}} = \frac{121}{\sqrt{3}}$;

3) треугольник, вершинами которого являются середины сторон ΔABC, подобен ему, так

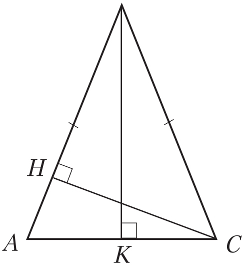


Рис. 19

как его стороны — это средние линии ΔABC. Средняя линия треугольника равна половине его стороны, т. е. коэффициент подобия равен 0,5. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, значит, $\dfrac{S}{S_{\Delta ABC}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. Отсюда $S=\dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\dfrac{121}{4\sqrt{3}}$.

Таким образом, $4\sqrt{3}\cdot S=121$.

Ответ: 121.

23. 1) ΔABC — равнобедренный (рис. 20), $\angle ABC=36°$.

$\angle BAC=\angle BCA=(180°-36°):2=72°$, так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

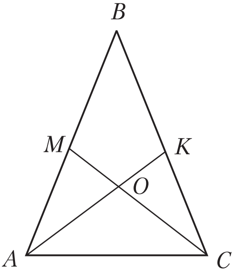


Рис. 20

$\angle BAK=\angle CAK=\angle BCM=\angle ACM=36°$, так как AK и CM — биссектрисы треугольника;

2) в ΔABK $\angle ABK=\angle BAK=36°$, значит, ΔABK — равнобедренный (по признаку), $AK=BK$;

3) в ΔAMC и ΔCKA имеем: $\angle CAK=\angle ACM=36°$, $\angle ACK=\angle CAM=72°$; AC — общая сторона, значит, $\Delta AMC=\Delta CKA$ (по второму признаку равенства треугольников). Значит, $AK=CM$ и $AM=CK$. Тогда $BM=BK$;

4) ΔAOC — равнобедренный (по признаку), значит, $AO=OC$. Так как $AK=MC$, то $MO=OK$;

5) $P_{\Delta AMO}=AO+MO+AM=AO+OK+AM=AK+AM=$
$=BK+AM=BM+AM=AB=1$.

Ответ: 1.

24. *I способ.* 1) Пусть AM — медиана ΔABC ($AC=CB$) и $CM=BM=a$, тогда $AC=2a$. Воспользуемся теоремой косинусов в треугольниках ABC и AMB и выразим косинус угла B (рис. 21):

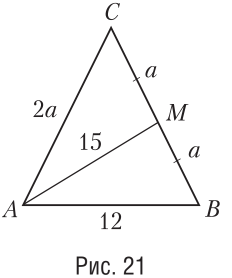


Рис. 21

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos B;$$

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC};$$

$$\cos B=\frac{12^2+(2a)^2-(2a)^2}{2\cdot 12\cdot 2a}=\frac{12^2}{2\cdot 12\cdot 2a}=\frac{3}{a}$$

или

$$AM^2=AB^2+BM^2-2\cdot AB\cdot BM\cdot\cos B;\ \cos B=\frac{AB^2+BM^2-AM^2}{2\cdot AB\cdot BM};$$

$$\cos B = \frac{12^2 + a^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot a} = \frac{a^2 - 81}{24 \cdot a};$$

2) тогда $\frac{3}{a} = \frac{a^2 - 81}{24 \cdot a}$; $a^2 - 81 = 3 \cdot 24$; $a^2 = 153$;

3) найдем квадрат боковой стороны треугольника:
$AC^2 = (2a)^2 = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 153 = 612$.

II способ. 1) Продлим медиану AM на ее длину и рассмотрим четырехугольник $ACDB$ (рис. 22). Так как диагонали этого четырехугольника делятся точкой пересечения пополам, $CM = MB$; $AM = MD$, то $ACDB$ — параллелограмм (по признаку);

2) воспользуемся формулой $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, связывающей длины диагоналей параллелограмма с длинами его сторон:

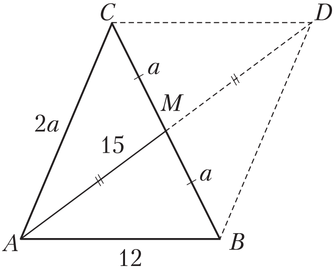


Рис. 22

$$AD^2 + CB^2 = 2(AC^2 + AB^2); 30^2 + (2a)^2 = 2((2a)^2 + 12^2);$$

$$900 + 4a^2 = 2(4a^2 + 144);\ 900 + 4a^2 = 8a^2 + 288;\ 4a^2 = 612;$$

$$AC^2 = (2a)^2 = 4a^2 = 612.$$

Ответ: 612.

25. Рассмотрим треугольники ABN и ABM (рис. 23):

1) $\angle NBA = \angle MBA = 90°$ (так как AA_1B_1B и $ABCD$ — квадраты);

2) $BN = BB_1 - NB_1$; $BM = BC - MC$, но $B_1B = BC$ как ребра куба и $B_1N = CM$ по условию, значит, $BN = BM$;

3) AB — общий катет.

Таким образом, $\Delta ABN = \Delta ABM$ по двум катетам, тогда $AN = AM$;

4) так как $AN = AM$, то ΔANM является равнобедренным с основанием NM. Известно, что $\angle NAM = 44°$, тогда

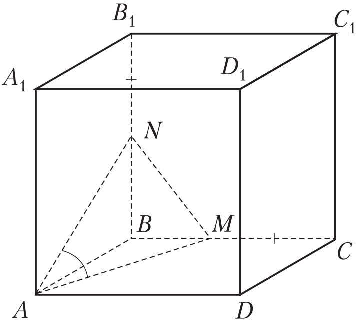


Рис. 23

$$\angle ANM = \angle AMN = \frac{180° - \angle NAM}{2} = \frac{180° - 44°}{2} = 68°.$$

Ответ: 68.

Задание 21

Решения

1. 1) В треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Значит, если $\angle BAC > \angle ACB$, то $AB < BC$. Утверждение — неверно;

2) $CH \perp AB, H \in AB$, значит, CH — высота ΔABC. Утверждение — верно;

3) сторона треугольника меньше суммы двух других сторон (неравенство треугольника). Утверждение — верно;

4) медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника (имеющих равные площади), а поскольку $AC \neq AB$ (по рисунку), то биссектриса AD не является медианой ΔABC. Утверждение — неверно;

5) если AD — биссектриса ΔABC, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$ (свойство биссектрисы треугольника). Утверждение — верно.

Итак, верными являются утверждения 2, 3, 5.

Ответ: 3.

2. Неверными являются утверждения 2, 4, 5, так как

$$BH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC}; AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC;$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\angle C.$$

Ответ: 4.

3. Верными являются утверждения 1, 2 и 5.

Утверждение 3 — неверно. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис треугольника. Утверждение 4 — неверно. Согласно теореме синусов $2R = \dfrac{a}{\sin\angle A}$, где R — радиус описанной окружности, a — сторона треугольника, $\angle A$ — угол, лежащий против стороны a.

Ответ: 5.

4. Медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, значит, точка пересечения делит медиану на отрезки 4 и 8.

Ответ: 2.

5. Неверным является второе утверждение, так как $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ (теорема косинусов), а не $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \sin\alpha$.

Ответ: 2.

6. 1) $\angle NKM = 180° - 60° = 120°$ (рис. 1);

2) по теореме косинусов

$MN^2 = MK^2 + KN^2 - 2 \cdot MK \cdot KN \cdot \cos\angle MKN$;

$MN^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120°$.

Так как $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, то $MN^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 37$; $MN = \sqrt{37}$.

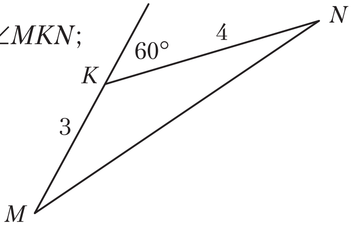


Рис. 1

Ответ: 5

7. 1) $\angle KFE = 180° - (135° + 15°) = 30°$ (рис. 2);

2) по теореме синусов

$$\frac{KE}{\sin\angle KFE} = \frac{FE}{\sin\angle FKE};$$

$$\frac{KE}{\sin 30°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 135°}.$$

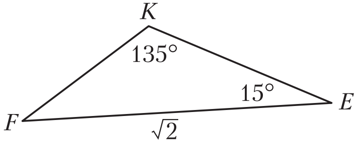


Рис. 2

Так как $\sin 30° = \frac{1}{2}$;

$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $KE = \frac{\sin 30° \cdot \sqrt{2}}{\sin 135°} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$

Ответ: 1.

8. 1) По формуле площади треугольника $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB$ и $S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} DO \cdot OC \cdot \sin\angle COD$ (рис. 3);

2) так как $\angle AOB = \angle DOC$ (как вертикальные), то $\sin\angle AOB = \sin\angle COD$;

3) найдем искомое отношение:

$$\frac{S_{\Delta COD}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DO \cdot OC \cdot \sin\angle COD}{\frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB} = \frac{DO \cdot OC}{AO \cdot OB} = \frac{14 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 21.$$

Ответ: 3.

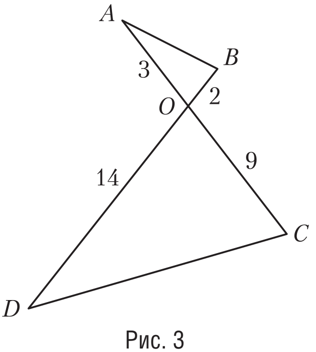


Рис. 3

9. Пусть $P_1 = 16;\ P_2 = 12$, тогда

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2, \frac{40}{S_2} = \left(\frac{16}{12}\right)^2; \quad \frac{40}{S_2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2; \frac{40}{S_2} = \frac{16}{9};$$

$$S_2 = \frac{40 \cdot 9}{16} = \frac{5 \cdot 9}{2} = 22{,}5.$$

Ответ: 4.

10. 1) Пусть BE и AK — медианы ΔABC, $BE \cap AK = O$. Рассмотрим треугольники ABC и MBN (рис. 4): $\angle BMN = \angle BAC$ как соответственные при $MN \parallel AC$ и секущей AB; угол ABC — общий. Тогда ΔABC подобен ΔMBN (по двум углам) и все соответствующие элементы этих треугольников относятся как коэффициент подобия, т. е. $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{BO}{BE}$ (BO и BE — соответствующие медианы треугольников MBN и ABC);

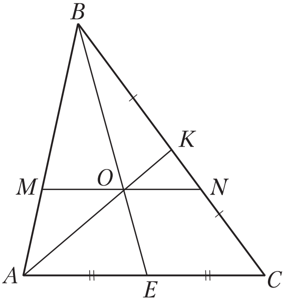


Рис. 4

2) вместе с тем из ΔABC по свойству медиан треугольника $\dfrac{BO}{OE} = \dfrac{2}{1}$, т. е. $\dfrac{BO}{BE} = \dfrac{2}{3}$, тогда $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{24}{AC} = \dfrac{2}{3}$; $AC = \dfrac{24 \cdot 3}{2} = 36.$

Ответ: 5.

11. По формуле площади треугольника (рис. 5):

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AK$. С другой стороны,

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$, т. е.

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH;$$

$$BH = \frac{BC \cdot AK}{AC};\ BH = \frac{10 \cdot 3}{12} = 2{,}5.$$

Ответ: 1.

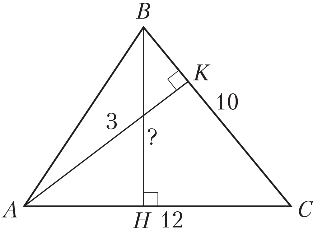


Рис. 5

12. Сумма смежных внешнего и внутреннего углов равна 180°. Пусть внутренний угол треугольника равен x. Тогда внешний угол равен $5x$. Найдем x из уравнения:

$$x + 5x = 180°; 6x = 180°; x = 30°.$$

Применяя формулу $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, где a — сторона треугольника, α — противолежащий угол, R — радиус описанной около треугольника окружности, вычислим R:

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = \frac{10}{2\cdot 0{,}5} = 10.$$

Ответ: 4.

13. По условию $AM : MB = 3 : 7$ (рис. 6), тогда $AM = 3x$; $MB = 7x$, $AB = 3x + 7x = 10x$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot CH}{2} = \frac{10x\cdot CH}{2}.$$

$$S_{\Delta AMC} = \frac{AM\cdot CH}{2} = \frac{3x\cdot CH}{2}.$$

Тогда $\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3}{10} = 30\,\%$.

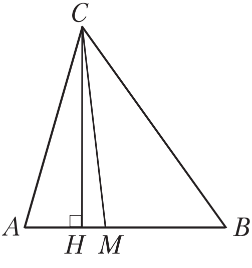


Рис. 6

Ответ: 4.

14. Треугольник ABK подобен треугольнику ABC по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle BAK = \angle C$ по условию) (рис. 7).

Тогда $\frac{BK}{AB} = \frac{AB}{BC}$, т. е. $AB^2 = BK\cdot BC$;

$AB^2 = 9\cdot 16$; $AB = 12$.

Найдем площадь треугольника ABK.

$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}AB\cdot BK\cdot \sin\angle B;$$

$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9\cdot \frac{1}{2} = 27.$$

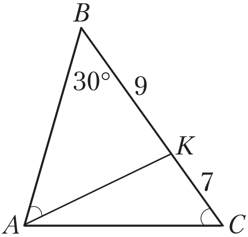


Рис. 7

Ответ: 1.

15. Так как $AM : MC = 1 : 5$, то $AM = x$, $MC = 5x$ (рис. 8).

Поскольку $BN : NC = 1 : 2$, то $BN = y$, $NC = 2y$.

Проведем $MP \parallel AN$, тогда по теореме Фалеса $NP : PC = AM : MC = 1 : 5$, т. е. $NP = \frac{y}{3}$.

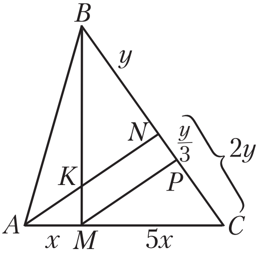


Рис. 8

Так как $MP \parallel AN$, то по теореме Фалеса $BK : KM = BN : NP$; $BK : KM = y : \frac{y}{3}$; $BK : KM = 3 : 1$.

Ответ: 3.

