Национальный институт образования

Факультативные занятия

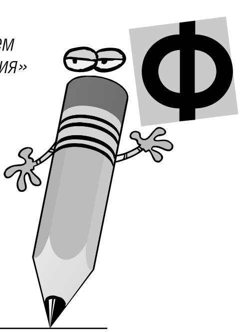
С. А. Гуцанович, Н. В. Костюкович

Математика
6 класс
Путешествие с математикой

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание



Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721
Г93

Серия основана в 2010 году

Гуцанович, С. А.

Г93 Математика. 6 класс. Путешествие с математикой : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / С. А. Гуцанович, Н. В. Костюкович. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 144 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-533-117-0.

Пособие составлено в соответствии с учебной программой факультативного курса. Содержит интересные факты и занимательные задачи, а также знакомит учеников с приемами устных и письменных вычислений.

Предназначено учащимся 6 классов для использования на факультативных занятиях по математике.

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Гуцанович Сергей Аркадьевич
Костюкович Наталья Владимировна

МАТЕМАТИКА. 6 КЛАСС

Путешествие с математикой

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 13.09.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 4,61. Доп. тираж 1500 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

ISBN 978-985-533-117-0

От авторов

Дорогие шестиклассники!

В 6-м классе вам предстоит отправиться в различные путешествия и изучить при этом материал факультативных занятий «Путешествие с математикой». Временные рамки уроков не дают возможности более глубоко и всесторонне рассмотреть изучаемый программный материал, основанный на многочисленных исторических сведениях по математике. На факультативных занятиях вы сможете узнать интересные факты, ответить на вопросы, выполнить отдельные задания и ознакомиться с занимательными задачами, часть которых авторы составили сами, другие взяты из различных книг по занимательной математике, список которых предлагается в конце данного пособия. Мы надеемся, что в каждом из девяти путешествий: «Путешествие по времени», «Путешествие в мир десятичных дробей», «Путешествие в область отношений и пропорций», «Путешествие по дорогам денежных систем мер», «Путешествие в страну занимательных процентов», «Путешествие в страну рациональных чисел», «Путешествие в область длин, площадей и объемов», «Путешествие в мир масс с единой системой мер», «Путешествие в страну геометрических фигур» — вы найдете для себя много интересного.

На факультативных занятиях вспоминайте изученный на уроках математики материал, используйте знания, полученные ранее. При работе с пособием надо внимательно ознакомиться с дополнительной информацией, предлагаемыми вопросами, выполненными заданиями и с пониманием отнестись к историческим сведениям, которые накоплены за тысячелетия существования человечества. Многие задачи будут успешно решены, если вы сделаете схематические рисунки, заполните таблицы.

Поскольку вы любите математику, то для успешного изучения предмета и побед на математических конкурсах и олимпиадах вам необходимо ознакомиться с предлагаемой литературой. Посещение библиотеки и чтение книг по математике будут способствовать успешному решению задач, а глубокие знания по математике помогут вам при изучении других учебных предметов и принятии верных решений в различных жизненных ситуациях.

Успехов вам в изучении факультативных занятий «Путешествие с математикой»!

Авторы

Тема 1 Путешествие по времени

Занятия 1–3. Меры времени различных народов. Математические задачи с использованием циферблата часов. Календари различных народов. Часы-календарь.

Рассмотрим различные меры времени и историю их возникновения.

Время и его измерение тесно связаны с движением нашей планеты Земля и небесных тел, поэтому учет времени возник на основе наблюдения человеком повторяющихся явлений окружающего мира.

Вопрос, что считать за единицу времени, возник в глубокой древности, а меры для измерения времени взяты у самой природы: более короткие единицы тесно связаны с вращением Земли вокруг своей оси, а длительные — с вращением Луны вокруг Земли и нашей планеты вокруг Солнца. В древности за единицу времени была принята естественная единица «день», т. е. промежуток времени от восхода до захода Солнца. Чередование труда и отдыха в своей деятельности человек тесно связал со сменой дня и ночи. Так появилось представление о сутках. Меры «день» и «сутки» нельзя изменить, они естественные, поэтому они используются во всех странах и у всех народов. Вначале неделя была пятидневная, это связывают с количеством пальцев руки, позднее — десятидневная, что соответствовало числу пальцев на двух руках. Наблюдения за изменением вида Луны (фазы Луны) привели к следующей единице измерения времени —

месяцу. Месяц — это промежуток времени от одного новолуния до следующего. На основе суток и месяца были составлены первые лунные календари древних народов. Семидневная неделя установилась как промежуток времени от одной лунной фазы до другой, от новолуния до первой четверти.

С развитием земледелия возникла потребность отличать периодичность чередования времен года. Появилась единица измерения времени — год. Продолжительность года определялась вначале очень неточно, но постепенно остановились на 365 днях.

Поскольку день был сравнительно крупной единицей времени, то появилась необходимость ввести более мелкие единицы, которые были бы частями дня. В Древнем Египте, а потом и в Вавилоне каждый день делился на четыре части, а в Древнем Китае день уже делился на шесть частей. Современное деление суток появилось позднее, когда стали применять двенадцатеричную систему счисления, т. е. когда год и сутки делятся уже на 12 частей. Например, в древности некоторые племена в Южной Месопотамии делили день на 12 часов, каждый час на 60 минут, каждую минуту на 60 секунд. Именно этот счет и принят в основу современного измерения времени. Теперь время измеряется сутками, часами, минутами, секундами. Эти единицы измерения времени созданы человеком. Со временем он научился не только измерять эти условные единицы времени, но и хранить их.

У многих славянских народов названия дней недели связаны с порядковыми номерами. В таблице даны названия дней недели на белорусском, русском, украинском и болгарском языках.

Название дней недели на			
белорусском языке	русском языке	украинском языке	болгарском языке
панядзелак	понедельник	понеділок	понеделник
аўторак	вторник	вівторок	вторник
серада	среда	середа	сряда
чацвер	четверг	четвер	четвъртък
пятніца	пятница	п'ятниця	петък
субота	суббота	субота	събота
нядзеля	воскресенье	неділя	неделя

С развитием земледелия появилась необходимость определять сроки посева, уборки и т. д. Учет смены времен года (зима, весна, лето, осень), их повторяемость привели к появлению более крупной единицы измерения времени — года, продолжительность которой вначале была 360 дней, а затем — 365 дней. Один из первых солнечных календарей в 365 дней появился в Египте, он был короче действительного на 0,2422 суток и был очень удобен, в нем год делился на 12 месяцев, по 30 суток в каждом. В конце каждого года к нему добавлялось 5 дополнительных суток.

Родоначальником современных настенных, настольных и карманных календарей является календарь, изданный в Чехословакии в 1485 г., который содержал еще и советы для крестьян в различные сезоны года.

В России первый из найденных календарей датируется III—IV вв. н. э. Он был нанесен на поверхность кувшина. Затем были деревянные календари, которые встречались до XIX в. Массовый выпуск ежегодных гражданских календарей в России был налажен при Петре I в XVIII в.

Перейдем теперь к измерению времени.

Как известно, прибор, с помощью которого измеряется время, называется часами. Их изобрели в древности. Первыми «часами» было Солнце. По этим «часам» по расположению светила в каждых сутках определяли только четыре «часа»: утро, полдень, вечер и ночь. Солнечные, а затем водяные часы применяли индийцы, египтяне и другие древние народы. Солнечные часы явились первыми приборами для измерения времени. Время по ним определялось по тени. Люди заметили, что самые длинные тени от предметов, освещенных Солнцем, бывают утром, а затем тени укорачиваются, при этом изменяются не только размеры тени, но и ее направление. Циферблатом таких часов служит ровная горизонтальная поверхность, на которой вертикально укреплен шест (палка). Для повышения точности часов необходимо их указатель направить к той точке небесного свода, которая при вращении Земли кажется неподвижной, и плоскость циферблата расположить перпендикулярно шесту. Скорость движения тени равномерная, поэтому расстояние по окружности между часовыми метками одинаковое и его можно определить из расчета $360° = 24$ ч.

В 10 в. до н. э. по распоряжению императора Августа в честь победы над Египтом в Риме были созданы большие солнечные часы. По этим часам определяли не только время суток, но и дату и сезон года. Во многих странах, наряду с солнечными часами, применяли песочные часы, которые и сейчас употребляются в медицинской практике. Этими часами можно было пользоваться в любое время суток при любой погоде. Их чаще всего делали из двух воронкообразных стеклянных сосудов, которые ставили друг на друга. В верхний сосуд засыпали до определенного уровня песок и по продолжительности пересыпания песка из верхнего сосуда в нижний определяли время. Иногда такие часы состояли из нескольких систем сосудов, при этом каждая система была настроена на определенное время.

Более удобными, потому что не требовали постоянного надзора, были огненные часы. В большие глиняные сосуды наливали определенное количество масла, которого хватало для горения светильника, например на 10 часов. Такими часами пользовались рудокопы. Интересные огненные часы были в Китае. Из специальных сортов дерева, которое растиралось с благовониями, готовилось тесто. Из него делались палочки (иногда спирали по несколько метров). Они были легки в обслуживании и очень удобны, потому что могли гореть месяцами. Европейский вариант огненных часов представлял собой свечу, на которую наносили шкалу. Сгорание определенной части свечи между метками соответствовало определенному промежутку времени. Конечно, точность таких часов была небольшой и зависела от состояния окружающей среды.

Водяные часы считались более совершенными. Ими пользовались в Древнем Египте, Иудее, Вавилоне, Греции, Китае. Самые простейшие водяные часы представляли собой сосуд с отверстиями, из которых вода выливалась за определенный промежуток времени. Более поздние водяные часы имели различные формы и состояли из нескольких сосудов.

В результате работы многих ученых и мастеров в XIII в. появились колесные часы, а затем в XVII в.

Галилей (1564—1642) и Гюйгенс (1629—1695) независимо друг от друга разработали конструкцию маятниковых часов.

Большой вклад в конструирование часов внесли русские умельцы И. П. Кулибин и Т. И. Волосков. Иван Петрович Кулибин в 1767 г. изготовил оригинальные механические часы, имеющие величину и форму гусиного яйца. Терентий Иванович Волосков (1729—1806) в результате кропотливого многолетнего труда создал часы, показывающие минуты, часы, месяцы, положение Солнца, Луны и некоторых звезд.

Интересным образцом механических часов с боем являются Кремлевские куранты в Москве, сооруженные в 1625 г. Механизм этих часов занимает несколько этажей башни. Размеры циферблата настолько велики, что каждая цифра на нем равна среднему росту человека [36].

Полезно запомнить

Меры времени

60 терций составляют 1 секунду;
60 секунд — 1 минуту;
60 минут — 1 час;
24 часа — 1 сутки (день);
7 дней или суток — 1 неделю;
30 дней или суток — 1 месяц;
365 дней или суток — 1 год простой;
366 дней или суток — 1 год високосный;
52 недели — 1 год;
12 месяцев — 1 год;
100 лет — 1 век;
10 веков — 1 тысячелетие.

Примечание: 30 дней составляют 1 месяц — это определение только приблизительное, употребляющееся в задачах, где говорится о месяце вообще; на самом же деле месяц январь имеет 31 день, февраль простого года — 28 (а високосного — 29), март — 31, апрель — 30, май — 31, июнь — 30, июль — 31, август — 31, сентябрь — 30, октябрь — 31, ноябрь — 30, декабрь — 31.

Контрольные вопросы

1. Какие единицы времени вы знаете?

2. Какие единицы естественные?

3. Какие единицы придуманы людьми?

4. Какие единицы используются для измерения небольших промежутков времени?

5. Какие единицы используются для измерения более длительных промежутков времени?

6. Какие часы называются солнечными и как они устроены?

7. Вы на даче решили сделать солнечные часы. Что для этого вам понадобится?

8. Какие часы называются огненными и как они устроены?

9. Где удобно было применять огненные часы?

10. Какие часы называются водяными и как они устроены?

11. Какими из перечисленных часов было удобно пользоваться?

12. Кого считают создателями часов с маятником?

13. Каких русских конструкторов часов вы знаете?

14. Сколько дней в году?

15. Сколько месяцев в году?

16. Сколько дней в месяце?

17. Сколько дней в неделе?

18. Сколько недель в году?

19. Сколько часов в сутках?
20. Сколько часов в феврале високосного года?
21. Сколько часов в январе?
22. Сколько суток в неделе?
23. Как посчитать, сколько минут в сутках?
24. Что вы знаете о календаре?

Рассмотрим некоторые интересные задачи

Попытайтесь самостоятельно решить задачи. Если не получится, то разберитесь в предложенных решениях.

Задача 1. На некотором острове необычайно регулярный климат: по понедельникам и средам всегда идут дожди, по субботам — туман, зато в остальные дни — солнечно. Утром какого дня недели нужно начать свой отдых группе туристов, если они хотят пробыть там 44 дня и захватить при этом как можно больше солнечных дней?

а) в понедельник; б) в среду; в) в четверг; г) в пятницу; д) во вторник.

Решение. В 44 днях 6 полных недель и еще 2 дня. В течение 6 недель число солнечных дней постоянно и не зависит от выбора дня начала отдыха.

Из двух оставшихся дней выбираем четверг и пятницу — солнечные дни. Следовательно, отправляем туристов утром в четверг, т. е. верный ответ — в).

Задача 2. Матери 47 лет, троим ее сыновьям соответственно 10, 12 и 15 лет. Как скоро сумма возрастов сыновей сравняется с возрастом матери?

Решение. Сегодня мать опережает сыновей по возрасту на величину $47 - (10 + 12 + 15) = 10$ (лет). Ежегодно мать становится старше на один год, а сыновья взрослеют совместными усилиями на 3 года, сокращая на

2 года прошлогодний разрыв в возрастах. Для того чтобы «догнать» мать, сыновьям потребуется $10 : 2 = 5$ (лет).

Задача 3. Два года назад сестра была младше брата во столько раз, сколько лет было в это время брату. Сколько лет сестре?

Решение. Два года назад возраст сестры был равен возрасту брата, деленному на число его лет, т. е. составлял 1 год. Сейчас сестре 3 года.

Задача 4. Отцу 36 лет, сыну 7 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?

Решение

Способ 1. Когда отец станет вдвое старше сына, возраст сына сравняется с разностью их возрастов (с одной стороны, возраст отца будет равен удвоенному возрасту сына, с другой стороны — возрасту сына плюс разность их возрастов). Сын на 29 лет младше отца. 29 лет сыну исполнится через 22 года. К этому времени отец достигнет возраста $36 + 22 = 58$ (лет) и станет вдвое старше сына ($58 : 2 = 29$).

Способ 2. Когда родился сын, отцу было 29 лет. Когда отцу добавится 29 лет, он станет вдвое старше. Сын, которому к этому времени исполнится 29 лет, окажется вдвое младше отца. Случится это через 22 года ($29 - 7$).

Задача 5. Два года назад брат был старше сестры в 2 раза, а 8 лет назад — в 5 раз. Сколько лет брату и сколько сестре?

Решение

Способ 1. Два года назад возраст сестры был равен разности возрастов брата и сестры; восемь лет назад возраст сестры был в 4 раза меньше этой разности. Значит, за 6 лет возраст сестры увеличился в 4 раза, т. е. к ее первоначальному возрасту добавилось еще 3 ее возраста. Отсюда следует, что 8 лет назад сестре было $6 : 3 = 2$ (года), сейчас ей 10 лет. Брату 8 лет назад было $2 \cdot 5 = 10$ (лет), сегодня ему 18 лет.

Способ 2. Два года назад возраст брата выражался четным числом (он был равен удвоенному возрасту сестры). Очевидно, 8 лет назад возраст брата также выражался четным числом, а также, согласно условию, был кратен 5.

Следовательно, 8 лет назад возраст брата был кратен 10. Проверкой убеждаемся, что 8 лет назад брату было 10 лет.

Проверку начинаем с минимального значения возраста, поскольку столь существенные изменения соотношения возрастов могут иметь место лишь в области малых значений искомых величин.

Два года назад сестре было 8 лет, брату — 16; ныне им соответственно 10 и 18 лет.

Задания для самостоятельной работы

1. Через два года мальчик будет вдвое старше, чем он был два года назад. А девочка через три года будет втрое старше, чем три года назад. Кто старше: мальчик или девочка?

2. Теперь сын моложе отца втрое. Но пять лет назад он был моложе отца в четыре раза. Сколько ему лет?

3. У любителя кроссвордов спросили, сколько ему лет. Ответ был замысловатый:

— Возьмите трижды мои годы через три года да отнимите трижды мои годы три года назад — у вас как раз и получатся мои годы.

Сколько же ему теперь лет?

4. Дядя приехал навестить своих двух племянников и трех племянниц, которых давно не видел. Первыми вышли к нему маленький Володя с сестренкой Женей, и мальчуган гордо объявил дяде, что он в два раза старше своей сестры. Затем выбежала Надя, и отец сказал гостю, что обе девочки вместе вдвое старше мальчика. Когда пришел из школы Алеша, отец объявил, что оба мальчика вместе вдвое старше обеих девочек вместе. Позднее всех пришла Лида и, видя гостя, радостно воскликнула:

— Дядя, вы приехали как раз в день моего рождения. Мне сегодня исполнился 21 год.

— И знаете еще что, — прибавил отец, — я сейчас сообразил, что мои три дочери вместе вдвое старше обоих моих сыновей.

Сколько лет было каждому сыну и каждой дочери?

5. Спросите кого-нибудь из ваших знакомых постарше, как давно у него карманные часы. Положим, окажется, что часы у него уже 15 лет. Продолжайте тогда разговор примерно в таком духе:

— А по скольку раз в день вы смотрите на свои часы? — Раз 20, вероятно, или около того, — последует ответ.

— Значит, в течение года вы смотрите на свои часы не менее 6000 раз, а за 15 лет видели их циферблат $6000 \cdot 15$, т. е. чуть не 100 тысяч раз. Вещь, которую видели 100 тысяч раз, вы, конечно, должны знать и помнить отлично.

— Ну разумеется!

— Вам поэтому прекрасно должен быть известен циферблат ваших карманных часов, и вы не затруднитесь изобразить на память, как обозначена на нем цифра шесть.

И вы предлагаете собеседнику бумажку и карандаш.

Он исполняет вашу просьбу, но изображает цифру шесть в большинстве случаев совсем не такой, какой обозначена она на его часах. Почему?

Ответьте на этот вопрос, не глядя на карманные часы. Покажите, как ваш собеседник изобразил цифру шесть и как ее следует изобразить.

6. Может ли быть в одном месяце пять воскресений?

7. В некотором месяце три воскресенья пришлись на четные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца?

8. Дата 1 января 2001 года может быть записана 1.1.1. Напишите все даты XXI в., которые можно записать с помощью одной цифры.

9. Как отмерить 15 минут, пользуясь песочными часами на 7 минут и на 11 минут?

10. В мастерской часовщика со звуконепроницаемыми стенами висят старинные настенные часы, которые бьют каждые полчаса (один удар) и каждый час (столько ударов, сколько показывает часовая стрелка). Однажды, открыв дверь в кабинет, часовщик услышал один удар часов. Через полчаса часы в кабинете пробили еще раз — опять один удар. Спустя полчаса — еще один удар. Наконец, еще через полчаса часы снова пробили один раз. Какое время показывали часы, когда часовщик входил в кабинет?

11. Татьяне 11 лет, Оле 1 год. Сколько лет будет Татьяне, когда она станет втрое старше Оли?

12. Саша сказал: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне исполнится 13 лет». Когда у Саши день рождения?

13. Когда Света подошла к бабушкиным настенным часам с кукушкой, на них было 12 часов 5 минут. Света стала крутить пальцем минутную стрелку, пока часовая стрелка не вернулась на прежнее место. Сколько «ку-ку» насчитала за это время бабушка в соседней комнате?

14. Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Может ли такое быть?

15. В одной семье пять сыновей. У каждого одна сестра. Сколько всего детей в семье?

16. У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

Дополнительные задачи о часах

1. В одной из квартир трое часов: механические часы, которые всегда показывают правильное время; аналоговые (стрелочные) электронные часы; электронные цифровые часы. Когда в квартире нет электричества, аналоговые электронные часы останавливаются. Но когда оно появляется, эти часы начинают отсчитывать время от той точки, когда они остановились. Экран цифровых электронных часов, когда нет электричества, гаснет. Однако, когда оно появляется, экран начинает мигать, часы начинают отсчет времени с 12:00. Однажды утром хозяин ушел на работу, когда все его часы показывали 6:30. Возвратившись вечером домой, он обнаружил: его механические часы показывают 8:21; аналоговые электронные часы показывают 7:50, а цифровые электронные — 6:03, мигая.

Предположим, что был только один перерыв в подаче энергии. Когда он начался и когда закончился?

2. Вчера сосед проверял свои настенные часы и будильник и поставил их стрелки правильно. Настенные отставали на 2 минуты в час; будильник спешил в час на минуту. Сегодня часы у соседа остановились. Стрелки на циферблате настенных часов показывают 7 часов, на циферблате будильника — 8 часов. В котором часу сосед вчера проверял часы?

3. В доме трое часов. Первого января все они показывали верное время. Но шли верно только первые часы. Вторые отставали на 1 минуту в сутки, третьи на 1 минуту в сутки спешили. Если часы будут продолжать так идти, через какое время все трое часов будут снова показывать верное время?

4. — Куда спешите?

— К 6-часовому поезду.

— Сколько минут осталось до отхода?

— 50 мин назад было вчетверо больше минут, чем после трех часов.

Что означает этот странный ответ? Который был час? Когда стрелки встречаются?

5. В 12 часов стрелки часов совпадают. Но вы замечали, вероятно, что это не единственный момент, когда стрелки часов встречаются: они настигают друг друга в течение дня несколько раз. Можете ли вы указать все те моменты, когда это случается? В 6 часов, наоборот, обе стрелки направлены в противоположные стороны. Но только ли в 6 часов это бывает или же есть и другие моменты, когда стрелки так расположены?

6. Ученик взглянул на часы и заметил, что обе стрелки отстоят от цифры 6, по обе ее стороны, одинаково. В котором часу это было?

7. В котором часу минутная стрелка опережает часовую ровно на столько, на сколько часовая находится впереди числа 12 на циферблате? А может быть, таких моментов бывает в день несколько или же вовсе не бывает?

8. Если вы внимательно наблюдаете за часами, то, быть может, вам случалось наблюдать и обратное расположение стрелок, чем описанное сейчас: часовая стрелка опережает минутную на столько же, на сколько минутная продвинулась вперед от числа 12. Когда это бывает?

9. Часы бьют 3 часа. И пока они бьют, проходит 3 секунды. За сколько времени часы пробьют 7 часов?

10. Проделайте маленький опыт. Положите свои карманные часы на стол, отойдите шага на три или на четыре и прислушайтесь к их тиканью. Если в комнате достаточно тихо, вы услышите, что часы ваши идут словно с перерывами: то тикают некоторое время, то на несколько секунд замолкают, то снова начинают идти и т. д. Чем объясняется такой неравномерный ход?

Часы-календарь

Сделать такие часы очень просто. Для этого нужно нарисовать на бумаге окружность и расставить ближе к ее границе числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; рядом с каждым числом, но ближе к центру поставить для нужного года в кружочках цифры следующим образом:

для 2010 года – 4, 0, 0, 3, 5, 1, 3, 6, 2, 4, 0, 2;
для 2011 года – 5, 1, 1, 4, 6, 2, 4, 0, 3, 5, 1, 3;
для 2012 года – 6, 2, 3, 6, 1, 3, 0, 2, 5, 0, 3, 5;
для 2013 года – 1, 4, 4, 0, 2, 4, 1, 3, 6, 1, 4, 6;
для 2014 года – 2, 5, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 0, 2, 5, 0;
для 2015 года – 3, 6, 6, 2, 4, 6, 3, 5, 1, 3, 6, 1;
для 2016 года – 4, 0, 1, 4, 6, 1, 5, 0, 3, 5, 1, 3;
для 2017 года – 6, 2, 2, 5, 0, 2, 6, 1, 4, 6, 2, 4;
для 2018 года – 0, 3, 3, 6, 1, 3, 0, 2, 5, 0, 3, 5;
для 2019 года – 1, 4, 4, 0, 2, 4, 1, 3, 6, 1, 4, 6;
для 2020 года – 2, 5, 6, 2, 4, 6, 3, 5, 1, 3, 6, 1.

Календарь готов. Теперь поясним, как им пользоваться.

Числа от 1 до 12 – это порядковые номера месяца.

Январь – 1; февраль – 2; март – 3; апрель – 4; май – 5; июнь – 6; июль – 7; август – 8; сентябрь – 9; октябрь – 10; ноябрь – 11; декабрь – 12.

Цифры, расположенные ближе к центру, – это коэффициенты месяца (M). Календарным числом месяца (K) является число месяца, например для 6 декабря $K = 6$.

