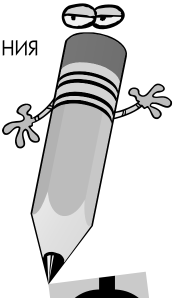
Национальный институт образования

Факультативные занятия

С. А. Гуцанович, Н. В. Костюкович

Математика

5–6 классы



Пособие для учителей
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским
языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание

Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 372.851.046.14
ББК 74.262.21
Г93

Серия основана в 2010 году

Гуцанович, С. А.

Г93 Математика. 5—6 классы : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / С. А. Гуцанович, Н. В. Костюкович. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 172 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-533-126-2.

Данное пособие входит в состав учебно-методического комплекса и предназначено для организации и проведения факультативных занятий по математике в 5—6 классах.

Адресуется учителям учреждений общего среднего образования.

УДК 372.851.046.14
ББК 74.262.21

ISBN 978-985-533-126-2

ОТ АВТОРОВ

Данное методическое пособие призвано помочь учителям в организации процесса обучения учащихся 5-х и 6-х классов с использованием дидактических материалов факультативных занятий «Тропинками математики» и «Путешествие с математикой», разработанных: Гуцановичем Сергеем Аркадьевичем — заведующим лабораторией математики и естественно научного образования НИО, доктором педагогических наук, доцентом; Костюкович Натальей Владимировной — доцентом кафедры методики преподавания интегрированных школьных курсов БГПУ им. Максима Танка, кандидатом педагогических наук.

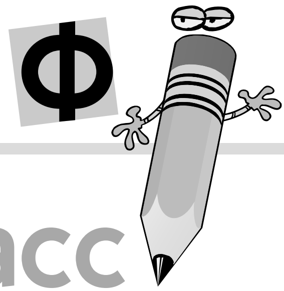
Предлагаемые факультативные занятия разработаны с учетом учебной программы для учреждений общего среднего образования и ориентированы на многогранное рассмотрение содержания курса математики 5-х и 6-х классов по всем содержательным линиям программы. Факультативные занятия предназначены не только для учащихся, которые проявляют интерес и склонность к изучению математики. Занятия могут посещать все учащиеся этих классов с любым уровнем подготовки. При проведении факультативных занятий целесообразно учитывать возрастные и индивидуальные особенности учащихся и использовать разноуровневые задания с учетом учебной программы по математике для 5-х и 6-х классов. На занятиях желательно также иметь соответствующий наглядный материал, использовать возможности новых информационных технологий, технических средств обучения.

Поскольку объем учебной нагрузки в 5-х и 6-х классах не позволяет учителю в урочное время предоставить внепрограммную информацию и значительная часть разнообразного занимательного математического материала, способствующего развитию познавательных интересов школьников, остается невостребованной, то устранить данное несоответствие могут предлагаемые программы факультативных занятий.

Программа факультативных занятий «Тропинками математики» и соответствующее пособие для учащихся разработаны для 5-х классов и рассчитаны на два полугодия. В рамках факультативных занятий предлагаются путешествия по различным тропинкам. Учащиеся познакомятся с развитием нумерации и счета, некоторыми интересными приемами устных и письменных вычислений, а также математическими задачами-загадками античных времен и задачами математического содержания на основе народных сказок. В результате геометрических путешествий учащиеся познакомятся с занимательным геометрическим материалом и простейшими увлекательными задачами. Программа факультативных занятий и соответствующие дидактические материалы предполагают проведение математических соревнований.

Программа факультативных занятий «Путешествие с математикой» и соответствующее пособие для учащихся разработаны для 6-х классов и рассчитаны на два полугодия. На факультативных занятиях учащиеся совершат путешествия в мир десятичных дробей, в область отношений и пропорций, в страну занимательных процентов, в страну рациональных чисел, в область длин, площадей и объемов, по дорогам денежных систем мер, по времени, в мир масс с единой системой мер, в страну геометрических фигур.

Факультативные занятия для учащихся 5-х и 6-х классов будут способствовать формированию познавательного интереса у учащихся к математике, развитию их логического и аналитического стиля мышления, математической интуиции, умения самостоятельно и творчески работать с научной литературой и, что особенно важно, повышению их внутренней мотивации.



5 класс

Тропинками математики

Программа факультативных занятий для учащихся 5-х классов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Повышение качества школьного математического образования за счет более высокого уровня преподавания предмета является одной из актуальных проблем, стоящих перед современной школой, задачей которой является формирование интеллектуального потенциала учащихся, развитие их познавательных интересов и творческой активности. Введение новых стандартов для изучения математики на базовом уровне требует решения двуединой задачи: с одной стороны, обеспечивать овладение учащимися определенным программой объемом знаний и умений, с другой — создание возможности углубленного изучения школьного курса математики. В настоящее время для устранения перегрузки учащихся сокращается объем теоретического материала и благодаря введению факультативных занятий школьный курс углубляет свое содержание с учетом возрастных особенностей обучаемых.

Поскольку объем учебной нагрузки в 5-м классе не позволяет учителю в урочное время предоставить внепрограммную информацию и значительная часть разнообразного занимательного математического материала, способствующего развитию познавательных интересов школьников, остается невостребованной, то устранить данное несоответствие может предлагаемая программа факультативных занятий.

Программа факультативных занятий «Тропинками математики» разработана для учащихся 5-х классов и рассчитана на два полугодия. Она содержит восемь тем, которые могут изучаться от трех до шести часов. Основной теоретический материал факультативных занятий входит в базовый курс математики с учетом действующих стандартов. Он поможет наиболее полно и осмысленно изучать программный материал и не требует специальной подготовки учащихся. В рамках факультативных занятий предлагаются путешествия по различным тропинкам с воображаемыми одноклассниками Катей Книжкиной, Васей Задачкиным и Петей Вопросовым. Учащиеся познакомятся с развитием нумерации и счета, некоторыми интересными приемами устных и письменных вычислений, а также математическими задачами-загадками античных времен и задачами математического содержания на основе народных сказок. В результате геометрических путешествий учащиеся познакомятся с занимательным геометрическим материалом и простейшими увлекательными задачами. Программа факультативных занятий предполагает проведение математических соревнований.

***Основная цель факультативных занятий*:** сформировать у учащихся интерес к математике как науке и на основе соответствующих заданий развивать их математические способности и внутреннюю мотивацию к предмету.

***Задачи факультативных занятий*:**

- ознакомить учащихся с происхождением и развитием арифметики, историей происхождения математических знаков, некоторыми приемами устных и письменных вычислений;
- развить познавательную и творческую активность учащихся на основе упрощенных вариантов античных задач;
- выработать у учащихся первоначальные навыки работы с математической литературой и последующим составлением кратких текстов прочитанной информации;
- показать учащимся исторические аспекты возникновения некоторых геометрических величин;
- рассмотреть некоторые методы решения старинных задач.

***Рекомендуемые формы и методы проведения занятий*.** Изложение материала может осуществляться с использованием традиционных словесных и наглядных методов: рассказ, беседа, демонстрация видеоматериалов, наглядного материала, различного оборудования.

При проведении занятий существенное значение имеет проведение дискуссий, выполнение учениками индивидуальных заданий, подготовка сообщений.

Ведущее место при проведении занятий должно быть уделено задачам, развивающим познавательную активность учащихся. Однако это не исключает теоретического ознакомления учащихся с новым материалом при изучении каждой очередной темы. Поэтому подготовку к занятиям целесообразно начинать с рекомендуемой литературы и методических рекомендаций.

Занятия «Тропинками математики» может проводить не только учитель, работающий с данными учащимися. В процессе работы преподаватель может с учетом математического развития учащихся сокращать или увеличивать время на изучение определенной темы.

Продолжительность проведения предлагаемых восьми занятий может быть неодинаковой, возможно увеличение количества часов на некоторые темы за счет сокращения часов на оставшиеся. Каждая тема предусматривает ознакомление с теоретическими сведениями. Для того чтобы их всесторонне и полно понять, предлагаются различные примеры, которые в большинстве случаев включают условие задания, решение и ответ.

Особо понравившиеся факты и сведения из предлагаемой программы можно изучить глубже, обратившись к рекомендуемой литературе.