16. 1) Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, находится вне треугольника, следовательно, треугольник ABC — тупоугольный. Так как сторона BC — большая, то $\angle A$, лежащий напротив этой стороны, — больший. Таким образом, угол A — тупой (рис. 9);

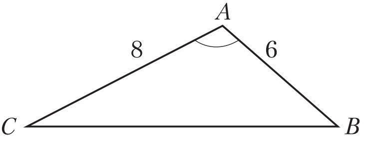


Рис. 9

2) по формуле площади треугольника $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$, тогда $12\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin\angle A$; $\sin\angle A = \frac{12\sqrt{2}}{3 \cdot 8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

В этом случае $\angle A = 45°$ или $\angle A = 135°$ (так как $\sin 45° = \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Треугольник ABC — тупоугольный, следовательно, $\angle A = 135°$.

Ответ: 135.

17. По теореме синусов получим: $\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{BC}{\sin\angle A}$; $BC = \frac{AC \sin\angle A}{\sin\angle B}$;

$$BC = \frac{\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \text{ (рис. 10)}.$$

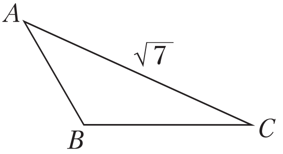


Рис. 10

Так как угол B — тупой и $\sin\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\angle B = 120°$.

По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$.

Пусть $AB = x$, тогда $7 = x^2 + 1 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; $x^2 + x - 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Так как длина стороны треугольника не может быть отрицательной, то $AB = 2$.

Ответ: 2.

18. Продлим медиану AP на ее длину и рассмотрим параллелограмм $ABMC$ (рис. 11).

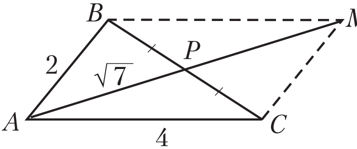


Рис. 11

По формуле, связывающей длины диагоналей параллелограмма и длины его сторон $\left(d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)\right)$, найдем длину отрезка BC.

$BC^2 + AM^2 = 2\left(AB^2 + AC^2\right)$;

$BC^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 2\left(2^2 + 4^2\right)$; $BC^2 + 28 = 40$;

$BC^2 = 12$; $BC = 2\sqrt{3}$.

В треугольнике ABC применим теорему косинусов и получим $BC^2 = 12$; $\cos\angle A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$; $\cos\angle A = \dfrac{4+16-12}{2\cdot 2\cdot 4} = \dfrac{1}{2}$, тогда $\angle A = 60°$.

Ответ: 60.

19. *I способ.* $\overset{\frown}{ABC} = \angle AOC = 90°$ (по определению градусной меры дуги окружности), тогда $\overset{\frown}{AMC} = 360° - \overset{\frown}{ABC} = 360° - 90° = 270°$ (рис. 12).

По теореме о вписанном угле $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{AMC} = \dfrac{1}{2}\cdot 270° = 135°$;

по теореме синусов из треугольника ABC:

$2\cdot R = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$; $2\cdot R = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sin 135°}$.

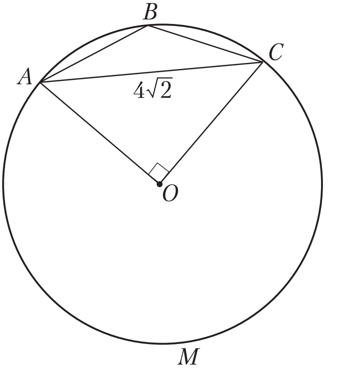


Рис. 12

Так как $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $2\cdot R = \dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$; $R = 4$.

II способ. $\angle AOC = 90°$ (по условию) и $AO = OC$ (как радиусы). Тогда треугольник AOC — равнобедренный и прямоугольный. По теореме Пифагора

$AC^2 = AO^2 + OC^2$; $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = R^2 + R^2$;

$16\cdot 2 = 2\cdot R^2$; $R^2 = 16$; $R = 4$.

Ответ: 4.

20. 1) Так как в треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O, то она является центром вписанной в этот треугольник окружности (рис. 13).

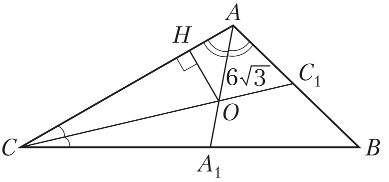


Рис. 13

Проведем $OH \perp AC$, тогда OH — радиус вписанной в треугольник ABC окружности;

2) рассмотрим ΔAOH: $\angle AHO = 90°$; $\angle HAO = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 120° = 60°$;

$AO = 6\sqrt{3}$. Тогда по определению синуса $\sin\angle HAO = \frac{OH}{AO}$;

$OH = AO\cdot\sin\angle HAO$; $OH = 6\sqrt{3}\cdot\sin 60° = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9$.

Ответ: 9.

21. 1) По теореме о биссектрисе треугольника $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{CB_1}$, тогда $\frac{AB}{BC} = \frac{\frac{21}{8}}{\frac{35}{8}} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$, т. е.

$AB = \frac{3}{5}BC$ (рис. 14).

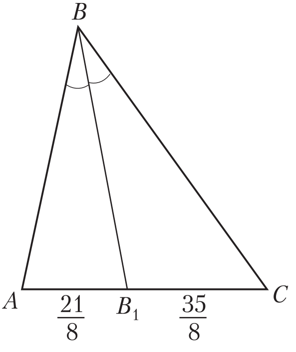


Рис. 14

По условию $BC - AB = 2$. Составим уравнение:

$BC - \frac{3}{5}BC = 2$;

$\frac{2}{5}BC = 2$; $BC = 5$.

Тогда $AB = \frac{3}{5}\cdot BC = \frac{3}{5}\cdot 5 = 3$ и $AC = \frac{21}{8} + \frac{35}{8} = \frac{56}{8} = 7$;

2) по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$, откуда $\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$; $\cos\angle ABC = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2\cdot 3\cdot 5} =$

$= \frac{9 + 25 - 49}{30} = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$.

Таким образом, угол ABC — тупой и равен 120°.

Ответ: 120.

22. 1) Проведем медиану BM (рис. 15). Так как медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников, то

$$S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOD} = S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COE} = S_{\Delta COM} = S_{\Delta AOM} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8.$$

Тогда $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta COM} + S_{\Delta AOM} = 8 + 8 = 16;$

2) так как медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, то $AO = \frac{2}{3} \cdot AE = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4;$

3) $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OC \cdot \sin\angle AOC.$

Так как $S_{\Delta AOC} = 16;$ $AO = 4$ и $\sin\angle AOC = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, то

$$OC = \frac{2 \cdot S_{\Delta AOC}}{AO \cdot \sin\angle AOC}; \quad OC = \frac{2 \cdot 16}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 16;$$

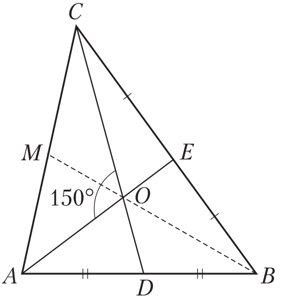


Рис. 15

4) из треугольника ABC по свойству медиан находим

$$CD = \frac{3}{2} \cdot OC = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24.$$

Ответ: 24.

23. Пусть $CM = a$, $AK = b$ и $BO = c$ — медианы ΔABC, которые пересекаются в точке T (рис. 16). По свойству медиан треугольника

$$BT : TO = 2 : 1, \; AT : TK = 2 : 1, \; CT : TM = 2 : 1.$$

Продолжим медиану BO за точку O и отложим $ON = OT$. Тогда четырехугольник $ATCN$ — параллелограмм (по признаку: диагонали четырехугольника делятся точкой пересечения пополам).

Рассмотрим ΔTNC:

$$TN = \frac{2}{3} c, \; TC = \frac{2}{3} a, \; NC = AT = \frac{2}{3} b.$$

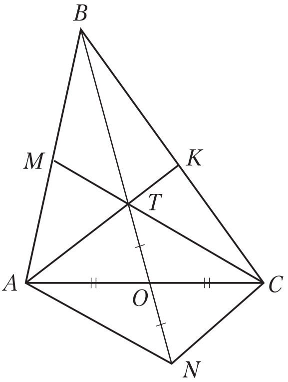


Рис. 16

Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$, поскольку $\Delta ONC = \Delta AOT$, а площадь ΔATC составляет $\frac{2}{6}$ площади ΔABC (медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей).

Итак, $S_{\Delta TNC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{16}{3}$. Треугольник со сторонами a, b, c подобен ΔTNC, стороны которого $\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}b,\ \frac{2}{3}c$, причем коэффициент подобия равен $\frac{3}{2}$. Следовательно, $\frac{S_{\text{иск.}}}{S_{\Delta TNC}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$; $S_{\text{иск.}}=\frac{S_{\Delta TNC}\cdot 9}{4}=\frac{16\cdot 9}{3\cdot 4}=12.$

Ответ: 12.

24. 1) Рассмотрим треугольники KPC и KME (рис. 17): $\angle PCK=\angle MEK=90°$, угол K — общий. Тогда ΔKPC и ΔKME подобны по двум углам, значит, $\frac{PK}{KM}=\frac{KC}{KE}$;

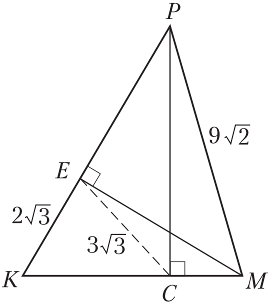


Рис. 17

2) рассмотрим треугольники KEC и KMP: $\frac{PK}{MK}=\frac{KC}{KE}$, тогда $\frac{PK}{KC}=\frac{MK}{KE}$ и угол K — общий. Таким образом, ΔKEC и ΔKMP подобны по двум сторонам и углу между ними, значит, $\frac{MK}{KE}=\frac{MP}{EC}$; $MK=\frac{MP\cdot KE}{EC}=\frac{9\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=6\sqrt{2}$;

3) $(MK)^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2=72.$

Ответ: 72.

25. 1) Пусть $BE\cap AK=O$, $BE\perp AK$ по условию. Прямоугольные треугольники ABO и KBO равны по катету и прилежащему острому углу (BO — общий катет, $\angle ABO=\angle KBO$, так как BE — биссектриса ΔABC).

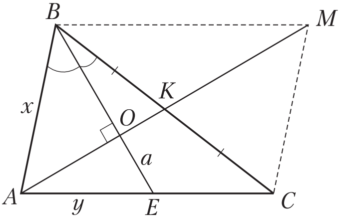


Рис. 18

Значит, $AB=BK, AO=OK=4:2=2$ (как соответствующие стороны равных треугольников);

2) пусть $AB=x, AE=y, OE=a$ (рис. 18), тогда $BO=4-a$. По теореме Пифагора для ΔABO и ΔAEO:

$x^2 = 2^2 + (4-a)^2$, (1)

$y^2 = 2^2 + a^2$; (1)

AK — медиана ΔABC по условию, значит, $BC = 2BK = 2x$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$, т. е. $\frac{y}{EC} = \frac{x}{2x}$; $EC = 2y$;

3) продолжим медиану AK и отложим $KM = AK$, получим параллелограмм $ABMC$ со сторонами x и $3y$, диагонали которого равны $2x$ и 8. Используя тот факт, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон, получим уравнение:

$8^2 + (2x)^2 = 2\left(x^2 + (3y)^2\right)$; $64 + 4x^2 - 2x^2 - 18y^2 = 0$; $64 + 2x^2 - 18y^2 = 0$.

Подставим в это уравнение равенства (1):

$$64 + 2\left(4 + (4-a)^2\right) - 18\left(4 + a^2\right) = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим:

$$a^2 + a - 2 = 0, \left[\begin{array}{l} a = -2 < 0, \\ a = 1. \end{array}\right.$$

Итак, $OE = a = 1$; $BO = 4 - a = 4 - 1 = 3$.
Тогда $y = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$; $x = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$;

4) найдем стороны ΔABC:

$AB = x = \sqrt{13}$, $AC = 3y = 3\sqrt{5}$, $BC = 2x = 2\sqrt{13}$.

Меньшая из сторон — AB, ее квадрат равен 13.

Ответ: 13.

Задание 22 Решения

1. 1) На рисунке 1 диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ равны, но он не является прямоугольником. Утверждение — неверно;

2) только у ромба диагонали являются биссектрисами его углов. Утверждение — неверно;

3) утверждение является верным;

4) у параллелограмма противоположные углы попарно равны. Утверждение — неверно;

5) на рисунке 2 $AB = AD$ и $BC = DC$, но четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом, так как у параллелограмма противоположные стороны попарно равны. Утверждение — неверно.

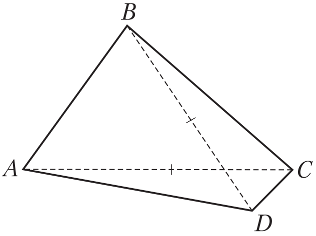


Рис. 1

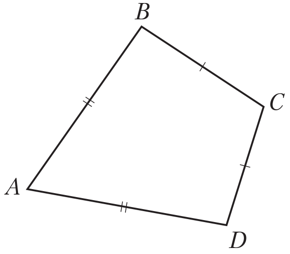


Рис. 2

Ответ: 3.

2. Параллелограммом является четырехугольник, изображенный на рисунке 4, так как $BC = AD$ и $BC \parallel AD$ (поскольку $67° + 113° = 180°$ и указанные углы — односторонние при прямых BC и AD и секущей AB).

Ответ: 4.

3. Так как противоположные стороны параллелограмма равны, то $MK = NP = 7$ и $PK = MN = 6$. Кроме того, диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, т. е. $MP = 2 \cdot PO = 2 \cdot 5 = 10$.

Найдем периметр треугольника MPK:

$P_{\Delta MPK} = MK + KP + MP = 7 + 6 + 10 = 23$.

Ответ: 3.

4. 1) $80 : 10 = 8$ — длина второй стороны прямоугольника;

2) $2(10 + 8) = 2 \cdot 18 = 36$ — периметр прямоугольника.

Ответ: 5.

5. 1) Так как у ромба все стороны равны, то, зная его периметр, найдем длину одной стороны: $24 : 4 = 6$.