Порядковые номера дней недели:

понедельник – 1; вторник – 2; среда – 3; четверг – 4; пятница – 5; суббота – 6; воскресенье – 7 (0).

С помощью такого календаря можно узнать много интересного, приведем некоторые задания.

1. На какой день недели приходится 6 декабря 2010 года?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно сделать следующее. Найдем число в кружочке, которое соответствует 12. Это число 2. Сложим это число с календарным числом месяца $(2 + 6)$ и разделим результат на 7. В остатке получаем 1 — это и есть порядковый номер дня недели, т. е. понедельник.

А теперь самостоятельно определите день недели 8 апреля.

2. В какой день недели Петя празднует свой день рождения в 2011 году, если он родился 15 мая?

Маю 2011 года соответствует число 6, $(6 + 15) : 7$. В остатке получили 0, следовательно, день рождения — воскресенье.

3. Какие числа соответствуют понедельникам сентября 2010 года?

К числам 0, 7, 14, 21 и 28 добавляем порядковый номер дня недели, а затем вычитаем число, стоящее в кружочке против месяца (2), получим:

$0 + 1 - 2 = -1$, $7 + 1 - 2 = 6$, $14 + 1 - 2 = 13$, $21 + 1 - 2 = 20$, $28 + 1 - 2 = 27$. Следовательно, понедельники: 6, 13, 20, 27 сентября. Можно было найти первый из понедельников, а потом, добавляя 7, записать остальные.

Тема 2 Путешествие в мир десятичных дробей

Занятия 1–3. Как и зачем были изобретены десятичные дроби? Примеры вычислений с десятичными дробями. Интересные задания и головоломки.

Дробными числами человечество пользуется несколько тысячелетий, а вот записывать их удобными десятичными знаками стали значительно позже.

Ученые-математики всегда стремились упростить вычисления, увеличить их точность и скорость. Благодаря десятичным дробям это в какой-то мере стало возможным.

Человечество пришло к тому, что дробные числа со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д. можно записывать так же, как записывают натуральные числа в десятичной системе, надо только вместо слов «да еще» поставить ограничение, т. е. запятую. Такая запись дробных чисел называется десятичной дробью. В десятичной дроби две части: слева от запятой — целая часть, справа — дробная часть. Цифры дробной части называют десятичными знаками. Возникают вопросы: почему же десятичные дроби мы изучаем специально, чем они заслужили такое большое внимание?

Чтобы ответить на них, нужно вспомнить, что в записи любого натурального числа значение цифры зависит от занимаемого ею места, от ее позиции. В натуральном числе 1061 цифра 1 в первом разряде справа означает 1 единицу, а цифра 1 в четвертом разряде — 1 единицу тысяч. Такую систему записи называют позиционной.

Если перемещаться по разрядам слева направо, то в записи чисел, которой мы пользуемся, единица каждого следующего разряда меньше в 10 раз единицы предыдущего разряда. Например, единица из разряда единиц в 10 раз меньше единицы, взятой из разряда десятков.

По этому принципу записываются и десятичные дроби.

Теперь рассмотрим вопрос, когда и где возникли десятичные дроби.

В Китае зарождение и развитие десятичных дробей было тесно связано с метрологией (учением о мерах). Уже во II в. до н. э. там существовала десятичная система мер длины. Примерно в III в. н. э. десятичный счет распространился на меры массы и объема. Тогда и было создано понятие о десятичной дроби, сохранившей, однако, метрологическую форму.

Позже десятичные дроби стали все больше приобретать характер отвлеченных десятичных дробей. Целую часть стали отделять от дробной особым иероглифом «дянь» (точка).

ал-Каши (Узбекистан)

В XV в. в Узбекистане, вблизи города Самарканда, который был тогда богатым культурным центром, жил математик и астроном, основатель астрономической обсерватории ал-Каши. Он поставил перед собой задачу — описать систему дробей с десятичным основанием, в которой все операции проводятся так же просто, как с целыми числами. Десятичную дробь ал-Каши записывал в одной строке с целой частью числа и отделял дробь от целого вертикальной чертой, или писал другим цветом, или надписывал над цифрами названия разрядов, чаще называя только низший разряд, определяющий все остальные.

До ал-Каши, возможно, доходили сведения о том, что десятичные дроби применялись в Китае, но сам он считал их своим собственным изобретением, а мы уверены, что регулярное их применение и подробное описание операций с дробями принадлежат ему. В книге «Ключ к арифметике» он описывает правила умножения и деления таких дробей. Европейцам этот труд был неизвестен, и пришлось изобретать десятичные дроби заново.

Ф. Виета (Франция)

В 1579 г. десятичные дроби применяются в «Математическом каноне» французского математика Франсуа Виета (1540—1603), опубликованном в Париже. В этом сочинении, представляющем собой собрание таблиц, Виет выступал в пользу употребления, как он выражался, тысячных и тысяч, сотых и сотен, десятых и десятков и т. д. При записи десятичных дробей Виет не придерживался какого-либо одного обозначения. Десятичные дроби он записывал как с числителем, так и со знаменателем. Затем отделял цифры целой части от дробной вертикальной чертой или же цифры целой части изображал жирным шрифтом. И, наконец, цифры дробной части писал более мелким шрифтом и подчеркивал.

Широкое распространение десятичных дробей в Европе началось только после выхода в свет книги «Десятая» фламандского математика Симона Стевина (1548—1620), которого и считают изобретателем десятичных дробей. Он описал десятичные дроби, их применение в денежной системе, в мерах весов и длин.

Стевин обозначает в десятичной дроби целые знаком 0, десятые — знаком 1, сотые — знаком 2 и т. д., причем цифры 0, 1, 2, ... стоят над значащими цифрами или после них в кружках.

Например, 5, 13 Стевин обозначал 5 <u>**0**</u> ,1 <u>**1**</u> 3 <u>**2**</u> (подчеркнутое вместо кружков).

С. Стевин (Голландия)

Современную запись десятичных дробей, т. е. отделение целой части от дробной с помощью запятой, предложил Иоганн Кеплер (1571—1630).

В начале XVII в. начинается быстрое распространение десятичных дробей в Европе. В Англии в качестве знака, отделяющего целую часть от дробной, была введена точка, которая до сих пор сохраняется в этой роли в США, Англии и других странах, где говорят по-английски. Запятая, как и точка, была предложена в 1616—1617 гг. знаменитым английским математиком Джоном Непером.

В России первые систематические сведения о десятичных дробях встречаются в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого (1703).

С начала XVII в. начинается интенсивное проникновение десятичных дробей в науку и практику. Развитие техники, промышленности и торговли требовало все более громоздких вычислений, которые с помощью десятичных дробей было легче выполнять.

Широкое применение десятичные дроби получили в XIX в. после введения тесно связанной с ними метрической системы мер и весов. Например, в сельском хозяйстве и промышленности десятичные дроби и их частный вид — проценты применяются намного чаще, чем обыкновенные дроби.

А теперь поговорим о значении десятичных дробей. Десятичные дроби, записанные в позиционной системе, очень удобны в расчетах. Во-первых, величины, выраженные ими, можно записать с любой степенью точности, и, во-вторых, эти величины легко сравнивать. Например, если сравнивать $\frac{3}{8}$ и $\frac{2}{5}$, то при такой форме записи трудно сравнить эти числа, а если их выразить десятичными дробями, то это сделать намного проще: $0{,}375 < 0{,}4$.

Полезно запомнить

При умножении десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д., а также при делении на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. запятая перемещается на 1, 2, 3 и т. д. цифры вправо.

При делении десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д., а также при умножении на 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. запятая перемещается влево на 1, 2, 3 и т. д. цифры.

Эти действия применяются очень часто, поэтому важно уметь быстро и правильно их выполнять.

Задания для самостоятельной работы

1. Посмотрите на записанные примеры и укажите, где в этих примерах должна стоять запятая.

1) $52 + 18 = 7$; 2) $3 + 108 = 408$;
3) $42 + 17 = 212$; 4) $736 - 336 = 4$;
5) $63 - 27 = 603$; 6) $57 - 4 = 17$.

2. Какой знак можно поставить между числами 7 и 8, чтобы получившееся число было больше 7 и меньше 8?

3. Между числами 5,2 и 5,3 поставьте число, большее 5,2 и меньшее 5,3.

4. Даны числа: 0,3; 7,7; 0,125. Поставьте между ними такие знаки, чтобы в результате выполнения действий получилась 1.

5. Найдите устно сумму 20 чисел:
$0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + ... + 1{,}8 + 1{,}9 + 2$.

6. Найдите устно значение выражения:
$(13 - 2{,}46 : 3{,}54) \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{2}\right)$.

7. Найдите зашифрованное слово:
8,11 + 7,89; 5 – 1,82;
11,33 + 2,47;
7,53 – 2,35; 3,6 – 0,9;
9,7 + 9,13; 5,04 + 4,6; 10,08 – 0,8; 6,2 + 1,82; 10 – 3,5.
Ключ: 9,64 — е; 5,18 — и; 3,18 — ы; 2,7 — с; 16 — в; 13,8 — ч; 9,28 — н; 8,02 — и; 18,83 — л; 6,5 — е.

8. Восстановите цифры, обозначенные звездочкой:

а) $\begin{array}{r} 3{,}*5* \\ +\ *{,}4* \\ \hline 4{,}187 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} *{,}2* \\ -\ 2{,}*8* \\ \hline 1{,}447 \end{array}$

9. Три неразлучных друга: Винни-Пух, Кролик и Пятачок — решили узнать свой вес. Но шкала весов до 20 кг была повреждена, и показания по ней прочитать не представлялось возможным, поэтому Винни-Пух взвесился сначала с Кроликом, получилось 22,9 кг, затем — с Пятачком, получилось 23,8 кг, а затем они взвесились все вместе и получили 26,7 кг. Сколько весил каждый из друзей?

Тема 3 Путешествие в область отношений и пропорций

Занятия 1–5. Что такое отношения? Пропорция и ее основное свойство. Практическое применение пропорций и отношений. Золотое сечение. Некоторые свойства пропорций. Решение задач с использованием пропорций.

Нам часто приходится сравнивать значения двух величин. При этом всегда возникают вопросы: во сколько раз одно значение больше другого (или меньше другого); какую часть одно значение составляет от другого?

Отвечая на каждый из этих вопросов, мы в результате получаем частное двух чисел, которое и называется отношением. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. Миша прошел 5 км, а Вова только 2 км. Во сколько раз путь, который прошел Миша, больше пути, который прошел Вова?

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно составить отношение: $5 : 2 = 2{,}5$. Отношение $5 : 2$ показывает, во сколько раз 5 больше 2.

Задача 2. Даны два куба, ребро первого — 2 см, второго — 3 см. Найдите отношение объемов этих кубов.

Решение. Найдем объемы данных кубов. Объем первого куба равен $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, а второго — $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Отношение объемов будет $8 : 27$, оно показывает, какую часть первый объем составляет от второго, а отношение $27 : 8$ показывает, во сколько раз объем большего куба больше объема меньшего.

Таким образом, отношение — это частное от деления одного числа на другое. Отношение можно записать с помощью обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$ или с использованием знака деления $a : b$.

Многие величины определяются с помощью отношений, например скорость определяется отношением длины пройденного пути ко времени, которое потрачено на этот путь.

Задача 3. Поезд проходит 60 км за 40 мин. Выразите скорость поезда.

Решение. Если поезд проходит за 40 мин 60 км, то за 1 мин он проходит $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}\left(\frac{\text{км}}{\text{мин}}\right)$, или $1{,}5 \left(\frac{\text{км}}{\text{мин}}\right)$, или $90 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$.

Придумайте несколько примеров, в которых с помощью отношения сравниваются значения какой-то величины, а также несколько примеров, в которых величины определяются с помощью отношений.

В задаче 3 поезд проходит $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ (километра в минуту). Если выполняется равенство двух отношений, то оно называется **пропорцией**. Латинское слово *proportio* произошло от задач, где приходится целое делить соответственно долям, частям, порциям, и само слово «пропорция» означает «соответственно порциям».

Пропорцию можно записать в виде $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и прочитать так: «отношение a к b равно отношению c к d». Числа a и d называются крайними членами пропорции, а b и c — средними членами. Если пропорция записана с помощью обыкновенных дробей, то можно заметить, что средние члены пропорции расположены накрест, так же как и крайние члены.

Вы уже знаете основное свойство пропорции: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних ее членов.

Пусть имеется пропорция $a : b = c : d$. Если в ней переставить местами крайние члены, получим новую пропорцию $d : b = c : a$. Если переставить местами средние члены пропорции $a : b = c : d$, то получим еще одну пропорцию $a : c = b : d$. А поменяв местами и крайние члены, и средние, получим снова пропорцию $d : c = b : a$.

Из равенства $a \cdot d = c \cdot b$ можно получить сразу четыре пропорции: $a : c = b : d$, $a : b = c : d$, $b : d = a : c$, $c : d = a : b$.

Проверьте, что это верно.

Человечество давно пользуется пропорциями. В древности их использовали в неявной форме при решении задач, а серьезно и систематически пропорции начали изучать в Древней Греции. Однако вначале рассматривали пропорции, все члены которой были натуральными числами. В это время не рассматривались пропорции, составленные из величин. И только в IV в. до н. э. древнегреческий математик Евдокс дал определение пропорции, составленной из значений величин любой природы, и они стали широко использоваться. Древние греки решали с их помощью задачи, которые мы сейчас решаем с помощью уравнений. Когда греческие математики осознали, что отношение двух величин — это число и поэтому пропорция является просто равенством двух чисел, то ее роль несколько снизилась.

Остановимся на пропорции особого вида, которая использовалась еще в древности и до сих пор имеет большое значение. Это *золотое сечение* — гармоническая пропорция.

Принято считать, что объекты, содержащие в себе золотое сечение, воспринимаются людьми как наиболее гармоничные. В пропорциях архитектурных сооружений Древнего мира и современности многократно присутствует золотое сечение.

Выясним, чем же оно характеризуется. Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому.

Отрезок c прямой можно разделить на две части a и b следующими способами:

на две равные части $c : a = c : b$ (рис. 1, а);

на две неравные части в любом отношении (такие части пропорции не образуют, рис. 1, б);

так, чтобы $c : b = b : a$ (рис. 1, в).

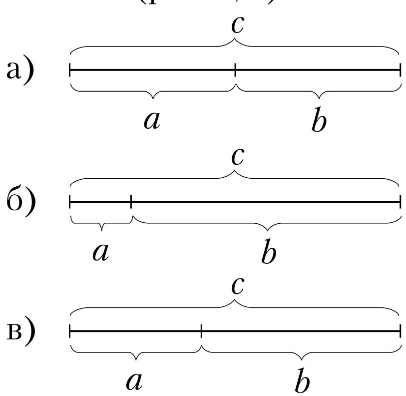


Рис. 1

Последнее и есть золотое сечение или деление отрезка в крайнем и среднем отношении.

Золотое сечение — это такое пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей, или меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему отрезку:

$$a : b = b : c \text{ или } c : b = b : a.$$

Прямоугольник с таким отношением сторон стали называть «золотым прямоугольником» (рис. 2). Он также обладает интересными свойствами.

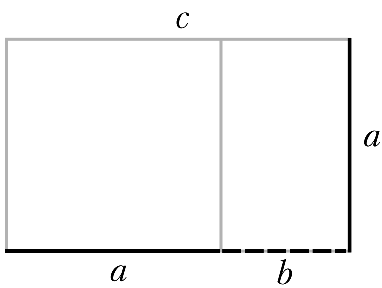


Рис. 2

Если от него отрезать квадрат, то останется вновь «золотой прямоугольник». Этот процесс можно продолжать до бесконечности. А если провести диагонали первого и второго прямоугольников, то точка их пересечения будет принадлежать всем получаемым «золотым прямоугольникам».

В звездчатом пятиугольнике (рис. 3) каждая из пяти линий, составляющих эту фигуру, делит другую в отношении золотого сечения, а концы звезды являются «золотыми треугольниками».

В этой фигуре наблюдается удивительное постоянство отношений составляющих ее отрезков:

$$AD : AC = AC : CD = AB : BC = AD : AE = AE : EC.$$

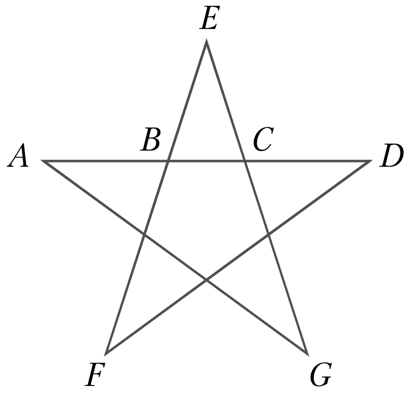


Рис. 3

Из Древнего Вавилона, как полагают, звездчатый пятиугольник позаимствовал Пифагор и сделал его символом жизни и здоровья, а также тайным опознавательным знаком. Сегодня пятиконечная звезда реет на флагах почти половины стран мира. Это говорит о популярности звездчатого пятиугольника или, как мы ее часто называем, пятиконечной звезды.

Принято считать, что и само понятие золотого деления ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н. э.). Есть предположение, что Пифагор знание золотого деления позаимствовал у египтян и вавилонян. Пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались при их создании соотношениями золотого деления. В рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамсеса, пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления.

В фасаде древнегреческого храма Парфенона присутствуют золотые пропорции. В пропорциях человеческого тела и лица, согласно художественным канонам Леонардо да Винчи, закономерно присутствует отношение золотого сечения (примером является его известная картина «Джоконда»).

При раскопках храма обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого сечения.

Искусство Древней Руси насквозь пронизано отношением золотого сечения. Примером использования золотого сечения в древнерусской живописи является «Троица» — самая совершенная среди сохранившихся икон Андрея Рублева. Это прекрасное творение древнерусской живописи было написано мастером в первой четверти XV в.

Примером использования золотого сечения в древнерусской архитектуре является сохранившаяся церковь Покрова на реке Нерль.

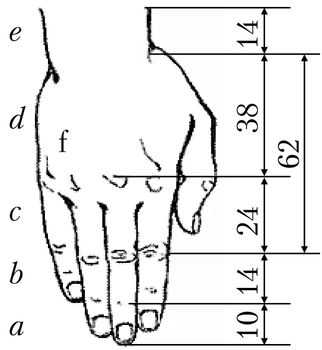
Великий астроном XVI в. Иоганн Кеплер назвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он первый обратил внимание на наличие золотой пропорции в ботанике (рост растений и их строение). Практически все растения и животные дают нам примеры золотого сечения. Таким образом, пропорции золотого сечения делают гармоничными природу и жизнь человека.

Рассмотрим примеры золотого сечения, с которыми мы встречаемся повседневно.

В 1855 г. немецкий исследователь золотого сечения профессор Цейзинг опубликовал свой труд «Эстетические исследования». Он объявил пропорцию золотого сечения универсальной для всех явлений природы и искусства. Цейзинг проделал колоссальную работу. Он измерил около двух тысяч человеческих тел и пришел к выводу, что золотое сечение выражает средний статистический закон. Пропорции мужского тела колеблются в пределах среднего отношения $13 : 8 = 1{,}625$ и несколько ближе подходят к золотому сечению, чем пропорции женского тела, в отношении которого среднее значение пропорции выражается в соотношении $8 : 5 = 1{,}6$. У новорожденного пропорция составляет отношение $1 : 1$, к 13 годам она равна 1,6, а к 21 году равняется мужской. Пропорции золотого сечения проявляются и в отношении частей тела — длина плеча, предплечья и кисти, кисти и пальцев и т. д.

Справедливость своей теории Цейзинг проверял на греческих статуях. Наиболее подробно он разработал пропорции Аполлона Бельведерского. Подверглись исследованию греческие вазы, архитектурные сооружения различных эпох, растения, животные, птичьи яйца, музыкальные тона, стихотворные размеры.

Проверим на практике теорию Цейзинга.



Практическое задание

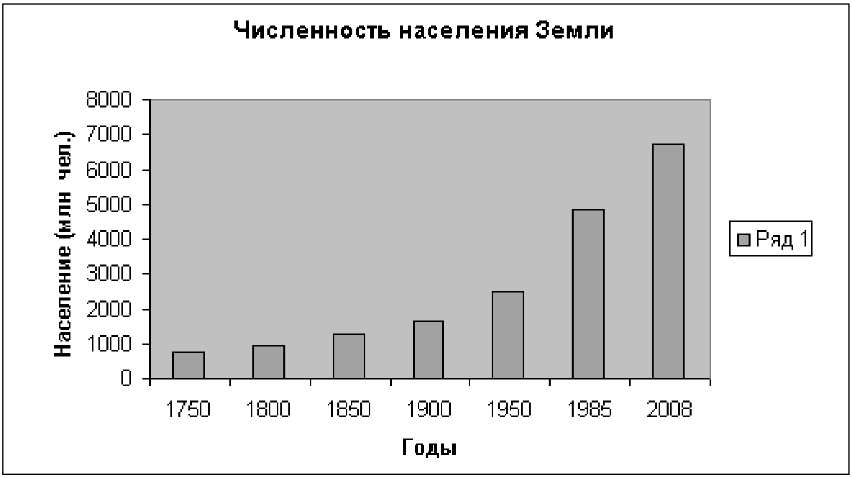
Произведите на своей кисти необходимые измерения и проверьте соотношения.

а) Найдите значения отношений: $b : a$; $c : b$; $d : c$. Сравните полученные результаты.

б) Согласуются ли полученные результаты с теорией Цейзинга?

Отношения и пропорции встречаются в окружающем нас мире, они изучались и использовались во все времена, потому что с их помощью упрощаются различные выражения и решаются многие задачи и не только по математике. Если необходимо начертить карту какой-либо местности или изобразить на листе бумаги большую фигуру, то на помощь приходит масштаб. Масштаб — это отношение расстояния на карте к расстоянию на местности. При построении диаграмм также используются отношения и пропорции. Например, чтобы построить диаграмму, которая показывает, как изменяется со временем численность населения планеты, нужно выбрать отрезок для изображения 100 млн человек, например 1 мм, и с помощью соответствующих отрезков изобразить численность населения планеты, используя данные таблицы.

Годы	1750	1800	1850	1900	1950	1985	2008
Численность населения (млн чел.)	730	950	1250	1650	2500	4850	6707



Знание основного свойства пропорции поможет вам при решении задач по математике, физике и химии и необходимо для изучения многих школьных предметов.

Две взаимно зависимые величины называются пропорциональными, если отношение их величин сохраняется неизменным. Это постоянное отношение пропорциональных величин называется коэффициентом пропорциональности.

Рассмотрим задачи на деление на пропорциональные части.

Задача 4. Найдите числа a и b, если они пропорциональны числам 6 и 9 с коэффициентом пропорциональности 3.

Решение. Из условия ясно, что $a : 6 = 3$ и $b : 9 = 3$. Из этих равенств находим: $a = 18$ и $b = 27$.

Изменим немного условие и рассмотрим задачу, в которой коэффициент пропорциональности не задан.

Задача 5. Числа a и b пропорциональны числам 5 и 8. Найдите числа a и b, если их сумма равна 52.

Решение. Сначала выразим коэффициент пропорциональности k: $a : 5 = k$ и $b : 8 = k$.

Из этих равенств находим a и b: $a = 5k$, а $b = 8k$. Сумма $a + b = 52$, поэтому $5k + 8k = 52$, $13k = 52$, откуда $k = 4$. Получили, что $a = 5 \cdot 4 = 20$, $b = 8 \cdot 4 = 32$.

Эту задачу обычно формулируют так: представить число 52 в виде суммы двух слагаемых, пропорциональных числам 5 и 8.

Попробуйте решить задачу другим способом.

В качестве примера пропорциональных величин рассмотрим еще массу и объем. Масса любого вещества пропорциональна его объему. Например, 2 л ртути весит 27,2 кг, 5 л — 68 кг, 7 л — 95,2 кг. Отношение массы ртути к ее объему (коэффициент пропорциональности) будет равно: $\frac{27{,}2}{2} = \frac{68}{5} = \frac{95{,}2}{7} = 13{,}6$ — плотность ртути.

Таким образом, коэффициентом пропорциональности в данном примере является плотность.

Плотностью вещества называется отношение массы вещества к занимаемому им объему. Например, 30 $см^3$ железа имеет массу 236,4 г, тогда плотность железа равна $\frac{236{,}4}{30} = 7{,}88\left(\frac{г}{см^3}\right)$.

Если в задаче известны три члена пропорции, а четвертый нужно найти, то говорят, что эта задача на пропорцию. Рассмотрим такие задачи.

Задача 6. Из 18 т железной руды выплавляют 10 т железа. Сколько тонн железа выплавляют из 36 т руды?

Составим краткое условие задачи:

18 т — 10 т;

36 т — x т.

Обозначим через x количество тонн железа, которое выплавляют из 36 т руды.

Решение. Используя основное свойство пропорции, из пропорции $18 : 36 = 10 : x$ получаем, что $x = 20$ т.