СОДЕРЖАНИЕ

Тропинкой в мир чисел и цифр

Цифры и числа. Запись цифр у разных народов. Числа-великаны. Натуральные числа. Некоторые виды натуральных чисел и их свойства. Построение математиками фигурных чисел. (3 ч)

Тропинкой в страну «Арифметика»

Как возникла арифметика? Происхождение арифметических действий. Из истории возникновения нуля. Почему на нуль делить нельзя? Интересные арифметические упражнения. (3 ч)

Тропинкой в удивительный мир вычислений

Интересные приемы устных и письменных вычислений. Особенности быстрого арифметического счета. Один из старинных способов вычисления на пальцах. Сложение нескольких последовательных чисел натурального ряда. Вычисления посредством таблиц. Вспомогательные средства вычислений. Простейшие электронные и счетные приборы, их историческое значение. Веселый счет. (6 ч)

Тропинкой в удивительный мир арифметических и геометрических игр, головоломок и фокусов

Арифметические закономерности. Задания на восстановление чисел и цифр в арифметических записях. Нахождение арифметических действий в зашифрованных действиях. Волшебные квадраты. Арифметические фокусы. Арифметические игры и головоломки. (6 ч)

Тропинкой в удивительный мир деления

Делимость. Различные способы деления. Признаки делимости. Простые и составные числа. Определение числа по остатку. Совершенные и дружественные числа. Числа-близнецы. (3 ч)

Тропинкой с математикой во времени

Математические задачи-загадки античных времен. Старинные занимательные истории по математике. Занимательные задачи. Задачи математического содержания на основе народных сказок. Некоторые задачи русских писателей. (4 ч)

Тропинкой в занимательное геометрическое путешествие

Геометрические путешествия. Геометрические задачи на вычерчивание фигур без отрыва карандаша от бумаги. Задачи на разрезание. Простейшие многогранники (прямоугольный параллелепипед, куб), изготовление моделей простейших многогранников. Простейшие задачи прикладного характера. Геометрические соревнования. (6 ч)

Тропинкой в страну обыкновенных дробей

Что мы знаем об обыкновенных дробях? История возникновения обыкновенных дробей. Занимательные истории об обыкновенных дробях. Числа-лилипуты. Различные способы вычисления с обыкновенными дробями. Занимательные задания по теме. (4 ч)

ОЖИДАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате изучения факультативных занятий «Тропинками математики» у учащихся формируется культура счета и математической речи, улучшаются вычислительные навыки и навыки работы с величинами, они также получают навыки самостоятельной и творческой работы с дополнительной математической литературой.

Исторический аспект развития математики позволяет повысить интерес у учащихся к ее изучению, формирует положительное эмоциональное отношение к учебному предмету, способствует развитию их интеллектуальных и творческих способностей.

Факультативные занятия дают возможность в доступной форме раскрыть происхождение многих математических понятий и фактов, расширить математический кругозор учащихся.

Предлагаемые факультативные занятия, отвечая образовательным, воспитательным и развивающим целям обучения, усиливают прикладную направленность преподавания математики, выявление одаренных и талантливых учащихся.

Таким образом, программа факультативных занятий «Тропинками математики», имея большую информационную насыщенность, дает возможность познакомить учащихся с интересным занимательным математическим материалом, который окажется полезным не только для расширения их знаний по математике, но и для развития познавательных интересов и творческой активности. Факультативный курс «Тропинками математики» имеет и пропедевтическую направленность, его изучение позволит учащимся сформировать представления о своих возможностях в области математики.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрова, Э. Б.* Стол находок утерянных чисел / Э. Б. Александрова, В. А. Левшин. — М. : Детская литература, 1988. — 63 с.
2. *Аменицкий, Н. Н.* Забавная арифметика / Н. Н. Аменицкий, И. П. Сахаров. — М. : Наука, 1991. — 125 с.
3. *Баврин, И. И.* Старинные задачи : кн. для учащихся / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М. : Просвещение, 1994. — 128 с.
4. *Балк, М. Б.* Математика после уроков / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. — М. : Просвещение, 1971. — 464 с.
5. *Бендукидзе, А.* Бал у принцессы арифметики / А. Бендукидзе // Квант. — 1974. — № 7. — С. 66—68.
6. *Беррондо, М.* Занимательные задачи / М. Беррондо ; пер. с фр. Ю. Н. Сударева ; под ред. И. М. Яглома. — М. : Мир, 1983. — 229 с.
7. *Болгарский, Б. В.* Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский ; под ред. В. Д. Чистякова. — Минск : Вышэйшая школа, 1974. — 288 с.
8. *Виленкин, Н. Я.* Тайны бесконечности / Н. Я. Виленкин // Квант. — 1970. — № 3. — С. 3—13.
9. *Волина, В. В.* Мир математики / В. В. Волина. — Ростов н/Д. : Феникс, 1999. — 508 с.
10. Вырежи и сложи: игры-головоломки / сост. З. А. Михайлова, Р. Л. Непомнящая. — Минск : Народная асвета, 1992. — 179 с.
11. *Ганчив, И.* Математический фольклор / И. Ганчив, К. Чимев, Й. Стоянов. — М. : Знание, 1987. — 205 с.
12. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе. IV—VI кл. : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1981. — 239 с.
13. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе. VII—VIII кл. : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.

14. *Гуцанович, С. А.* Занимательная математика в базовой школе : пособие для учителей / С. А. Гуцанович. — Минск : ТетраСистемс, 2004. — 96 с.

15. *Депман, И. Я.* История арифметики / И. Я. Депман. — М. : Просвещение, 1965. — 415 с.

16. *Депман, И. Я.* Рассказы о математике / И. Я. Депман. — Л. : Детгиз, 1957. — 142 с.

17. *Депман, И. Я.* Рассказы о решении задач / И. Я. Депман. — Л. : Детская литература, 1957. — 127 с.

18. *Депман, И. Я.* Совершенные числа / И. Я. Депман // Квант. — 1971. — № 8. — С. 1—6.

19. *Дорофеева, А. В.* Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — Львов : Журнал «Квантор», 1991. — 96 с.

20. *Игнатьев, Е. И.* В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М. : Наука, 1978. — 190 с.

21. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — Т. 1. — М. : Наука, 1970. — 350 с.

22. *Козлова, Е. Г.* Сказки и подсказки: Задачи для математического кружка / Е. Г. Козлова. — М. : МИРОС, 1994. — 128 с.

23. *Кордемский, Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М. : Физматлит, 1958. — 574 с.

24. *Кордемский, Б. А.* Удивительный мир чисел / Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. — М. : Просвещение, 1986. — 143 с.

25. *Левинова, Л. А.* Приключения Кубарика и Томика, или Веселая математика / Л. А. Левинова, Г. В. Сангир. — М. : Педагогика, 1975. — 160 с.

26. *Левшин, В. А.* Магистр Рассеянных Наук / В. А. Левшин. — М. : Московский клуб, 1994. — 256 с.

27. *Леман, И.* 2 × 2 + шутка / И. Леман. — Минск : Народная асвета, 1985. — 71 с.

28. *Леман, И.* Увлекательная математика / И. Леман ; пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М. : Знание, 1985. — 270 с.

29. *Лоповок, А. М.* Математика на досуге / А. М. Лоповок. — М. : Просвещение, 1981. — 158 с.

30. *Мазаник, А. А.* Реши сам / А. А. Мазаник. — Минск : Народная асвета, 1980. — 240 с.

31. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М. : Советская энциклопедия, 1988. — 847 с.

32. *Нагибин, Ф. Ф.* Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. — М. : Просвещение, 1984. — 160 с.

33. *Олехник, С. Н.* Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потаров. — М. : Наука, 1985. — 160 с.

34. *Перельман, Я. И.* Живая математика / Я. И. Перельман. — М. : Наука, 1978. — 160 с.

35. *Перельман, Я. И.* Занимательная арифметика / Я. И. Перельман. — М. : Физматгиз, 1959. — 190 с.

36. *Перли, С. С.* Страницы русской истории на уроках математики : нетрадиц. задачник : 5—6 кл. / С. С. Перли, Б. С. Перли. — М. : Педагогика-Пресс, 1994. — 287 с.

37. *Русанов, В. Н.* Математический кружок младших школьников : кн. для учителя / В. Н. Русанов. — М. : Просвещение, 1990. — 77 с.

38. *Русанов, В. Н.* Математический кружок младших школьников : кн. для учителя / В. Н. Русанов. — Оса : Ростаин-на-Каме, 1994. — 144 с.

39. *Свечников, А. А.* Числа, фигуры, задачи во внеклассной работе / А. А. Свечников, П. И. Сорокин. — М. : Просвещение, 1977.

40. Час веселой математики: Задачи на сказочные сюжеты, смекалку, сообразительность / авт.-сост. Л. К. Круз. — Мозырь : Белый Ветер, 2001. — 28 с.

41. *Чистяков, В. С.* Старинные задачи по элементарной математике / В. С. Чистяков. — Минск : Вышэйшая школа, 1978. — 270 с.

42. *Чопенко, О. П.* Про счеты / О. П. Чопенко // Квант. — 1975. — № 5. — С. 72—75.