То есть $AB = BC = 6$ (рис. 3);

2) по условию задачи известно, что $AC = 6$, тогда у треугольника ABC все стороны равны, а каждый угол равностороннего треугольника равен $60°$. Следовательно, $\angle B = 60°$.

Ответ: 1.

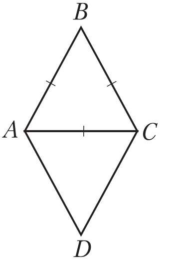


Рис. 3

6. 1) С помощью формулы площади квадрата $\left(S = a^2\right)$ найдем длину его стороны: $a^2 = 32$;
$a = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$;

2) $P = 4a = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

Ответ: 4.

7. Так как противоположные углы параллелограмма равны, то как $5:7$ относятся углы параллелограмма, прилежащие к одной из сторон.

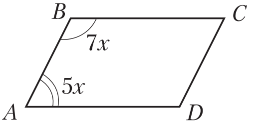


Рис. 4

Пусть $\angle A = 5x$; $\angle B = 7x$ (рис. 4). Так как $\angle A + \angle B = 180°$, то $5x + 7x = 180°$;
$12x = 180°$; $x = 180° : 12$; $x = 15°$.

Тогда больший угол параллелограмма равен $7 \cdot 15° = 105°$.

Ответ: 2.

8. Известно, что площади двух квадратов относятся как $16:9$, значит, квадрат коэффициента подобия $k^2 = \dfrac{16}{9}$, тогда $k = \dfrac{4}{3}$. Пусть x — сторона меньшего квадрата, тогда $(x+3)$ — сторона большего. Составим уравнение: $\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{4}{3}$; $3(x+3) = 4x$; $x = 9$. Сторона большего квадрата равна 12, а его периметр — 48.

Ответ: 5.

9. 1) $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AK (рис. 5);

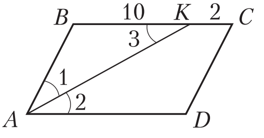


Рис. 5

2) $\angle 2 = \angle 1$, так как AK — биссектриса угла DAB;

3) так как $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 1$, то $\angle 3 = \angle 1$, значит, треугольник ABK является равнобедренным (по признаку). В этом случае $AB = BK = 10$;

4) найдем периметр параллелограмма:

$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(10 + 12) = 2 \cdot 22 = 44$.

Ответ: 5.

10. Так как периметр квадрата равен 12, то его сторона равна 3, тогда его площадь равна 9 (рис. 6).

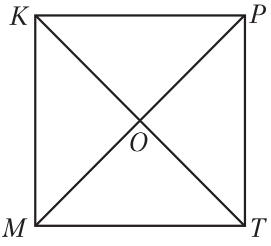


Рис. 6

Диагонали квадрата делят его на четыре равных треугольника, площадь каждого из которых равна $9:4=2,25$.

Пятиугольник *MOTPK* состоит из трех равных треугольников площадью 2,25, тогда его площадь равна $2,25\cdot 3=6,75$.

Ответ: 2.

11. Рассмотрим прямоугольный треугольник *AOD* (рис. 7). По свойствам ромба $AO=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$;

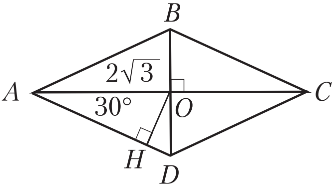


Рис. 7

$\angle OAD=\frac{1}{2}\angle BAD=30°$.

Тогда $OH=\frac{AO}{2}=\sqrt{3}$ и $AD=4$. Значит, $r=\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

12. 1) Так как диагональ прямоугольника является диаметром окружности, описанной около этого прямоугольника, то $AC=2\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$;

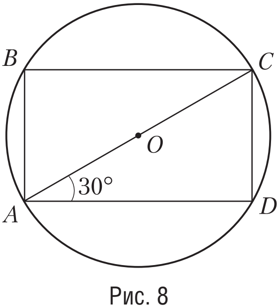


Рис. 8

2) рассмотрим прямоугольный треугольник *ACD* (рис. 8):

$AC=6\sqrt{2}$; $\angle A=30°$, тогда

$CD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

(по свойству катета, лежащего против угла 30°).

По теореме Пифагора $AC^2=AD^2+CD^2$, тогда

$AD^2=AC^2-CD^2$; $AD^2=\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=36\cdot 2-9\cdot 2=72-18=54$;

$AD=\sqrt{54}=\sqrt{9\cdot 6}=3\sqrt{6}$;

3) $S_{ABCD}=AD\cdot CD$; $S_{ABCD}=3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}=9\sqrt{12}=9\sqrt{4\cdot 3}=9\cdot 2\sqrt{3}=18\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

13. 1) Построим диагонали ромба $ABCD$, а также OM — радиус вписанной окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC ($BD \perp AC$ по свойству ромба) (рис. 9). Так как OM — радиус, проведенный в точку касания, то $OM \perp BC$. Значит, отрезок OM является высотой прямоугольного треугольника BOC, проведенной из вершины прямого угла. Тогда $OM^2 = BM \cdot MC$; $OM = \sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6$;

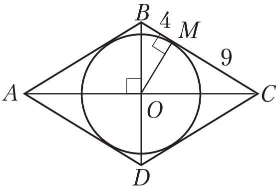


Рис. 9

2) воспользуемся формулой площади ромба $S = p \cdot r$, где p — полупериметр ромба, r — радиус вписанной в него окружности. Тогда $S = \dfrac{4 \cdot 13}{2} \cdot 6 = 156$.

Ответ: 5.

14. 1) Пусть в прямоугольном треугольнике AKM сторона $AK = x$ (рис. 10), тогда $MK = \dfrac{x}{2}$ (так как диагональ MK составляет 50 % стороны AK). По теореме Пифагора $AM^2 = AK^2 + MK^2$, тогда

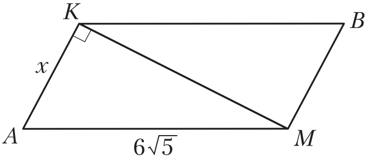


Рис. 10

$$\left(6\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2;\ 36 \cdot 5 = \frac{5x^2}{4};\ \ \frac{x^2}{4} = 36;\ \ x^2 = 36 \cdot 4;\ \ x = 6 \cdot 2 = 12,$$

т. е. $AK = 12$; $MK = \dfrac{12}{2} = 6$;

2) так как в параллелограмме $AMBK$ диагональ MK перпендикулярна стороне, то она является и его высотой, тогда

$S_{AMBK} = AK \cdot MK = 12 \cdot 6 = 72$.

Ответ: 1.

15. Воспользуемся формулой площади ромба $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей ромба. Так как диагонали ромба относятся как $2:3$, то пусть $d_1 = 2x$, $d_2 = 3x$. Известно, что сумма диагоналей ромба равна 35. Значит, $2x + 3x = 35$; $5x = 35$; $x = 7$.

Тогда $d_1 = 2 \cdot 7 = 14$, $d_2 = 3 \cdot 7 = 21$ и $S = \dfrac{14 \cdot 21}{2} = 7 \cdot 21 = 147$.

Ответ: 4.

16. 1) Прямоугольные треугольники ABE и CDF равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$ как противоположные стороны прямоугольника, $\angle BAE = \angle FCD$ как накрест лежащие при $AB \parallel CD$ и секущей AC), тогда $AE = FC$ (рис. 11);

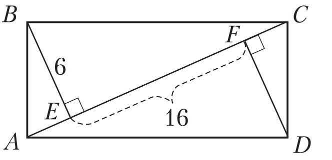


Рис. 11

2) рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Пусть $AE = FC = x$. Так как отрезок BE является высотой этого треугольника, то $BE^2 = AE \cdot EC$, т. е.
$6^2 = x \cdot (16 + x)$; $x^2 + 16x - 36 = 0$; $x_1 = -18$; $x_2 = 2$.

По смыслу задачи $AE = FC = 2$, тогда
$AC = AE + EF + FC = 2 + 16 + 2 = 20$;

3) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot BE}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{20 \cdot 6}{2} = 60$;

4) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = 2 \cdot 60 = 120$.

Ответ: 120.

17. 1) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD (рис. 12):

$$\operatorname{tg}\angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3},$$

т. е. $\angle ABD = 60°$;

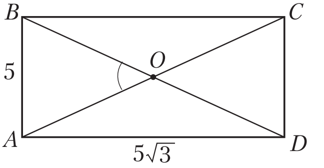


Рис. 12

2) в треугольнике ABO $AO = OB$ (так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам), т. е. треугольник ABO — равнобедренный, тогда $\angle BAO = \angle ABD = 60°$ и $\angle AOB = 180° - (\angle ABD + \angle BAO) =$
$= 180° - (60° + 60°) = 60°$.

Ответ: 60.

18. 1) С помощью формулы площади параллелограмма найдем длину его высоты (рис. 13):

$S_{ABCD} = AD \cdot CH$; $CH = \dfrac{20}{5\sqrt{2}} = \dfrac{20\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$;

2) рассмотрим ΔCDH. По теореме Пифагора $DH^2 = CD^2 - CH^2$;

$DH^2 = 4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 16 - 8 = 8$;

$DH = 2\sqrt{2}$.

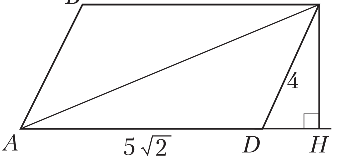


Рис. 13

Тогда $AH = AD + DH = 5\sqrt{2} + + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$;

3) в прямоугольном треугольнике ACH найдем квадрат диагонали AC:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2;\ AC^2 = \left(7\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 49\cdot 2 + 4\cdot 2 = 106.$$

Ответ: 106.

19. 1) Пусть $AD = MK = a$ и $AB = MN = b$ (рис. 14), тогда $S_{ABCD} = AD\cdot AB\cdot \sin 30° = a\cdot b\cdot \frac{1}{2}$ и $S_{MNPK} = MK\cdot MN = a\cdot b$;

2) рассмотрим отношение

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNPK}} = \frac{a\cdot b\cdot \frac{1}{2}}{a\cdot b} = \frac{1}{2},$$

т. е. $\frac{S_{ABCD}}{16} = \frac{1}{2}$; $S_{ABCD} = 16\cdot\frac{1}{2} = 8.$

Ответ: 8.

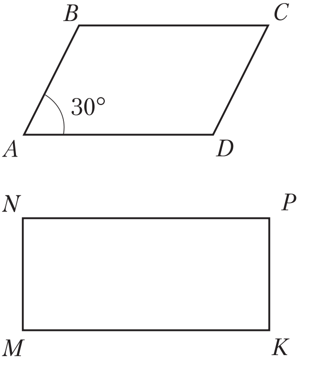


Рис. 14

20. 1) $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при $BC \| AD$ и секущей BL (рис. 15);

2) рассмотрим прямоугольный треугольник HBL:

$\angle HBL + \angle HLB = 90°$,

т. е. $25° + \angle 2 = 90°$; $\angle 2 = 65°$;

3) $\angle 1 = \angle 2 = 65°$. Так как BL — биссектриса, то $\angle ABC = 2\cdot\angle 1 = 2\cdot 65° = 130°$.

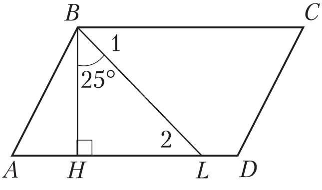


Рис. 15

Ответ: 130.

21. Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то AM — биссектриса прямоугольного треугольника ABH (рис. 16). Тогда по теореме о биссектрисе треугольника $\frac{AB}{AH} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, т. е. $AB = 5x,\ AH = 3x$.

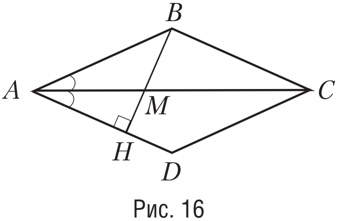


Рис. 16

По теореме Пифагора получим $(5x)^2 = (3x)^2 + 16^2$; $x = 4$.

То есть сторона ромба $AB = 5x = 20$ и периметр ромба равен 80.

Ответ: 80.

22. В прямоугольной трапеции O_1O_2TP длины оснований $O_1P = 30$ и $O_2T = 14$, длина боковой стороны $O_1O_2 = 20 + 14 = 34$. Проведем высоту трапеции O_2F (рис. 17). В прямоугольном треугольнике O_1O_2F имеем $O_1O_2 = 34$, $O_1F = 30 - 14 = 16$.

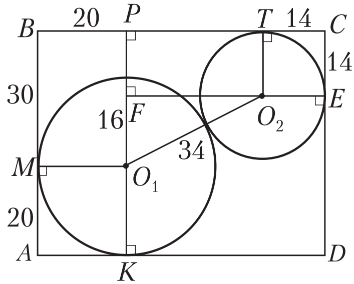


Рис. 17

Тогда по теореме Пифагора
$FO_2 = \sqrt{34^2 - 16^2}$;
$FO_2 = \sqrt{(34-16)(34+16)} = \sqrt{18 \cdot 50} =$
$= \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.$

Тогда $PT = FO_2 = 30$ и длина второй стороны равна $BC = BP + PT + TC = 20 + 30 + 14 = 64.$

Ответ: 64.

23. 1) Так как треугольники ABO, BCO, COD и AOD — прямоугольные (по свойству ромба), то центрами окружностей, описанных около этих треугольников, являются середины их гипотенуз: точки K, M, N и P соответственно (рис. 18);

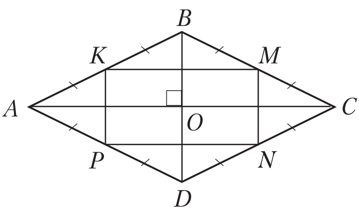


Рис. 18

2) в треугольнике ABC KM — средняя линия этого треугольника (по определению), тогда $KM = \frac{1}{2}AC$ и $KM \parallel AC$.