Посмотрев на условие задачи, можно сразу ответить на ее вопрос: если руды взято в два раза больше, то и железа выплавят в два раза больше.

Задача 7. Бригада трактористов за неделю вспахала 1170 га, что составило 0,36 частей от общей площади полей. Найдите общую площадь полей.

Общую площадь полей обозначим через x, она составляет 1. Составим краткое условие задачи:

1170 га — 0,36;

x га — 1.

Из пропорции $1170 : x = 0{,}36 : 1$ получаем, что $x = 3250$ га.

Теперь познакомимся с зависимостью, в которой величины прямо пропорциональны.

Рассмотрим движение туриста и в таблице покажем, какое расстояние он проходил в зависимости от времени.

t (ч)	2	3	5	6	7
s (км)	8	12	20	24	28

Внимательно посмотрим на значения в таблице и заметим, что у зависимости пройденного пути от времени есть следующее свойство: отношение $s : t = 4$ для любого столбика таблицы. Это число является коэффициентом прямой пропорциональности и обозначается k, а пройденный путь пропорционален времени движения. В нашем случае пройденный путь зависит от времени и величина $s : t = 4\left(\dfrac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$ — скорость движения туриста. О таких величинах говорят, что они **прямо пропорциональны**.

Зависимость между величинами называют прямо пропорциональной, если отношение этих величин остается постоянным.

Приведите еще примеры прямо пропорциональных величин.

Познакомимся с зависимостью, в которой величины обратно пропорциональны.

Пусть вам дали задание вырезать из бумаги несколько прямоугольников, площади которых равны 6 см^2. Обозначим смежные (соседние) стороны прямоугольников a и b, тогда площадь прямоугольника $S = a \cdot b$ и в нашем случае $a \cdot b = 6$ для каждого из прямоугольников.

О таких величинах говорят, что они **обратно пропорциональны**.

Зависимость между величинами называют обратно пропорциональной, если произведение этих величин остается постоянным.

Число, которому равно это произведение, называется коэффициентом обратной пропорциональности и обозначается k, в нашем случае $k = 6$.

Приведите примеры обратно пропорциональных величин.

Контрольные вопросы

1. Найдите отношение $a : b$, если а $= 10$; $b = \frac{1}{3}$? Как записываются отношения?

2. Какие из известных вам величин определяются с помощью отношения?

3. Как найти отношение числа 9 к 3 и 3 к 9?

4. Как найти отношение 3 к $\frac{1}{4}$?

5. Найдите отношение длины стороны квадрата к его периметру.

6. Найдите отношение длины стороны квадрата к его площади.

7. Найдите отношение объема куба к его ребру.

8. Что называется пропорцией?

9. Какие члены пропорции называются крайними, а какие средними?

10. Сформулируйте основное свойство пропорции.

11. Как проверить, составляют ли отношения пропорцию?

12. Если пропорция $a : b = c : d$ является верной, то какие из перечисленных ниже пропорций также будут верными: $d : b = c : a$; $a : c = b : d$; $a : c = d : b$; $a : b = d : c$.

13. Можно ли составить пропорцию из двух отношений: $19 : 7$ и $210 : 77$; $3 : 4$ и $5 : 6$; $3 : 7$ и $21 : 47$?

14. Сколько пропорций и какие можно составить из равенства $a \cdot d = c \cdot b$?

15. Составьте четыре пропорции, используя равенство $2{,}5 \cdot 4 = 5 \cdot 2$.

16. Проверьте, будет ли пропорция верной: $5 : 6 = 25 : 36$; $11 : 12 = 33 : 36$; $2 : 0{,}6 = 7 : 2{,}1$.

17. Если $a : b = 5 : 8$, то как относится b к a?

18. Что показывает масштаб?

19. В каком случае числа a и b называют пропорциональными числам c и d?

20. В каком случае зависимость между величинами называют прямо пропорциональной? Что называют коэффициентом пропорциональности?

21. В каком случае зависимость между величинами называют обратно пропорциональной? Что называют коэффициентом обратной пропорциональности?

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите отношение: а) $0{,}6$ к $\frac{1}{12}$; б) $\frac{7}{18}$ к $0{,}18$; в) $0{,}0003$ к $0{,}003$.

2. Стоимость 15 м светлой ткани 180 000 р., а стоимость 12 м темной — 168 000 р. Стоимость метра какой ткани выше?

3. Турист за день прошел 31 км. Причем до обеда за 3 часа он прошел 15 км, и после обеда он шел 4 часа. Когда скорость туриста была больше: до обеда или после обеда?

4. Бегун пробежал 100 м за 10 с. Больше или меньше его скорость, чем скорость теплохода, равная 35 $\frac{км}{ч}$?

5. Одна бригада маляров за 5 ч покрасила 45 м^2 потолков, а другая бригада за 4 ч покрасила 44 м^2. Производительность какой бригады выше?

6. Определите, из каких отношений можно составить пропорцию, и составьте эти пропорции: 15 : 12; 32 : 16; 35 : 28; $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$.

7. Скорость самолета 900 $\frac{км}{ч}$, а скорость поезда 80 $\frac{км}{ч}$. Выразите эти скорости в $\frac{м}{с}$ и допишите пропорцию 900 : 80 = ...

8. Найдите плотность в $\frac{г}{см^3}$ и $\frac{кг}{м^3}$ воды, нефти и свинца, если: а) масса 1 л воды равна 1 кг; б) масса 5 м^3 нефти равна 4 т; в) масса свинцового кубика с ребром 5 см равна 1412,5 г.

9. Масса чего больше: 50 м^3 нефти или свинцового кубика с ребром 1 м?

Указание. Воспользуйтесь плотностью, которую вы нашли в предыдущей задаче.

10. Плотность сибирской пихты 375 $\frac{кг}{м^3}$, а плотность алюминия 2,7 $\frac{г}{см^3}$. Алюминиевый брусок имеет такую же массу, что и пихтовый кубик с ребром 6 см. Найдите объем алюминиевого кубика.

11. Если плотность тела меньше плотности жидкости, то это тело будет плавать в жидкости. Тело имеет массу 361 г и объем 380 см^3. Будет ли оно плавать в нефти; в воде?

Указание. Плотности этих жидкостей вы уже находили в задаче 8.

12. На земном шаре поверхность, занимаемая сушей, относится к поверхности, занимаемой водой, как 1 : 2,4. Суша занимает 149 млн км^2. Какую площадь занимает вода?

13. Площади полей, засеянных рожью, пшеницей и ячменем, пропорциональны числам 9, 5 и 3. Сколько гектаров засеяно рожью и сколько ячменем, если известно, что пшеницей засеяно 410 га?

14. Даны отрезки длиной 8,5 м, 15 м и 25 м. Найдите длины пропорциональных отрезков, если больший из них равен 20 м.

15. Разложите число 35 на три слагаемых пропорционально числам 2, 7, 5.

16. Разложите число 798 на три слагаемых пропорционально числам $\frac{2}{3}$, 0,75 и 0,8.

17. Число 741 разложите на части, обратно пропорциональные числам 1, 2, 4 и 5.

18. Число 136 разложите на четыре слагаемых так, чтобы первые три были прямо пропорциональны числам 1, 3 и 6, а два последних — прямо пропорциональны числам 5 и 3.

19. Число 52 разложите на три слагаемых так, чтобы первые два были прямо пропорциональны числам 1 и 2, а последние два — обратно пропорциональны числам 2 и 3.

20. Решите уравнения:

а) $x : 12 = 2 : 3$; б) $117 : 63 = 143 : x$; в) $6 : 7 = x : 35$.

21. Придумайте задачу, которая решалась бы составлением пропорции:

$3 : x = 240 : 53$.

22. Бегущий человек достигает скорости приблизительно 40 $\frac{км}{ч}$, жираф — 50 $\frac{км}{ч}$, лев — 60 $\frac{км}{ч}$, лошадь — 64 $\frac{км}{ч}$, борзая — 72 $\frac{км}{ч}$, гепард — 120 $\frac{км}{ч}$. Постройте диаграмму, в которой скорости изображаются горизонтальными отрезками.

23. Представьте себе, что человек, лев, борзая и гепард решили пробежать эстафету 4 по 100 м. Скорости этих бегунов даны в задаче 22. За какое время каждый из них пробежит 10 м? Чему равен коэффициент обратной пропорциональности между скоростью и временем?

24. Один ученик решил построить столбчатую диаграмму по некоторым данным, и часть из этих данных он уже занес в таблицу:

Данные	380	460	520	640	780	800
Высота столбика	19	23	26	34		

Другой ученик заметил, что в таблице есть ошибка. Первый ученик удивился: «Откуда ты знаешь? Ведь тебе неизвестно, что за данные у меня, да и таблица не дописана!». Второй ученик объяснил ему, что высоты столбиков должны быть пропорциональны данным. Перечертите таблицу себе в тетрадь, исправьте ошибку, заполните таблицу до конца и постройте по ней диаграмму.

Тема 4 Путешествие по дорогам денежных систем мер

Занятия 1–3. Денежные системы мер различных народов. Современные денежные единицы. Решение задач с использованием различных денежных единиц.

Под универсальным словом «деньги» понимается множество их разновидностей, различающихся своим видом, способами обращения и использования, а также возможностями учета и возможностью превращения одних форм денег в другие. Развитие экономических отношений привело к изменению денег. Товарные деньги стали превращаться в кредитные, бумажные, электронные и пластиковые.

Рассмотрим, как развивались *денежные системы мер* у различных народов.

Товарные деньги были разнообразны и многочисленны. Среди них упоминаются: скот, кожа, меха, табак, бусы, ракушки, сушеная рыба, зерно, вино. Например, в Древнем Риме с наемными воинами расплачивались мешочками соли, и появившиеся позднее монеты назвали «солинусы». (От этого слова и произошло слово «солдат».)

На некоторых островах Океании и сейчас вместо денег применяются бронзовые пушки, съедобные ласточкины гнезда, браслеты, раковины, большие круглые камни (до 4 м в диаметре и весом до 1 т), зубы животных, перья попугая и т. д. На острове Тао-Рао один акулий зуб равен 3 раковинам или 6 красным перьям.

Постепенно человечество пришло к более удобным деньгам, которые не портились, не ломались, не изнашивались. Роль денег стали выполнять слитки из меди, бронзы, а затем — серебра и золота, можно утверждать, что в их облике и родились деньги в том смысле, в котором это слово понимается в настоящее время.

Считается, что самые первые монеты появились в Китае и в древнем Лидийском царстве в VII в. до н. э. Китайцы пользовались золотыми кубиками в качестве денег еще за 2 тыс. лет до н. э., а затем монетами. Около 500 лет до н. э. персидский царь Дарий совершил экономическую революцию в своем государстве, введя в обращение монеты и заменив ими бартер.

Бумажные деньги появились в Китае в VIII в. н. э. (бумага там впервые была изготовлена приблизительно в 100 г. н. э.). Наиболее ранний тип бумажных денег в Китае представлял собой особые расписки, выпускаемые либо под ценности и сдаваемые на хранение в специальные лавки, либо в качестве свидетельств об уплаченных налогах, хранящихся на счетах в центрах провинций, а не в столице.

Бумажные деньги производили большое впечатление на путешественников, посещавших Китай в VII—VIII вв. Марко Поло (известный путешественник) писал, что выпуск бумажных денег — это новый способ достижения той цели, к которой так давно стремились алхимики.

В XIII в. правительство Чингисхана свободно обменивало бумажные денежные знаки на золото, поэтому подделка бумажных денег приносила большие доходы и считалась страшным преступлением. К 1500 г. китайское правительство было вынуждено прекратить выпуск бумажных денег из-за трудностей, связанных с избыточным их выпуском.

В Древнем Риме при храме богини Юноны (одно из ее имен — Монета) было создано производство металлических денег.

В России до появления металлических денег использовались кожаные деньги, меха, позднее четырехугольные кусочки кожи с клеймом.

Постепенно основными денежными материалами на Руси становятся золото и серебро, из которых чеканятся монеты разного достоинства. Во время монголо-татарского ига отдельные российские княжества чеканили свои монеты, одновременно имела хождение «теньга», от которой и произошло название российских денег. Из серебряных слитков в XIII в. рубились куски, получившие название рублей.

Копейка, весившая 0,68 г и состоящая из чистого серебра, представляла в то время довольно ценную монету, поэтому, кроме нее, в ходу были полукопеечная — «деньга» и четвертькопеечная — «полушка».

Первые бумажные деньги были выпущены в Европе и России в XVIII в. Несмотря на достоинства золота, в качестве денег у него есть и значительный недостаток. Золото — мягкий металл, поэтому монеты из него быстро изнашиваются, теряя первоначальную стоимость, перестают быть полноценными. Особенно быстро износу подвергались мелкие разменные монеты, что привело к необходимости и возможности замены их монетами из другого металла (например, из меди). Впоследствии крупные монеты в обращении были заменены «бумажками», не имеющими внутренней стоимости.

Бумажные деньги используют до сих пор, причем каждое государство печатает свои денежные знаки. Чтобы государства могли торговать друг с другом, существуют курсы перевода одних денежных знаков в другие. Существуют валюты, которые используются практически во всем мире — это доллар и евро, но курсы этих валют постоянно меняются. В нашей стране государственным денежным знаком является рубль.

Существует много задач на товарно-денежные отношения, в основном это старые задачи, в которых используются денежные знаки нашей страны прошлого века. Это рубль и копейка. Для решения задач надо знать, что 1 рубль (р.) в прошлом веке был равен 100 копейкам (к.).

Контрольные вопросы

1. Что в качестве денег использовали в глубокой древности?

2. Как называлась первая меховая денежная единица?

3. Где появились первые монеты?

4. Где и когда появились первые бумажные деньги?

5. От какого слова произошло название русских денег?

6. Откуда появилось название копейка и когда?

7. Почему перешли от золотых денег к бумажным?

8. Если цена одной валюты в рублях 2800, а другой — 4050 р., то какой коэффициент перевода более мелкой валюты в более крупную?

9. Можно ли купить товар ценой 50 $, если у вас в наличии 140 000 р. и курс в настоящее время 1 $ — 2800 р.?

10. Во сколько раз 50 000 р. меньше 1 000 000 р.?
11. Сколько советских копеек в 54 769 р.?
12. Сколько советских рублей составляют 3 256 700 к.?

Задания для самостоятельной работы

1. Выразите в советских рублях: 1 р. 3 к.; 3 к.; 4 р. 1 к.; 50 к.; 18 р. 5 к.; 1 р. 75 к.

2. Выразите в советских рублях и копейках: 3,65 р.; 2,04 р.; 1,03 р.; 0,7 р.; 0,06 р.

3. Шкуры одного бизона хватит, чтобы сшить одежду двум взрослым или четырем детям. Сколько бизоньих шкур нужно добыть, чтобы одеть племя из 15 взрослых и 10 детей?

4. Книга в переплете стоит 2,5 денежных единиц. Книга на 2 денежные единицы дороже переплета. Сколько стоит переплет?

5. Пояс с пряжкой стоит 68 денежных единиц. Пояс дороже пряжки на 60 денежных единиц. Сколько стоит пряжка?

6. В начале прошлого века некий гражданин купил на 5 р. марок трех видов: в 50 к., в 10 к. и в 1 к. — всего 100 штук. Можете ли вы сказать, сколько штук марок разного вида он купил?

7. Для оплаты расхода электроэнергии было снято показание электросчетчика 832 кВт · ч. Сколько нужно уплатить за электроэнергию, если 1 кВт · ч стоит 150 р., а при оплате за прошлый месяц показание счетчика было 743 кВт · ч?

8. Плата за газ и электроэнергию составляет $4x + 2y$ денежные единицы, где x — число единиц израсходованной электроэнергии, а y — число кубических метров израсходованного газа. Подсчитайте плату за отдельные месяцы.

Месяц	x	y	Следует уплатить
Январь	50	32	
Февраль	45	28	
Март	36	25	
Апрель	25	20	

Для нахождения платы необходимо знать, сколько сегодня стоит 1 кВт · ч электроэнергии и 1 м^3 газа.

9. Экскурсанты за два дня израсходовали 188 000 р. Во второй день они израсходовали в 2 раза больше, чем в первый, и еще 8000 р. Сколько денег расходовали экскурсанты каждый день?

10. Какой стала стоимость станка после 4 лет работы, если первоначальная стоимость была 12 000 000 р., а на амортизацию (износ) списывается ежегодно $\frac{2}{25}$ первоначальной стоимости?

11. Четверо приятелей купили вместе лодку. Первый внес половину суммы, вносимой остальными, второй — $\frac{1}{3}$ суммы, вносимой тремя остальными, а четвертый — остальные 130 000 р. Сколько стоит лодка и сколько денег внес каждый?

12. Хозяйка купила банку консервированного борща емкостью 0,5 л за 3600 р. и прокипятила его с 1,5 л воды. Во что обошлась тарелка борща, если ее вместимость равна 0,5 л?

13. Стекольщик взялся нарезать 120 стекол для рам. За каждое стекло, нарезанное правильно, ему платили 3800 р., а за каждое испорченное стекло с него удерживали 8200 р. По окончании работы стекольщик получил 336 000 р. Сколько стекол он испортил?

14. Задача Эйлера. Крестьянка принесла на рынок некоторое число яиц. Одному покупателю она продала половину того, что имела, и еще пол-яйца; второму — половину того, что осталось, и еще пол-яйца; третьему — половину нового остатка и еще пол-яйца; наконец, четвертому — половину того, что осталось от прежней продажи, и еще пол-яйца. После этого у нее ничего не осталось. Сколько она принесла яиц?

15. Задача Л. Н. Толстого. Некто пришел в магазин и купил шляпу, стоящую 10 р., и дал хозяину денежный билет в 25 р. У хозяина не было сдачи, и он разменял у соседа и отдал сдачи 15 р. Когда покупатель ушел, пришел сосед и сказал, что 25-рублевый билет оказался фальшивым, и потребовал 25 р. обратно. Хозяин отдал ему 25 р. Спрашивается, сколько рублей убытка понес при этой операции хозяин.

16. На острове «Туды-Сюды» местная денежная единица «туды», а на острове «Там-Сям» – «тамы». Островитяне решили наладить торговые отношения, но стали затрудняться в переводе денежных единиц. Тогда было решено, что можно обменять 10 шкур местных ланей острова «Туды-Сюды» стоимостью 10 «тудей» за каждую шкуру на 40 сосудов из тыкв острова «Там-Сям» стоимостью 5 «тамов» за сосуд. Можете ли вы помочь островитянам установить коэффициент перехода одной валюты в другую?

Практическая работа по составлению сметы

Составьте смету на ремонт классного кабинета, если требуется побелить потолок и покрасить краской стены, пол и двери.

Расход материалов для составления сметы:

расход побелки — 1 кг на 30 м^2;

расход краски — 200 г на м^2 (в одно покрытие).

Цена мешка побелки (5 кг) — 5000 р.;

цена банки половой краски (3 кг) — 22 000 р.;

цена банки краски для стен и дверей (2 кг) — 15 000 р.

Тема 5 Путешествие в страну занимательных процентов

Занятия 1–4. Что мы знаем о процентах? Три основные задачи на проценты. Занимательные задачи на проценты.

Мы уже знаем, что процентом называется сотая доля числа. Введение процентов было удобным для оценки содержания одного вещества в другом, например содержания металла в руде, соли в воде, жира в молоке и т. д. Для обозначения процентов используют символ «%». Этот знак, полагают, произошел от итальянского слова *cento*, что означает «сто». Знак «%» впервые появился в итальянских рукописях XV в. При процентных расчетах писали сокращенно cto, затем, постепенно упрощая запись, буква t трансформировалась в черту, а затем для обозначения процента стали использовать знак, которым мы пользуемся сейчас.

Слово «процент» происходит от латинских слов *pro centum*, что означает «за сотню» или «со ста». Поскольку проценты выражают части целых чисел в одних и тех же сотых долях, использование процентов дает возможность легко сравнивать части между собой и части с целым и упрощать расчеты.

Идея выражения частей целого в одних и тех же долях родилась еще в древности у вавилонян, которые пользовались шестидесятеричными долями, и была вызвана практическими соображениями. О том, что процентные операции широко практиковались в Древнем Вавилоне, свидетельствуют дошедшие до наших дней «процентные» таблицы. Особенно распространены проценты были в Древнем Риме. Римляне называли процентами деньги, которые платил должник человеку, давшему взаймы за каждую сотню. Поэтому долгое время под процентами понимали прибыль или убыток в торговых денежных делах и сделках на каждые 100 денежных единиц. От римлян проценты перешли к другим народам Европы. В период XIII—XVI вв. процентным вычислениям уделяется много внимания в учебниках того времени. Первые печатные таблицы процентов издал Симон Стевин, который включил их в свою «Арифметику». Это произошло в 1585 г.

Сейчас процент — это частный случай десятичных дробей, сотая доля целого. Когда из различных веществ научились извлекать компоненты, то понадобилась более мелкая величина. Более мелкие тысячные доли по аналогии с процентами, выполняющие те же функции, называются промилле. Это слово произошло от латинского *promill*, которое означает «с тысячи» и имеет сходное с процентами обозначение «‰». Но на практике более удобными являются проценты, поскольку тысячные доли очень мелкие и применение их ограниченно, ими пользуются там, где имеют дело с мелкими величинами.

Основные задачи на проценты

В школьном курсе математики много внимания уделяется задачам на проценты. К основным таким задачам относятся:

1) нахождение процентов от данного числа;

2) нахождение числа по его процентам;

3) процентное отношение двух чисел.

Остановимся подробнее на каждом из этих типов задач.

1. Нахождение процентов от данного числа

К задачам этого типа относятся такие, в которых известно целое, составляющее 100 %, и необходимо найти какое-то количество процентов от этого целого. Например, найдите 25 % от числа 36.

Запишем краткое условие задачи:

a — 100 %;

x — 25 %;

$$x = \frac{36 \cdot 25}{100} = 9.$$

Ответ в задаче можно было найти с использованием формулы нахождения процента от числа: $n = \frac{a \cdot p\ \%}{100\ \%}$, где a — целое, составляющее 100 %, p — число процентов части целого, n — часть целого, составляющая p %. Посмотрев на формулу, сразу можно сказать, как с помощью десятичной дроби найти 25 % от числа 36. Подсказка для тех, кто не сумел догадаться: $36 \cdot 0{,}25 = 9$.

Поскольку 25 % составляют четвертую часть от 100 %, то можно было просто найти четвертую часть от 36.

Мы несколькими способами показали, как найти 25 % от числа 36.

Задача 1. Для лесопитомника школьники собрали 60 кг семян дуба, акации, липы и клена. Желуди составляли 60 %, семена клена — 15 %, семена липы — 20 % всех семян, а остальное составляли семена акации. Сколько килограммов семян акации было собрано школьниками?

Решение.

Желуди — 60 %, семена клена — 15 %, семена акации — x кг, семена липы — 20 %, семена 60 кг — 100 %.

Осталось $100 - 60 - 15 - 20 = 5$ (%) — столько процентов семян акации было собрано школьниками, тогда $x = \dfrac{60 \cdot 5}{100} = 3$ (кг семян акации).

Ответ: 3 кг.

Задачи на закрепление

1. Найдите: 23 % от числа 12; 150 % от числа 4; 0,5 % от числа 200.

2. Сравните 0,2 % от числа 200 и 4 % от числа 160.

3. В магазине купили 50 тетрадей в клетку и линейку. Тетради в линейку составили 30 % всех тетрадей. Сколько тетрадей в клетку и линейку было куплено в отдельности?

4. От куска веревки сначала отрезали 40 %, а затем — 50 % от остатка. Сколько процентов осталось от первоначального куска веревки?

5. В зале библиотеки имеется 500 книг на английском, французском и немецком языках. Книги на английском языке составляют 36 % всех книг, на немецком — 40 % всех книг, а остальные книги — на французском. Сколько книг на французском языке в зале библиотеки?

6. В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5 % муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках станет поровну. Сколько килограммов муки было первоначально в каждом мешке?

2. Нахождение числа по его процентам

К задачам этого типа относятся такие, в которых известно некоторое количество процентов от целого, а само целое, составляющее 100 %, необходимо найти. Например, найти число, если 40 % его составляет 24.

Запишем кратко условие задачи:

x — 100 %;

24 — 40 %;

$$x = \frac{24 \cdot 100}{40} = 60.$$

Эту задачу можно решить и по правилу: заданное число делится на его процентное значение и результат умножается на 100, т. е. по формуле: $a = \dfrac{n \cdot 100\ \%}{p\ \%}$.

$24 : 40 \cdot 100 = 60$ (24 : 40 – составляет один процент).

Рассмотрим более сложные задачи.

Задача 1. Ромашка при сушке теряет 84 % своей массы. Сколько получится сухой ромашки из 50 кг свежей? Сколько надо взять свежей ромашки, чтобы получить 32 кг сухой ромашки?