43. *Шустеф, Ф. М.* Материал для внеклассной работы по математике : кн. для учителя / Ф. М. Шустеф. — Минск : Народная асвета, 1984. — 224 с.

44. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. — М. : Педагогика, 1989. — 352 с.

45. Я познаю мир : дет. энцикл. : математика / авт.-сост. А. П. Савин, В. В. Стацко, А. Ю. Котова. — М. : ООО «Изд-во АСТ» ; ООО «Изд-во Астрель», 2002. — 475 с.

Примерное тематическое планирование факультативных занятий для учащихся 5-х классов «Тропинками математики»

№ п/п	Тема	Опорный учебный материал по содержательным линиям	Количество часов	Программное содержание	Задания для самостоятельной работы	Литература
1	Тропинкой в мир чисел и цифр	Числа и вычисления	3	Цифры и числа. Запись цифр у разных народов. Числа-великаны. Натуральные числа. Некоторые виды натуральных чисел и их свойства. Построение математиками фигурных чисел	Перечень заданий, которые учащиеся выполняют после прохождения темы	1, 7, 13, 17, 18, 21, 22, 31, 34, 39, 41
2	Тропинкой в страну «Арифметика»	Числа и вычисления	3	Как возникла арифметика? Происхождение арифметических действий. Из истории возникновения нуля. Почему на нуль делить нельзя? Интересные арифметические упражнения	Перечень заданий для самостоятельной работы	13, 18, 21, 28, 32, 33, 34, 38, 41, 42
3	Тропинкой в удивительный мир вычислений	Выражения и их преобразования. Числа и вычисления	6	Интересные приемы устных и письменных вычислений. Особенности быстрого арифметического счета. Один из старинных способов вычисления на пальцах. Сложение нескольких последовательных чисел натурального ряда. Вычисления посредством таблиц. Вспомогательные средства вычислений. Простейшие электронные и счетные приборы, их историческое значение. Веселый счет	Перечень заданий для самостоятельной работы	5, 18, 34, 41, 42

№ п/п	Тема	Опорный учебный материал по содержательным линиям	Количество часов	Программное содержание	Задания для самостоятельной работы	Литература
4	Тропинкой в удивительный мир арифметических и геометрических игр, головоломок и фокусов	Выражения и их преобразования. Координаты и функции. Геометрические фигуры и их свойства	6	Арифметические закономерности. Задания на восстановление чисел и цифр в арифметических записях. Нахождение арифметических действий в зашифрованных действиях. Волшебные квадраты. Арифметические фокусы. Арифметические игры и головоломки	Перечень заданий для самостоятельной работы	14, 20, 24, 28, 29, 32, 35, 37, 38, 43
5	Тропинкой в удивительный мир деления	Числа и вычисления	3	Делимость. Различные способы деления. Признаки делимости. Простые и составные числа. Определение числа по остатку. Совершенные и дружественные числа. Числа-близнецы	Перечень заданий для самостоятельной работы	5, 13, 18, 24, 28, 29, 34
6	Тропинкой с математикой во времени	Выражения и их преобразования. Числа и вычисления. Уравнения и неравенства	4	Математические задачи-загадки античных времен. Старинные занимательные истории по математике. Занимательные задачи. Задачи математического содержания на основе народных сказок. Некоторые задачи русских писателей	Перечень заданий для самостоятельной работы	11, 14, 20, 24, 29, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 45

№ п/п	Тема	Опорный учебный материал по содержательным линиям	Количество часов	Программное содержание	Задания для самостоятельной работы	Литература
7	Тропинкой в занимательное геометрическое путешествие	Геометрические фигуры и их свойства. Геометрические величины. Геометрические построения	6	Геометрические путешествия. Геометрические задачи на вычерчивание фигур без отрыва карандаша от бумаги. Задачи на разрезание. Простейшие многогранники (прямоугольный параллелепипед, куб), изготовление моделей простейших многогранников. Простейшие задачи прикладного характера. Геометрические соревнования	Перечень заданий для самостоятельной работы	9, 11, 14, 23, 28, 35, 37, 39
8	Тропинкой в страну обыкновенных дробей	Числа и вычисления	4	Что мы знаем об обыкновенных дробях? История возникновения обыкновенных дробей. Занимательные истории об обыкновенных дробях. Числа-лилипуты. Различные способы вычисления с обыкновенными дробями. Занимательные задания по теме	Перечень заданий, которые учащиеся выполняют после прохождения темы	5, 6, 18, 22 43

Организация образовательного процесса

Тема 1. ТРОПИНКОЙ В МИР ЧИСЕЛ И ЦИФР

Цель: систематизировать знания, умения и навыки, полученные на первой ступени общего среднего образования, ознакомить учащихся с различной записью цифр и чисел у разных народов и некоторыми видами натуральных чисел, их свойствами.

На изучение этой темы отводится 3 часа. Основное внимание в ней уделяется натуральным числам и их свойствам. Для проведения занятий предлагается интересный исторический материал, который учитель может расширить, используя прилагаемый список литературы.

Материал для проведения занятий

Способ записи чисел называют нумерацией или системой счисления.

Для ранних периодов истории культуры характерно разнообразие числовых систем, которые постепенно совершенствовались. Употребляемая ныне во всех странах десятичная позиционная система нумерации — итог реального исторического развития. Ей предшествовали:

1. *Различные иероглифические непозиционные системы.*

В них основу составляют так называемые узловые числа (чаще всего 1, 10, 100, 1000, ...). Каждое такое число имеет индивидуальный символ — иероглиф. Остальные числа образуются приписыванием к этому узловому числу других узловых чисел и повторением их. Примерами таких систем являются в первую очередь римская, египетская, критская, старокитайская, староиндусская и др.

2. *Алфавитные системы счисления.*

В этих системах буквы алфавита взяты по 9, используются соответственно для обозначения единиц, десятков, сотен. Каждой букве при этом дается отличительный знак, указывающий, что она используется как число. В случае, если букв алфавита недостаточно, привлекаются дополнительные буквы и знаки.

Алфавитные системы удобнее из-за краткости записи, однако они малопригодны для оперирования с большими числами и требуют значительных усилий для запоминания. Примерами алфавитной системы являются древнеславянская, еврейская, арабская, грузинская, армянская и др.

3. *Позиционные недесятичные, а затем десятичная система.*

К позиционным недесятичным системам относятся вавилонская, индейская (племени майя), индийская, современная двоичная. В позиционной записи значение каждой цифры зависит от того места, которое эта цифра занимает. Например, в десятеричной системе в числе 555 пятерка участвует три раза. Но самая правая из них означает пять единиц, вторая справа — пять десятков, а третья — пять сотен. Позиционные системы удобны тем, что позволяют записывать большие числа с помощью сравнительно небольшого числа знаков. Еще более важное преимущество позиционных систем — это простота и легкость выполнения арифметических операций над числами, записанными в этих системах. Первой известной нам позиционной системой счисления является шестидесятеричная система древних вавилонян, возникшая примерно за 2 тыс. лет до н. э. Вавилоняне записывали все числа при помощи двух знаков: прямого клина ▼, обозначающего единицу, и лежачего клина ◀, означающего 10. Числа до 60 записывались при помощи повторения этих двух знаков.

Однако эта система не имеет нуля, а один и тот же знак клина может обозначать не только единицу, но любое число вида 60^n ($n \in N$). Различать числа, написанные в такой системе, можно было, лишь исходя из условий задачи, так как если число не содержало единиц какого-то разряда, то оставлялось пустое место. При письме от руки, особенно на глине, промежутки получались неодинаковой величины, а это, в свою очередь, вело к путанице в расчетах и документах. Позднее знак разделения, соответствующий нашему нулю, появился. Но вот что любопытно. Введя знак разделения в середине чисел, вавилоняне так и не додумались до того, чтобы ставить его на конце. Числа 1, 60, 3600 записывались у них одинаково.

Мнения историков по поводу того, как возникла такая система, расходятся. Несмотря на то, что происхождение шестидесятеричной системы остается неясным, сам факт ее существования и широкого распространения в Вавилоне достаточно хорошо установлен. Эта система в какой-то степени сохранилась и до наших дней. Например, в делении часа на минуты, минуты на секунды, в измерении углов. В одном градусе 60 минут, в одной минуте 60 секунд. В целом, однако, эта система, требующая шестидесяти различных цифр, довольно громоздка и неудобна.

В настоящее время почти все народы мира пользуются десятичной (десятеричной) системой счисления. Десятичная нумерация (десятичная система счисления) — это способ счета группами по десять. Число десять является основанием десятичной системы счисления.