Аналогично доказывается, что $PN = \frac{1}{2}AC$ и $PN \parallel AC$. В таком случае четырехугольник $KMNP$ является параллелограммом (по признаку). Так как $BD \perp AC$ (по свойству ромба), а $KM \parallel AC$, $PN \parallel AC$, $KP \parallel BD$ и $MN \parallel BD$, то у параллелограмма $KMNP$ все углы прямые, т. е. $KMNP$ — прямоугольник. Тогда $S_{KMNP} = KM \cdot MN$;

3) в прямоугольном треугольнике ABO

$\angle BAO = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$ (по свойству ромба) и $AB = 6$. Тогда $BO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ и $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} =$
$= \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}.$

Так как диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, то $BD = 2BO = 6$ и $AC = 2AO = 6\sqrt{3}$;

4) найдем площадь прямоугольника $KMNP$:

$KM = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{3}$; $MN = \frac{1}{2}BD = 3$,

тогда $S = S_{KMNP} = 3\sqrt{3}\cdot 3 = 9\sqrt{3}$; $\frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 9$.

Ответ: 9.

24. 1) Так как $AP : PD = 2:3$, то пусть $AP = 2x$; $PD = 3x$ (рис. 19), тогда $AD = 5x$. Поскольку $AD : AB = 5:3$ и $AD = 5x$, то $AB = 3x$. $S_{ABCD} = AB\cdot AD = 3x\cdot 5x = 15x^2$;

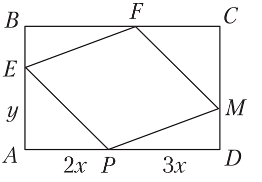


Рис. 19

2) пусть $AE = y$, тогда $BE = MD = 3x - y$;

3) воспользуемся теоремой Пифагора для прямоугольных треугольников APE и MPD:

$EP^2 = AE^2 + AP^2$ и $MP^2 = MD^2 + DP^2$;

так как $EP = MP$ (как стороны ромба), то $AE^2 + AP^2 = PD^2 + MD^2$, т. е.

$y^2 + (2x)^2 = (3x)^2 + (3x - y)^2$; $y^2 + 4x^2 = 9x^2 + 9x^2 - 6xy + y^2$;

$6xy = 14x^2$; $y = \frac{7x}{3}$.

Тогда $AE = \frac{7x}{3}$; $MD = 3x - \frac{7x}{3} = \frac{2x}{3}$;

4) заметим, что

$$S_{\Delta FCM} = S_{\Delta APE} = \frac{AE\cdot AP}{2} = \frac{\frac{7x}{3}\cdot 2x}{2} = \frac{7x^2}{3}$$

и $S_{\Delta FBE} = S_{\Delta PDM} = \frac{PD\cdot MD}{2} = \frac{3x\cdot\frac{2x}{3}}{2} = x^2$.

Тогда $S_{FMPE} = S_{ABCD} - (S_{\Delta APE} + S_{\Delta FBE} + S_{\Delta FCM} + S_{\Delta PDM}) =$

$= 15x^2 - \left(2\cdot\frac{7x^2}{3} + 2x^2\right) = \frac{25x^2}{3}$;

5) найдем отношение площадей прямоугольника и ромба:

$\frac{S_{ABCD}}{S_{FMPE}} = \frac{15x^2}{\frac{25x^2}{3}} = \frac{3\cdot 15}{25} = \frac{9}{5}$, тогда $5\cdot S = 5\cdot\frac{S_{ABCD}}{S_{FMPE}} = 5\cdot\frac{9}{5} = 9$.

Ответ: 9.

25. 1) На продолжении стороны CD отметим точку F так, что $DF = BK$ (рис. 20). Тогда прямоугольные треугольники ABK и ADF равны по двум катетам, значит, $\angle BAK = \angle DAF = \alpha$;

2) $\angle MAD = 90° - 2\alpha$, тогда $\angle MAF = \angle MAD + \angle DAF = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha$;

3) рассмотрим ΔADF: $\angle D = 90°$; $\angle A = \alpha$, тогда $\angle F = 90° - \alpha$ (по теореме о сумме острых углов прямоугольного треугольника), т. е. $\angle AFM = \angle MAF$. Тогда треугольник AFM — равнобедренный и $AM = FM$, следовательно, $AM = FD + DM = BK + DM = 12$.

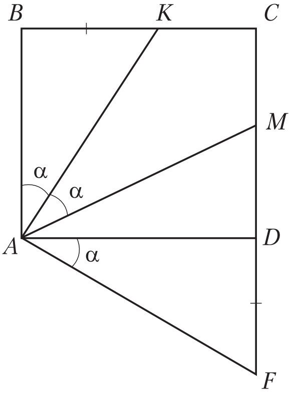


Рис. 20

Ответ: 12.

Задание 23

Решения

1. Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы его противоположных углов равны 180°.

Ответ: 3.

2. Так как четырехугольник $MNFE$ описан около окружности, то

$MN + FE = NF + ME;\ 5 + FE = 8 + 3;\ FE = 6.$

Ответ: 5.

3. Воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырехугольника, а φ — угол между ними. Тогда

$$S = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 2\cdot \sin 60° = 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: 2.

4. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона является высотой трапеции (рис. 1). Длина средней линии равна полусумме оснований. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}\cdot AB = 8\cdot 5 = 40.$$

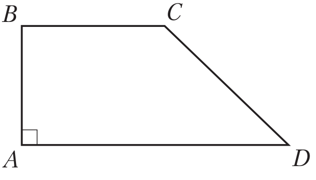


Рис. 1

Ответ: 1.

5. Пусть a, b и m — длины большего, меньшего оснований и средней линии трапеции соответственно. Тогда по теореме о средней линии трапеции:

$$m = \frac{a+b}{2};\ 7 = \frac{10+b}{2};\ 10 + b = 14;\ b = 4.$$

Ответ: 4.

6. Так как отрезок MN является средней линией трапеции, то $MN \parallel BC$ (рис. 2). Тогда по теореме Фалеса $AK = KC$, т. е. MK — средняя линия треугольника ABC, а KN — средняя линия треугольника ADC (по определению). По теореме о средней линии треугольника:

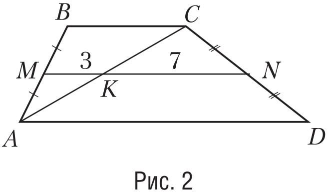


Рис. 2

$BC = 2MK = 6; AD = 2KN = 14.$

Тогда $AD - BC = 14 - 6 = 8.$

Ответ: 4.

7. 1) Проведем высоты BH и CM трапеции $ABCD$ (рис. 3). Треугольники ABH и DCM равны по гипотенузе и острому углу ($\angle A = \angle D$ и $AB = CD$ по свойству равнобедренной трапеции), значит, $AH = MD$ и $BH = CM$;

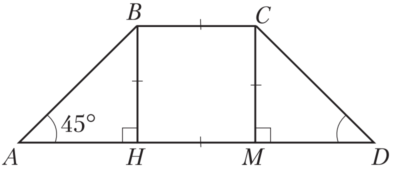


Рис. 3

2) рассмотрим четырехугольник $BHMC$: $BH \perp AD$, $CM \perp AD$, значит, $BH \parallel CM$ и $BC \parallel AD$ (как прямые, содержащие основания трапеции), т. е. $BHMC$ — параллелограмм (по определению), тогда $BC = HM$ (по свойству параллелограмма);

3) $BC = BH$ (по условию). Пусть $BH = x$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH:

$\angle ABH = 90° - \angle BAH = 90° - 45° = 45°,$

т. е. треугольник ABH является равнобедренным. Следовательно, $AH = BH = x$, тогда $MD = AH = x$.

$AD = AH + HM + MD = x + x + x = 3x;\ \ 12 = 3x;\ x = 4;$

4) $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH;\ \ S_{ABCD} = \dfrac{3x + x}{2} \cdot x = 2x \cdot x = 2x^2 = 2 \cdot 4^2 =$

$= 2 \cdot 16 = 32.$

Ответ: 1.

8. 1) Так как $\angle BCM = \angle DAM$ (как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC) и $\angle BMC = \angle DMA$ (как вертикальные) (рис. 4), то треугольники BCM и DAM подобны (по двум углам). Тогда $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{MC}{AM}$;

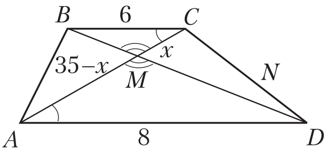


Рис. 4

2) пусть $MC = x$, тогда $AM = 35 - x$. Значит,

$\dfrac{6}{8} = \dfrac{x}{35 - x};\ \dfrac{3}{4} = \dfrac{x}{35 - x};\ 3(35 - x) = 4x;\ 105 - 3x = 4x;\ 7x = 105;\ x = 15.$

То есть $MC = 15.$

Ответ: 2.

9. 1) Поскольку $\angle BCA = \angle CAM$ (как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC) и $\angle BAC = \angle CAD$ (так как AC является биссектрисой угла A), то $\angle BCA = \angle CAB$. То есть ΔABC — равнобедренный (по признаку).

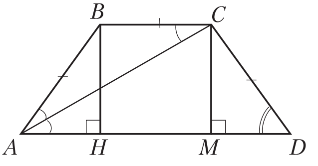


Рис. 5

Значит, $BA = BC = 5$. Так как трапеция равнобедренная, то $CD = BA = BC = 5$;

2) проведем CM и BH — высоты трапеции (рис. 5).

Тогда $HM = BC = 5$ и $MD = AH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{11-5}{2} = 3$;

3) рассмотрим прямоугольный треугольник CMD, в котором $CD = 5$ и $MD = 3$, тогда по теореме Пифагора

$CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$;

4) найдем площадь трапеции:

$S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CM = \dfrac{11+5}{2} \cdot 4 = 32.$

Ответ: 1.

10. 1) Проведем высоты BH и CM трапеции $ABCD$ (рис. 6). Треугольники ABH и DCM равны по гипотенузе и острому углу ($\angle A = \angle D$ и $AB = CD$ по свойству равнобедренной трапеции), значит, $AH = MD$;

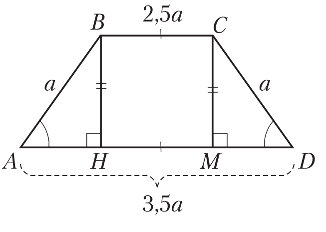


Рис. 6

2) рассмотрим четырехугольник $BHMC$: $BH \perp AD$, $CM \perp AD$, значит, $BH \parallel CM$ и $BC \parallel AD$ (как прямые, содержащие основания трапеции). То есть $BHMC$ — параллелограмм (по определению), следовательно, $BC = HM$ (по свойству параллелограмма).

Тогда $AH = MD = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{3{,}5a - 2{,}5a}{2} = 0{,}5a$;

3) рассмотрим прямоугольный треугольник ABH: $AH = 0{,}5a$; $AB = a$, т. е. $AH = \dfrac{1}{2}AB$. Значит, $\angle ABH = 30°$, тогда $\angle ABC = \angle ABH + \angle HBC = {}$ $= 30° + 90° = 120°$.

Ответ: 3.

11. 1) $\smile{KM} = 2\angle KTM = 2\cdot 24° = 48°$ (по теореме о вписанном угле) (рис. 7);

2) $\smile{PTM} = 180°$ (так как PM — диаметр окружности), тогда

$\smile{PTK} = \smile{PTM} - \smile{KM} = 180° - 48° = 132°$;

3) $\angle PMK = \frac{1}{2}\smile{PTK} = \frac{1}{2}\cdot 132° = 66°$.

Ответ: 3.

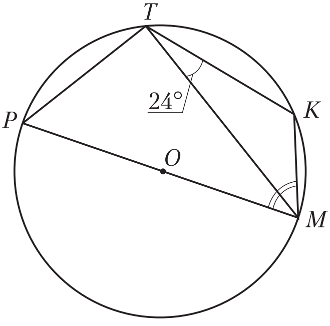


Рис. 7

12. 1) Проведем высоты BH и CM трапеции $ABCD$ (рис. 8). Треугольники ABH и DCM равны (по гипотенузе и острому углу: $\angle A = \angle D$ и $AB = CD$ — по свойству равнобедренной трапеции), значит, $AH = MD$;

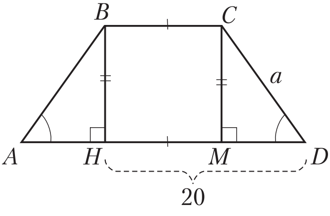


Рис. 8

2) рассмотрим четырехугольник $BHMC$: $BH \perp AD$, $CM \perp AD$, значит, $BH \parallel CM$ и $BC \parallel AD$ (как прямые, содержащие основания трапеции). То есть $BHMC$ — параллелограмм (по определению), тогда $BC = HM$ (по свойству параллелограмма).

Тогда $AH = MD = \frac{AD - BC}{2}$ и $HD = HM + MD = BC + \frac{AD - BC}{2} =$ $= \frac{2BC + AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}$. Так как $HD = 20$, то $\frac{AD + BC}{2} = 20$. По условию задачи $BH = 12$, тогда $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}\cdot BH = 20\cdot 12 = 240$.

Ответ: 4.

13. С помощью формулы $S = pr$ найдем полупериметр данного четырехугольника: $p = \frac{S}{r} = \frac{9}{1} = 9$.

Так как четырехугольник $ABCD$ (рис. 9) описан около окружности, суммы его противоположных сторон равны его полупериметру, т. е. $AD + BC = 9$, значит, $AD = 9 - 5 = 4$.

Ответ: 2.

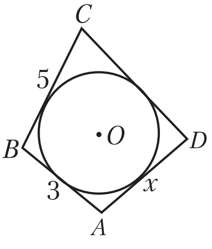


Рис. 9

14. Через вершину C трапеции $ABCD$ проведем прямую, параллельную диагонали BD (рис. 10).

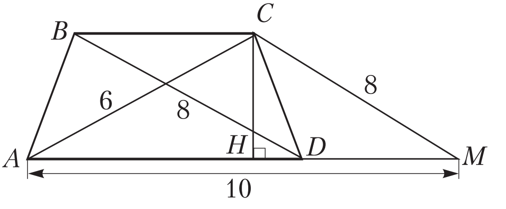


Рис. 10

В полученном треугольнике ACM $AC = 6$, $CM = BD = 8$ и $AM = AD + DM = AD + BC$. Так как средняя линия трапеции равна 5, то сумма ее оснований $AD + BC = 10$, т. е. $AM = 10$.