Решение. 100 % — вся масса (свежая); 84 % — теряет; $100 - 84 = 16$ (%) [остается сухая масса];

50 кг — 100 %;

x кг — 16 %;

$x = 50 \cdot 16 : 100 = 8$ (кг сухой ромашки из 50 кг свежей);

y кг — 100 %;

32 кг — 16 %;

$y = 32 \cdot 100 : 16 = 200$ (кг свежей ромашки надо взять, чтобы получить 32 кг сухой).

Ответ: 8 кг; 200 кг.

Задача 2. Вес чая, получаемого из зеленого чайного листа, составляет 4 % веса листа. Сколько надо чайного листа, чтобы получить 5,6 кг чая? Сколько получится чая из 750 кг чайного листа?

Решение

Лист: x кг — 100 %; лист: 750 кг — 100 %;

чай: 5,6 кг — 4 %; чай: y кг — 4 %;

$x = 5{,}6 \cdot 100 : 4 = 140$ (кг); $y = 750 \cdot 4 : 100 = 30$ (кг).

Ответ: 140 кг; 30 кг.

Задача 3. Арбуз массой 10 кг содержал 99 % воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98 % воды. Какова теперь масса арбуза?

Решение. Масса сухого вещества (сухое вещество — это вещество, которое остается после полного испарения воды) в арбузе:

$100 - 99 = 1$ (%) или $10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$ (кг).

После того как арбуз усох, масса сухого вещества составила $100 - 98 = 2$ (%) от новой массы арбуза. Масса сухого вещества в арбузе не изменилась.

Пусть x кг — новая масса арбуза, тогда 2 % от x — это те самые 0,1 кг.

$x\ — 100\ \%;$

$0{,}1\ —\ \ 2\ \%;$

$$x = \frac{0{,}1 \cdot 100}{2} = 5 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 5 кг.

Задачи на закрепление

1. Найдите число, если: а) 27 % его равны 54; б) 114 % его равны 456; в) 0,25 % его равны 50.

2. Сколько килограммов свежих грибов нужно собрать, чтобы получить 3 кг сушеных грибов, если известно, что грибы при сушке теряют 85 % своей массы?

3. Морская вода содержит 5 % соли. Сколько килограммов морской воды взяли, если соли в ней 2 кг?

4. Собрали 100 кг грибов с влажностью 98 %. После просушки влажность грибов стала 96 %. Какова масса грибов после просушки?

5. Собрали 12 кг желудей, влажность которых 60 %, желуди подсушили и довели влажность до 20 %. Сколько килограммов подсушенных желудей получили?

6. В сливах, собранных на даче, 90 % влажности, после подсушивания влажность слив стала 80 %. Сколько подсушенных слив получили из 50 кг собранных?

3. Процентное отношение двух чисел

В этих задачах находят, какой процент одно число составляет от другого. При этом важно определить, какое число составляет 100 %. При решении таких задач первое число делится на второе и результат умножается на 100, т. е. по формуле: $\dfrac{n \cdot 100\ \%}{a}$.

Например, задачу на нахождение процентного отношения чисел 2 и 3 можно сформулировать так: какой процент 2 составляет от 3? Тогда:

3 — 100 %;

2 — x %;

$$x = \frac{2 \cdot 100}{3} = 66\frac{2}{3}\ (\%);\ \left(2 : 3 \cdot 100 = 66\frac{2}{3}\right)(\%).$$

Рассмотрим другой пример: найти процентное отношение чисел 3 и 2. В этом случае задачу можно переформулировать так: какой процент число 3 составляет от 2? Тогда:

2 — 100 %;

3 — x %;

$$x = \frac{3 \cdot 100}{2} = 150\ (\%).$$

Задачи на закрепление

1. Какой процент число 3 составляет от 75?

2. Найдите процентное отношение чисел 5 и 25.

3. Найдите процентное отношение чисел 25 и 5.

4. Надо вспахать участок поля в 500 га. В первый день вспахали 150 га. Сколько процентов составляет вспаханный участок от всего участка?

Рассмотрим еще несколько задач.

Задача 1. Рабочий изготовил за смену 45 деталей вместо 36 по плану. Сколько процентов фактическая выработка составляет от плановой? На сколько процентов рабочий перевыполнил план?

Решение. 45 : 36 = 1,25 = 125 (%); 125 – 100 = 25 (%).

Ответ: 125 %; на 25 %.

Задача 2. Площадь первого участка земли 60 га, а второго — 48 га. На сколько процентов первый участок больше второго? На сколько процентов второй участок больше первого?

Решение. Разница этих участков — 12 га.

48 га — 100 %;

12 га — x %;

$$x = \frac{12 \cdot 100}{48} = 25\ (\%).$$

60 га — 100 %;

12 га — x %;

$$x = \frac{12 \cdot 100}{60} = 20\ (\%).$$

Задачи различных типов

Задача 1. Число уменьшили на 20 %. На сколько процентов нужно увеличить полученный результат, чтобы получить первоначальное число?

Решение. Обозначим первоначальное число буквой a, тогда после уменьшения числа на 20 % получим: $a - 0{,}2a = 0{,}8a$.

$0{,}8a$ — 100 %;

a — x %;

$$x = \frac{a \cdot 100}{0{,}8a} = 125\ (\%).$$

Получили, что первоначальное число составляет 125 % от нового числа и поэтому новое число нужно увеличить на 25 % [125 – 100 = 25 (%)].

Задача 2. Влажность воздуха к полудню по сравнению с утренней снизилась на 12 %, а затем к вечеру еще на 5 % по сравнению с полуднем. Сколько процентов от утренней влажности воздуха составляет влажность воздуха к вечеру и на сколько процентов она снизилась?

Решение. Утром — x %, в полдень — на 12 % меньше, т. е. $x - 0{,}12x = 0{,}88x$ (%). Вечером — еще на 5 % меньше: 5 % от $0{,}88x$ — это $0{,}88x \cdot 0{,}05 = 0{,}044x$ (%), $0{,}88x - 0{,}044x = 0{,}836x$ (%).

$$x \text{ — } 100\ \%;$$
$$0{,}836x \text{ — } y\ \%.$$
$$y\ \% = \frac{0{,}836x}{x} \cdot 100 = 83{,}6\ (\%);\ \ 100 - 83{,}6 = 16{,}4\ (\%).$$

Ответ: 83,6 %; на 16,4 %.

Задача 3. В одном из городов Латвии часть жителей умеет говорить только по-латышски, часть — только по-русски. По-латышски говорят 85 % всех жителей, по-русски — 75 %. Сколько процентов всех жителей говорят на обоих языках?

Решение. 100 % – 75 % = 25 % всех жителей не говорят по-русски; 85 % – 25 % = 60 % говорят по-русски и по-латышски.

Ответ: 60 %.

Задача 4. В бассейн проведена труба. Вследствие ее засорения приток воды уменьшился на 60 %. На сколько процентов в результате этого увеличится время заполнения бассейна?

Решение. 100 % – 60 % = 40 % = 0,4 — такую часть составляет оставшийся приток воды.

1 : 0,4 = 2,5 (раза) — во столько раз увеличится время, необходимое для наполнения бассейна, т. е. оно увеличится на 150 %. Покажите, что увеличение в 2,5 раза соответствует увеличению на 150 %.

Ответ: на 150 %.

Задача 5. Ширину прямоугольника увеличили на 3,6 см, а длину уменьшили на 16 %. В результате площадь нового прямоугольника оказалась больше прежней на 5 %. Найдите ширину нового прямоугольника.

Решение. a — ширина, b — длина, $S = a \cdot b$; $a + 3{,}6$ — новая ширина; $b - 0{,}16b = 0{,}84b$ — новая длина;

$S = (a + 3{,}6) \cdot 0{,}84b$ — новая площадь;

$$a \cdot b \quad — \quad 100\ \%;$$

$$(a + 3{,}6) \cdot 0{,}84b \quad — \quad 105\ \%;$$

$(a + 3{,}6) \cdot 84b = 105ab$; $84ab + 3{,}6 \cdot 84b = 105ab$; $21ab = 302{,}4b$, разделим обе части на $21b$, получим $a = 14{,}4$; значит, старая ширина — 14,4 см, тогда новая ширина $14{,}4 + 3{,}6 = 18$ (см).

Ответ: ширина нового прямоугольника 18 см.

Задача 6. Первое число равно 0,2, второе — 0,3. Сколько процентов составляет первое число от суммы этих чисел? На сколько процентов первое число меньше второго и на сколько процентов второе число больше первого?

Решение. $0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$; $0{,}2 : 0{,}5 = 0{,}4 = 40$ (%);
$(0{,}3 - 0{,}2) : 0{,}2 = 0{,}5 = 50$ (%); $(0{,}3 - 0{,}2) : 0{,}3 = \frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$ (%).

Ответ: 40 %; на 50 %; на $33\frac{1}{3}$ %.

Контрольные вопросы

1. Что называется процентом?
2. Где впервые появились проценты?
3. Как появился знак, обозначающий проценты?
4. Как выразить проценты десятичной дробью? Поясните на примере.

5. Как найти несколько процентов от числа? Приведите примеры.

6. Как найти число по его процентам? Приведите примеры.

7. Как найти процентное отношение двух чисел? Поясните на примере.

8. Как можно найти 2 %, 5 %, 10 %, 20 %, 25 %, 50 %, 75 % от числа?

9. Расположите в порядке возрастания: 0,2 % от числа 10; 10 % от числа 0,62; 20 % от числа 1; 60 % от числа 0,8.

10. Расположите в порядке убывания: 0,3 % от числа 3; 126 % от числа 3; 98 % от числа 3; число 3.

11. Число увеличили на 100 %. На сколько увеличилось первоначальное число? Во сколько раз увеличилось число? Почему?

12. Во сколько раз увеличилось число, если его увеличили на 200 %? На 300 %?

13. На сколько процентов нужно увеличить данное число, чтобы оно увеличилось в 2 раза? В 1,5 раза?

14. Сравните с единицей: 0,5 % от 0,5; 2 % от 10; 200 % от 0,7; 5 % от 20.

15. Цена товара повысилась в 2 раза. На сколько процентов увеличилась цена товара?

16. Цена товара снизилась в 2 раза. На сколько процентов стала меньше цена товара?

17. Сколько процентов от одной тысячи рублей составляют 10 р.? 20 р.? 50 р.?

18. Укажите число, если число, которое больше его на 50 %, равно 30.

Составьте конспект, содержащий задачи на проценты различных типов (не менее трех), и постарайтесь решить задачи различными способами.

Задания для самостоятельной работы

1. Вклад в банке имеет годовой прирост 6 %. Начальная сумма вклада равнялась 1 000 000 р. На сколько возрастет сумма вклада в конце года?

2. Зарплата в январе равнялась 1 500 000 р., что составило 7,5 % от годовой зарплаты. Какова была годовая зарплата?

3. Завод выпустил за год 40 000 автомобилей, а в следующем году — только 36 000 автомобилей. Сколько процентов это составило по отношению к выпуску предыдущего года?

4. Увеличится или уменьшится число, если его сначала уменьшили на 20 %, а затем увеличили на 20 %?

5. Цену товара сначала повысили на 20 %, затем новую цену повысили еще на 15 % и, наконец, после пересчета произвели повышение еще на 10 %. На сколько всего процентов повысили первоначальную цену товара?

6. Цену бананов сначала понизили на 20 %, затем новую цену понизили еще на 15 % и, наконец, после пересчета произвели понижение еще на 10 %. На сколько всего процентов понизили первоначальную цену бананов?

7. Цену товара сначала повысили на 10 %, затем новую цену понизили на 10 % и, наконец, после пересчета произвели повышение еще на 10 %. На сколько всего процентов изменилась первоначальная цена товара?

8. а) Смешали 4 кг творога жирностью 3 % и 16 кг творога жирностью 6 %. Какой процент жирности полученного творога?

б) Смешали 20 л молока жирностью 5 % и 10 л молока жирностью 8 %. Какой процент жирности полученного молока?

9. а) На сколько процентов 70 больше, чем 50?

б) На сколько процентов 36 меньше, чем 40?

в) На сколько процентов 72 больше, чем 60?

г) На сколько процентов 45 меньше, чем 50?

10. а) Одну сторону прямоугольника увеличили на 30 %, а другую — уменьшили на 20 %. Как и на сколько процентов изменилась площадь прямоугольника?

б) Одну сторону прямоугольника увеличили на 20 %, а другую — уменьшили на 30 %. Как и на сколько процентов изменилась площадь прямоугольника?

11. а) Маша исписала 48 листов, что составляет 60 % тетради. Сколько листов в тетради?

б) Маша исписала 56 листов, что составляет 70 % тетради. Сколько листов в тетради?

12. а) Петя тратит на уроки 70 % свободного времени, причем 40 % времени на уроки приходится на математику. Сколько процентов свободного времени Петя тратит на математику?

б) Петя тратит на уроки 60 % свободного времени, причем 40 % времени на уроки приходится на математику. Сколько процентов свободного времени Петя тратит на математику?

13. а) Знаменатель дроби увеличили на 100 %. На сколько процентов уменьшилась дробь?

б) Знаменатель дроби уменьшили на 50 %. На сколько процентов увеличилась дробь?

14. а) Из 40 т руды выплавляют 20 т металла, содержащего 6 % примесей. Какой процент примесей в руде?

б) Из 60 т руды выплавляют 30 т металла, содержащего 5 % примесей. Какой процент примесей в руде?

15. Для туристического похода школьники собрали 176 000 р., что составляет 32 % всех расходов. Недостающие деньги дала шефская организация. Какая сумма требовалась для проведения похода? Сколько денег дали шефы?

16. За две книги заплатили 12 600 р. Сколько стоит каждая книга, если: а) одна из них на 25 % дороже другой; б) если одна из них на 25 % дешевле другой?

17. По одному виду вклада сбербанк выплачивает вкладчикам 14 % годовых, а по другому — 20 % годовых. Вкладчик отнес в банк 300 000 р., причем часть вклада положил на один вид, а часть — на другой. Через год вкладчик получил в качестве процентов 54 000 р. выплат. Найдите величину каждого из вкладов.

18. Торговец рассуждал так: «Я ничего не потеряю, а быстрее продам свой товар, если вначале подниму цену на товар на 50 %, а затем через некоторое время объявлю распродажу со скидкой 50 %». Верно ли рассуждение торговца?

19. Мальчик собрал на покупку фотоаппарата 52 000 р. Остальные деньги дали ему отец и два старших брата. Первый брат дал 25 % суммы, собранной на покупку без него, второй дал $33\frac{1}{3}$ % суммы, собранной без него, и отец дал 50 % суммы, собранной на покупку без него. Сколько стоил фотоаппарат?

Тема 6 Путешествие в страну рациональных чисел

Занятия 1–2. История возникновения отрицательных чисел. Примеры вычислений с отрицательными числами и числами разных знаков. Рациональные числа. Занимательные и интересные задания и головоломки с рациональными числами.

Если посмотреть на градусник, который измеряет температуру воздуха на улице, то можно увидеть, что на его шкале есть отметка «0», а ниже этой отметки располагаются числа со знаком «–» (минус). Эти числа называются отрицательными. Вот об этих числах со знаком «–», а также их «друзьях» — положительных числах и нуле — мы поговорим, отправляясь в путешествие.

Рассмотрим пример из наших дней. Если на счету вашего телефона было 6000 р., а вы потратили 8000 р., то на вашем счету образуется отрицательный баланс –2000 р. (минус 2000 р.). Это значит, что теперь телефонной компании вы должны 2000 р.

Рассмотрим еще пример, в котором используются отрицательные числа. В многоэтажном доме есть верхние этажи, а также нижние этажи. Причем нижние этажи расположены ниже уровня поверхности земли. Лифт перемещается как по верхним, так и по нижним этажам. Если лифт направляется на верхние этажи, то мы можем сказать, что находимся на +2-м, +3-м, +10-м этаже. Если мы направляем лифт на этажи, которые располагаются ниже поверхности земли, то можно сказать, что мы находимся на –1-м, –2-м, –6-м этаже.

То же самое вы говорили на уроках географии об уровне моря. Если мы находимся на поверхности моря или океана и двигаемся вверх от поверхности, то мы говорим, что находимся на высоте 50, 100, 500 метров над уровнем моря. Но если мы погружаемся на дно моря или океана, то здесь используются отрицательные числа, а именно –100, –500, –1000 метров ниже поверхности.

Таким образом, можно сказать, что знаки «–» или «+» указывают нам на то, где располагается число относительно принятой точки отсчета, а именно «0» (нуля).

Необходимость в отрицательных числах возникла давно. Обходиться только натуральными числами неудобно. Например, с помощью этих чисел нельзя вычесть большее число из меньшего. Для такого случая были введены отрицательные числа. Долгое время люди отрицательные числа считали несуществующими, «ложными». Чтобы удобнее было осмыслить результаты действия с ними, эти числа сопоставлялись с различными понятиями.

Впервые отрицательные числа были частично узаконены в Китае и использовались китайцами еще в X в. до н. э. Открытие отрицательных чисел было важнейшим событием в истории древнекитайской математики. Положительные количества в китайской математике называли «чен», отрицательные — «фу»; их изображали разными цветами: «чен» — красным, «фу» — черным. Такой способ изображения использовался в Китае до середины XII в., пока Ли Е не предложил более удобное обозначение отрицательных чисел — цифры, которые изображали отрицательные числа, перечеркивали черточкой наискосок справа налево.

В Индии отрицательные числа систематически использовали в основном так, как это мы делаем сейчас. В древности индийские ученые использовали отрицательные числа в торговых расчетах и связывали положительные и отрицательные числа с понятиями «долг», «имущество». Если у кого-то было 5000 р. и он покупал товар на 1000 р., то у него оставалось 5000 – 1000 = = 4000 (р.). Но если у кого-то было 1000 р. и он покупал товар на 5000 р., то у него образовывался долг 4000 р. Поэтому в этом случае считали, что совершалось вычитание 1000 – 5000, результатом которого являлось число 4000 со знаком «–», означающее «четыре тысячи долга». Таким образом, –4000 — это отрицательное число, и в данном случае оно указывает на то, что у кого-то образовался долг в 4000 р.

Вместе с отрицательными числами индийские математики ввели понятие «нуль», что позволило им создать десятеричную систему счисления. Но долгое время нуль не признавали числом, *nullus* по-латыни — «никакой», «отсутствие числа». И лишь через X в., в XVII ст., с введением системы координат нуль становится числом.

Отрицательными числами пользовались арабские ученые (Абу-л-Вафа в X в. н. э.), а вот европейцы начали использовать их только в XIII в.

В XVII в. голландский математик Жирар стал пользоваться отрицательными числами наравне с положительными. Современное обозначение положительных и отрицательных чисел со знаками «+» и «–» применил немецкий математик Видман.

Так появились рациональные числа, которые состоят из целых и дробных положительных чисел, им противоположных отрицательных и нуля.

Натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и нуль называются целыми числами. Целые и дробные числа получили общее название — рациональные числа. Их называли также относительными, потому что любое из них можно представить отношением двух целых чисел (второе не равно 0). Каждое рациональное число можно представить как бесконечную периодическую десятичную дробь.

В заключении приведем интересные правила древних о знаке результата, получаемого при умножении двух отличных от нуля чисел:

«друг моего друга — мой друг» $(+) \cdot (+) = (+)$;

«друг моего врага — мой враг» $(+) \cdot (-) = (-)$;

«враг моего друга — мой враг» $(-) \cdot (+) = (-)$;

«враг моего врага — мой друг» $(-) \cdot (-) = (+)$.

Полезно запомнить

$a \cdot (-1) = -a$; $a : (-1) = -a$; $a : (-a) = -1$; $-a : a = -1$.

Контрольные вопросы

1. Частное двух чисел — отрицательное число. Каким по знаку будет делитель, если делимое отрицательное?

2. Существует ли число, которое само себе противоположно?

3. Какие числа относятся к рациональным?

4. Может ли сумма двух чисел быть больше, чем каждое слагаемое?

5. Что такое модуль числа?

6. Модули каких чисел равны?

7. Модуль какого числа совпадает с самим числом?

8. Модули двух различных чисел одинаковые. Что можно сказать о знаке произведения этих чисел?

9. Модули двух различных чисел одинаковые. Что можно сказать о знаке частного этих чисел?

10. Может ли разность двух целых чисел быть равной одному из них?

11. Может ли сумма двух целых положительных чисел быть равной 0?

12. Может ли сумма двух отрицательных чисел быть больше их частного?

13. Может ли произведение двух отрицательных чисел быть числом отрицательным?

14. Сумма каких двух чисел равна нулю?

15. Какое число больше: самое маленькое целое положительное число или самое большое целое отрицательное число?

16. Модуль какого числа больше: самого маленького целого положительного числа или самого большого целого отрицательного числа?

17. Сумма двух чисел с разными знаками оказалась отрицательным числом. Модуль какого числа из данных слагаемых больше?

18. Модуль отрицательного числа больше модуля положительного. Какой по знаку будет сумма этих чисел?

19. Два разных по знаку числа отмечены на числовой прямой, причем отрицательное число ближе к нулю. Какими по знаку будут сумма, разность, произведение и частное этих чисел?

20. Может ли произведение четного числа отрицательных множителей быть числом отрицательным?

21. Каким по знаку будет произведение, в котором четное число отрицательных множителей?

22. Каким по знаку будет произведение, в котором нечетное число отрицательных множителей?

23. В произведении восемь множителей с разными знаками. Каким по знаку может быть это произведение?

24. Частное двух чисел — отрицательное число. Каким по знаку будет делитель, если делимое отрицательное?

25. Днем улитка проползла по дереву от дупла на 38 см, а ночью спустилась вниз на 40 см. На следующий день все повторилось. На сколько сантиметров от дупла и в каком направлении находится улитка?

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите:

1) $(-1) + (+2) + (-3) + (+1) + (-2) + 3$;

2) $(1 - 2{,}46 \cdot 3{,}54) \cdot \left(0{,}2 - \frac{1}{5}\right)$;

3) $-\frac{1}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} - \frac{1}{10\,000}$;

4) $(-0{,}027) + 5{,}7 - 0{,}073$;

5) $-(-(-(-1)))$;

6) $(-2 + 2 - 2 + 2 - \ldots -2 + 2) \cdot 2$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее отрицательные числа из тех, которые можно было записать при помощи трех единиц.

3. Дано: $20 = 20 + 18 + 16 + \ldots + x$. Сколько слагаемых имеется в правой части равенства?

4. Полуденная температура в различных местах Крыма была равна (в градусах Цельсия): –1,5; –2,3; 0,8; 0,0; –1,4; 1,6; –0,7; –0,1; 3,8. Запишите результаты в порядке возрастания или убывания. Выпишите средний из них.

5. Найдите множество целых значений буквы a, при которых произведение $(5 + a) \cdot (3 - a)$ положительно.

6. Найдите значение суммы: $-1+1-1+1-1+1-...+$ $+1$?

7. Известно, что числа $x+y$ и $4x+y$ являются положительными. Может ли число $8x+5y$ быть отрицательным?

8. Среди предложенных вам ответов найдите правильный:

а) $(-52+1120:(-28)+20):(-2)$.

-60; -36; 7; 36; 24;

б) $-36\cdot(-5)-(-15+3)\cdot 21$.

600; -72; 72; 4032; 432; -432;

в) $320-64:(-22+6)-40$.

282; 276; -56; 284; 364; -282;

г) $576:(24-24\cdot 2):(-4)$.

-6; 96; 6; -96; выражение не имеет смысла.

9. Сравните:

а) $|-4{,}5+2{,}9|$ и $|-4{,}5|+|2{,}9|$;

б) $|-8{,}6-1{,}7|$ и $|-8{,}6|+|-1{,}7|$.

10. Сколько целых чисел расположено на координатной прямой между числами -7 и 8?

а) 13; б) 14; в) 15; г) 16?

11. Расположите числа $-6{,}7$; $-6\dfrac{6}{7}$; $-6\dfrac{5}{6}$; $-6{,}8$; $-6\dfrac{7}{8}$; $-6{,}75$ в порядке убывания.

12. Какое из данных чисел в паре наибольшее:

а) $-876{,}89$ и $-876{,}888$;

б) $16{,}098$ и $|-16{,}0197|$;

в) $-16{,}65$ и $|16{,}65|$?

13. Выполните действия: $|-9{,}67|+|-7{,}8|-|0{,}675|$.

14. Решите уравнение: $|5 - x| = 2$.

15. Найдите среднее арифметическое чисел $|-x|$ и $|y|$ при $x = 4{,}5$ и $y = 6{,}6$.

16. Установите закономерность в расположении чисел ряда:

а) $-2; -4; -6; -8$ ...;

б) $-2; -4; -8; -16; -32$ ...;

в) $-2; -7; -14; -45$ ... .

17. Решите примеры 1—7, которые записаны в два столбика, и с помощью букв, записанных в таблице, вы узнаете слово, которое подскажет вам, что делать дальше.