Счет ведется у нас десятками: десять единиц образуют один десяток, десять десятков — одну сотню и т. д. Десять единиц первого разряда образуют одну единицу второго разряда, десять единиц второго разряда — одну единицу третьего разряда и т. д. Десятичная система возникла в связи со счетом с помощью десяти пальцев рук. В десятичной системе названия всех натуральных чисел до 999 миллионов образуются с помощью всего лишь тринадцати слов: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сто, тысяча, миллион. Слово «десять» иногда сокращается в «дцать», например вместо «три десять» говорят «тридцать».

Натуральные числа

Наивысшего расцвета учение о натуральных числах достигло в школе знаменитого философа и математика Пифагора Самосского (около 580 — около 500 гг. до н. э.). До нас дошло мало биографических сведений о Пифагоре. Известно, что по политическим мотивам он оставил свой родной остров Самос. Предполагают, что он совершил путешествие в Египет и Вавилон, где приобщился к тайнам жрецов. Вернувшись, он поселился в Кротоне — греческом городе на юге Италии — и основал там тайное общество, ставшее одновременно и политической организацией, и философско-научной школой. Члены общества вели строгий образ жизни, занимались музыкой и математикой. Традиции школы Пифагора хранились его учениками и последователями в течение нескольких веков.

Пифагорейцы считали число основой всего существующего. Они создали оригинальную арифметику, где каждое число играло свою роль. Натуральными числами обозначались и боги, и космос, и люди, и их взаимоотношения. Изучению натуральных чисел пифагорейцы уделяли особое почтительное внимание, рассматривали числа, четные и нечетные, простые и составные, фигурные многоугольные и пирамидальные, дружественные и совершенные и т. д.

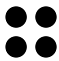
Фигурные числа

В давние времена люди часто считали предметы с помощью камушков и заметили, что существуют определенные случаи, когда камушки можно сложить в виде правильной геометрической фигуры, например в виде правильного треугольника или квадрата. Строительное искусство требовало складывания фигур треугольной, квадратной или многоугольной формы из кирпичей или каменных плит. Эти строительные задачи дали начало развитию в Древней Греции учения о фигурных числах. Чтобы вычислить число, изображенное таким образом с помощью камушков, достаточно умножить их количество вдоль одной стороны на количество вдоль другой стороны. А так как у квадрата стороны равны, то число камушков, расположенных вдоль горизонтальной стороны квадрата, равно числу камушков, лежащих вдоль вертикальной черты. Следовательно, чтобы найти искомое число, нужно количество камушков вдоль одной стороны умножить на себя или возвести в квадрат. Поэтому полученные числа и стали называть *квадратами* или *квадратными*. Так, числа 25, 49, 100 являются квадратными, поскольку их можно получить, если возвести числа 5, 7 и 10 в квадрат или умножить на себя. Интересен тот факт, что и сегодня на параде солдаты стоят правильными рядами, образуя квадраты.

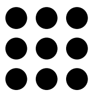
Изобразим с помощью точек квадратные числа, меньшие 20.

Число 1 (так как $1 \cdot 1 = 1$):

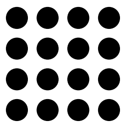
Число 4 (так как $2 \cdot 2 = 4$):



Число 9 (так как $3 \cdot 3 = 9$):



Число 16 (так как $4 \cdot 4 = 16$):

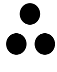


Кроме квадратных чисел, известны и треугольные числа. Это такие числа, которые, если их изображать с помощью камушков, можно выложить в виде правильного треугольника, т. е. такого треугольника, у которого стороны одинаковы и углы равны.

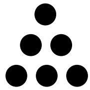
Приведем примеры треугольных чисел.

Число 1:

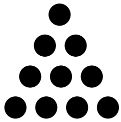
Число 3 (так как $1 + 2 = 3$):



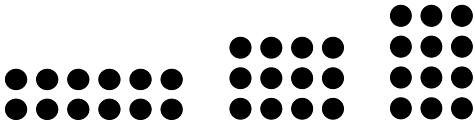
Число 6 (так как $1 + 2 + 3 = 6$):



Число 10 (так как $1 + 2 + 3 + 4 = 10$):



С помощью камушков число можно выложить и в виде прямоугольника. Число 12 в виде прямоугольника можно представить разнообразными способами, например:



$12 = 2 \cdot 6$; $12 = 3 \cdot 4$; $12 = 4 \cdot 3$; $12 = 6 \cdot 2$, а число 13 в виде прямоугольника можно представить, лишь расположив все предметы в одну линию, т. е. ●●●●●●●●●●●●●. Поэтому древние люди считали, что число 12 является *прямоугольным*, а число 13 — не является.

К фигурным числам также относятся *пирамидальные* числа, которые получаются, если шарики складывать пирамидой, как раньше складывали ядра около пушки.

Дополнительные вопросы

1. Какие числа называются треугольными? Приведите примеры треугольных чисел.

2. Какие числа называются квадратными? Приведите примеры квадратных чисел.

3. Какие числа называются прямоугольными? Приведите примеры прямоугольных чисел.

4. Существуют ли числа, которые являются квадратными и треугольными одновременно? Если существуют, то приведите примеры.

Дополнительные упражнения

1. Укажите все треугольные числа, большие 1 и меньшие 30, и изобразите их с помощью точек.

2. Укажите треугольные числа, не большие 50 и не меньшие 10.

3. Укажите все квадратные числа, меньшие 40, и изобразите их с помощью точек.

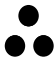
4. Укажите квадратные числа: а) большие 10 и меньшие 50; б) не большие 20; в) не меньшие 10 и не большие 50.

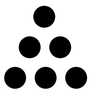
5. Придумайте и изобразите с помощью точек 5 прямоугольных чисел.

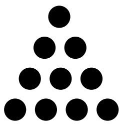
6. Укажите прямоугольные числа, не меньшие 9 и не большие 20.

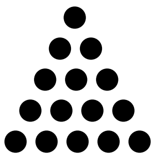
Комментарии и ответы

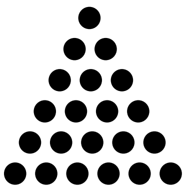
К «Дополнительным упражнениям»

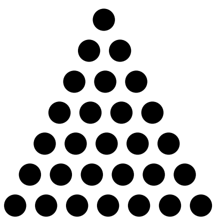
1. 3 –


6 –


10 –


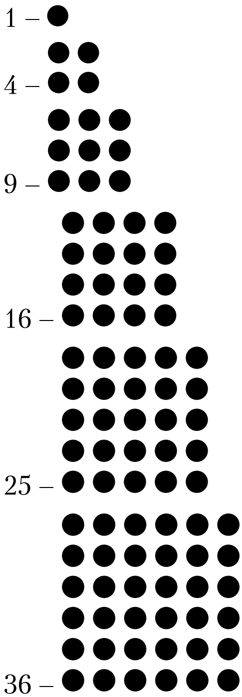
15 –


21 –


28 –


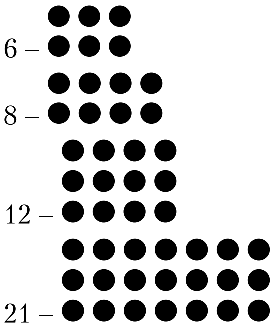
2. 10, 10 + 5 = 15, 15 + 6 = 21, 21 + 7 = 28, 28 + 8 = 36, 36 + 9 = 45.

3.



4. а) 16, 25, 36, 49;
б) 1, 4, 9, 16;
в) 16, 25, 36, 49.

5. Возможные варианты:



6. 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

К «Упражнениям Васи Задачкина»

1. Наименьшее двузначное число — 10, наибольшее — 99, тогда сумма — 109.

2. Наименьшее двузначное число — 10, наименьшее трехзначное — 100, тогда разность — 90.

3. 98 765.

4. 102 345.

6. Возможный вариант: $9 \cdot 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 + 2 + 1$.

7. Возможный вариант: $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 \cdot 9$.

8. Возможный вариант: $9 \cdot 8 + 7 - 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1$.

9. Возможный вариант: $22 + 2 \cdot 2 + 2$.

10. Возможный вариант: $33 + 3 \cdot 3 - 3$.

11. $n + 11$.

12. $n + 3$.

13. $n + 7$.

14. $1 + 23 + 4 + 5 + 67$.

Тема 2. ТРОПИНКОЙ В СТРАНУ «АРИФМЕТИКА»

Цель: ознакомить учащихся с историей возникновения арифметики и показать ее возможности при решении задач.