То есть стороны треугольника ACM равны 6, 8 и 10. Значит, треугольник ACM является прямоугольным (по теореме, обратной теореме Пифагора). По формуле $h = \frac{ab}{c}$ найдем высоту треугольника ACM: $CH = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8.$

Найдем площадь трапеции: $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CH$; $S_{ABCD} = 5 \cdot 4{,}8 = 24.$

Ответ: 2.

15. Треугольник BOC подобен треугольнику AOD по двум углам (рис. 11). Так как $BC : AD = 3 : 5$, то $k = \frac{3}{5}$.

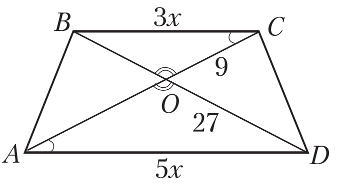


Рис. 11

Так как площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия, то $\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOD}} = \frac{9}{25}$, значит,

$S_{\Delta BOC} = \frac{9}{25} \cdot S_{\Delta AOD} = \frac{9}{25} \cdot 25 = 9.$

$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CDO} = \sqrt{S_{\Delta BOC} \cdot S_{\Delta AOD}} = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15.$

Ответ: 5.

16. Пусть x — длина меньшего основания трапеции, тогда $3x$ — длина большего основания (так как одно из оснований на 200 % больше другого), а $0{,}75(3x)$ — длина высоты трапеции. Площадь трапеции равна произведению высоты трапеции и полусуммы ее оснований, следовательно,

$$\frac{x+3x}{2}\cdot 0{,}75(3x)=72;\ \frac{4x}{2}\cdot\frac{3}{4}(3x)=72;\ \frac{9x^2}{2}=72;\ x^2=16;\ x=4.$$

Найдем высоту трапеции: $0{,}75(3x)=0{,}75(3\cdot 4)=\frac{3}{4}\cdot 12=9.$

Ответ: 9.

17. 1) Проведем высоту CH трапеции и рассмотрим четырехугольник $ABCH$ (рис. 12): $BA\perp AD$, $HC\perp AD$, значит, $BA\parallel CH$ и $BC\parallel AD$ (как прямые, содержащие основания трапеции). То есть $ABCH$ — параллелограмм (по определению), тогда $BC=HA$ и $BA=HC$ (по свойству параллелограмма). Значит, $HD=AD-BC=28-21=7$;

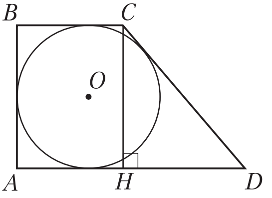


Рис. 12

2) так как трапеция описана около окружности, то $BC+AD=BA+CD$, т. е. $BA+CD=21+28=49$.

Пусть $CD=x$, тогда $HC=BA=49-CD=49-x$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника CHD: $CD^2=HD^2+HC^2$, или $x^2=7^2+(49-x)^2$; $x^2=49+49^2-2\cdot 49x+x^2$; $2\cdot 49x=49+49^2$;

$$2\cdot 49x=49(1+49);\ 2\cdot 49x=49\cdot 50;\ x=\frac{49\cdot 50}{2\cdot 49}=25,$$

тогда $CH=49-25=24$;

3) в то же время высота трапеции равна диаметру вписанной в нее окружности, следовательно, радиус равен половине высоты: $r=CH:2=24:2=12$.

Ответ: 12.

18. 1) Так как в трапецию вписана окружность, то $BC+AD=BA+CD$, т. е. $BA+CD=1+9=10$. В то же время около трапеции описана окружность, значит, данная трапеция — равнобедренная, тогда $BA=CD=10:2=5$;

2) проведем высоты BH и CM трапеции $ABCD$ (рис. 13). Треугольники ABH и DCM равны (по гипотенузе и острому углу: $\angle A=\angle D$ и $AB=CD$ по свойству равнобедренной трапеции), значит, $AH=MD$;

3) рассмотрим четырехугольник $BHMC$: $BH \perp AD$, $CM \perp AD$, значит, $BH \| CM$ и $BC \| HM$ (как прямые, содержащие основания трапеции), т. е. $BHMC$ — параллелограмм (по определению). Тогда $BC = HM$ (по свойству параллелограмма). Получаем

$$AH = MD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{9-1}{2} = 4$$

и $HD = AD - AH = 9 - 4 = 5$;

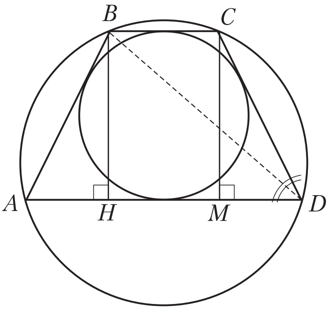


Рис. 13

4) рассмотрим прямоугольный треугольник ABH: $AH = 4$, $AB = 5$. По теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AH^2$; $BH^2 = 25 - 16 = 9$; $BH = 3$;

5) проведем диагональ BD и воспользуемся теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника BDH:

$$BD^2 = BH^2 + DH^2;\ BD^2 = 9 + 25 = 34;\ BD = \sqrt{34};$$

6) так как окружность описана около трапеции $ABCD$, то она описана и около треугольника ABD. С помощью формулы $2R = \dfrac{BD}{\sin\angle A}$ найдем ее радиус. Так как $BD = \sqrt{34}$, $\sin\angle A = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{3}{5}$, то

$$2R = \frac{\sqrt{34}}{\frac{3}{5}} = \frac{5\sqrt{34}}{3};\ R = \frac{5\sqrt{34}}{6}.$$

Тогда $3\sqrt{34} \cdot R = 3\sqrt{34} \cdot \dfrac{5\sqrt{34}}{6} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 34}{6} = 85.$

Ответ: 85.

19. 1) Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника ACD (рис. 14):

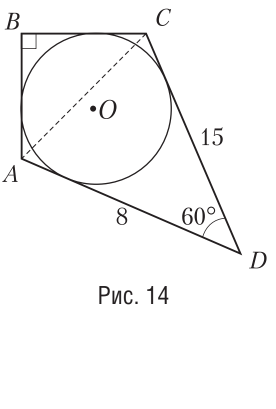


Рис. 14

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC;$$

$$AC^2 = 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60°;$$

$$AC^2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2};$$

$$AC^2 = 64 + 225 - 120 = 169;$$

2) так как четырехугольник описан около окружности, то $BC + AD = BA + CD$, т. е. $BC + 8 = BA + 15$, следовательно, $BC = BA + 7$;

3) рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. По теореме Пифагора

$$AC^2 = AB^2 + BC^2;\ \ 169 = AB^2 + (BA + 7)^2;$$

$$169 = AB^2 + AB^2 + 14\,AB + 49;\ \ 2AB^2 + 14AB - 120 = 0;$$

$AB^2 + 7AB - 60 = 0;$ $AB = 5$, тогда $BC = 5 + 7 = 12.$

Длина меньшей стороны равна 5.

Ответ: 5.

20. 1) Проведем диагональ AC. Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника ACD (рис. 15):

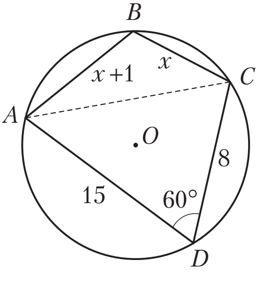


Рис. 15

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC;$$

$$AC^2 = 8^2 + 15^2 - 2\cdot 8\cdot 15\cdot\cos 60°;$$

$$AC^2 = 64 + 225 - 2\cdot 8\cdot 15\cdot\frac{1}{2};$$

$$AC^2 = 64 + 225 - 120 = 169;$$

2) так как четырехугольник вписан в окружность, то

$$\angle B + \angle D = 180°;\ \angle B = 180° - 60° = 120°;$$

3) рассмотрим треугольник ABC. По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC.$$

Пусть $BC = x$, тогда $AB = x + 1$ (по условию).

$$169 = (x+1)^2 + x^2 - 2\cdot(x+1)\cdot x\cdot\cos 120°.$$

Так как $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, то

$$169 = (x+1)^2 + x^2 - 2\cdot(x+1)\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);\ \ x^2 + 2x + 1 + x^2 + x^2 + x - 169 = 0;$$

$$3x^2 + 3x - 168 = 0;\ x^2 + x - 56 = 0;\ x = -8;\ \ x = 7.$$

Таким образом, $BC = 7$; $AB = 7 + 1 = 8$, тогда $BC + AB = 7 + 8 = 15.$

Ответ: 15.

21. 1) Рассмотрим треугольник BCD (рис. 16). Так как $BK = KM = MD$, то $S_{\Delta BCK} = S_{\Delta CKM} = S_{\Delta MCD} = \frac{S_{\Delta BCD}}{3}$.

Тогда $S_{\Delta BCD} = 3S_{\Delta BCK} = 3 \cdot 7 = 21$;

2) проведем BP и DH — высоты трапеции. Заметим, что $S_{\Delta BCD} = \frac{BC \cdot DH}{2}$, $S_{\Delta ABD} = \frac{AD \cdot BP}{2}$. Так как $BP = DH$ (как высоты трапеции) и $AD = 2BC$ (по условию), то $S_{\Delta ABD} = 2S_{\Delta BCD} = 2 \cdot 21 = 42$;

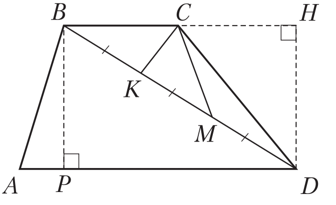


Рис. 16

3) $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = 42 + 21 = 63$.

Ответ: 63.

22. Так как центр окружности лежит на основании трапеции (рис. 17), то вписанный угол ACD опирается на диаметр окружности, значит, $\angle ACD = 90°$, т. е. треугольник ACD — прямоугольный, в котором $AD = 2R = 26$ и $CH = 12$. Пусть $HD = x$, тогда $AH = 26 - x$. Так как $CH^2 = AH \cdot HD$, то составим уравнение:

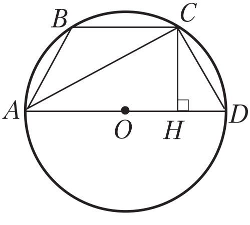


Рис. 17

$$12^2 = (26 - x) \cdot x;\ x^2 - 26x + 144 = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = 18, \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Таким образом, $HD = 8$, $AH = 18$. Длина отрезка AH равна полусумме оснований трапеции, тогда площадь трапеции:

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot CH = 18 \cdot 12 = 216.$$

Ответ: 216.

23. Так как окружность проходит через точки A и C, а ее центр принадлежит AC, то AC — диаметр окружности. Значит, $\angle ABC = \angle AEC = 90°$ и четырехугольник $ABCE$ является прямоугольником (рис. 18). Тогда $BC = 8$.

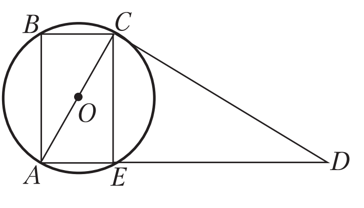


Рис. 18

По свойствам касательной и секущей $CD^2 = AD \cdot ED$, откуда $ED = 18$.

Из прямоугольного треугольника CDE по теореме Пифагора $CE = 12$. Тогда искомая площадь $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{8+26}{2} \cdot 12 = 204$.

Ответ: 204.

24. 1) Продолжим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке K (рис. 19). Полезно помнить, что середины оснований трапеции и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны трапеции, лежат на одной прямой;

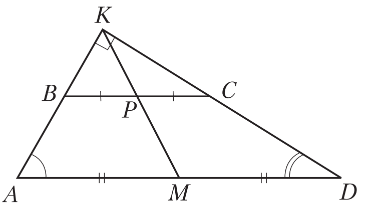


Рис. 19

2) рассмотрим треугольник AKD: $\angle A + \angle D = 90°$ (по условию), тогда $\angle AKD = 180° - (\angle A + \angle D) = 180° - 90° = 90°$, т. е. треугольник AKD является прямоугольным. В этом случае $KM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы). Из прямоугольного треугольника BKC аналогично найдем $KP = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Тогда $PM = KM - KP = 6 - 2 = 4$.

Ответ: 4.

25. 1) Пусть $\angle D = \alpha$, $AK = KB = c$, $CN = a$ и $ND = b$. Тогда по теореме об отрезках касательных $BM = BK = AP = AK = c$, $MC = CN = a$, $PD = ND = b$.

Кроме того, $OK = OM = ON = OP = c$ (рис. 20);

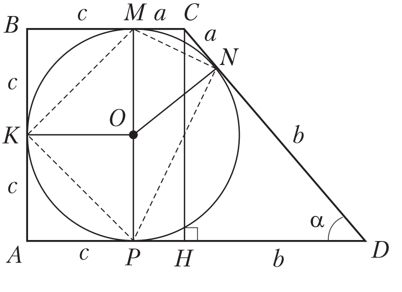


Рис. 20

2) $S_{\Delta KMO} = \frac{c^2}{2}$; $S_{\Delta KPO} = \frac{c^2}{2}$.

В четырехугольнике $POND$ $\angle P + \angle O + \angle N + \angle D = 360°$;

$90° + \angle O + 90° + \alpha = 360°$; $\angle O = 180° - \alpha$.

Значит, $S_{\Delta PNO} = \frac{c^2}{2} \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{c^2}{2} \cdot \sin\alpha$; $S_{\Delta MNO} = \frac{c^2}{2} \cdot \sin\alpha$.

Тогда $S_{KMNP} = S_{\Delta KMO} + S_{\Delta MNO} + S_{\Delta PNO} + S_{\Delta KPO} = c^2 + c^2 \sin\alpha =$
$= c^2(1+\sin\alpha)$;

3) проведем CH — высоту трапеции. Тогда из прямоугольного треугольника CDH:

$CH = CD \cdot \sin\alpha = (a+b)\cdot\sin\alpha.$

С другой стороны,

$CH = AB = 2c$, т. е. $(a+b)\cdot\sin\alpha = 2c;\;\; a+b = \dfrac{2c}{\sin\alpha}.$

В этом случае $S_{ABCD} = \dfrac{BC+AD}{2}\cdot CH = \dfrac{2c+a+b}{2}\cdot 2c = (2c+a+b)\cdot c =$
$= \left(2c+\dfrac{2c}{\sin\alpha}\right)\cdot c = 2c^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right);$

4) по условию задачи $S_{ABCD} = 4\cdot S_{KMNP}$, тогда

$2c^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right) = 4\cdot c^2(1+\sin\alpha);$

$\dfrac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha} = 2(1+\sin\alpha);\quad \sin\alpha = \dfrac{1}{2};\;\; \alpha = 30°.$

Ответ: 30.