1) $-12 + (-8)$;
2) $-7 + (-9)$;
3) $25 - 32$;
4) $-5{,}4 + (-3{,}5)$;
5) $-3{,}08 + 1{,}69$;
6) $-2{,}6 - (-1{,}4)$;
7) $48 - (-15)$.

Ж	Т	С	Ь	О	И	Л
$-8{,}9$	$-1{,}2$	-20	63	-7	$-1{,}39$	-16

18. Вычислите:

а) $-2{,}5 + 13{,}6 + 17{,}2 - 7{,}5 + 16{,}4 - 19{,}2 + 12{,}8 - 0{,}8$;

б) $5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14$.

19. Выпишите из чисел $44; 37{,}5; 1; 0; 55{,}7; -54; \frac{59}{47}; -9\frac{23}{29}; -666; -1; 3^2; 2^4$: а) натуральные; б) целые; в) рациональные.

20. Заполните таблицу:

n	$-2\frac{3}{7}$	$-1{,}3$		$-4{,}4$	
m	$1{,}2$		$-1\frac{5}{11}$		

$n+m$		$3\frac{2}{9}$			$-2{,}2$
$n-m$			$1{,}6$		$1\frac{2}{3}$
$m-n$				$5\frac{1}{3}$	

Тема 7 Путешествие в область длин, площадей и объемов

Занятия 1–7. Старинные меры длины, площади и объема. Возникновение мер площадей. Единицы измерения площадей. Нахождение площадей различных земельных участков. Решение задач на нахождение площадей. Составление плана квартиры и нахождение ее площади. Измерение сыпучих тел. Измерение объема жидкости. Задачи с практическим содержанием.

Рассмотрим вначале некоторые старинные меры. В древности различные меры длины были связаны с человеком: на сколько он протянет руку, сколько сможет поднять на плечи и т. д.

Образцами первых мер длин послужили пальцы рук, ладони, ноги, шаг, размах рук и т. п. Некоторые из них сохранились до настоящего времени, а другие способствовали возникновению новых, которые в дальнейшем уточнялись.

Небольшие расстояния измерялись шагами, но для измерения полей шаг оказался слишком малой мерой, возник двойной шаг или трость, а затем двойная трость. Для измерения больших расстояний употреблялась мера, которая была равна тысяче двойных шагов или тростей, поэтому название русской меры расстояний — миля произошло от латинского слова *milia* — тысяча.

Согласно старинным историческим документам большие расстояния измерялись переходами, привалами, днями передвижения (5 снов, 6 дней пути и т. д.). Кочующие монголы определяли расстояния в верблюжьих или лошадиных переходах, уточняя при этом «при хорошей езде», «при плохой езде».

В старинных русских договорных грамотах о пожаловании земли можно встретить такое определение размеров даруемого участка: «От такого-то места во все стороны на бычий рев», т. е. на такое расстояние, с которого еще можно слышать рев быка, а в этнографической литературе описаны другие аналогичные меры расстояний: «коровий крик», «петушиный крик» и т. п.

Система древнерусских мер длины включала в себя следующие основные меры: версту, сажень, аршин, локоть, пядь и вершок. *Аршин* — старинная русская мера длины, равная в современном исчислении 0,7112 м. Аршином также называли мерную линейку, на которую обычно наносили деления в вершках.

Есть различные версии происхождения аршинной меры длины. Возможно, первоначально «аршин» обозначал длину человеческого шага. Корень «ар» в слове «аршин» в древнерусском языке (и в других, соседних) означает «земля», «поверхность земли» и указывает на то, что эта мера могла применяться при определении длины пройденного пешком пути. Было и другое название этой меры — шаг. Практически счет мог производиться парами шагов взрослого человека или тройками, а при измерении шагами небольших расстояний применялся пошаговый счет. *Шаг* — средняя длина человеческого шага, равная 71 см. Это одна из древнейших мер длины.

Для мелких мер длины применялась на Руси мера — *пядь* (с XVII в. длину, равную пяди, называли уже иначе — *четверть аршина* или *четверть*). Легко можно было получить меньшие доли — два вершка ($\frac{1}{2}$ пяди) или вершок ($\frac{1}{4}$ пяди).

Вершок равнялся $\frac{1}{16}$ аршина, $\frac{1}{4}$ четверти. В современном исчислении — 4,44 см. Наименование «вершок» происходит от слова «верх». В литературе XVII в. встречаются и доли вершка — полвершки и четвертьвершки.

Купцы, продавая товар, как правило, мерили его своим аршином (линейкой) или «по-быстрому» — отмеряя «от плеча». Чтобы исключить обмер, властями был введен в качестве эталона «казенный аршин», представляющий собой деревянную линейку, на концах которой клепались металлические наконечники с государственным клеймом.

В русских сборниках XVII в., кроме известных нам сажени, аршина и вершков, упоминается и локоть.

Длину веревки или ткани почти все древние народы измеряли локтями.

Локоть — исконно древнерусская мера длины, известная уже в XI в. Значение древнерусского локтя приблизительно 46—47 см. Локоть широко применяли в торговле как особенно удобную меру. В розничной торговле холстом, сукном, полотном локоть был основной мерой. Полный оборот ткани около локтя назывался *двойным локтем.*

Для измерения меньших расстояний употреблялась *ладонь* — ширина кисти руки. Ладонь была равна $\frac{1}{6}$ локтя.

Еще меньшей единицей длины являлся *дюйм*, который первоначально был длиной фаланги большого пальца. Название «дюйм» происходит от голландского — «большой палец». Он равен ширине большого пальца или длине трех сухих зерен ячменя, взятых из средней части колоса.

Длина дюйма была уточнена в Англии в XIV в. Королем был установлен «законный дюйм», равный длине трех ячменных зерен, вынутых из средней части колоса и приставленных друг к другу своими концами. В английском быту и языке до сих пор сохранилась мера «ячменное зерно», равная одной трети дюйма. В России в быт мера дюйм вошла при Петре I, когда были установлены отношения русских и английских мер для облегчения политических и торговых отношений. Согласно современным справочникам 1 дюйм = 25,4 мм = 2,54 см.

Сажень — одна из наиболее распространенных на Руси мер длины. Наименование «сажень» происходит от глагола «сягать» («досягать») — на сколько можно было дотянуться рукой.

Обхват ствола дерева удобно было измерять раскинутыми руками. Расстояние между концами пальцев вытянутых в противоположных направлениях рук называлось *маховой саженью*. Этой мерой пользовались русские крестьяне.

Маховая сажень — расстояние между концами пальцев широко расставленных рук взрослого мужчины. Высоту предмета такой саженью измерять было неудобно, поэтому возникла другая мера — *косая сажень*. Косая сажень обычно больше маховой сажени. Косая сажень — расстояние от носка левой ноги до конца среднего пальца поднятой вверх правой руки. Эта единица измерения используется в словосочетании: «у него косая сажень в плечах» в значении — богатырь, великан, так часто говорят, например, в сказках.

Верста — старорусская путевая мера (ее раннее название — «поприще»). Этим словом первоначально называли расстояние, пройденное от одного поворота плуга до другого во время пахоты. Верстой также назывался верстовой столб на дороге.

Величина версты неоднократно менялась в зависимости от числа саженей, входивших в нее, и величины сажени.

С древних времен многими народами употреблялась мера *фут*. Фут — это средняя длина ступни человека. В старину в XVI в. математик Клавий определил геометрический фут как ширину 64 ячменных зерен, т. е. 1 фут = = 304,8 мм = 30,48 см.

В России тоже использовали фут. Он, так же как и дюйм, был введен при Петре I, но никогда не признавался исконной русской мерой, позднее для точности назывался английским футом. 1 фут = 12 английским дюймам. Фут и дюйм, которыми пользовались в России, равны по величине английским мерам. Указ 1835 г. определил соотношение русских мер с английскими: сажень = 7 футам, аршин = 28 дюймам.

Указом короля Генриха I (XII в.) за основную меру длины в Англии был взят *ярд* — расстояние от носа короля до конца среднего пальца его вытянутой руки. Длина ярда в настоящее время равна 0,9144 м. Таким образом, 1 ярд приближается к нашему метру.

Расстояние измерялось также и в *морских*, и *сухопутных милях*. 1 сухопутная миля = 1760 ярдам, т. е. 1 миля = 5280 футам. Морская миля равнялась 6080 футам.

Основными единицами длины в системе мер древней Беларуси были локоть, сажень, прут, шнур. Один локоть приблизительно равен 65 см. Одна сажень содержит 3 локтя, один прут — семь с половиной локтей, один шнур — 10 прутов. Для измерения длины небольших предметов использовался вершок, равный 4 см 5 мм. Известны и другие меры длины, например аршин, равный 16 вершкам; миля, равная 120 локтям; верста, равная 2400 локтям.

Для измерения тканей в Беларуси использовалась единица длины, называемая *постав*, 1 постав равен 50 локтям.

Приведенные примеры единиц длины основаны на размерах частей человеческого тела. Очевидно, что первый период истории мер, в течение которого человек не нуждался в других эталонах мер, кроме частей своего тела, продолжался очень долго. Хотя даже теперь иногда мы применяем первобытные способы измерения, например размеры стола можем измерить пядью, определяемой расстоянием между концами пальцев, большого и указательного или среднего.

Старинные русские меры, которые будут полезны при решении задач:

1 верста = 1066,78 м = 500 саженям;

1 сажень = 2,133 56 м = 3 аршинам;

1 аршин = 0,71 м = 16 вершкам;

1 пядь = 17,78 м = 4 вершкам;

1 вершок = 0,0444 м;

маховая сажень = 1,76 м;

косая сажень = 2,48 м.

Стадий равен от 185 до 195 м (в зависимости от страны).

А сейчас поговорим о возникновении мер площадей и единицах их измерения.

Площадью называется величина, которая характеризует размер некоторой геометрической фигуры. Нахождение площадей геометрических фигур является одной из практических задач древности.

Способ измерения площадей в древности основывался на предположении, что равные по площади фигуры имеют и равные границы (периметры) и что равные периметры охватывают равные площади. Это предположение является неверным и это легко проверить. Например, площади квадрата со стороной 4 и прямоугольника со сторонами 2 и 8 равны, но периметры этих фигур различные. Однако основанное на неверном предположении правило нахождения площади применяли многие народы. Они измеряли площадь в соответствии со временем, необходимым для прохождения по границе участка.

В Вавилоне, Египте и Греции вычисляли площади фигур по правилам, сходным с нашими правилами или близким к ним. Так, например, египтяне определяли площадь треугольника и трапеции (четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет) не по тем формулам, которые доказываются в учебниках геометрии. Однако треугольники и трапеции, которые встречаются в египетских текстах, либо прямоугольные, тогда египетское правило дает точный результат, либо почти прямоугольные, тогда египетское правило дает приближенный, но достаточно точный для практики ответ. Правило вычисления площадей, аналогичное египетскому, встречается и в русских рукописных материалах XVI—XVII вв. Этот применявшийся неточный способ вычисления площадей в то время удовлетворял потребности хозяйства. В настоящее время он, конечно же, недопустим.

Меры площади всегда были нужны для определения размеров земельных участков, которые не всегда были четко разграничены, соприкасались друг с другом и имели межевые знаки.

В Древней Руси для пахотных земель главной единицей измерения площади стала *четверть* — площадь, на которую высевали четверть (меру объема) ржи. Таким образом, «посевные» земельные меры оказались связанными с реальными, вещественными величинами, имевшими вполне определенное объемное значение, и были более удобными для земледельцев.

Для определения площади сенокосных угодий широко применяли *«урожайные» меры* — копны сена. Копны иногда использовали и в качестве мер посевных площадей.

В памятниках древней письменности с конца XIV в. упоминается геометрическая мера земельных площадей — *десятина*. Первоначально применяли круглую десятину — квадрат со стороной, равной десятой доле версты (50 саженей), откуда и происходит название «десятина». С середины XV в. десятину стали употреблять для пахотных земель, а не только для сенокосных угодий. С этого момента можно говорить об использовании в землемерной практике действительно мер в метрологическом смысле слова.

Основной мерой измерения площадей стала десятина. Непосредственные результаты измерений обычно выражали в долях десятины: полдесятины, четверть (четь) десятины и пр.

При Петре I в системе единиц площади прочно утвердились *квадратные меры*. В учебниках давали сведения о них и действиях с ними.

И если в сельскохозяйственной практике использовались десятины, то квадратные меры получили более широкое применение для измерения городских земельных участков, в строительстве, в технике и научных исследованиях.

Официально были установлены соотношения русских и метрических мер площади, опубликованные в изданных «Сравнительных таблицах» (1916 г.).

1 кв. верста = 1,138 06 км^2;

1 десятина = 1,092 54 га;

1 кв. аршин = 0,505 805 м^2;

1 кв. фут = 0,092 903 0 м^2 и т. д.

Положением о мерах и весах от 27 июля 1916 г. были узаконены квадратный километр, квадратный метр, квадратный дециметр, квадратный сантиметр, квадратный миллиметр, а для земельных площадей — ар и гектар.

1 см^2 = 100 мм^2;

1 дм^2 = 100 см^2;

1 м^2 = 100 дм^2;

1 м^2 = 10 000 см^2;

1 м^2 = 1 000 000 мм^2;

1 ар = 100 м^2;

1 га = 10 000 м^2;

1 га = 100 ар.

Полезно запомнить

Квадратный километр ($км^2$) — площадь квадрата со стороной 1 км.

Гектар (га) — площадь квадрата со стороной 100 м.

Ар — площадь квадрата со стороной 10 м.

Квадратный метр ($м^2$) — площадь квадрата со стороной 1 м.

Квадратный дециметр ($дм^2$) — площадь квадрата со стороной 1 дм.

Квадратный сантиметр ($см^2$) — площадь квадрата со стороной 1 см.

Квадратный миллиметр ($мм^2$) — площадь квадрата со стороной 1 мм.

Измерить площадь фигуры — значит найти число, показывающее, сколько единичных квадратов содержится в данной фигуре.

Вы уже знаете, как найти площадь прямоугольника, и много раз находили эту площадь. А знаете ли вы, почему для нахождения площади прямоугольника длину нужно умножить на ширину? Покажем, как получить формулу площади прямоугольника. Рассмотрим прямоугольник, у которого смежные стороны содержат a и b единиц длины. Этот прямоугольник разбивается на единичные квадраты, причем получится a строк и b столбцов (рис. 4). В каждой строке будет b единичных квадратов, а строк получится a. Общее число единичных квадратов будет равно $a \cdot b$. Получим формулу:

$$S = a \cdot b.$$

Если прямоугольник является квадратом, то $a = b$ и поэтому формула для площади имеет вид: $S = a^2$.

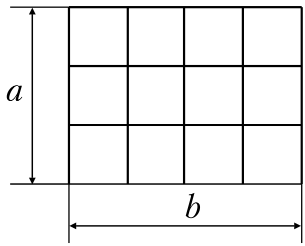


Рис. 4

Можно считать, что задачи на нахождение площадей являются чуть ли не источником возникновения самой геометрии. С понятием площади связаны имена многих математиков древности, таких как Герон, Пифагор и др. При решении задач на нахождение площадей нужно помнить о самом понятии площади и ее свойствах. Вот некоторые из них.

Полезно запомнить

1. Значение площади выражается неотрицательным числом.
2. Площади равных фигур равны.
3. Если фигура разбита на неперекрывающиеся части, то площадь фигуры равна сумме площадей этих частей.
4. За единицу площади принимается площадь квадрата со стороной, равной единице.

Теперь поговорим о единицах объема.

С древних времен люди измеряли объем жидких (масло, мед, вино, молоко) и сыпучих (зерно, мука и т. п.) веществ особыми сосудами. В Киевской Руси мерой зерна была *кадь* (или оков), вмещавшая 14 пудов ржи и делившаяся на 2 половника, 4 четверти, 8 осьмин. В XVII в. основной мерой становится *четверть*, вмещавшая около 6 пудов ржи.

Первоначальными величинами русских древних мер жидкости являлись *бочка* и *ведро*, объемы которых в точности не установлены. В литературе отмечается, что есть основания полагать, что ведро вмещало в себя 33 фунта воды.

Бочка как мера жидкостей применялась в основном в процессе торговли с иностранцами, которым запрещалось вести розничную торговлю вином малыми мерами. Бочка была равна 40 ведрам (492 л). Материал для изготовления бочки выбирали в зависимости от ее назначения: дуб — для пива и растительных масел, ель — для воды, липа — для молока и меда. Чаще всего в крестьянском быту использовались небольшие бочки и бочонки от 5 до 120 литров. Большие бочки вмещали до 40 ведер (сороковки).

До середины XVII в. в ведре содержалось 12 кружек, во второй половине XVII в. так называемое казенное ведро содержало 10 кружек, а в кружке — 10 чарок, так что в ведро входило 100 чарок. Впоследствии ведро было равно 12 литрам.

В житейском обиходе и в торговле употребляли разнообразные хозяйственные сосуды: котлы, жбаны, корчаги. Значение таких бытовых мер в разных местах было различно, например емкость котлов колебалась от полуведра до 20 ведер. Для измерения объемов вин использовались свои меры.

Мера *бутылка* появилась в России при Петре I. Русская бутылка $= \frac{1}{20}$ ведра $= \frac{1}{2}$ штофа $=$ 5 чаркам $=$ 0,6 литра (поллитровка появилась позже — в 20-е годы XX в.).

Поскольку в ведре вмещалось 20 бутылок ($20 \cdot 0{,}6 = 12$ л), а в торговле счет шел на ведра, то ящик до сих пор вмещает 20 бутылок.

Торговой мерой кваса в центральных областях России служили большой глиняный (питейный) стакан и кувшин.

Система мер жидкости

Бочка = 40 ведрам ≈ 4,9 гектолитра;
ведро = 10 штофам ≈ 12,3 л;
штоф = 2 бутылкам ≈ 1,2 л;
бутылка = 2 сороковкам ≈ 0,6 л;
сороковка = 2,5 сотки (чарки) ≈ 0,3 л;
сотка (чарка) = 2 шкаликам ≈ 0,12 л.

Старинные меры объема

1 куб. сажень = 9,713 куб. м;
1 куб. аршин = 0,3597 куб. м;
1 куб. вершок = 87,82 куб. см;
1 куб. фут = 28,32 куб. дм (л);
1 куб. дюйм = 16,39 куб. см;
1 куб. линия = 16,39 куб. мм;
1 кварта — немногим больше литра.

Меры объема жидких и сыпучих тел

1 четверть = 2,099 гектолитра = 209,9 л;
1 четверик («мера») = 2,624 декалитра = 26,24 л;
1 гарнец = 3,280 л.

Контрольные вопросы

1. Какие старинные меры длины вы знаете? Приведите примеры.

2. Что больше: верста или километр?

3. Что больше: сажень или аршин?

4. Что меньше: сажень или метр?

5. Расположены ли в порядке возрастания: косая сажень, маховая сажень, аршин, локоть, фут, сажень, дюйм?

6. Какие современные меры длины вы знаете? Приведите примеры.

7. Какую часть метра составляет сантиметр?

8. Какую часть метра составляет дециметр?

9. Какую часть метра составляет миллиметр?

10. Какую часть километра составляет миллиметр?

11. Какую часть километра составляет сантиметр?

12. Какие старинные меры площади вы знаете? Приведите примеры.

13. Что больше: десятина или гектар?

14. Что больше: плуг или гектар?

15. Что меньше: квадратная верста или км^2?

16. Какие современные меры площади вы знаете? Приведите примеры.

17. Расположены ли в порядке возрастания: км^2, мм^2, м^2, дм^2, га, ар?

18. Расположены ли в порядке убывания: км^2, мм^2, дм^2, га, ар, м^2?

19. Сколько м^2 в км^2?

20. Сколько дм^2 в м^2?

21. Сколько дм^2 в км^2?

22. Сколько см^2 в м^2?

23. Сколько мм^2 в м^2?

24. Какую часть м^2 составляет см^2?

25. Какую часть м^2 составляет дм^2?

26. Какую часть м^2 составляет мм^2?

27. Какую часть км^2 составляет мм^2?

28. Какую часть км^2 составляет см^2?

29. Какие старинные меры объема вы знаете? Приведите примеры.

30. Какие современные меры объема вы знаете? Приведите примеры.

31. Сколько ведер в 10 бочках?

32. Сколько см^3 в 1 л?

33. Сколько см^3 в 1 дм^3?

Составьте таблицу перевода одних единиц измерения площадей в другие (слева — единицы, которые переводят, сверху — в которые переводят).

	мм^2	см^2	дм^2	м^2	ар	га	км^2
мм^2							
см^2							
дм^2							
м^2							
ар							
га							
км^2							

Для чего нужен масштаб?

Многие скажут, что для вычерчивания карт. И будут правы, потому что с помощью масштаба можно нанести на небольшой лист бумаги карту какой-либо местности, при этом все расстояния на местности уменьшаются в одно и то же число раз. Масштаб используется не только при вычерчивании карт. Прежде чем строят здание или проектируют какую-либо машину, их чертят на бумаге, уменьшая при этом все размеры, используя масштаб. Если нужно спроектировать какую-нибудь мелкую деталь, ее тоже чертят с использованием соответствующего масштаба, такой масштаб больше единицы и показывает, во сколько раз истинное расстояние меньше изображенного.

Задания для самостоятельной работы

1. В тексте было сказано, что 1 дюйм = 25,4 мм, 1 фут = = 12 дюймам и т. д. А теперь решите обратные задачи. Какую часть: а) дюйма составляет 1 мм? б) фута составляет 1 мм, 1 см? в) ярда 1 см, 1 дм?

2. Переведите в миллиметры: 3 фута 5 дюймов; 21 дюйм; 2 ярда 3 дюйма.

3. Переведите в метры: 4 ярда 2 фута 3 дюйма; 2 прута; 3 шнура.

4. Сколько сантиметров содержат 3 локтя; 4 сажени; 2 сажени 2 локтя?

5. Выразите в современных мерах 1 аршин, 1 милю, 1 версту.

6. Сравните старинные меры длины: 1 аршин и 1 сажень.

7. Окружность, проходящая по поверхности Земли через Северный и Южный полюсы, называется меридианом Земли. Длина земного меридиана, определяющая размеры земного шара, всегда интересовала ученых. Самая ранняя попытка такого измерения была сделана около 200-го года до н. э. греческим математиком Эратосфеном. Он вычислил длину меридиана Земли, которая оказалась равной 250 000 стадиев. Переведите эту величину в метры и километры, считая, что 1 стадий равен 185 метрам.

8. Вавилонский стадий делился на 360 локтей. (Длина вавилонского локтя ≈ 54 см.) Найдите длину меридиана в локтях.

9. Найдите объем чугунной болванки длиной 2 фута 2 дюйма, шириной 1 фут 3 дюйма и высотой 8 дюймов. (Воспользуйтесь тем, что 1 фут = 12 дюймам.)

10. Условие предыдущей задачи переведите в метрическую систему мер и найдите объем болванки в $м^3$.

11. Одна из древнейших надписей на русском языке — это надпись на Тмутараканском камне, найденном в пределах древнего города Тмутаракани на Таманском полуострове. В ней говорится, что князь Глеб в 1068 г. производил по льду измерение ширины Керченского пролива от «Тмутараканя до Корчева», которая оказалась равной 14 тысячам саженей. Переведите эту величину в версты и в километры.

Указание. 1 верста = 500 саженям.

В древних памятниках 1 верста = 750 саженям.

12. В 1629 г. в России вышло руководство для учета налогов с земли «Книга сошного письма». В ней даны примеры вычислений с дробями. Решите один из них:

«Пол-полтрети и пол-пол-полтрети найдите».

13. Найдите площадь прямоугольной стены, если ее ширина 300 см, а высота 2,5 м.

14. Сколько облицовочной плитки размером 25×33 см потребуется для облицовки стены, размеры которой предлагаются в предыдущей задаче.

15. Найдите площадь фигуры, изображенной на листе бумаги в клетку, считая сторону клетки равной 1 см.

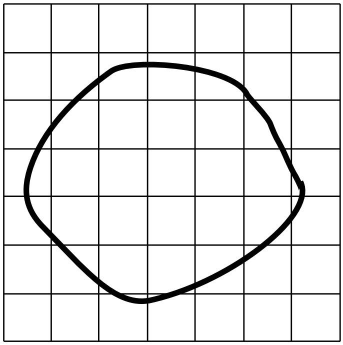
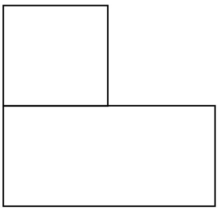
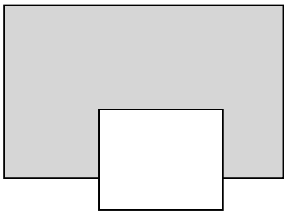
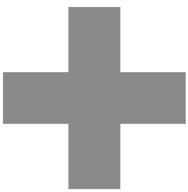


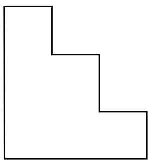
Рис. 5

16. Найдите площади изображенных фигур, произведя необходимые измерения. Запишите полученные площади в см^2, дм^2, м^2.