На изучение этой темы отводится 3 часа. Основное внимание в ней уделяется истории возникновения арифметики, натуральным числам и их свойствам. Для проведения занятий предлагается интересный исторический материал, который познакомит учащихся с историей возникновения нуля и знаков арифметических действий, а также с известными математиками древности. Учитель может расширить предлагаемый исторический материал, используя прилагаемый список литературы. Рекомендуются выступления учащихся с докладами и подготовка рефератов по теме.

Дополнительные сведения

Аполлоний (260—170 гг. до н. э.) — обучался в Александрийской школе, а затем жил в Пергаме, был современником Архимеда и Эратосфена. Главный его труд состоял из 8 книг, первые 4 книги сохранились в греческом подлиннике, а следующие 3 книги — в арабском переводе. Восьмая книга, к сожалению, утеряна.

Трудами Архимеда, Эратосфена и Аполлония заканчивается период развития греческой математики, хотя в последующие годы было много крупных ученых, но их вклад не может быть соизмерим с трудами великих ученых «золотого века». Греческая наука замерла в V в. н. э., и в последующие 1000 лет народы Европы не делали существенных успехов в математике, и в арифметике в частности.

Римляне не продвинули вперед технику вычислений, оставив, однако, дошедшую до нашего времени систему нумерации (*римские цифры*), мало приспособленную для производства арифметических действий и применяемую в настоящее время почти исключительно для обозначения порядковых чисел.

В странах Европы математика сводилась всего лишь к скромной арифметике, которой пользовались главным образом для вычислений. В это время высшим авторитетом среди математиков был дипломат и философ **Боэций** (около 480—524 гг.). Он был автором математических произведений, и его авторитет сохранялся в западном мире в течение более чем тысячи лет. Однако в литературе по истории математики отмечается, что они частично содержали теорию чисел пифагорейцев.

Определенную известность приобрел уроженец Британии **Алькуин** (735—804 гг.). Им была написана одна из первых занимательных книг по математике «Задачи для изощрения ума юношества». Эта книга пользовалась большим успехом на протяжении почти целого тысячелетия. Из нее взяты многие, пользующиеся известностью и теперь, занимательные задачи (см. задачи для самостоятельного решения).

Наиболее развитой частью Римской империи как экономически, так и культурно всегда был Восток. В средние века развитие арифметики было связано с Востоком. От индийцев к нам пришли цифры, а также нуль и позиционная система счисления, которыми мы пользуемся сейчас. Восточная культура оказала влияние на развитие арифметики в Европе.

В XII—XIII вв. за купцами на Восток, чтобы изучать науку арабов, двинулись толпы студентов. Среди них был Леонардо, вошедший в историю науки под именем Леонардо Пизанского или **Фибоначчи** (1180—1240 гг.). В 1202 г. он написал «Книгу абака», которую значительно переработал в 1228 г. Эта замечательная книга послужила важнейшим средством распространения новой арифметики и других математических знаний в Европе. Леонардо систематизировал в ней огромное количество сведений, почерпнутых из арабских трудов, геометрии Евклида, по существу, из всего античного наследия, а также присоединил ко всему этому собственные задачи и методы. «Книга абака» насчитывала 459 страниц. Заглавие труда Леонардо «Книга абака» следует понимать как «Арифметика». Всего в книге 15 глав. Первые пять из них посвящены арифметике целых чисел на основе новой нумерации. Чтобы показать читателю ее преимущества, Леонардо приводит таблицу, в которой некоторые числа записаны римскими и тут же индийскими (как считал он) цифрами:

MI — 1001; MMMXXX — 3030; MMXXXI — 2031 и т. д.

Главы VI и VII Леонардо посвятил действиям с дробями, а в главах VIII—X изложены приемы решения задач коммерческой арифметики, основанные на пропорциях, рассмотрены задачи на смешение и другие арифметические задачи.

Пример известной задачи из «Книги абака».

Семь старух направляются в Рим. У каждой из них по 7 мулов, на каждом из которых по 7 мешков, в каждом из которых по 7 хлебов, при каждом из которых по 7 ножей, каждый из которых в 7 ножнах. Сколько всего предметов?

Решение.

Старух — 7;

мулов — $7 \cdot 7 = 49$;

мешков — $49 \cdot 7 = 343$;

хлебов — $343 \cdot 7 = 2401$;

ножей — $2401 \cdot 7 = 16\,807$;

ножен — $16\,807 \cdot 7 = 117\,649$.

Ответ: 117 649.

Вместе с изобретением книгопечатания, в середине XV в. появились первые математические книги. Первая печатная книга по арифметике была издана в Италии в 1478 г.

Происхождение арифметических действий

Индийские цифры по своему начертанию несколько отличались от современных цифр, но все же имели с ними некоторое сходство. Так, например, очень походили на современные цифры индийские знаки, которые изображали единицу, семерку и нуль. Остальные знаки в течение многих веков видоизменились. В то время как у греков, евреев, сирийцев и т. д. для записи чисел употреблялось до 27 различных цифровых знаков, у индийцев число таких знаков снизилось до 10, включая и обозначение нуля.

Введение нуля, цифр и принципа поместного их значения значительно облегчило вычислительные операции над числами.

Проходили многие века, прежде чем вырабатывался символ или математический знак, который был бы удобен. Так, знаки сложения и вычитания в виде p и m в конце XV в. употребляли математики Н. Шюке и Л. Пачолли, а немецкие ученые ввели современные знаки «+» и «–». Они появились впервые в печати в книге «Быстрый и красивый счет» Яна Видмана (г. Лейпциг, 1489 г.). В XVII в. и начале XVII в. в употребление вошли знаки равенства и скобки: квадратные (Р. Бомбели, 1550 г.), круглые (Н. Тарталья, 1556 г.), фигурные (Ф. Виет, 1593 г.). Знак равенства («=») ввел Р. Рекорд (1557 г.). Знак умножения («·») впервые ввел в 1631 г. В. Оугред, а знак «≥» был введен Г. Гарриотом также в 1631 г. Знак деления («:») известен благодаря Джонсону с 1633 г. Обозначение деления $\frac{a}{b}$ ввел впервые Г. Лейбниц (1684 г.), хотя чертой дроби пользовался еще таджикский ученый ал-Хассар в XII в.

Комментарии и ответы

К «Заданиям Васи Задачкина»

2. В числах, которые удовлетворяют условию и первая цифра из которых равна 5, вторую и третью цифру можно выбрать девятью способами. Таких чисел 81. Если цифра 5 стоит на втором месте, то первую цифру можно выбрать восемью способами, а третью — девятью; тогда всего таких чисел 72. Таким же образом устанавливаем, что имеется 72 трехзначных числа, удовлетворяющие условию задачи, в которых цифра 5 стоит на третьем месте. Ответ: 225.

3. Если 7 — первая цифра, то на втором месте может стоять любая цифра от 0 до 9, итого 10 чисел. Если 7 — вторая цифра, то на первом месте может стоять любая цифра от 1 до 9, кроме 7 (это число уже рассмотрено в первом случае), получаем 8 чисел. Итого: $10 + 8 = 18$ (чисел).

4. Если цифра 2 стоит на первом месте, то за ней можно записать числа от 00 до 99 (100 чисел). Если цифра 2 стоит на втором месте, то первыми могут быть цифры 1, 3, 4, 5, ..., 9 (цифра 2 уже учтена), последней — любая цифра (их 10). Получаем $8 \cdot 10 = 80$ (чисел). Если цифра 2 стоит на третьем месте, то на первом месте могут стоять цифры 1, 3, 4, 5, ..., 9 (8 цифр), на втором — 0, 1, 3, 4, 5, ..., 9 (9 цифр), всего $8 \cdot 9 = 72$ (набора).

Общее количество: $100 + 80 + 72 = 252$ (числа).

5. а) Если цифра 5 стоит на первом месте, то на втором месте может стоять любая цифра, получаем 10 чисел. Если цифра 5 стоит на втором месте, то на первом месте могут быть все цифры, кроме 0 и 5 (цифра 5 уже учтена в первом случае), всего 8 чисел. Вместе: $10 + 8 = 18$ (чисел).

б) Если на первом месте 1, то на втором могут стоять 2, 3, ..., 9 (8 цифр); если 2, то 3, 4, ..., 9 (7 цифр); ..., если 8, то 9 (1 цифра).

Всего: $1 + 2 + ... + 8 = 36$.

в) Если на первом месте стоит 1, то на втором возможен только 0 (1 цифра); если 2, то на втором только 0, 1 (2 цифры); ..., если 9, то на втором только 0, 1, ..., 8 (9 цифр).

Вместе: $1 + 2 + ... + 9 = 45$.

6. Всего из данных цифр можно составить 24 четырехзначных числа с различными цифрами, половина которых (числа вида $24cd$; $42cd$; $c24d$; $c42d$; $cd24$; $dc42$) не подходит по условию задачи.