Задание 24

Решения

1. 1) $\alpha = 90°$, так как градусная мера вписанного угла, опирающегося на диаметр, равна $90°$;

2) $\alpha = 360° : 4 = 90°$, так как равные хорды стягивают равные дуги и градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается;

3) $\alpha = 45° \cdot 2 = 90°$, так как градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры центрального угла, опирающегося на ту же дугу;

4) $\alpha = 45° \neq 90°$, так как градусные меры вписанных углов, опирающихся на одну дугу, равны;

5) $\alpha = 90°$, так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Ответ: 4.

2. Так как $OA \perp a$ (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной), то $OB > OA$ (рис. 1). По условию $OA = 5$, т. е. $OB > 5$. Из предложенных вариантов подходит только 6,2.

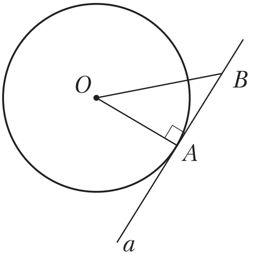


Рис. 1

Ответ: 5.

3. Из предложенных утверждений неверным является только первое, так как вписанный угол равен половине градусной меры соответствующего центрального угла. Таким образом, верными являются утверждения 2; 3; 4; 5.

Ответ: 2.

4. Утверждение 1 — верно, так как $\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается) и $\angle CBE = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ (угол между касательной BE и хордой BC равен половине градусной меры дуги, заключенной между ними) (рис. 2).

Утверждение 2 — верно, так как

$$\angle CAD + \angle CBD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DBC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DAC} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{DBC} + \overset{\frown}{DAC}\right) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°.$$

Утверждение 3 — неверно, так как по теореме об отрезках пересекающихся хорд $AK \cdot KB = DK \cdot KC$.

Утверждение 4 — верно.

$EB^2 = EC \cdot EA$ по свойству касательной и секущей.

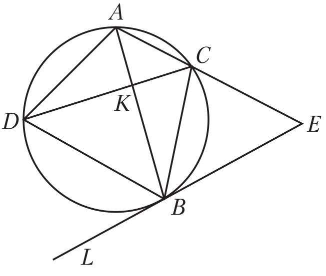


Рис. 2

Утверждение 5 — верно, так как $\angle E$ у ΔAEB и ΔBEC общий, а $\angle CAB = \angle CBE$ (см. утверждение 1).

Ответ: 3.

5. 1) $\overset{\frown}{ACB} = 136°$ (градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается) (рис. 3);

2) $\overset{\frown}{AMB} = 360° - \overset{\frown}{ACB} = 360° - 136° = 224°$;

3) $\angle ACB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMB} = \frac{1}{2}\cdot 224° = 112°$ (градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается).

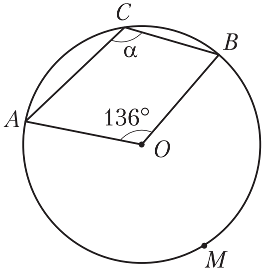


Рис. 3

Ответ: 2.

6. 1) В равнобедренном треугольнике BOA ($BO = OA = r$) проведем высоту OH (рис. 4).

Тогда $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot r\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$;

2) рассмотрим прямоугольный треугольник OHA:

$$\cos\angle OAH = \frac{AH}{OA};\ \cos\angle OAH = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\angle OAH = 30°$;

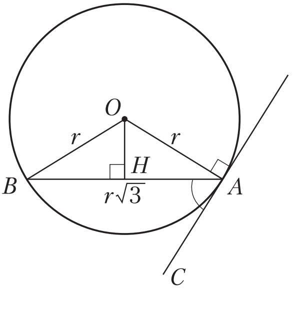


Рис. 4

3) $OA \perp AC$ (как радиус, проведенный в точку касания), тогда $\angle OAC = 90°$; $\angle BAC = \angle OAC - \angle OAH = 90° - 30° = 60°$.

Ответ: 5.

7. 1) Так как из точки A проведены две касательные, то по теореме об отрезках касательных $AB = AC$ и $\angle OAC = \angle OAB$ (рис. 5);

2) рассмотрим прямоугольный треугольник OAC: $AC = 5\sqrt{3}$; $OC = 5$. Тогда $\operatorname{tg}\angle OAC = \dfrac{OC}{CA}$; $\operatorname{tg}\angle OAC = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

$\angle OAC = 30°$. Таким образом,
$\angle BAC = 2 \cdot \angle OAC = 2 \cdot 30° = 60°$.

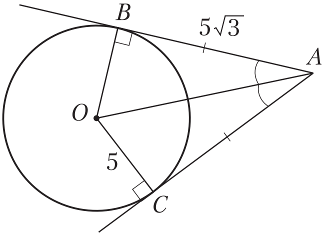


Рис. 5

Ответ: 1.

8. 1) По условию задачи $AC = 12$; $AB = 20$; $AO = 17$ (рис. 6).

Пусть $OM = ON = r$, тогда
$AM = AO - OM = 17 - r$
и $AN = AO + ON = 17 + r$;

2) по свойству секущих к окружности $AC \cdot AB = AM \cdot AN$, тогда
$12 \cdot 20 = (17 - r) \cdot (17 + r)$;

$240 = 289 - r^2$; $r^2 = 49$; $r = 7$.

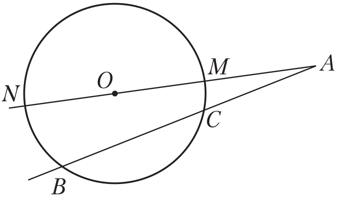


Рис. 6

Ответ: 4.

9. 1) Проведем перпендикуляр AM из точки A окружности на диаметр (рис. 7), тогда $AM = 12$. Продолжим AM до пересечения с окружностью в точке B. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, то $MB = AM = 12$;

2) поскольку $DM : MC = 16 : 9$, то

$DM = 16x$; $MC = 9x$;

3) по теореме об отрезках пересекающихся хорд $DM \cdot MC = AM \cdot MB$, т. е.

$16x \cdot 9x = 12 \cdot 12$; $x^2 = \dfrac{12 \cdot 12}{16 \cdot 9} = 1$; $x = 1$.

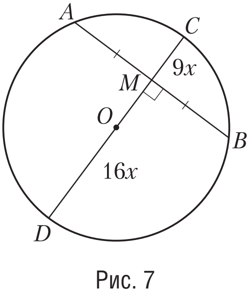


Рис. 7

Тогда

$$CD = DM + MC = 16x + 9x = 25x = 25 \cdot 1 = 25 \text{ и } DO = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5.$$

Ответ: 5.

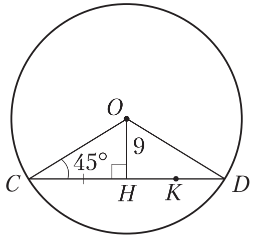


Рис. 8

10. 1) Проведем $OH \perp CD$ (рис. 8), следовательно, $OH = 9$ (по определению расстояния от точки до прямой). Тогда $CH = HD$ (перпендикуляр, проведенный из центра окружности к хорде, делит эту хорду пополам);

2) рассмотрим прямоугольный треугольник OHC. $\angle COH = 90° - \angle OCH = 90° - 45° = 45°$, т. е. треугольник OHC — равнобедренный (по признаку). Тогда $CH = OH = 9$ и $CD = 2CH = 18$;

3) так как $CK = 3KD$, то $CK = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4} \cdot 18 = 13{,}5$.

Ответ: 1.

11. 1) $\angle ABD = \angle ACD$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AD) и $\angle AKB = \angle CKD$ (как вертикальные), тогда треугольники AKB и CKD подобны по двум углам (рис. 9);

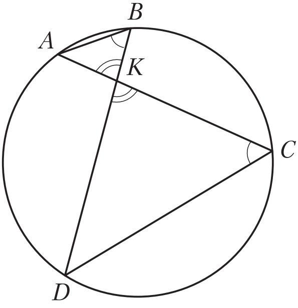


Рис. 9

2) найдем коэффициент подобия:

$$k = \frac{KC}{BK} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}.$$

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия, значит,

$$\frac{P_{\Delta CKD}}{P_{\Delta AKB}} = k; \ \frac{P_{\Delta CKD}}{P_{\Delta AKB}} = \frac{5}{2}; \ \frac{P_{\Delta CKD}}{28} = \frac{5}{2}; \ P_{\Delta CKD} = 70.$$

Ответ: 2.

12. 1) Проведем OB и OC — радиусы в точки касания, тогда $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$ (рис. 10);

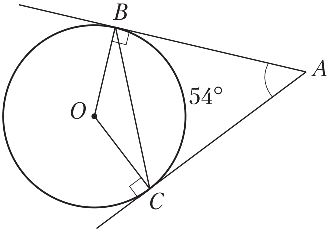


Рис. 10

2) $\angle BOC = \smile BC = 54°$, так как центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается;

3) рассмотрим четырехугольник $OBAC$:

$$\angle OBA + \angle BOC + \angle OCA + \angle CAB = 360°;$$

$$90° + 54° + 90° + \angle CAB = 360°; \ \angle CAB = 360° - (90° + 54° + 90°) = 126°.$$

Ответ: 4.

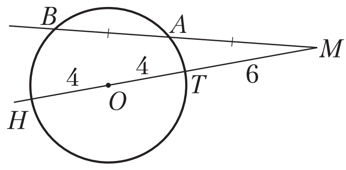


Рис. 11

13. Так как $MO = 10$, OT — радиус окружности, то $MT = MO - OT = 10 - 4 = 6$.

Секущая AB делится окружностью пополам, т. е. $AM = AB = x$ (рис. 11).

По теореме об отрезках секущих $MA \cdot MB = MT \cdot MH$, тогда $x \cdot 2x = 6 \cdot 14$; $x^2 = 42$; $x = \sqrt{42}$. Таким образом, $BM = 2\sqrt{42}$.

Ответ: 3.

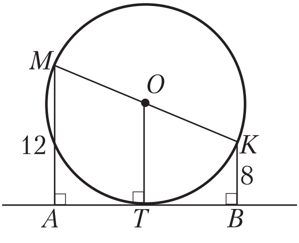


Рис. 12

14. Проведем $OT \perp AB$ — радиус в точку касания. Отрезок OT является средней линией трапеции $AMKB$, тогда $OT = \dfrac{AM + KB}{2}$;

$OT = \dfrac{12+8}{2} = 10$ (рис. 12).

OT — радиус окружности, тогда ее диаметр равен 20.

Ответ: 5.

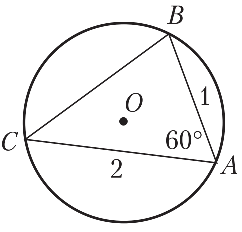


Рис. 13

15. Так как вписанный угол CAB (рис. 13) опирается на дугу 120°, то по теореме о вписанном угле $\angle CAB = \dfrac{1}{2} \cdot 120° = 60°$.

В треугольнике ABC по теореме косинусов найдем длину стороны CB:

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos\angle CAB$;

$CB^2 = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2}$; $CB^2 = 3$; $CB = \sqrt{3}$.

По теореме синусов $2R = \dfrac{CB}{\sin\angle CAB}$; $2R = \dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$; $R = 1$.

Ответ: 3.

16. 1) $\smile AC = 2\angle ABC = 2 \cdot 50° = 100°$ (по теореме о вписанном угле) (рис. 14);

2) $\smile ABC = 360° - \smile AC = 360° - 100° = 260°$;

3) так как $\smile{AB} : \smile{BC} = 5:8$, то пусть $\smile{AB} = 5x$; $\smile{BC} = 8x$. Тогда $5x + 8x = 260°$; $13x = 260°$; $x = 260° : 13 = 20°$, т. е. $\smile{BC} = 8 \cdot 20° = 160°$.

По теореме о вписанном угле

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\smile{BC} = \frac{1}{2} \cdot 160° = 80°.$$

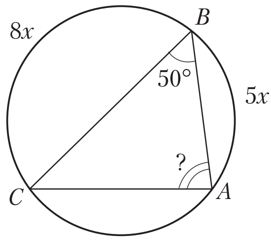


Рис. 14

Ответ: 80.

17. 1) $\smile{BC} = 2\angle BAC = 2 \cdot 60° = 120°$ (по теореме о вписанном угле) (рис. 15);

2) $\angle BOC = \smile{BC} = 120°$, так как центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается;

3) так как треугольник ABC вписан в окружность, то $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$;

$$2R = \frac{4}{\sin 60°} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}};\ R = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

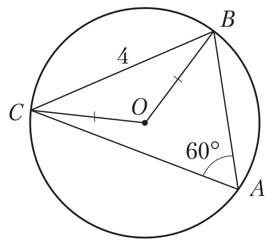


Рис. 15

Таким образом, $BO = CO = R = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$;

4) $S_{\Delta BOC} = \dfrac{1}{2} \cdot CO \cdot BO \cdot \sin\angle COB$;

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sin 120° = \frac{8}{3} \cdot \sin(180° - 60°) = \frac{8}{3} \cdot \sin 60° =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$2\sqrt{3} \cdot S = 2\sqrt{3} \cdot S_{\Delta BOC} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = 8.$$

Ответ: 8.

18. 1) Проведем $OH \perp PK$ (рис. 16), тогда $PH = HK$ (перпендикуляр, проведенный из центра окружности к хорде, делит эту хорду пополам);

$$PH = \frac{PM + MK}{2} = \frac{7+8}{2} = 7{,}5,\ MH = 7{,}5 - 7 = 0{,}5;$$

2) рассмотрим прямоугольный треугольник OHP. По теореме Пифагора $OH^2 = PO^2 - PH^2$;

$$OH = \sqrt{9^2 - 7{,}5^2} = \sqrt{(9-7{,}5)(9+7{,}5)} = \sqrt{1{,}5 \cdot 16{,}5} =$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{33}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{11};$$

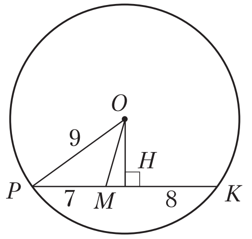


Рис. 16

3) длину искомого отрезка найдем, воспользовавшись теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника OMH:

$$OM^2 = OH^2 + MH^2;\ OM = \sqrt{\frac{99}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: 5.