а) 

б) 

в) 

г) 

17. Выразите в мм^2: 5 см^2; 12 дм^2; 0,5 м^2.

18. Выразите в см^2: 15 м^2; 1,2 дм^2; 5 м^2.

19. Выразите в дм^2: 50 см^2; 20 м^2; 10,5 м^2.

20. Выразите в м^2: 500 см^2; 120 дм^2; 0,5 дм^2; 6 ар; 0,02 га; 4,8 га.

21. От прямоугольного ковра размером 9×12 дм отрезали прямоугольный кусок размером 8×1 дм (большая сторона отрезанного куска параллельна меньшей стороне ковра). Разрежьте оставшуюся часть ковра на три куска, из которых можно составить ковер прямоугольной формы. Найдите площади старого и нового ковров.

22. Вырежьте из бумаги прямоугольник со сторонами 9 см и 4 см; а) разрежьте его на три таких прямоугольника, чтобы из них можно было составить квадрат; б) разрежьте тот же прямоугольник на две части, из которых можно составить квадрат. Какой площади получится каждый из квадратов?

23. Периметр прямоугольника 136 мм, причем длина на 0,8 см больше ширины. Найдите площадь прямоугольника.

24. Площадь прямоугольника 2210 см^2. Одна из его сторон равна 6,5 дм. Найдите периметр прямоугольника.

25. Из прямоугольного листа стекла, длина которого 24 см, а ширина 0,22 м, нужно вырезать прямоугольные пластинки размером $0{,}8 \times 0{,}6$ дм. Какое наибольшее число пластинок при этом можно получить?

26. Какое наименьшее число листов стекла размером 150×50 см потребуется для того, чтобы нарезать 6 стекол размером 52×49 см, 6 стекол размером 48×48 см,

2 стекла размером 40×48 см и 1 стекло размером 36×46 см?

27. В квартире три жилые комнаты. Площадь первой комнаты 12,8 м^2, площадь второй комнаты на 11,8 м^2 больше площади первой, а площадь третьей на 10,6 м^2 меньше площади второй комнаты. Найдите площадь третьей комнаты и общую площадь всех трех комнат квартиры.

28. Длина луга прямоугольной формы равна 2,25 км, а ширина — на $\frac{1}{4}$ км меньше. С каждого гектара накосили по 12 т травы. Сколько тонн травы было накошено?

29. Найдите длину вишневого сада, имеющего форму прямоугольника, если его ширина 100 м и в нем растут 4000 вишневых деревьев. Под каждое вишневое дерево отведена площадь в 6,25 м^2.

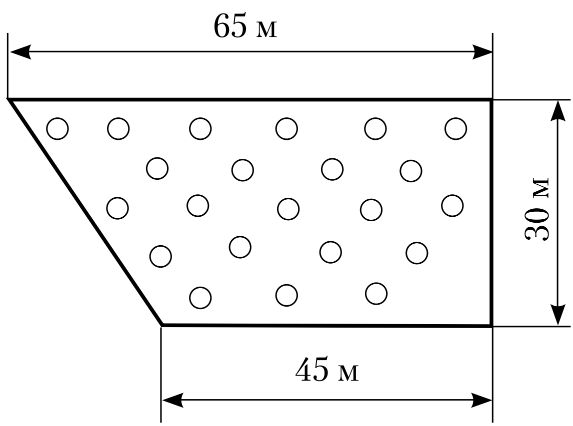
30. Сколько центнеров семян потребуется для засева поля, имеющего форму прямоугольника, длиной 2,4 км и шириной 2 км, если засевать по 1,4 ц семян на 1 га?

31. Длина дома на плане, масштаб которого $\frac{1}{200}$, равна 25 см. Чему равна длина дома на местности?

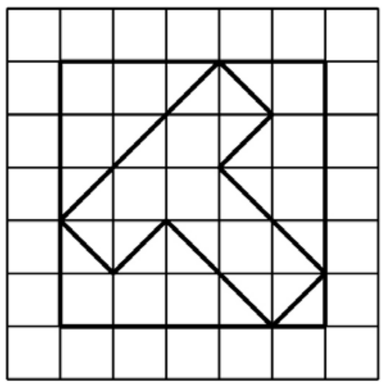
32. На плане длина прямоугольного участка 10 см, а ширина — 8 см. Сколько пшеницы потребуется для засева этого участка, если на 1 га высевают 0,24 т? Масштаб $\frac{1}{10\,000}$.

33. Нужно нарезать пластинки квадратной формы со стороной 0,2 дм из листов железа, имеющих форму прямоугольника размером 0,4 × 10 дм. Таких листов железа получается 48 штук. Хватит ли этого материала для изготовления 5000 пластинок?

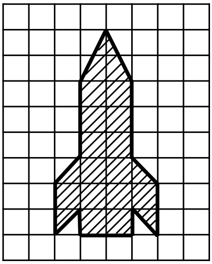
34. На рисунке показан план дачного сада. Найдите площадь сада в арах.



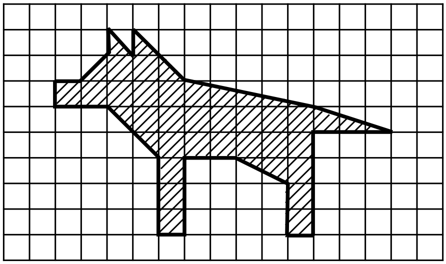
35. Площадь одной клеточки 0,25 см^2. Найдите площадь буквы «Т» на рисунке.



36. Площадь одной клеточки 0,25 см^2. Найдите площади фигур на рисунках а), б).



а)



б)

37. Отрезок на карте имеет длину 6 см. Найдите масштаб карты, если этому отрезку соответствует на местности отрезок длиной: а) 140 км; б) 15 км; в) 2400 км.

38. Расстояние между Минском и Могилевом 200 км. Найдите масштаб карты, если на ней расстояние между изображениями Минска и Могилева равно: а) 50 мм; б) 40 см; в) 10 см.

39. Река Березина имеет длину 613 км. Какой длины будет изображение этой реки на карте, масштаб которой 1 : 2 500 000?

40. Изобразите в масштабе 1 : 200 отрезки: 5 м; 3,2 м; 2,8 м.

Практическая работа

Составление плана квартиры в масштабе $\frac{1}{50}$ (1 : 50).

1. На листе бумаги формата А4 начертите план вашей квартиры в масштабе 1 : 50 (1 см плана соответствует 50 см измеряемого расстояния).

2. Найдите площади всех помещений квартиры.

Тема 8 Путешествие в мир масс с единой системой мер

Занятия 1–3. Старинные меры массы. Задачи с практическим содержанием на нахождение массы тела. Попытки создания единой системы мер. Метрическая система мер. Задачи на сравнение вычислений в различных системах мер.

Рассмотрим старинные меры массы. С развитием обмена продуктов в обществе возникла необходимость в измерениях количеств разных веществ.

Количество некоторых веществ можно было определить по объему. Так, сыпучие тела и жидкости можно было мерить, наполняя ими какие-либо сосуды определенной вместимости. Однако к другим веществам такой способ измерения неприменим. Древесную массу, строительные материалы, волокнистые вещества и многое другое нельзя или неудобно измерять таким образом. В связи с этими затруднениями человек изобрел способ измерения количества веществ по тяжести или весу при помощи рычажных весов. Рычажными весами определяется количество вещества или масса взвешиваемого предмета. Какой народ и когда впервые ввел в употребление весы, неизвестно. Весьма вероятно, что изобретение их было сделано многими народами независимо друг от друга и практически одновременно.

До нас дошел целый ряд изображений весов на памятниках древних жителей Египта, относящихся ко 2-му тыс. до н. э., и очень много изображений применения весов в греческих картинах 1-го тыс. до н. э.

В вавилонских памятниках изображения весов встречаются редко. Но, как показывают дошедшие до нас изображения, вавилонянам уже в 3-м тыс. до н. э. было известно применение рычага. Знание применения рычага лежит в основе построения весов.

Для взвешивания тел на рычажных весах нужны меры массы в виде образцовых гирь (эталонов массы). Зерна растений, которые были использованы для получения некоторых мер длины, сослужили человеку службу и при выборе единиц веса (массы). Человек заметил, что вес одного зерна можно считать постоянным, так как средний вес его был получен в результате взвешивания большого числа зерен. Единица аптекарской массы до последнего времени называлась граном, что значит «зерно».

Единицей массы драгоценных камней являлся и является карат — вес семени одного из видов бобов. Один карат ≈ 0,2 г. Для определения массы изделий из золота пользовались гривной и дукатом. 1 дукат = 3490 мг.

Древнейшей русской единицей веса (массы) является гривна, равная приблизительно 409,5 г.

На Руси использовались в торговле следующие меры массы (старорусские):

1 берковец = 10 пудов;

1 пуд = 40 фунтов = 16,38 кг;

1 фунт (гривна) = 96 золотников = 0,41 кг;

1 лот = 3 золотника = 12,797 г;

1 золотник = 4,27 г;

1 доля = 0,044 г.

Пуд применялся уже в XII в. Пуд (от латинского *pondus* — вес, тяжесть) — это не только мера веса, но и весоизмерительное устройство. При взвешивании металлов пуд являлся как единицей измерения, так и счетной единицей. Даже когда результаты взвешиваний равнялись десяткам и сотням пудов, их не переводили в берковцы.

Рассмотрим вопрос, связанный с попытками создания *единой системы мер*.

В процессе развития общества росли требования к точности измерений. Развитие торговли с соседними народами приводило к внедрению чужих мер. Кроме этого, даже в пределах одного государства существовали разные исторически сложившиеся системы мер и очень часто под одним и тем же названием в разных местностях понимали разные меры.

Таким образом, неупорядоченность системы мер значительно затрудняла развитие торговых и других отношений между государствами, поэтому была необходима общая система, в которой каждая мера должна была иметь определенную величину. Человечество пришло к необходимости создания эталонов каждой меры в общей системе, таких, чтобы меры разных величин (длины, площадей, объемов, веса и т. д.) были друг с другом удобно связаны, при этом решающее значение имел выбор единицы измерения. Стремление упорядочить систему мер осуществлялось на протяжении многих лет, появилась метрическая система мер, которой стали пользоваться самые развитые государства.

В настоящее время большинство государств мира отказались от своих мер и перешли к единой метрической системе мер, наиболее простой и удобной. Впервые она была введена во Франции в конце XVIII в.

Согласно метрической системе мер основной мерой длины является метр, равный одной десятимиллионной части четверти парижского земного меридиана.

Его эталон под названием «международный метр» изготовлен из стойкого сплава двух драгоценных металлов (90 % платины и 10 % иридия). Он не окисляется в воздухе и не поддается действию кислот и щелочей. По форме, во избежание прогиба при хранении, эталон в поперечном сечении напоминает собой букву X (икс). Он хранится в Международном бюро мер и весов в Париже. Также были изготовлены 34 копии международного эталона метра для стран — участников международного соглашения. Одна из них хранится в Санкт-Петербурге.

Проведем сравнение вычислений в различных системах мер.

Покажем на примере, насколько метрическая система мер упрощает вычисления. Рассмотрим старую русскую систему, в которой пуд равен 40 фунтам, фунт — 32 лотам, лот — это 3 золотника. Если для каких-либо целей нужно вычислить, сколько раз 22 пуда 11 фунтов 1 золотник содержится в 155 пудах 37 фунтах 2 лотах 1 золотнике, то вычисления выглядят следующим образом:

$22 \cdot 40 = 880$ (фунтов);
$880 + 11 = 891$ (фунт);
$891 \cdot 96 = 85\,536$ (золотников);
$85\,536 + 1 = 85\,537$ (золотников);
$155 \cdot 40 = 6200$ (фунтов);
$6200 + 37 = 6237$ (фунтов);
$6237 \cdot 32 = 199\,584$ (лота);
$199\,584 + 2 = 199\,586$ (лотов);
$199\,586 \cdot 3 = 598\,758$ (золотников);
$598\,758 + 1 = 598\,759$ (золотников);
$598\,759 : 85\,537 = 7$ (раз).

Эта же задача в метрической системе мер формулируется так: сколько раз 85 кг 537 г содержится в 5 ц 98 кг 759 г?

Ее решение:

85 кг 537 г = 85 537 г;

5 ц 98 кг 759 г = 598 759 г;

598 759 : 85 537 = 7 (раз).

Рассмотрев эти две задачи, мы видим очевидное преимущество метрической системы мер.

Метрическая система*

Меры длины

	мк	мм	см	дм	м	км	Наименование
мк	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	микрон
мм	10^3	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}	миллиметр
см	10^4	10	1	0,1	0,01	10^{-5}	сантиметр
дм	10^5	10^2	10	1	0,1	10^{-4}	дециметр
м	10^6	10^3	10^2	10	1	10^{-3}	метр
км	10^9	10^6	10^5	10^4	1000	1	километр

Меры площади

	мм^2	см^2	дм^2	м^2	а	га	км^2	Полное наименование
мм^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}	квадратный миллиметр

* Здесь и далее в таблице $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10}$ и т. д.

см^2	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	квадратный сантиметр
дм^2	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	квадратный дециметр
м^2	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	квадратный метр
а	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	10^{-4}	ар
га	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	10^{-2}	гектар
км^2	10^{12}	10^{10}	10^8	10^6	10^4	10^2	1	квадратный километр

Меры объема

	мм^3	см^3	дм^3	м^3	км^3	Наименование
мм^3	1	10^3	10^6	10^9	10^{18}	миллиметр кубический
см^3	10^{-3}	1	10^3	10^6	10^{15}	сантиметр кубический (миллилитр)
дм^3	10^{-6}	10^{-3}	1	10^3	10^{12}	дециметр кубический (литр)
м^3	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^9	метр кубический
км^3	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	1	километр кубический

Меры массы

	мг	г	кг	ц	т	Наименование
мг	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-9}	миллиграмм
г	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-5}	10^{-6}	грамм
кг	10^{6}	10^{3}	1	10^{-2}	10^{-3}	килограмм
ц	10^{8}	10^{5}	10^{2}	1	0,1	центнер
т	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10	1	тонна

Контрольные вопросы

1. Расположены ли в порядке возрастания меры: берковец, пуд, фунт, золотник, лот, доля?

2. Сколько граммов в 25,5 кг?

3. Какую часть килограмма составляет грамм?

4. Какую часть центнера составляет килограмм?

5. Какую часть пуда составляет килограмм?

6. Какую часть пуда составляет фунт?

7. Какие старинные меры массы вы знаете? Приведите примеры.

8. Почему была необходима единая система мер?

9. Почему единая система мер называется метрической?

10. Где и когда впервые была введена единая метрическая система мер?

11. Что согласно метрической системе мер является основной мерой длины?

12. Что принимается за 1 м в метрической системе мер?

13. Что собой представляет эталон под названием «международный метр»?

14. В чем основное преимущество метрической системы мер перед всеми другими существующими системами мер?

15. Когда в бывшем Советском Союзе была введена метрическая система мер?

16. В каких странах действует старая английская система мер? Единая метрическая система мер?

17. Какие преимущества дает применение единой метрической системы мер?

18. Назовите в порядке возрастания единицы длины в единой метрической системе мер.

19. Назовите в порядке убывания единицы площади в единой метрической системе мер.

20. Назовите в порядке возрастания единицы веса в единой метрической системе мер.

21. Назовите в порядке убывания единицы объема в единой метрической системе мер.

22. Какую часть 1 мк составляет от 1 мм? 1 см? 1 дм? 1 м? 1 км?

23. Какую часть 1 мм^2 составляет от 1 см^2? 1 дм^2? 1 м^2? 1 км^2?

24. Какую часть 1 мм^3 составляет от 1 см^3? 1 дм^3? 1 м^3? 1 км^3?

25. Какую часть 1 мг составляет от 1 г? 1 см? 1 кг? 1 ц? 1 т?

26. Сколько центнеров в тонне?

27. Сколько сантиметров кубических в литре?

Задания для самостоятельной работы

1. В России в 1797 г. после ряда частичных усовершенствований системы весов и мер вышел Закон «О мерах и весах». Он приказывал изготовить шаровидные гири весом в 1 и 2 пуда, в 1, 3, 9 и 27 фунтов и в 1, 3, 9, 27 и 81 золотник. Переведите массу этих гирь в метрическую систему мер, учитывая, что один фунт в России был равен приблизительно 0,41 кг; 1 золотник ≈ 4,3 г, 1 пуд ≈ 16,4 кг.

2. Найдите массу воды, находящейся в аквариуме длиной 3 ярда, шириной 1,3 ярда, высотой 2 ярда.

(*Указание*. Масса 1 кубического дюйма воды равна 3,84 золотника).

Ответ дайте в метрической системе мер, учитывая, что 1 золотник ≈ 4,3 г.

3. В XVIII в. (при Петре I) была уточнена и дополнена новыми мерами русская система мер. Она получила окончательный вид:

1 миля = 7 верстам;

1 верста = 500 саженям;

1 сажень = 3 аршинам = 7 футам;

1 аршин = 4 четвертям = 16 вершкам = 28 дюймам;

1 четверть = 4 вершкам;

1 фут = 12 дюймам;

1 дюйм = 10 линиям;

1 линия = 10 точкам.

Переведите приведенные единицы длины в метрическую систему мер, учитывая, что 1 линия ≈ 2,54 мм.

4. К концу XVII в. в России сложилась следующая система мер веса:

1 ласт = 72 пудам;

1 берковец = 10 пудам;

1 пуд = 40 фунтам = 16 безменам;

1 безмен = $\frac{1}{16}$ пуда;

1 большая гривенка = 1 фунту = 2 малым гривенкам = = 96 золотникам.

Используя то, что 1 золотник ≈ 4,27 г, выразите все меры в килограммах и граммах.

5. Наряду с торговым фунтом в России с XVIII в. употреблялся аптекарский фунт. Он был равен 84 золотникам. Сравните торговый и аптекарский фунты, переведя их в метрическую систему мер.

6. XIV в. серебряный слиток весом в 48 золотников назывался рублем или рублевой гривенкой. Монеты выпускали частные мастера. Во второй половине XV в. чеканка монет становится правом одного московского великого князя. Содержание серебра в рубле оказалось уже $16\frac{2}{3}$ золотника. При Петре I содержание серебра в рубле было снижено до $6\frac{2}{3}$ золотника, при Екатерине II — до 4 золотников. На сколько граммов упало содержание серебра в рубле?

7. Заведующему магазином надо было взвесить пять мешков с мукой. В магазине были весы, но не хватало некоторых гирь, чтобы взвесить груз между 50 и 100 кг. Мешки же весили около 50—60 кг каждый. Заведующий не растерялся и стал взвешивать мешки парами. Из пяти мешков можно составить 10 различных пар; поэтому пришлось сделать 10 взвешиваний. Получился ряд чисел, который приведен здесь в возрастающем порядке: 110 кг, 112 кг, 113 кг, 114 кг, 115 кг, 116 кг, 117 кг, 118 кг, 120 кг, 121 кг. Какова масса каждого мешка в отдельности?

8. Масса изделия 89,4 г. Сообразите в уме, сколько тонн в миллионе таких изделий.

9. Масса банки с медом 500 г. Масса той же банки с керосином 350 г. Керосин легче меда в 2 раза. Какова масса пустой банки?

10. На одну чашку весов положен брусок мыла, на другую — $\frac{3}{4}$ такого же бруска и еще $\frac{3}{4}$ кг. Весы в равновесии. Какова масса целого бруска мыла?

11. Три яблока и одна груша весят столько, сколько десять персиков, а шесть персиков и одно яблоко весят столько, сколько одна груша. Сколько персиков надо взять, чтобы уравновесить одну грушу?

12. Бутылка и стакан уравновешиваются кувшином; бутылка сама по себе уравновешивается стаканом и блюдцем; два кувшина уравновешиваются тремя блюдцами. Спрашивается, сколько надо поставить стаканов на свободную чашку весов, чтобы уравновесить бутылку?

13. Надо развесить 2 кг сахарного песка в 200-граммовые пакеты. Имеется только одна 500-граммовая гиря да еще молоток, весящий 900 г. Как получить все 10 пакетов, пользуясь этой гирей и молотком?

14. *Задача Архимеда.*

Самая древняя из головоломок, относящихся к взвешиванию, без сомнения, та, которую древний сиракузский правитель Гиерон задал знаменитому математику Архимеду.

Предание повествует, что Гиерон поручил мастеру изготовить венец для одной статуи и приказал выдать ему необходимое количество золота и серебра. Когда венец был доставлен, взвешивание показало, что он весит столько же, сколько весили вместе выданные золото и серебро. Однако правителю донесли, что мастер утаил часть золота, заменив его серебром. Гиерон призвал Архимеда и предложил ему определить, сколько золота и сколько серебра заключает изготовленная мастером корона.

Архимед решил эту задачу, исходя из того, что чистое золото теряет в воде 20-ю долю своей массы, а серебро — 10-ю долю.

Если вы желаете испытать свои силы на подобной задаче, представьте, что мастеру было отпущено 8 кг золота и 2 кг серебра и что, когда Архимед взвесил корону под водой, она весила не 10 кг, а всего $9\frac{1}{4}$ кг. Попробуйте определить по этим данным, сколько золота утаил мастер. Венец, предполагается, изготовлен из сплошного металла, без пустот.

15. Питон длиной 16 м проползает через мост длиной 32 м за 18 мин. Сколько минут ему потребуется, чтобы проползти мимо столба?

16. Молодой человек согласился работать с условием, что в конце года он получит автомобиль «Запорожец» и 2600 $. Но по истечении 8 месяцев уволился и при расчете получил «Запорожец» и 1000 $. Сколько стоил «Запорожец»?

17. Во время прогулки по лесу Винни-Пух каждые 40 м находил гриб. Какой путь он прошел от первого гриба до последнего, если всего он нашел 15 грибов?

18. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица стоит вдвое дороже маленькой. Одна дама купила 5 больших птиц и 3 маленькие, а другая — 5 маленьких и 3 большие. При этом первая дама заплатила на 20 денежных единиц больше. Сколько стоит каждая птица?

19. Двое часов начали и закончили бить одновременно. Первые бьют через каждые 2 с, вторые — через каждые 3 с. Всего было сделано 13 ударов (совпавшие удары воспринимались за один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

20. Камень весит 5 кг, еще треть камня и еще половину камня. Сколько весит камень?

21. Портос, Атос и д'Артаньян вместе весят 290 кг, Портос, Арамис и д'Артаньян — 270 кг, Портос, Атос и Арамис — 280 кг, д'Артаньян, Арамис и Атос — 240 кг. Сколько килограммов весит каждый из мушкетеров?

22. Бригада из шести плотников и столяра взялась выполнить одну работу. Каждый плотник заработал по 20 денежных единиц, столяр же на 3 денежные единицы больше, чем заработал в среднем каждый из семерых членов бригады. Сколько заработал столяр?

23. Двое очистили 400 штук картофеля; один очищал 3 картофелины в минуту, другой — 2. Второй работал на 25 мин больше первого. Сколько времени работал каждый?

24. Двое могут выполнить работу за 7 дней при условии, что второй приступит к ней двумя днями позже первого. Если бы ту же работу каждый выполнял в отдельности, то первому понадобилось бы на 4 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый мог бы порознь выполнить эту работу?

Указание. Задача допускает чисто арифметическое решение, причем можно обойтись даже без действий над дробями.

25. Площадь квадрата 169 м^2. Выразите эту площадь в квадратных сантиметрах, квадратных дециметрах, квадратных миллиметрах, квадратных километрах.

26. Длина отрезка 0,62 дм. Выразите эту длину в миллиметрах, метрах, сантиметрах, километрах.

27. Запишите 15 минут в секундах, часах и сутках.

28. Масса гири 0,5 кг. Запишите эту массу в граммах, центнерах, миллиграммах.

29. Масса строительного кирпича 4 кг. Какова масса игрушечного кирпичика из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

30. Сообразите, на сколько километров возвышался бы столб, составленный из всех миллиметровых кубиков общим объемом 1 м^3, положенных один на другой?

31. Шмель отправляется в дальнее путешествие. Из родного гнезда он летит прямо на юг, пересекает речку и наконец после целого часа пути спускается на косогор, покрытый душистым клевером. Здесь, перелетая с цветка на цветок, шмель остается на полчаса. Теперь надо посетить сад, где шмель вчера заметил цветущие кусты крыжовника. Сад лежит на запад от косогора, и шмель спешит прямо туда. Спустя $\frac{3}{4}$ ч он был уже в саду. Крыжовник в полном цвету, и чтобы посетить все кусты, шмелю понадобилось $1\frac{1}{2}$ ч. Затем шмель полетел на клумбу, которая находится на север от сада. На дорогу к клумбе он потратил 1 ч, на клумбе он провел $\frac{1}{2}$ ч, а затем, не отвлекаясь в стороны, шмель кратчайшей дорогой полетел домой, в родное гнездо. Сколько времени шмель отсутствовал?