7. а) К таким числам относятся числа вида $\overline{aaa}$, $a = 1, ..., 9$ и число 1000; всего 10 чисел.

б) Рассмотрим числа от 012 до 789. Средняя цифра в них может изменяться от 1 до 8. Варианты:

Левая цифра	Средняя цифра	Правая цифра	Количество чисел
0 (1)	1	2, ..., 9 (8)	8
0, 1 (2)	2	3, ..., 9 (7)	14
0, ..., 2 (3)	3	4, ..., 9 (6)	18
0, ..., 3 (4)	4	5, ..., 9 (5)	20
0, ..., 4 (5)	5	6, ..., 9 (4)	20
0, ..., 5 (6)	6	7, ..., 9 (3)	18
0, ..., 6 (7)	7	8, 9 (2)	14
0, ..., 7 (8)	8	9 (1)	8

Сумма: $(8 + 14 + 18 + 20) \cdot 2 = 60 \cdot 2 = 120$.

в) В каждой сотне имеется 11 чисел, которые делятся на 9, но сумму цифр, равную 9, имеют в первой сотне лишь 10, так как одно из них — 9 не рассматривается в данной задаче, во второй — 9, в третьей — 8 и т. д. Наконец, в десятой сотне — одно число 900.

8. Если повторяющаяся три раза цифра есть нуль, то, добавляя впереди одну из 9 других цифр, получим 9 чисел. Если в числе повторяется цифра $a \neq 0$, то чисел с разными b, $b \neq a$ будет $9 \cdot 4 \cdot 9 = 324$ (9 повторяющихся цифр, 4 места для размещения неповторяющейся цифры, 9 цифр для выбора этой неповторяющейся цифры). Итого 333.

9. Для одной нечетной цифры единиц (например, для цифры 3) существует ровно 5 соответствующих чисел: 13, 33, 53, 73, 93. Вместо цифры 3 могут стоять 1, 5, 7, 9, поэтому таких чисел 25.

10. Так как среди чисел от 1 до 81 по крайне мере одно число оканчивается нулем, то и произведение чисел оканчивается цифрой 0.

11. По одному нулю дают числа 10 и 20; один нуль дает число 15 при умножении на какое-нибудь четное число; два нуля дает число 25 при умножении на число, кратное 4. Итого 5 нулей.

12. Множители 5, 10, 15, 20, 25, ..., 100 будут давать 0 на конце ($4 \cdot 5 = 20$, $9 \cdot 10 = 90$ и т. д.). Всего 20 нулей. Кроме этого, 25, 50, 75, 100 дадут еще по одному нулю, так как содержат каждое по два множителя 5 (например, $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$). Итого 24 нуля.

13. Приведем два решения: 1-е — с заданным условием, 2-е — когда вычеркиваются цифры, стоящие на четных местах.

1-е решение.

1-й шаг — остается 50 четных цифр:

$$\underbrace{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 0}_{5\ \text{групп по 10 цифр}}, \ldots$$

2-й шаг — остаются цифры 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0.

3-й шаг — остаются цифры 8, 6, 4, 2, 0, 8, 6, 4, 2, 0, 8, 6.

4-й шаг — остаются цифры 6, 2, 8, 4, 0, 6.

5-й шаг — остаются цифры 2, 4, 6.

6-й шаг — остается цифра 4.

Ответ: 4.

2-е решение.

1-й шаг — остаются цифры

$$\underbrace{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9}_{5\ \text{групп}}, \ldots$$

2-й шаг — 1, 5, 9, 3, 7, 1, 5, 9, 3, 7, 1, 5, 9, 3, 7, 1, 5, 9, 3, 7, 1, 5, 9, 3, 7.

3-й шаг — 1, 9, 7, 5, 3, 1, 9, 7, 5, 3, 1, 9, 7.

4-й шаг — 1, 7, 3, 9, 5, 1, 7.

5-й шаг — 1, 3, 5, 7.

6-й шаг — 1, 5.

7-й шаг — 1.

14. $818 + 88 = 906$.

15. Наибольшее из однозначных чисел — 9, тогда число десятков — 7, а число единиц — 2.

16. Пусть большее число — $\overline{ab}$, a или b — меньшее. По условию $10a + b + a = 51$ или $10a + b + b = 51$. В первом случае $11a + b = 51$; $b = 51 - 11a$. Так как b — цифра, то $a = 4$, тогда $b = 7$, $\overline{ab} = 47$.

Во втором случае $10a + 2b = 51$, что невозможно, так как слева — четное число, справа — нечетное.

Ответ: 47.

17. Примем разность за одну часть, тогда сумма составит три части, большее число — 2 части, меньшее — 1 часть. Итак, меньшее число втрое меньше суммы, а сумма, по условию, вдвое меньше произведения, значит, меньшее число в 6 раз меньше произведения, т. е. второй сомножитель равен шести (2 части), откуда первое число (1 часть) равно 3.

Ответ: 3 и 6.

18. Страниц с однозначными номерами 9: 1, 2, ..., 9.

Страниц с двузначными номерами $99 - 9 = 90$, используется 180 цифр. На трехзначные номера остается $1164 - 189 = 975$ (цифр); страниц — $975 : 3 = 325$.

Страниц в книге: $99 + 325 = 424$.

19. 9 цифр — для однозначных номеров, 180 цифр — для двузначных.

Для трехзначных номеров — $(296 - 99) \cdot 3 = 591$.

Вместе: $9 + 180 + 591 = 780$.

Нулей. 29 — в конце каждого десятка; 10 — на втором месте в числах 100, 101, ..., 109; 10 — на втором месте в числах 200, 201, ..., 209; всего: $29 + 10 + 10 = 49$.

Единиц. В числах вида $10k + 1$ на последнем месте 30 единиц; в числах 10, 11, ..., 19 на первом месте 10 единиц, по столько же единиц на втором месте в числах 110, 111, ..., 119 и 210, 211, ..., 219. Наконец, 100 единиц на первом месте в числах 100, 101, ..., 199. Всего: $30 + 10 + 10 + 10 + 100 = 160$.

Двоек. На последнем месте — 30, по 10 — на первом месте в двузначных числах и на втором месте в трехзначных числах, 97 — на первом месте в числах 200, 201, ..., 296. Всего: $30 + 10 + 10 + 10 + 97 = 157$.

Троек: 60; *четверок*: 60; *пятерок*: 60; *шестерок*: 60; *семерок*: 59; *восьмерок*: 59; *девяток*: 56.

20. Например: $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.

21. а) $8 + 8 + 8$; б) $3^3 - 3$; в) $22 + 2$.

22. а) $5 \cdot 5 + 5$; б) $6 \cdot 6 - 6$; в) $3^3 + 3$; $33 - 3$.

23. Например:

1) $33 - 3 + 3 : 3$; 2) $3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 + 3$; 3) $5 \cdot 5 + 5 + 5 : 5$.

24. Например:

1) $111 - 11$; 3) $(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$; 5) $91 + \frac{5742}{638}$.

2) $33 \cdot 3 + 3 : 3$; 4) $99 + \frac{99}{99}$;

25. 14 211.

Тема 3. ТРОПИНКОЙ В УДИВИТЕЛЬНЫЙ МИР ВЫЧИСЛЕНИЙ

Цель: научить учащихся интересным приемам устных и письменных вычислений, познакомить их с особенностями быстрого арифметического счета и одним из старинных способов вычисления на пальцах.

На изучение этой темы отводится 6 часов. Основное внимание в ней необходимо уделить решению задач на сложение нескольких последовательных чисел натурального ряда, а также вспомогательным средствам вычислений и вычислениям посредством таблиц. Учащихся надо познакомить с интересными приемами счета и выполнения действий, с простейшими электронными и счетными приборами и их историческим значением (этот материал можно предложить ребятам подготовить самостоятельно с указанием необходимой литературы). На занятиях рекомендуется провести соревнование «Веселый счет» с использованием заданий из дидактических материалов.

Материал для проведения занятий

Вычисления посредством таблиц

Продавцы, которые торгуют небольшим количеством товаров, для каждого товара имеют специальную табличку примерно следующего содержания:

100 г — 230 ден. ед.;	600 г — 1380 ден. ед.;
200 г — 460 ден. ед.;	700 г — 1610 ден. ед.;
300 г — 690 ден. ед.;	800 г — 1840 ден. ед.;
400 г — 920 ден. ед.;	900 г — 2070 ден. ед.
500 г — 1150 ден. ед.;	

Здесь, в правой колонке, записаны результаты умножения числа 230 соответственно на числа 1, 2, 3, ..., 9. Продавцу не нужно каждый раз вычислять стоимость товара, достаточно лишь заглянуть в таблицу.