19. 1) Заметим, что центры окружностей и точка пересечения прямых лежат на прямой a, которая содержит биссектрисы углов MKC и AKB (рис. 17);

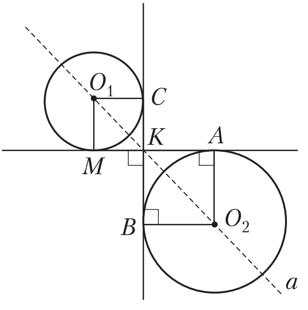


Рис. 17

2) $O_1O_2 = O_1K + O_2K$, где O_1K; O_2K — диагонали квадратов O_1MKC и O_2BKA соответственно. Вместе с тем $O_1C = r_1 = 3\sqrt{2}$; $O_2B = r_2 = 8\sqrt{2}$. Воспользуемся формулой, связывающей длину диагонали квадрата с длиной его стороны $\left(d = a\sqrt{2}\right)$, и найдем:

$O_1K = O_1C\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6;$
$O_2K = O_2B\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 16.$
Тогда $O_1O_2 = O_1K + O_2K = 6 + 16 = 22.$

Ответ: 22.

20. 1) Проведем $OH \perp AB$ (рис. 18), следовательно, $OH = \sqrt{3}$ (по определению расстояния от точки до прямой). Тогда $BH = HA$ (перпендикуляр, проведенный из центра окружности к хорде, делит эту хорду пополам);

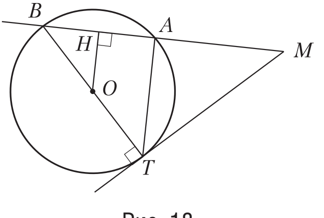


Рис. 18

2) $OT \perp TM$ (как радиус, проведенный в точку касания), тогда $\angle BTM = 90^\circ$ и треугольник BTM является прямо-

угольным, радиус описанной около него окружности равен половине его гипотенузы $\left(R_{\Delta BMT}=\frac{1}{2}BM\right)$;

3) рассмотрим треугольник ABT: $BH=HA$ (по доказанному), $OT=BO$ (как радиусы окружности), значит, отрезок OH является средней линией треугольника ABT (по определению). Тогда по свойству средней линии треугольника $AT=2OH=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ и $AT\parallel OH$, а так как $OH\perp AB$, то и $AT\perp AB$, т. е. треугольник AMT является прямоугольным и радиус описанной около него окружности равен половине его гипотенузы $\left(R_{\Delta AMT}=\frac{1}{2}TM\right)$;

4) рассмотрим прямоугольный треугольник BMT: $BT=2BO=4\sqrt{3}$ и $AT=2\sqrt{3}$. Тогда

$$BA^2=BT^2-AT^2;\ BA^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=48-12=36;\ BA=6.$$

Так как отрезок AT является высотой прямоугольного треугольника BMT, проведенной из вершины прямого угла, то

$$BT^2=BA\cdot BM;\ BM=\frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2}{6}=8.$$

Тогда $TM^2=BM^2-BT^2;\ TM^2=8^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2=64-48=16;\ TM=4;$

5) $R_{AMT}+R_{BMT}=\frac{1}{2}TM+\frac{1}{2}BM=\frac{1}{2}\cdot4+\frac{1}{2}\cdot8=2+4=6.$

Ответ: 6.

21. 1) Заметим, что треугольники A_1OA_2 и A_2OA_3 (рис. 19) являются равносторонними (так как стороны A_1A_2 и A_2A_3 равны радиусу окружности). Тогда

$\angle A_1A_2A_3=\angle A_1A_2O+\angle A_3A_2O=60^\circ+60^\circ=120^\circ$;

2) пусть $\angle A_3OA_4=\angle A_4OA_5=\ldots=$ $=\angle A_{12}OA_1=x$ (центральные углы, стягивающие равные хорды, равны), тогда

$10x+60^\circ+60^\circ=360^\circ;\ 10x=240^\circ;\ x=24^\circ$;

3) так как треугольники A_3OA_4; A_4OA_5; ...; $A_{12}OA_1$ — равнобедренные, то

$\angle OA_3A_4=\angle OA_4A_3=\angle OA_4A_5=$

$=\ldots=\angle OA_{12}A_1=\frac{180^\circ-24^\circ}{2}=78^\circ.$

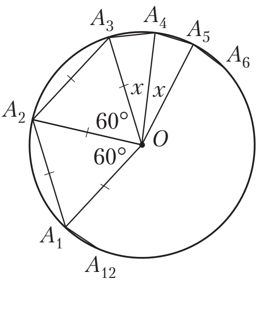


Рис. 19

Тогда $\angle A_2A_3A_4 = \angle A_2A_3O + \angle OA_3A_4 = 60° + 78° = 138°$ и $\angle A_3A_4A_5 = \angle A_4A_5A_6 = \ldots = \angle A_{11}A_{12}A_1 = \angle A_3A_4O + \angle OA_4A_5 = 78° + 78° = 156°$.

Градусная мера среднего по величине угла двенадцатиугольника равна 138°.

Ответ: 138.

22. Так как $\angle AO_1B = 120°$, то отрезок AB можно рассматривать как сторону правильного треугольника, вписанного в окружность (рис. 20). С помощью формулы $a_3 = R\sqrt{3}$ выразим радиус первой окружности через длину отрезка AB: $R_1 = \frac{AB}{\sqrt{3}}$.

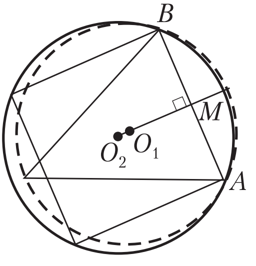


Рис. 20

Так как $\angle AO_2B = 90°$, то отрезок AB можно рассматривать как сторону правильного четырехугольника, вписанного в окружность. С помощью формулы $a_4 = R\sqrt{2}$ выразим радиус второй окружности через длину отрезка AB: $R_2 = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

Длина отрезка O_2M равна половине стороны соответствующего квадрата , т. е. $O_2M = \frac{AB}{2}$, а длина отрезка O_1M равна радиусу окружности, вписанной в соответствующий правильный треугольник, т. е. $O_1M = \frac{R_1}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{3}}$.

Тогда расстояние между центрами окружности равно:

$O_2O_1 = O_2M - O_1M$;

$$O_2O_1 = \frac{AB}{2} - \frac{AB}{2\sqrt{3}} = \frac{AB}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{AB}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

23. Так как окружности вписаны в угол ABP, то их центры лежат на биссектрисе этого угла. Поскольку $\angle ABP = 90°$, то $\angle ABO_2 = 45°$, тогда треугольники BCO_1 и BAO_2 являются прямоугольными и равнобедренными, значит, $BC = CO_1 = 5$, а $BA = AO_2 = 9$ (рис. 21).

Тогда $AC = AB - BC = 9 - 5 = 4$.

Ответ: 4.

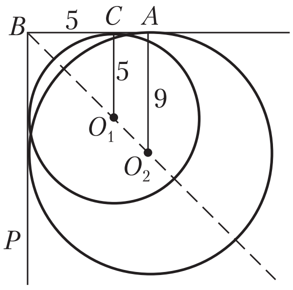


Рис. 21

24. 1) Так как точка D делит дугу AC пополам, то $\angle CBD = \angle ABD$ (как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Тогда BD — биссектриса угла ABC (рис. 22);

2) из треугольника ABC по теореме о биссектрисе треугольника находим, что $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AB}{BC}$. $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{3}$ (по условию), таким образом, $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{2}{3}$, или $AE = 2x$; $CE = 3x$;

3) по теореме об отрезках пересекающихся хорд $AE \cdot EC = KE \cdot ME$, т. е.

$$2x \cdot 3x = 4 \cdot 6;\ x^2 = \frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 4;\ x = 2.$$

Тогда

$AC = AE + CE = 2x + 3x = 5x = 5 \cdot 2 = 10.$

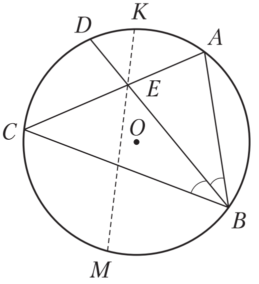


Рис. 22

Ответ: 10.

25. 1) Так как касательные проведены через концы диаметра, то $BA \perp BD$ и $BA \perp CA$, т. е. $BD \parallel AC$ (рис. 23);

2) по теореме об отрезках касательных $TD = DB = \sqrt{2}$ и $TC = CA = \sqrt{12{,}5}$, тогда

$$CD = TD + TC = \sqrt{2} + \sqrt{12{,}5} = \sqrt{2} + \sqrt{\frac{25}{2}} =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{5}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2};$$

3) в прямоугольной трапеции $CDBA$ проведем высоту DH, тогда

$$HA = DB = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad CH = CA - HA =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

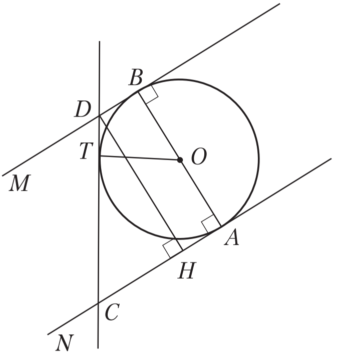


Рис. 23

По теореме Пифагора (в треугольнике CDH) найдем

$$DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49\cdot 2}{4} - \frac{9\cdot 2}{4}} = \sqrt{\frac{40\cdot 2}{4}} =$$
$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Тогда $r = \frac{AB}{2} = \frac{DH}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ и $r^2 = 5$.

Ответ: 5.

Задание 25

Решения

1. Неверной является формула под номером 4, так как длина окружности вычисляется по формуле $C_{\text{окр}} = 2\pi r$.

Ответ: 4.

2. Воспользуемся формулой $S_n = (n-2)\cdot 180°$ и найдем сумму внутренних углов правильного двенадцатиугольника:

$$S_{12} = (12-2)\cdot 180° = 10\cdot 180° = 1800°.$$

Ответ: 1.

3. Неверным будет второе утверждение, поскольку ромб не является правильным многоугольником, так как у него есть неравные углы.

Ответ: 2.

4. 1) Заштрихованная фигура представляет собой сектор с радиусом, равным 6, и углом, равным $360° - 120° = 240°$ (рис. 1);

2) воспользуемся формулой площади сектора $S_{\text{сект}} = \dfrac{\pi r^2}{360°}\cdot\alpha$ и найдем

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi\cdot 6^2}{360°}\cdot 240° = \frac{\pi\cdot 36}{360°}\cdot 240° = \frac{\pi}{10°}\cdot 240° = 24\pi.$$

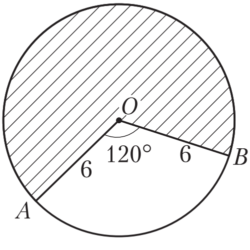


Рис. 1

Ответ: 5.

5. 1) $\smile BC = 2\angle BAC = 2\cdot 40° = 80°$ (по теореме о вписанном угле) (рис. 2);

2) с помощью формулы длины дуги $\left(l_{\smile CB} = \dfrac{\pi r}{180°}\cdot\alpha\right)$ найдем радиус окружности:

$$16 = \frac{\pi r}{180°}\cdot 80°;\ r = \frac{16\cdot 180°}{\pi\cdot 80°} = \frac{36}{\pi};$$

3) по формуле $C_{\text{окр}} = 2\pi r$ найдем длину окружности: $C_{\text{окр}} = 2\pi\cdot\dfrac{36}{\pi} = 72.$

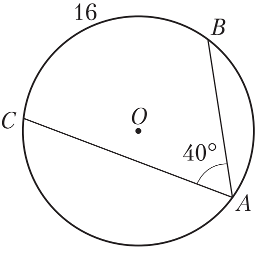


Рис. 2

Ответ: 3.

6. 1) $\overset{\frown}{BC} = 2\angle BAC = 2 \cdot 36° = 72°$ (по теореме о вписанном угле), тогда $\angle COB = \overset{\frown}{BC} = 72°$ (так как центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается) (рис. 3);

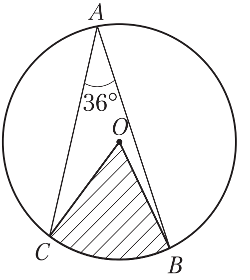


Рис. 3

2) воспользуемся формулой площади сектора $\left(S_{\text{сект}} = \dfrac{\pi r^2}{360°} \cdot \alpha\right)$ и найдем

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 5^2}{360°} \cdot 72° = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 72°}{360°} = \frac{25\pi}{5} = 5\pi.$$

Ответ: 4.

7. 1) Воспользуемся формулой $S_n = (n-2) \cdot 180°$ и найдем сумму внутренних углов правильного десятиугольника:

$S_{10} = (10-2) \cdot 180° = 8 \cdot 180° = 1440°$;

2) у правильного десятиугольника все внутренние углы равны между собой, тогда градусная мера одного угла равна:

$$\frac{S_{10}}{10} = \frac{1440°}{10} = 144°.$$

Ответ: 3.

8. Так как n-угольник является правильным, то $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots = \angle A_{n-1}OA_n = \angle A_nOA_1 = 20°$ (рис. 4). Тогда $n = \dfrac{360°}{20°} = 18$, т. е. n-угольник имеет 18 сторон.

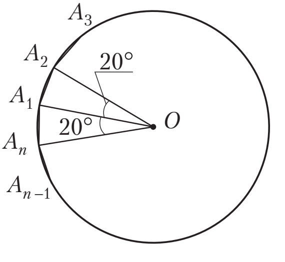


Рис. 4

Ответ: 1.

9. Пусть r_1 — радиус исходной окружности, тогда ее длина вычисляется по формуле $C_1 = 2\pi r_1$, а площадь ограниченного ею круга можно узнать, если использовать формулу $S_1 = \pi r_1^2$.