32. Железная и медная детали вместе имеют массу 149,2 г, причем объем железной детали на 2 см^3 больше объема медной детали. Найдите объем каждой детали, если 1 см^3 меди весит 8,9 г, а 1 см^3 железа — 7,8 г.

33. Ученик затратил на подготовку уроков 1 ч 50 мин, занятия русским языком заняли на $\frac{1}{4}$ ч больше, чем географией, и на $\frac{1}{3}$ ч меньше, чем математикой. Сколько времени ушло на подготовку каждого предмета в отдельности?

Тема 9 Путешествие в страну геометрических фигур

Занятия 1–4. Геометрические фигуры: отрезок, угол, треугольник, круг, окружность. Решение занимательных задач. Диаграммы в повседневной жизни.

Отрезки и углы

При измерении различных величин мы имеем дело с числами. В этой теме речь будет идти о геометрических величинах, и это позволит нам лучше изучить геометрические фигуры — углы, треугольники, четырехугольники, окружности, круги. Некоторыми величинами вы уже давно пользуетесь — это длина отрезка и величина угла. Им в этой теме мы уделим основное внимание.

На протяжении всей истории человечества людям приходилось измерять различные величины: температуру, длину, массу, время, площадь... Среди всех измеряемых величин самая простая — длина отрезка. Эту величину часто называют другими словами. Подумайте, какими?

Подсказка. Например, ширина дороги, высота дома, глубина реки, толщина балки.

Назовите несколько своих примеров с использованием выделенных слов.

Когда мы измеряем длину отрезка, то находим **расстояние** между его концами. Значит, расстояние между двумя точками на плоскости — это длина отрезка, который соединяет эти точки.

Какие инструменты используют для измерения расстояния?

Среди перечисленных инструментов выберите нужные и подчеркните: весы, линейка, рулетка, термометр, мерная лента, транспортир.

Отрезок, длина которого равна выбранной единице измерения, называют **единичным отрезком**. Когда мы измеряем длину отрезка, то ищем число, которое показывает, сколько единичных отрезков содержится в данном отрезке.

Для измерения различных расстояний используют различные единицы измерения.

Назовите единицы измерения длины. Укажите, какими из них вы будете пользоваться при измерении отрезка, начерченного в учебнике. Какими единицами пользуются для измерения на местности?

Даны два отрезка длиной 2 см и 5 см.

а) Начертите эти отрезки так, чтобы они вместе представляли собой отрезок длиной 7 см.

б) Начертите эти отрезки так, чтобы они вместе представляли собой отрезок длиной 6 см.

Если из одной точки провести два луча, то получим угол. Поэтому угол — это два луча с общим началом. Лучи называются сторонами угла, а общее начало — вершиной.

Назовите вершину и стороны угла на рисунке 6. Назовите этот угол.

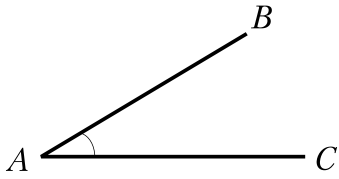


Рис. 6

Назовите все углы на рисунке 7.

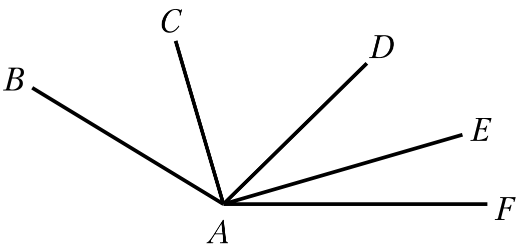


Рис. 7

С помощью угольника вы умеете чертить **прямой** угол. Прямой угол обозначается квадратиком внутри него. Величина прямого угла 90°. Все остальные углы сравнивают с прямым углом. **Острые** углы имеют величину меньше 90°, а **тупые** — больше 90°, но меньше 180°. **Развернутый** угол имеет величину 180°.

Ученик 6 «А» класса подписал изображенные на чертеже углы. Проверьте его записи на рисунке 8.

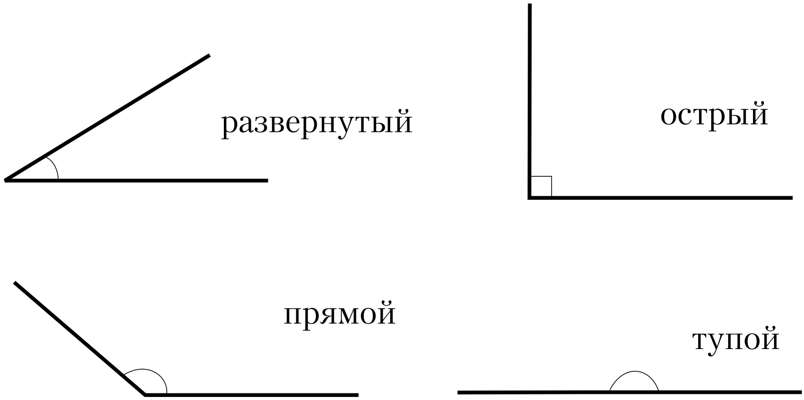


Рис. 8

1) Измерьте все углы на рисунке 9.

2) Сравните величину угла 3 и величину суммы углов 1 и 2.

3) Назовите номера острых углов на рисунке 9.

4) Есть ли на рисунке прямые углы? Тупые углы?

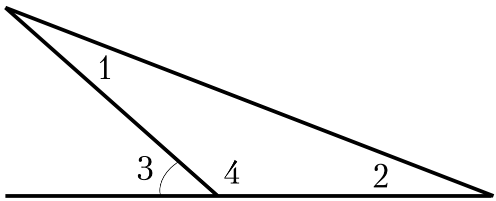


Рис. 9

Вопросы и задания для самостоятельной работы (1)

1. Вырежьте из бумаги угол и разделите его на два равных угла путем перегибания. Какой величины будет каждый угол?

2. Можно ли этот угол разделить на четыре равных угла? Как это сделать?

3. Сколько прямых углов у квадрата? У прямоугольника? У прямоугольного треугольника?

4. Сколько прямых углов в развернутом угле?

5. Начертите пять острых углов так, чтобы в сумме получился развернутый угол.

6. Как разделить развернутый угол пополам с помощью перегибания? Какие углы при этом получаются? Какая величина этих углов?

7. За сколько времени минутная стрелка опишет прямой угол?

8. За сколько времени часовая стрелка опишет прямой угол? Развернутый угол?

9. Начертите острый и тупой углы так, чтобы вместе они составляли развернутый угол.

10. Можно ли начертить два острых угла так, чтобы вместе они составляли развернутый угол?

11. Начертите два угла, тупой и острый, имеющие общую сторону, так, чтобы они вместе составляли угол, который меньше развернутого.

12. Луч, который выходит из вершины угла и делит его пополам, называется **биссектрисой**. Из вершины прямого угла проведена биссектриса, а затем в одном из полученных углов также проведена биссектриса. Сколько градусов содержит каждый из углов?

13. Прямой угол разделен на четыре равных угла. Сколько градусов содержит каждый из полученных углов?

14. Один из учеников сказал: «Всякий угол, меньший развернутого угла, — тупой угол». А как думаете вы?

15. Некоторые ученики в классе считают, что угол, который меньше развернутого, — острый. Вы согласны с ними?

16. Выберите верные утверждения:
а) Половина тупого угла — острый угол.
б) Половина развернутого угла — тупой угол.
в) Половина развернутого угла больше любого острого угла.

Окружность и круг

С помощью циркуля мы чертим окружность. Точка, в которую упирается ножка-иголка циркуля, называется **центром** окружности. На рисунке 10 — это точка O. Отрезок, соединяющий центр окружности с любой ее точкой, называется **радиусом**. Посмотрите на рисунок. Какие еще радиусы можно назвать, используя буквы чертежа? Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называется **хордой**. На нашем чертеже показаны две хорды DE и AB. Хорда AB — самая большая хорда, она проходит через центр и называется **диаметром**. В любой окружности можно провести сколько угодно радиусов, хорд и диаметров. **Диаметр равен двум радиусам**.

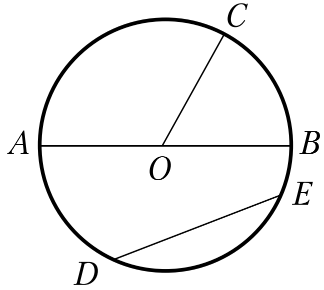


Рис. 10

Все точки окружности вместе с внутренними точками образуют **круг**. Окружность — граница круга. Часть круга, ограниченная двумя радиусами, называется **сектором**.

Начертите круг радиусом 3 см, проведите любые два радиуса и раскрасьте разными цветами два полученных сектора.

С помощью кругов строят круговые диаграммы. Круговые диаграммы используют в тех случаях, когда хотят наглядно показать, на какие части делится целое. С помощью секторов показывают части целого. Например, нужно построить круговую диаграмму, изображающую рецепт компота: для приготовления компота из свежих фруктов нужно взять 600 г фруктов, 1100 г воды и 460 г сахара.

Чтобы подсчитать угол каждого сектора, нужно знать, сколько граммов приходится на 1°, т. е. (600 + 1100 + + 460) : 360. Теперь нужно подсчитать углы секторов, изображающих каждый компонент компота:

600 : 6 = 100; 460 : 6 = 76; 1100 : 6 = 183, т. е. получили углы секторов: 100°, 77°, 183°. Полученные углы надо отложить и закрасить полученные сектора.

Практическая работа. Постройте диаграмму своего режима дня. Подумайте, на какие вопросы при построении диаграммы вам необходимо ответить.

Треугольники и четырехугольники

Вспомним, какие мы знаем многоугольники. Многоугольник с наименьшим числом сторон — треугольник.

Остроугольными треугольниками называются такие, у которых все углы острые.

Прямоугольными треугольниками называются такие, у которых есть прямой угол.

Тупоугольными треугольниками называются такие, у которых есть тупой угол.

Один ученик поспорил с товарищами, что сможет начертить в тетради треугольник с двумя прямыми углами и треугольник с двумя тупыми углами. Возможно ли это?

Четырехугольники имеют 4 вершины (4 угла и 4 стороны). Известные нам четырехугольники — прямоугольники и квадраты.

Вспомните, как находятся их площади и периметры (периметр — сумма всех сторон).

Вспомните, какие еще четырехугольники вы знаете?

Вопросы и задания для самостоятельной работы (2)

1. Начертите окружность с радиусом 2,5 см. Соедините две любые точки окружности так, чтобы проведенный отрезок прошел через центр. Какой длины получится отрезок? Если бы вы проводили окружность с радиусом 4 см, то какой бы у вас получился диаметр?

2. Выберите верные утверждения:

а) Диаметр окружности равен двум радиусам.

б) Диаметр не проходит через центр окружности.

в) Диаметр не любой окружности равен двум радиусам.

3. Найдите сумму всех углов пятиугольника на рисунке 11.

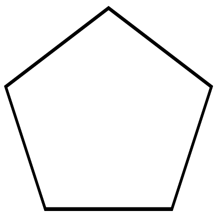


Рис. 11

4. Начертите произвольный треугольник и измерьте его углы. Найдите сумму всех углов этого треугольника.

Начертите еще один любой треугольник. Найдите сумму всех его углов. Какие суммы получились у твоих товарищей?

5. Начертите прямоугольник и квадрат. Найдите сумму всех углов квадрата и сравните эту сумму с суммой всех углов прямоугольника.

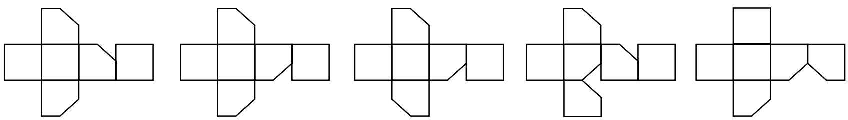
6. Лист бумаги сложили вдвое, потом еще вдвое. Измерив периметр дважды сложенного листа, получили 51 см. Какой периметр у развернутого листа бумаги?

7. В произвольном прямоугольнике обозначьте вершины *A*, *B*, *C*, *D*. Соедините две не соседние вершины *A* и *C*. Полученный отрезок *AC* называется **диагональю** прямоугольника. Проведите диагональ *BC*. Что можно сказать о длинах этих диагоналей? Сколько треугольников получилось после проведения диагоналей?

8. Сад нужно огородить сплошным забором из досок шириной 10 см. Сколько нужно заготовить досок, если сад имеет форму прямоугольника со смежными сторонами 80 м и 120 м?

9. От кубика, склеенного из бумаги, отрезали уголок.

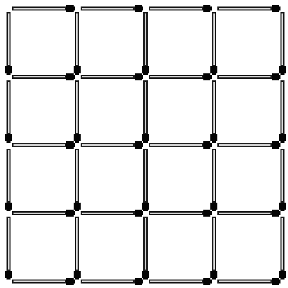
Этот кубик разрезали по некоторым ребрам, развернули и получили одну из фигурок а) – д). Какую?



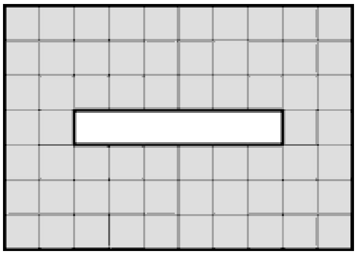
а) б) в) г) д)

10. Из 40 спичек образована квадратная решетка (каждая сторона маленького квадратика — одна спичка).

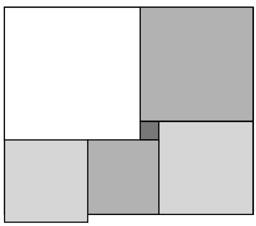
Снимите 9 спичек так, чтобы сохранился контур только одного квадрата, состоящего из одного или нескольких маленьких квадратиков. (Достаточно указать один способ.)



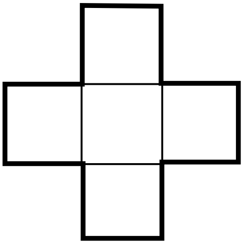
11. Из прямоугольника размером 10×7 вырезали прямоугольник размером 1×6, как показано на рисунке. Разрежьте полученную фигуру на две равные части, из которых можно сложить квадрат.



12. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького равна 1.



13. Крест составлен из пяти равных квадратов. Разрежьте его на такие части, из которых можно (без дыр и перекрытий) составить квадрат.



Контрольные вопросы

1. Что такое расстояние между двумя точками плоскости?
2. Что значит измерить длину отрезка?
3. Какие отрезки называются равными?
4. Какой отрезок называется единичным?
5. Сколько прямых проходят через две точки?
6. Что такое угол? Что называют вершиной угла?
7. Какие виды углов вы знаете?
8. Какая основная единица измерения углов?
9. Что такое 1°?
10. Какие углы называются равными?
11. Какую градусную меру имеет прямой угол? Развернутый угол?
12. Какой отрезок называется радиусом окружности?
13. Что такое диаметр окружности?
14. Что такое круг?
15. Что такое сектор круга?
16. Сколько вершин у треугольника? Четырехугольника? Пятиугольника?
17. Сколько в треугольнике может быть прямых углов?
18. Сколько в треугольнике может быть тупых углов?

19. Какой треугольник называется остроугольным? Тупоугольным? Прямоугольным?

20. Что такое периметр многоугольника?

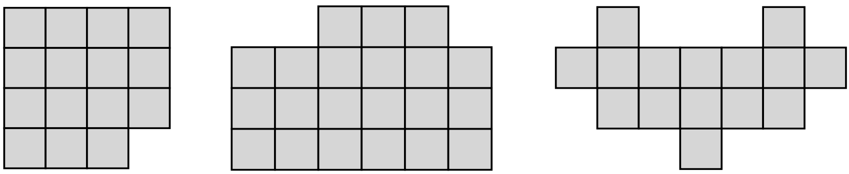
21. Что такое прямоугольник? Как найти его площадь и периметр?

22. Какой прямоугольник называется квадратом? Как найти его площадь и периметр?

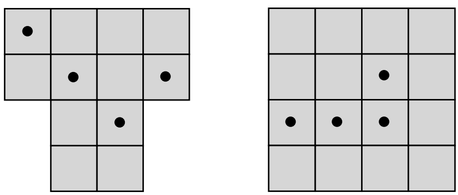
Дополнительные задания по теме

Занимательные задачи на разрезание

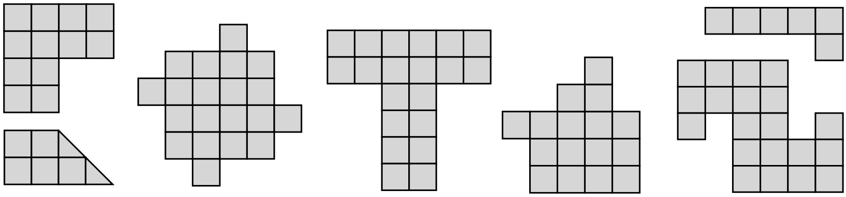
1. Разрежьте каждую из фигур на три равные части. (Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равны не только по площади, но и по форме.)



2. Разделите каждую из фигур по линиям сетки на четыре одинаковые части, чтобы в каждой части был ровно один кружок.

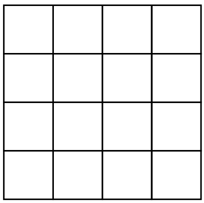
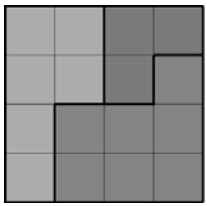


3. Разрежьте каждую из фигур на четыре равные части. (Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.)

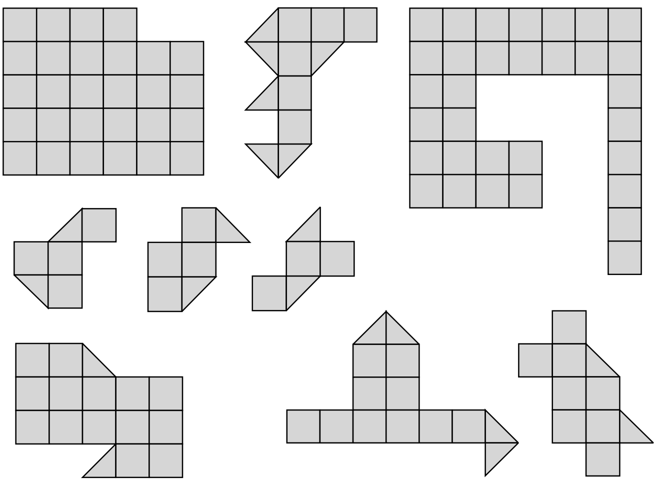


4. Разрежьте квадрат на два равных: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) семиугольника.

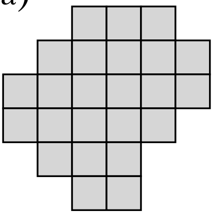
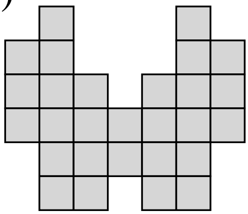
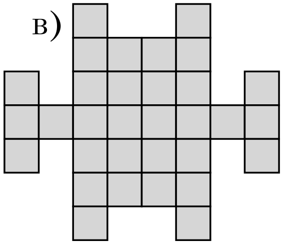
5. Разрежьте квадрат 4×4 (рис. а) на три (не обязательно равных) шестиугольника. Один из вариантов на рисунке (б). Придумайте свои варианты.

а)  б) 

6. Разрежьте каждую из фигур пополам.



7. Разрежьте каждую из фигур на четыре равные (и по площади, и по форме) части.

а)  б)  в) 

8. Разрежьте квадрат 7×7 на пять частей и переложите их так, чтобы получились три квадрата: 2×2, 3×3 и 6×6.

Давайте поиграем

1. На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы они не имели ни одной общей: а) стороны; б) точки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

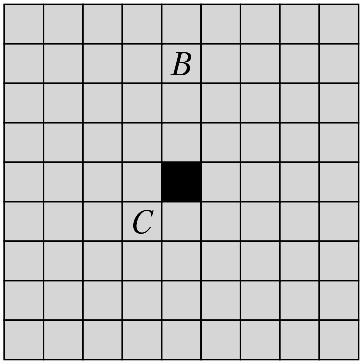
2. На окружности даны 20 точек. Играют двое. Каждым ходом игрок проводит хорду с концами в данных точках так, чтобы хорды не пересекались внутри круга. (Общие концы хорды могут иметь.) Проигрывает тот, кто не может провести хорду. Кто победит при правильной игре?

3. Соты имеют форму квадрата 9×9. Все квадратики, кроме центрального, заполнены медом. В центре — деготь. За один ход разрешено разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дегтя. Проигрывает тот, кому достался только деготь.

а) Кто выиграет при правильной игре?

б) А если деготь находится не в центре, а в клетке *B*?

в) А если деготь находится в клетке *C*?



4. Головоломка Пифагора. Квадрат разрезан на 2 квадрата, 4 треугольника и параллелограмм. Чертежи элементов игры и силуэты фигур предлагаются в приложении.

5. «Гексамино». Каждый из 12 элементов игры состоит из 6 равных равносторонних треугольников. Чертежи элементов игры и силуэты фигур предлагаются в приложении.

6. «Колумбово яйцо». Существует множество вариантов игры. В предлагаемом варианте овал разрезается на 10 частей. На рисунке в приложении предлагаются силуэты фигур для составления и элементы игры.

Игры с шашками

Игра «Волк и овцы»

Никто не знает, когда появилась эта настольная игра. В нее играли еще наши бабушки и дедушки на обычной шашечной доске, пользуясь пятью шашками.

Оборудование: специальное игровое поле (поле 1), четыре шашки белого цвета и одна шашка черного цвета.

Правила игры: расставить шашки на черные кружки на данном поле, белые — с одной стороны, черную — с другой. Все шашки ходят только по линиям, соединяющим кружки, за каждый ход шашку можно передвигать на один кружок; первый ход делает «волк» (черная шашка). Он может ходить вперед и назад, «овцы» (белые шашки) ходят только вперед. Задача «овец» — запереть «волка», чтобы ему некуда было ходить, задача «волка» — прорваться через цепь «овец» и оставить их позади. Побеждает тот, кому удастся достичь своей цели.

Игра «Квартет»

Оборудование: игровое поле 5 × 5 клеток (поле 2) и 8 шашек (4 черные и 4 белые).

Правила игры: шашки выставляются не сразу, а в порядке очереди, за каждый ход играющий выставляет по одной шашке на любую клетку поля. Игра начинается, когда все 8 шашек будут стоять на поле; передвигать шашки можно на одну клетку по вертикали, горизонтали или диагонали. Цель игры — выстроить четыре фишки в один ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали) или выстроить из них квадрат на четырех соседних клетках с общей вершиной.

Игра «Лиса и гуси»

Эта игра была распространенной в странах Европы в средние века. Существуют два варианта этой игры: гусей может быть 13 или 17.

Рассмотрим первый вариант игры.

Оборудование: 13 шашек черного цвета («гуси»), одна шашка белого цвета («лиса»), игровое поле (поле 3).

Правила игры: играющий за «лису» берет белую шашку и ставит ее на любую точку поля на пересечении линий. Игру начинают «гуси». За один ход «гусь» (черная шашка) может перемещаться на свободное место на одну клетку вперед, вправо, влево или назад. «Лиса» ходит так же, но у нее есть право снимать шашку противника, перескакивая через нее, если за этой шашкой есть свободная клетка. У «гусей» этого права нет. Задача «гусей» — запереть «лису» так, чтобы она не могла ходить. «Лиса» выигрывает в том случае, если «гусям» не удастся ее запереть.

Игра «Леопарды и коровы»

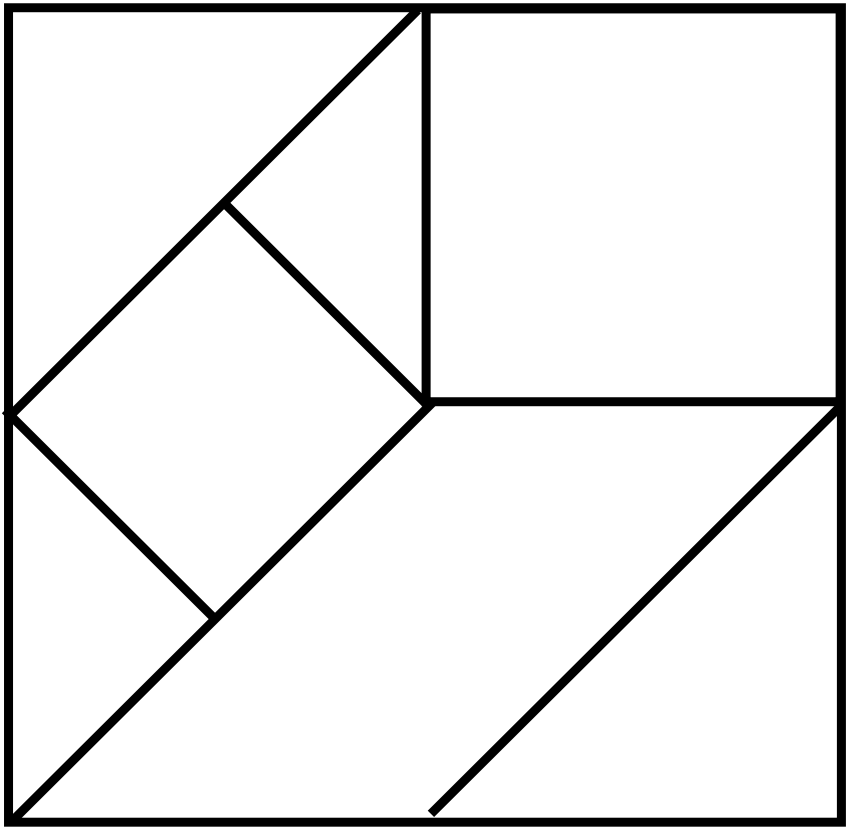
Это старинная игра народов южной части Азии.