Такой же таблицей можно пользоваться, если нужно умножить большое количество чисел на одно и то же число. Рассмотрим следующий пример: умножим число 246 на числа 4, 17, 24, 257.

Составим таблицу:

1	246	4	984	7	1722
2	492	5	1230	8	1968
3	738	6	1476	9	2214

Результат умножения 246 на 4 берем непосредственно из таблицы, это число 984.

Чтобы умножить 246 на 17, сначала запишем результат умножения 246 на 7, а затем, со смещением на один разряд влево (это будет означать, что записывается число десятков), результат умножения 246 на 1. Полученные результаты сложим. Получим:

$$\begin{array}{r} \underline{246 \cdot 17} \\ +\begin{array}{r} 1722 \\ 246 \end{array} \\ \hline 4182 \end{array}$$

Процесс умножения 246 на 24 приведем без пояснений:

$$\begin{array}{r} \underline{246 \cdot 24} \\ +\begin{array}{r} 984 \\ 492 \end{array} \\ \hline 5904 \end{array}$$

Умножение с помощью таблиц отличается от обычного умножения столбиком только тем, что промежуточные результаты вычисляются не вручную, а берутся из таблицы.

Чтобы умножить 246 на 257, нужно записать три промежуточных результата: 246 · 7, 246 · 5, 246 · 2, сместив второй и третий результаты влево соответственно на одну и две позиции, и результаты сложить:

$$\begin{array}{r} \underline{246 \cdot 257} \\ +\begin{array}{r} 1722 \\ 1230 \\ 492 \end{array} \\ \hline 63222 \end{array}$$

Один из старинных способов вычисления на пальцах

Учащимся достаточно рассказать о вычислениях с помощью пальцев и показать несколько примеров на вычисление. Так, умножение на пальцах можно было выполнять до 15 на 15.

Пусть требуется найти произведение $12 \cdot 14$. Загибаем на руках количество пальцев, равное избытку каждого из множителей над числом 10, т. е. на одной руке — 2 пальца и на другой — 4. Далее находим их сумму $(2 + 4 = 6)$, что даст число десятков. К последнему прибавляем произведение тех же чисел $(2 \cdot 4 = 8)$. Ко всему результату прибавляем 100, получим

$$12 \cdot 14 = 100 + (2 + 4) \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 168.$$

Можно познакомить учащихся с интересным приемом устных вычислений — умножением чисел на 11.

Если умножаем двузначное число на 11, то просто раздвигаем цифры этого числа и между ними вставляем число, равное сумме цифр данного числа.

Если сумма цифр больше девяти, то число, стоящее в разряде сотен, увеличивается на 1.

Например, $35 \cdot 11 = 385$; $48 \cdot 11 = 628$.

Если умножаем на 11 трехзначное, четырехзначное и т. д. числа, то нужно записать последнюю цифру числа, затем последовательно справа налево записывать суммы соседних двух цифр множимого и, наконец, первую цифру множимого.

Например, $23 \cdot 11 = 253$; $76 \cdot 11 = 736$; $312 \cdot 11 = 3432$.

Тема 4. ТРОПИНКОЙ В УДИВИТЕЛЬНЫЙ МИР АРИФМЕТИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИГР, ГОЛОВОЛОМОК И ФОКУСОВ

Цель: сформировать у учащихся внутреннюю мотивацию к изучению математики, развивать их математические способности, а также познавательную и творческую активность.

На изучение этой темы отводится 6 часов. Основное внимание в ней уделяется заданиям на восстановление чисел и цифр в арифметических записях, нахождению арифметических действий в зашифрованных действиях, волшебным квадратам. Интересны будут учащимся предлагаемые в дидактических материалах арифметические фокусы, арифметические игры и головоломки.

Арифметические фокусы. Арифметические игры и головоломки. Арифметические курьезы

Игра с выкладыванием домино на прямоугольную доску

Эта игра не может закончиться вничью, если оба участника играют рационально. Победителем оказывается участник, который делает первым свой ход, если он придерживается следующей стратегии: располагает первую кость домино точно в центр доски, а все последующие кости укладывает симметрично тем, которые выкладывает противник. Таким образом, если на доске противником будет найдено свободное место, то свободным будет и симметричное ему место. Эта стратегия применима и в том случае, когда вместо костей домино используются любые другие центрально-симметричные плоские фигуры.

Игра с выкладыванием монет по кругу

В этой игре всегда может победить участник, который делает ход вторым, если он будет придерживаться следующей стратегии: если после хода первого игрока полученная изогнутая «цепь» с двумя концами содержит нечетное количество монет, то второму участнику необходимо взять одну монету, которая равноудалена от концов «цепи» монет; если число монет будет четным, то ему необходимо брать две монеты, которые находятся в середине «цепи». В обоих случаях образуются две «цепи» с одинаковым количеством монет, поэтому, какие бы монеты теперь ни брал противник из одной «цепи», второй игрок должен брать из другой «цепи» монеты, которые лежат на тех же местах.

Стратегии, которые используются в этих двух играх, называются парными стратегиями, потому что игра разбивается на парные ходы, и если один участник сделал какой-нибудь ход, то ход противника (не обязательно симметричный) должен принадлежать к той же паре ходов. Следующая игра также является примером игры с парной стратегией.

Игра «Ним»

В обоих вариантах добиться победы может первый игрок, если первым ходом он возьмет две фишки первого ряда и после его хода будут оставаться два ряда с одинаковым количеством фишек. Выиграть можно и в том случае, когда в соответствующих рядах будут 1, 2, 3 фишки.

Игра «Так-тикль»

Математики выяснили, что в этой игре можно выиграть только в том случае, если противник сделает ошибку.

В приложении к дидактическим материалам для учащихся дается поле 1 для проведения игры. Можно организовать соревнование между победителями каждой пары игроков.

Игра «Мельница»

В приложении к дидактическим материалам для учащихся дается поле 2 для проведения игры парами. Можно организовать соревнование между победителями каждой пары игроков. В каждую из предложенных игр учащиеся могут играть не только на факультативных занятиях, но и дома с родителями.

Фокус «Угадать задуманное число»

Разгадка фокуса: когда мы к трехзначному числу приписали такое же число, то тем самым умножили его на 1001, а затем, разделив последовательно на 7, 11, 13, разделили его на 1001, т. е. получили задуманное трехзначное число.

Фокус, связанный со свойствами числа 1001

Если приписать справа от задуманного числа это же число, то тем самым мы умножаем задуманное число на 1001. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, поэтому в итоге получаем задуманное число.

Дополнительные, более сложные задания для любознательных

1. Задумайте однозначное число, удвойте его, прибавьте 1, умножьте на 5, вычтите 2, прибавьте 301, зачеркните среднюю цифру, к остатку прибавьте 3. Получилось 37. Запишем последовательно выполненные операции. Пусть задумали число x. Тогда получаем: x; $2x$; $2x + 1$; $(2x + 1) \cdot 5$; $(2x + 1) \cdot 5 - 2$; $(2x + 1) \cdot 5 - 2 + 301 = 10x + 5 - 2 + 301 = 10x + 3 + 301 = 10x + 3 + 301 = 10x + 304 = \overline{3x4}$. Если зачеркнуть среднюю цифру, получим 34. Прибавим 3, получим 37.

Задания можно усложнять.

2. Попросите своего товарища написать любое двузначное число, но пусть затем он поменяет местами в этом числе цифры и вычтет из большего числа меньшее. Если он скажет вам последнюю цифру разности, то вы сразу скажете, какова вся разность. Как это сделать?

Объяснение.

Двузначное число представимо в виде $10a + b$. $10a + b - (10b + a) = 9 \cdot (a - b)$, т. е. делится на 9.

Если эта разность равна $10k + l = 9k + k + l = 9k + (k + l)$, то видно, что $k + l = 9$.

Итак, первую цифру разности можно найти, вычтя из 9 названную вам цифру.

Покажем на конкретных примерах.

Пусть задумано число 43, тогда $43 - 34 = 9$. Вам сообщают цифру 9. Вы находите $9 - 9 = 0$. Итак, разность 9. Пусть теперь задумано число 72. $72 - 27 = 45$. Вам сообщают цифру 5, вы из 9 вычитаете 5, получаете 4. Итак, разность 45.

3. В своей книге «Арифметика» Л. Ф. Магницкий привел следующий способ отгадывания задуманного двузначного числа: «Если кто задумает двузначное число, то ты скажи ему, чтобы он увеличил число десятков задуманного числа в 2 раза, к произведению прибавил бы 5 единиц, полученную сумму увеличил в 5 раз и к новому произведению прибавил сумму 10 единиц и числа единиц задуманного числа, а результат произведенных действий сообщил бы тебе. Если ты из указанного тебе результата вычтешь 35, то узнаешь задуманное число». Почему так получается?