Известно, что площадь круга уменьшилась в 441 раз, тогда $S_2 = \frac{S_1}{441}$ и $\pi r_2^2 = \frac{\pi r_1^2}{441}$; $r_2^2 = \frac{r_1^2}{441}$; $r_2 = \frac{r_1}{21}$.

Выразим длину окружности, полученную после уменьшения радиуса: $C_2 = 2\pi r_2 = 2\pi \cdot \frac{r_1}{21} = \frac{2\pi r_1}{21} = \frac{C_1}{21}$.

То есть длина окружности уменьшится в 21 раз.

Ответ: 5.

10. 1) Рассмотрим треугольник $A_1A_2A_3$ (рис. 5). Так как треугольник правильный, а периметр равен $\sqrt{3}$, то его сторона равна $a_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Воспользуемся формулой $a_3 = 2r\sqrt{3}$ и найдем радиус вписанной в треугольник окружности:

$\frac{\sqrt{3}}{3} = 2r\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{6}$;

2) квадрат $B_1B_2B_3B_4$ вписан в окружность радиусом $\frac{1}{6}$.

С помощью формулы $a_4 = R\sqrt{2}$ найдем сторону квадрата:

$$a_4 = \frac{1}{6}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Площадь квадрата равна:

$$S = a_4^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

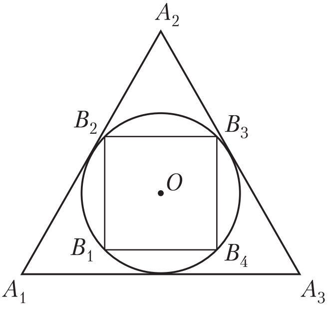


Рис. 5

Ответ: 2.

11. 1) Отрезок AC — меньшая диагональ правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 6).

Найдем градусную меру внутреннего угла B данного шестиугольника. Так как сумма его внутренних углов равна $S_6 = (6-2)\cdot 180° = 4\cdot 180° = 720°$ (использована формула $S_n = (n-2)\cdot 180°$), то $\angle B = \frac{S_6}{6} = \frac{720°}{6} = 120°$;

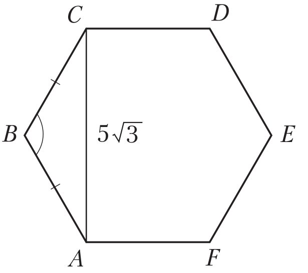


Рис. 6

2) рассмотрим равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$ как стороны правильного шестиугольника). $\angle B = 120°$ (по доказанному), тогда $\angle BAC = \angle BCA =$ $= \dfrac{180° - \angle B}{2} = \dfrac{180° - 120°}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°.$

По теореме синусов $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = \dfrac{AC}{\sin\angle B}$;

$\dfrac{BC}{\sin 30°} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sin 120°}$. Так как $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$,

а $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $BC = \dfrac{5\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 5$. Тогда периметр шестиугольника $P_{ABCDEF} = 6\cdot BC = 6\cdot 5 = 30.$

Ответ: 4.

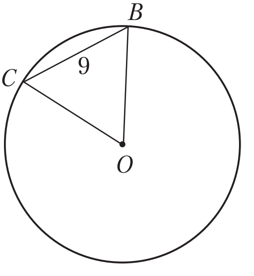


Рис. 7

12. 1) С помощью формулы $C_{\text{окр}} = 2\pi r$ найдем радиус окружности: $18\pi = 2\pi\cdot r$; $r = 9$;

2) рассмотрим треугольник COB (рис. 7): $CO = OB = r = 9$; $CB = 9$ (по условию), т. е. треугольник COB — равносторонний. Тогда $\angle COB = 60°$ и $\overset{\frown}{BC} = \angle COB = 60°$, так как градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается;

3) воспользуемся формулой $l_{\text{дуги}} = \dfrac{\pi r}{180°}\cdot\alpha$ и найдем $l_{\overset{\frown}{CB}} = \dfrac{\pi\cdot 9}{180°}\cdot 60° = 3\pi.$

Ответ: 5.

13. Диагональ правильного многоугольника, проходящая через центр описанной около него окружности, является диаметром d этой окружности. В правильном 80-угольнике 40 диагоналей проходят через центр описанной окружности, значит, $40d = 80$; $d = 2$. По формуле $C = \pi d$ найдем длину описанной окружности: $C = 2\pi$.

Ответ: 2.

14. Найдем длину окружности радиусом $R = 12$ по формуле $C = 2\pi R = 24\pi$.

Тогда длина дуги, составляющей $\frac{7}{12}$ длины окружности, равна $\frac{7}{12} \cdot 24\pi = 14\pi$. Найдем радиус окружности, длина которой равна длине данной дуги: $2\pi r = 14\pi$; $r = 7$.

Ответ: 3.

15. По формуле $S = \pi r^2$ найдем радиус круга: $r^2 = \frac{S}{\pi}$; $r^2 = \frac{9}{\pi}$; $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$.

В прямоугольном треугольнике OMK (рис. 8) $OK = r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$,

$\angle KMO = \frac{1}{2}\angle BMC = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$, тогда $MO = 2OK = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$

и $AM = MO + r = \frac{9}{\sqrt{\pi}}$.

Таким образом, радиус сектора $R = \frac{9}{\sqrt{\pi}}$.

Найдем площадь сектора:

$$S = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha;\ S = \frac{\pi\left(\frac{9}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{360°} \cdot 60° = \frac{81}{6} = 13{,}5.$$

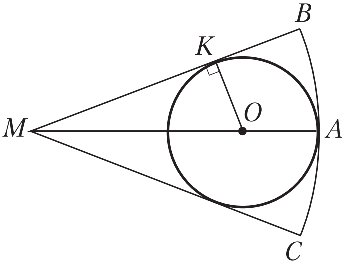


Рис. 8

Ответ: 4.

16. 1) Воспользуемся формулой $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и найдем сторону правильного треугольника, вписанного в окружность:

$$24\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ a^2 = 4 \cdot 24 = 16 \cdot 6;\ a = 4\sqrt{6};$$

2) по формуле $a_3 = R\sqrt{3}$ найдем радиус описанной около треугольника окружности: $4\sqrt{6} = R\sqrt{3}$; $R = 4\sqrt{2}$;

3) так как шестиугольник описан около окружности радиусом $4\sqrt{2}$, найдем сторону этого шестиугольника по формуле $a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$:

$$a_6 = \frac{2 \cdot 4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

4) найдем площадь правильного шестиугольника:

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot\left(\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3\cdot\frac{64\cdot 2}{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3}.$$

$$\frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 64.$$

Ответ: 64.

17. 1) Так как $\angle AOB = 120°$, то отрезок AB можно рассматривать как сторону правильного треугольника, вписанного в окружность (рис. 9). С помощью формулы $a_3 = R\sqrt{3}$ найдем радиус окружности:

$$8\sqrt{6} = R\sqrt{3};\ \ R = \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{2};$$

2) так как $\angle DOC = 90°$, то отрезок DC можно рассматривать как сторону правильного четырехугольника, вписанного в окружность. С помощью формулы $a_4 = R\sqrt{2}$ найдем длину отрезка DC: $DC = R\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 16.$

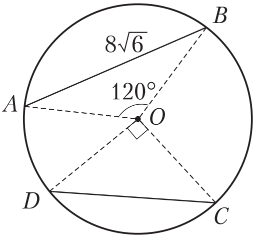


Рис. 9

Ответ: 16.

18. Количество диагоналей выпуклого n-угольника можно вычислить по формуле $\frac{n(n-3)}{2}$. Тогда количество диагоналей выпуклого семиугольника равно $\frac{7\cdot(7-3)}{2} = \frac{7\cdot 4}{2} = 14.$

Ответ: 14

19. 1) Сумма внутренних углов правильного многоугольника равна $\alpha\cdot n = (n-2)\cdot 180°$;

2) найдем сумму внешних углов правильного многоугольника (рис. 10). Так как внешним углом многоугольника называется угол, смежный с внутренним, то $\alpha + \beta = 180°$, тогда $\beta = 180° - \alpha$. Сумма внешних углов равна $n\cdot\beta = n\cdot(180° - \alpha) = n\cdot 180° - n\cdot\alpha = n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° =$ $= n\cdot 180° - n\cdot 180° + 360° = 360°$;

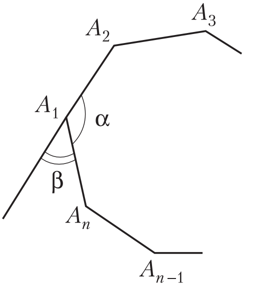


Рис. 10

3) по условию задачи известно, что сумма внутренних углов правильного многоугольника в 3 раза больше суммы его внешних углов, т. е.

$(n-2)\cdot 180° = 3\cdot 360°;\ n-2=6;\ n=8.$

Таким образом, многоугольник является правильным восьмиугольником. Так как его сторона равна 10, то периметр равен $8\cdot 10 = 80$.

Ответ: 80.

20. 1) Пусть x — радиус окружности;

2) по формуле $a_3 = 2r\sqrt{3}$ выразим сторону треугольника, описанного около окружности: $a_3 = 2x\sqrt{3}$. Тогда площадь этого треугольника

$$S_1 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(2x\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{4\cdot x^2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\,x^2;$$

3) сторону треугольника, вписанного в окружность, выразим с помощью формулы $a_3 = R\sqrt{3}$. Тогда $a_3 = x\sqrt{3}$, и площадь этого треугольника $S_2 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(x\sqrt{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}\,x^2}{4};$

4) найдем искомое отношение: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\sqrt{3}\,x^2}{\frac{3\sqrt{3}\,x^2}{4}} = 4.$

Ответ: 4.

21. 1) Пусть $AB = x$ (рис. 11);

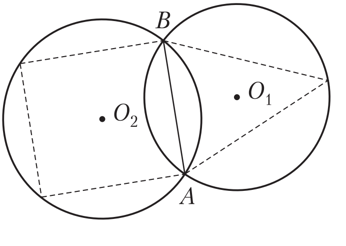


Рис. 11

2) так как хорда AB является стороной правильного треугольника, вписанного в окружность с центром O_1, то через формулу $a_3 = R\sqrt{3}$ выразим $R_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Тогда $S_1 = \pi R_1^2 = \pi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\pi\cdot x^2}{3};$

3) вместе с тем хорда AB является стороной правильного четырехугольника, вписанного в окружность с центром O_2. Воспользуемся формулой $a_4 = R\sqrt{2}$ и выразим с ее помощью $R_2 = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

Тогда $S_2 = \pi R_2^2 = \pi\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{\pi\cdot x^2}{2}$;

4) $3\cdot\dfrac{S_1}{S_2} = 3\cdot\dfrac{\dfrac{\pi\cdot x^2}{3}}{\dfrac{\pi\cdot x^2}{2}} = 3\cdot\dfrac{2}{3} = 2.$

Ответ: 2.

22. 1) Пусть AB — сторона правильного многоугольника (рис. 12);

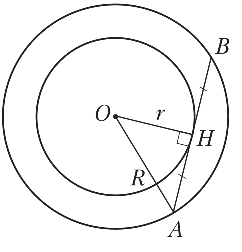


Рис. 12

2) $S_{\text{кольца}} = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right)$. По условию $S_{\text{кольца}} = 64\pi$, тогда $64\pi = \pi\left(R^2 - r^2\right)$; $R^2 - r^2 = 64$;

3) в прямоугольном треугольнике AOH по теореме Пифагора находим:

$AH^2 = OA^2 - OH^2 = R^2 - r^2 = 64$; $AH = 8$.

Тогда $AB = 2\cdot AH = 2\cdot 8 = 16$.

Ответ: 16.

23. 1) Пусть AB — сторона a_n правильного n-угольника. Воспользуемся формулами $a_n = 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ и $a_n = 2r\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, где a_n — сторона правильного n-угольника, R и r — радиусы описанной около n-угольника и вписанной в него окружностей соответственно (рис. 13).

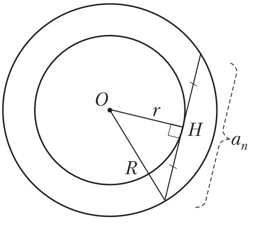


Рис. 13

Тогда $R = \dfrac{a_n}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$ и $r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$;

2) по условию задачи $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Вместе с тем

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r} = \frac{\dfrac{a_n}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}}{\dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)},$$

тогда $\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$; $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\frac{\pi}{n} = 30°$; $n = \frac{\pi}{30°} = \frac{180°}{30°} = 6$.

Таким образом, правильный n-угольник является шестиугольником. Так как его периметр равен 12, то длина стороны: $12 : 6 = 2$. По формуле $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ найдем площадь правильного шестиугольника:

$$S = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

Тогда $\sqrt{3} \cdot S = \sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 18$.

Ответ: 18.

24. Воспользуемся формулой, связывающей длину стороны правильного многоугольника с радиусом описанной около него окружности: $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$.

Тогда $\frac{C}{a_n} = \frac{2\pi R}{2R\sin\frac{180°}{n}}$; $2\pi = \frac{\pi}{\sin\frac{180°}{n}}$; $\sin\frac{180°}{n} = \frac{1}{2}$; $\frac{180°}{n} = 30°$; $n = 6$.

Ответ: 6.

25. Рассмотрим треугольник, вершинами которого являются центры окружностей (рис. 14). Длины сторон полученного треугольника равны:

$$O_1O_2 = O_1A + AO_2 = 4 + 6 = 10;$$
$$O_2O_3 = O_2M + MO_3 = 6 + 2 = 8;$$
$$O_1O_3 = O_1B + BO_3 = 4 + 2 = 6.$$

Так как $6^2+8^2=10^2$, то треугольник $O_1O_2O_3$ является прямоугольным с гипотенузой O_1O_2.

Окружность, проходящая через центры окружностей, описана около треугольника $O_1O_2O_3$. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы, т. е. $R=\frac{1}{2}O_1O_2=\frac{1}{2}\cdot 10=5$.

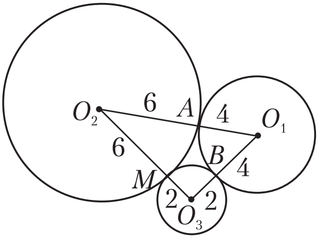


Рис. 14

Тогда длина окружности $C=2\pi R=10\pi$, а значение искомого выражения равно 10.

Ответ: 10.

Содержание