Оборудование: игровое поле (поле 4), две черные шашки («леопарды»), 24 шашки белого цвета («коровы»).

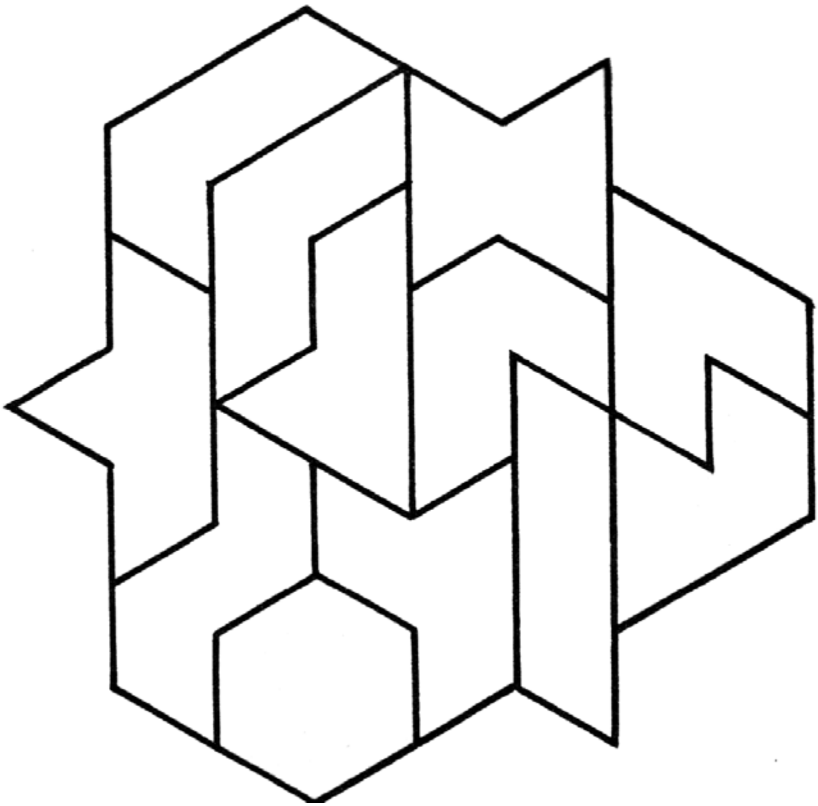
Правила игры: шашки выставляются на игровое поле последовательно. Играющий за «леопардов» ставит свою первую шашку на любое пересечение линий, затем выставляется шашка-«корова», затем снова шашка-«леопард». «Коровы» выставляются по одной до тех пор, пока все 24 шашки не будут выставлены. «Коровы» приобретают право хода, когда выставлены все 24 шашки. «Леопарды» в это время могут снимать шашки-«коровы», поэтому игрок должен ставить их обдуманно. Все шашки имеют право за один ход передвигаться на свободную соседнюю точку (пересечение линий) в любую сторону и по диагонали. Если «леопардам» удастся снять 8 «коров», то они выигрывают. «Леопарды» могут снимать шашки-«коровы», перепрыгивая через них на свободную точку пересечения. «Коровы» должны запереть «леопардов» так, чтобы им некуда было ходить, тогда «коровы» выигрывают.

Приложение

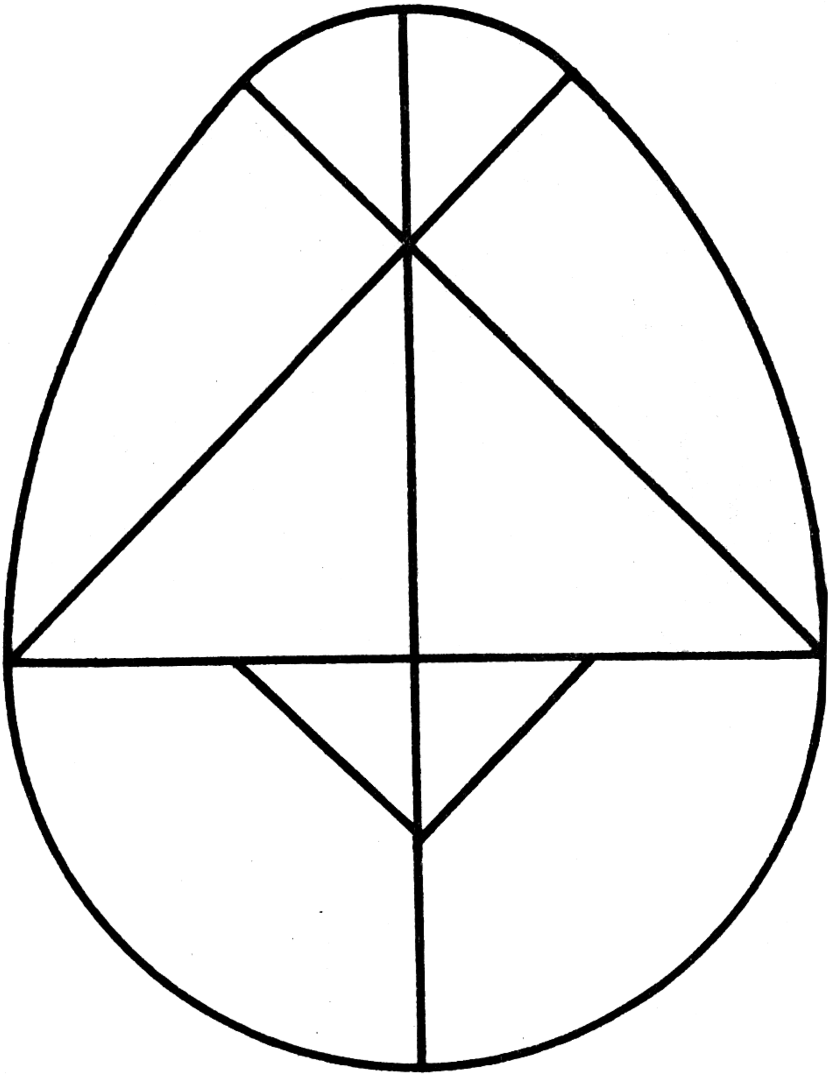
Головоломка Пифагора



Игра «Гексамино»

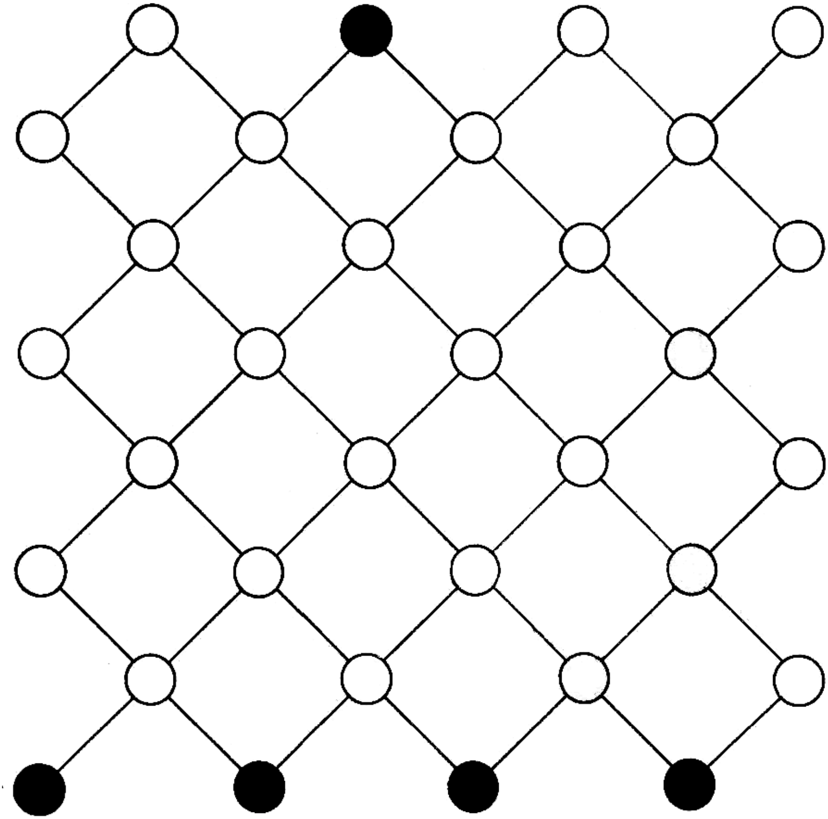


Игра «Колумбово яйцо»

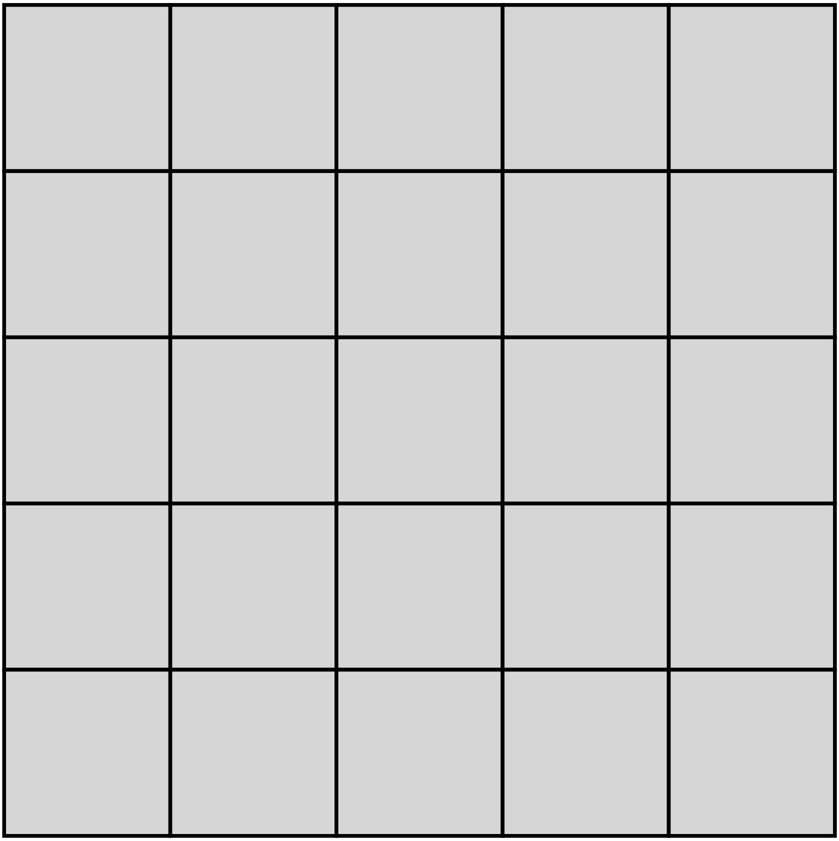


Игра «Волк и овцы»

Поле 1

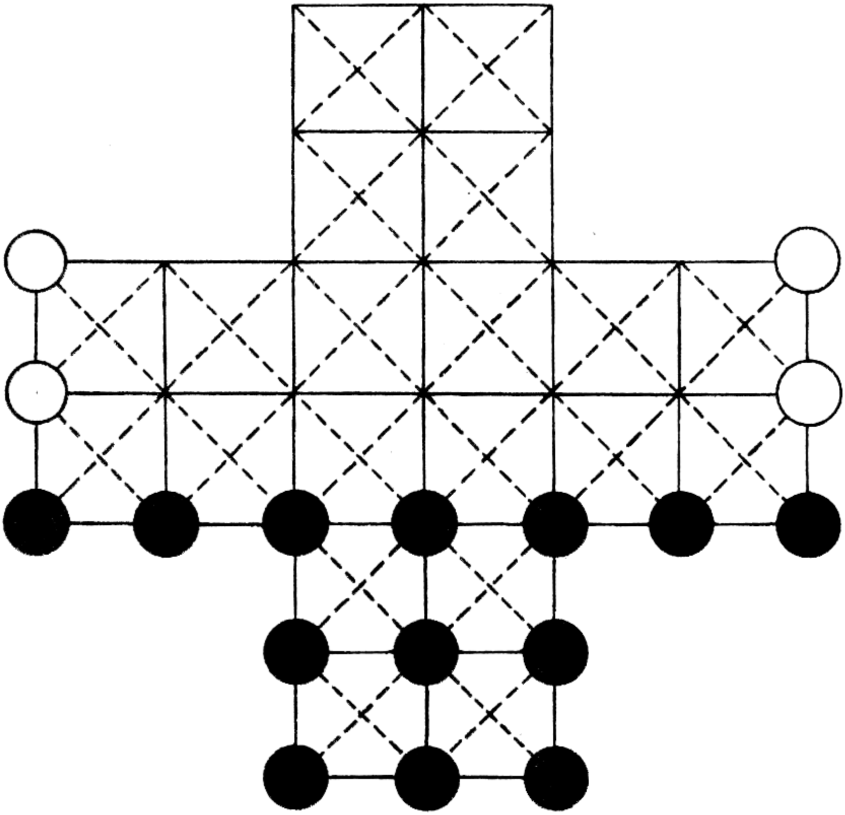


Поле 2



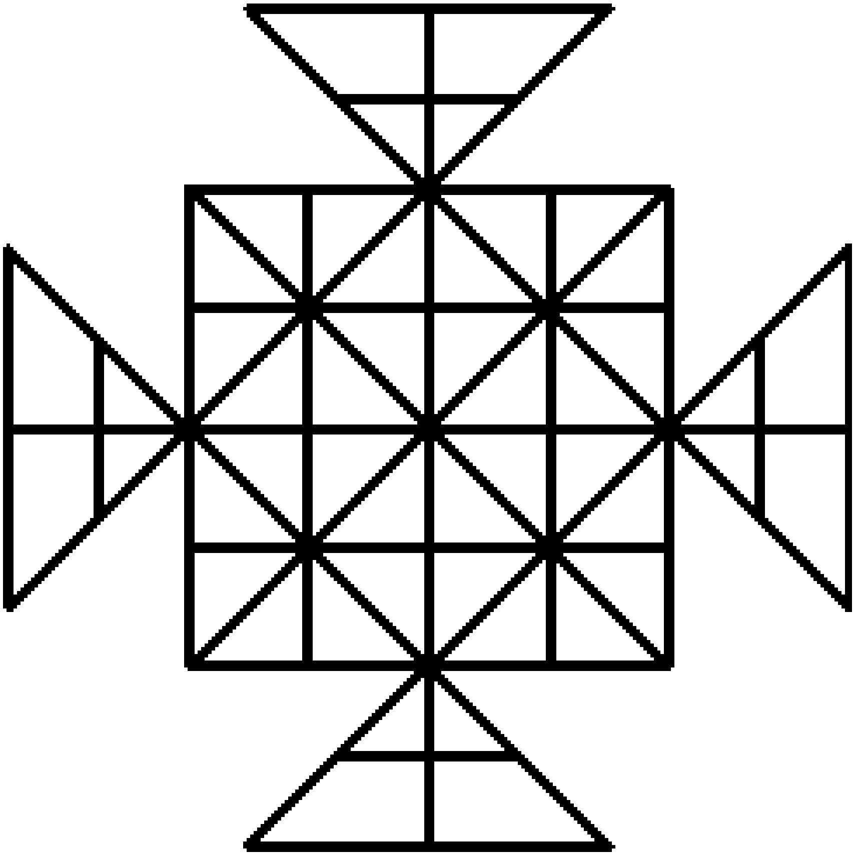
Игра «Лиса и гуси»

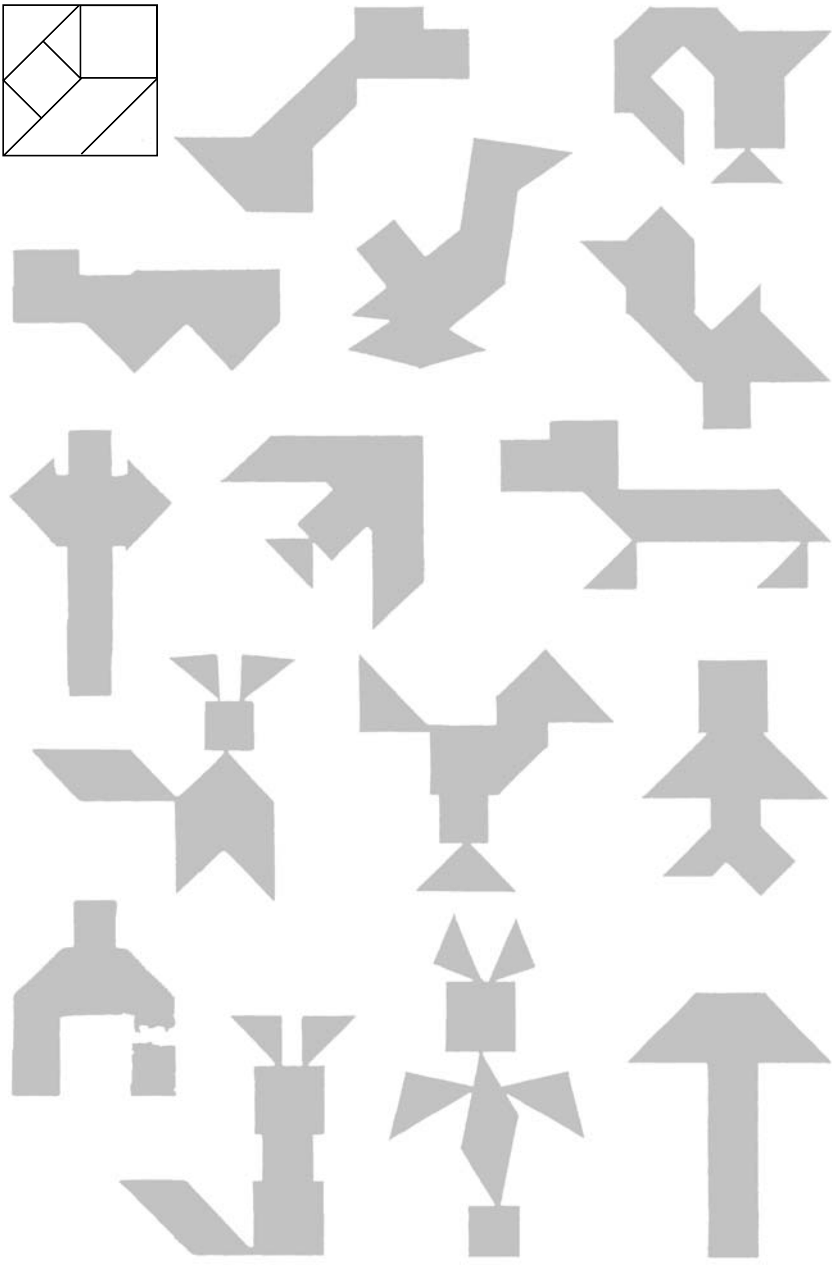
Поле 3



Игра «Леопарды и коровы»

Поле 4





Рекомендуемая литература

1. Александрова, Э. Б. Стол находок утерянных чисел / Э. Б. Александрова, В. А. Левшин. — М. : Детская литература, 1988. — 63 с.

2. Аменицкий, Н. Н. Забавная арифметика / Н. Н. Аменицкий. — М. : Наука, 1991. — 125 с.

3. Баврин, И. И. Старинные задачи : кн. для учащихся / И. И. Баврин. — М. : Просвещение, 1994. — 128 с.

4. Бендукидзе, А. Бал у принцессы арифметики // Квант. — 1974. №7. — С 66—68.

5. Балк, М. Б. Математика после уроков / М. Б. Балк. — М. : Просвещение, 1971. — 464 с.

6. Беррондо, М. Занимательные задачи / М. Беррондо ; пер. с фр. Ю. Н. Сударева ; под ред. И. М. Яглома. — М. : Мир, 1983. — 229 с.

7. Болгарский, Б. В. Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский. ; под ред. В. Д. Чистякова. / — Минск : Вышэйш. школа, 1974. — 288 с.

8. Виленкин, Н. Я. Тайны бесконечности / Н. Я. Виленкин // Квант. — 1970. — № 3. — С. 3—13.

9. Вырежи и сложи: Игры-головоломки / сост. З. А. Михайлова, Р. Л. Непомнящая. — Минск : Народная асвета, 1992. — 179 с.

10. Волина, В. В. Мир математики / В. В. Волина. — Ростов н/Д. : Феникс, 1999. — 508 с.

11. Ганчив, И. Математический фольклор / И. Ганчив. — М. : Знание, 1987. — 205 с.

12. Депман, И. Я. Рассказы о математике / И. Я. Депман. — Л. : Детгиз, 1957. — 142 с.

13. Депман, И. Я. Рассказы о решении задач / И. Я. Депман. — Л. : Детская литература, 1957. — 127 с.

14. Депман, И. Я. Совершенные числа / И. Я. Депман. // Квант. — 1971. — № 8. — С. 1—6.

15. Депман, И. Я. История арифметики / И. Я. Депман. — М. : Просвещение, 1965. — 415 с.

16. Дорофеева, А. В. Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — Львов : Журнал «Квантор», 1991. — 96 с.

17. Игнатьев, Е. И. В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М. : Наука, 1978. — 190 с.

18. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — Т. 1. — М. : Наука, 1970. — 350 с.

19. Кордемский, Б. А. Удивительный мир чисел / Б. А. Кордемский. — М. : Просвещение, 1986. — 143 с.

20. Кордемский, Б. А. Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М. : Физматлит, 1958. — 574 с.

21. Козлова, Е. Г. Сказки и подсказки: Задачи для математического кружка / Е. Г. Козлова. — М. : МИРОС, 1994. — 128 с.

22. Левинова, Л. А. Приключения Кубарика и Томика, или Веселая математика / Л. А. Левинова. — М. : Педагогика, 1975. — 160 с.

23. Левшин, В. А. Магистр Рассеянных Наук / В. А. Левшин. — М. : Московский клуб, 1994. — 256 с.

24. Леман, И. Увлекательная математика / И. Леман ; пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М. : Знание, 1985. — 270 с.

25. Леман, И. 2×2 + шутка / И. Леман. — Минск : Народная асвета, 1985. — 71 с.

26. Лоповок, А. М. Математика на досуге / А. М. Лоповок. — М. : Просвещение, 1981. — 158 с.

27. Мазаник, А. А. Реши сам / А. А. Мазаник — Минск : Народная асвета, 1980. — 240 с.

28. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М. : Советская энциклопедия, 1988. — 847 с.

29. Нагибин, Ф. Ф. Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин. — М. : Просвещение, 1984. — 160 с.

30. Олехник, С. Н. Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник. — М. : Наука, 1985. — 160 с.

31. Перельман, Я. И. Занимательная арифметика / Я. И. Перельман. — М. : Физматгиз, 1959. — 190 с.

32. Перельман, Я. И. Живая математика / Я. И. Перельман. — М. : Наука, 1978. — 160 с.

33. Перли, С. С. Страницы русской истории на уроках математики : нетрадиц. задачник : 5—6 кл. / — М. : Педагогика, 1994. — 287 с.

34. Свечников, А. А. Числа, фигуры, задачи во внеклассной работе / А. А. Свечников. — М. : Просвещение, 1977.

35. Час веселой математики: Задачи на сказочные сюжеты, смекалку, сообразительность / авт.-сост. Л. К. Круз. — Мозырь : Белый Ветер, 2001. — 28 с.

36. Хренов, Л. С. Время и календарь / Л. С. Хренов. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 128 с.

37. Чистяков, В. Д. Старинные задачи по элементарной математике / В. Д. Чистяков. — Минск : Вышэйшая школа, 1978. — 270 с.

38. Чопенко, О. П. Про счеты / О. П. Чопенко // Квант. — 1975. — № 5. — С. 72—75.

39. Шеврин, Л. Н. Математика 5—6. Учебник-собеседник / Л. Н. Шеврин. — М. : Просвещение, 1989.

40. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. — М. : Педагогика, 1989. — 352 с.

41. Я познаю мир : Дет. энцикл. : математика / авт.-сост. А. П. Савин, В. В. Стацко, А. Ю. Котова. — М. : ООО «Изд-во АСТ»; ООО «Изд-во Астрель», 2002. — 475 с.

Содержание