Объяснение.

$10a + b$ — задуманное число, тогда

$$(2a + 5) \cdot 5 + 10 + b = 10a + b + 35.$$

Арифметические курьезы [34]

$$100 = \begin{cases} 12+3-4+5+67+8+9 \\ 12-3-4+5-6+7+89 \\ 123+4-5+67-89 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 111111111 \\ 111111111 \end{array} \\ \hline 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ +\quad 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ 111111111 \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$
$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$
$$123 \cdot 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \cdot 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$$

Комментарии и ответы

К упражнениям из темы «Арифметические закономерности»

1. а) 8; 9; б) 4; 3;
в) 35; 40; г) 24; 27;
д) 27; 31; е) 6; 3;
ж) 64; 128; з) 3; 1;
и) 16; 15; к) 15; 17;
л) 13; 9; м) 16; 17;
н) 49; 64; о) 12; 19.

2. а) 33 (увеличение идет на 2, 4, 8, 16, ...);
б) 13 (последовательность Фибоначчи: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_n - 2 + a_n - 1$, $n = 3, 4, ...$);
в) 48 (увеличение идет на 3, 5, 7, 9, 11, ...);
г) 216 (кубы чисел).

3. а) 13 (последовательность Фибоначчи);
б) 157 (число увеличивается на 10, 20, 40, 80, 160, ..., $2^n \cdot 10$).

К «Упражнениям Васи Задачкина»

а) $\begin{array}{r} 297 \\ -\ 169 \\ \hline 128 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} 1000 \\ -\ 999 \\ \hline 1 \end{array}$ в) $\begin{array}{r} 728 \\ +\ 272 \\ \hline 1000 \end{array}$ г) $\begin{array}{r} 88 \\ \times\ 111 \\ \hline 88 \\ +\ 88 \\ 88 \\ \hline 9768 \end{array}$

(Так как при умножении 8* на цифры второго числа получаются двузначные числа, то второй сомножитель — 111; тогда исходное число — 88.)

д)
$$\begin{array}{r} \times\ 325 \\ 147 \\ \hline 2275 \\ +\ 1300 \\ 325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

е)
$$\begin{array}{r} \times\ 325 \\ 147 \\ \hline 2268 \\ +\ 1620 \\ \hline 18468 \end{array}$$

1) $6 - 1 - 3 = 6 : 1 : 3 = 2$.

2) Так как $111 = 3 \cdot 37$, то $222 = 6 \cdot 37$; $333 = 9 \cdot 37$; $444 = 12 \cdot 37$; $555 = 15 \cdot 37$; $666 = 18 \cdot 37$; $777 = 21 \cdot 37$; $888 = 24 \cdot 37 = 12 \cdot 74$; $999 = 27 \cdot 37$.

Ответ: $15 \cdot 37 = 555$; $21 \cdot 37 = 777$.

3)
$$\begin{array}{r} +\ 769 \\ 504 \\ \hline 1273 \end{array}$$

Нахождение арифметических действий в зашифрованных действиях

1. а) $20 : (5 \cdot 2) + 6^2$;
б) $(20 : 5 \cdot 2 + 6)^2$;
в) $20 : 5 \cdot (2 + 6^2)$.

2. а) $(7 \cdot 9 + 12) : 3 - 2 = 23$; б) $(7 \cdot 9 + 12) : (3 - 2) = 75$.

3. Возможный вариант: $123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$.

4. а) $4 \cdot 12 + 18 : (6 + 3) = 50$; б) $4 \cdot (12 + 18 : 6 + 3) = 72$.

5. $1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5$.

6. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.

7. $(777 - 77) \cdot 7 = 100$.

8. $987 + 6 + 5 + 4 - 3 + 2 - 1$.

9. $555 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 5$.

10. $999 + 999 - 9$.

11. Подбираем последнюю цифру, начиная с 1 (0 не подходит, так как 0 не больше 0).

$1 \cdot 7 = 7;$	$2 \cdot 7 = 14;$	$3 \cdot 7 = 21;$
$4 \cdot 7 = 28;$	$5 \cdot 7 = 35;$	$6 \cdot 7 = 42;$
$7 \cdot 7 = 49;$	$8 \cdot 7 = 56;$	$9 \cdot 7 = 63.$

Ответ: 35.

12. 512 820.

13. Последняя цифра 0.

14. Надо приписать цифру 4.

Волшебные или магические квадраты

1. Сумма всех чисел равна $1 + 2 + ... + 9 = 45$. Тогда на каждую вертикаль и на каждую горизонталь приходится сумма $45 : 3 = 15$. Далее заполнение производится автоматически.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2. С учетом предыдущей задачи получаем $2 + 3 + ... + 10 = 54$; $54 : 3 = 18$. В центре размещаем число $18 : 3 = 6$.

Сумма по строкам, столбцам, диагоналям равна 18.

7	2	9
8	6	4
3	10	5

3. $S = \frac{5+13}{2} \cdot 9 = 81$ (учащиеся могут просто подсчитать сумму $5 + 6 + ... + 13$); $S_1 = 81 : 3 = 27$, отсюда $a_{13} = 10$.

12	55	10
7	9	11
8	13	6

Далее можно заметить, что если в задаче 1 таблицу отразить симметрично по вертикали, то по диагонали тоже получаются числа, возрастающие на 1. Следовательно, остальные числа искомой таблицы можно получить, добавив к соответствующим числам перевернутой таблицы по 4.

4. $S = 35 + 17 + 59 + 11 + 23 + 41 + 47 + 65 + 71 = 369$; $S_1 = \frac{S}{3} = 123$. В центре: $123 : 3 = 41$.

35	71	17
23	41	59
65	11	47

5. а)

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

$S = \frac{1+16}{2} \cdot 16 = 8 \cdot 17 = 136;$

$S_1 = 136 : 4 = 34.$

б)

15	10	4	5
3	6	16	9
14	11	1	8
2	7	13	12

в) Сначала дополняем недостающими числами вторую строку и второй столбец.

	3		
9	16	5	4
	2		
	13		1

Далее на побочной диагонали:

$34 - (2 + 5) = 27;$

$27 = 16 + 11$ — нельзя (16 уже есть);

$27 = 15 + 12;$

$27 = 14 + 13$ — нельзя (13 уже есть).

Берем $a_{41} = 12$; $a_{14} = 15$ (ориентируясь на другие числа по вертикали и горизонтали). Получаем:

	3		15
9	16	5	4
	2		14
12	13	8	1

Рассмотрим первый столбец: $9 + 12 = 21$; $34 - 21 = 13$;

$13 = 12 + 1$ (числа уже есть);

$13 = 11 + 2$ (числа уже есть);

$13 = 10 + 3$ (числа уже есть);

$13 = 9 + 4$ (числа уже есть);

$13 = 8 + 5$ (числа уже есть);

$13 = 7 + 6.$

Так как $3 + 15 > 2 + 14$, берем $a_{11} = 6$; $a_{31} = 7$.

Окончательно получаем:

6	3	10	15
9	16	5	4
7	2	11	14
12	13	8	1

6. Наибольшая из сумм: 13 + 6 = 19; 34 – 19 = 15.
15 = 14 + 1 – (число 1 уже есть);
15 = 13 + 2 – (число 13 уже есть);
15 = 12 + 3 + (вариант возможен);
15 = 11 + 4 – (число 11 уже есть);
15 = 10 + 5 – (число 5 уже есть);
15 = 9 + 6 – (числа 6 и 9 уже есть);
15 = 8 + 7 + (вариант возможен).
Рассмотрим сумму: 12 + 3.

Возьмем $a_{11} = 3$, $a_{44} = 12$. (Если впоследствии окажется, что такой вариант неприемлем, возьмем $a_{11} = 12$, $a_{44} = 3$.) Тогда $a_{24} = 8$, $a_{21} = 2$.

3			5
2	13	11	8
		6	9
	1		12

Рассмотрим первый столбец: 3 + 2 = 5; 34 – 5 = 29;
29 = 16 + 13, 29 = 15 + 14 — оба варианта невозможны.

3			5
2	13	11	8
		6	9
	1		12

$a_{41} = 15$ нельзя брать, так как тогда $a_{43} = 34 - 15 - 12 - 1 = 6$, а такое число уже есть. Итак, $a_{31} = 15$, $a_{41} = 14$. Далее таблица заполняется автоматически.

3	16	10	5
2	13	11	8
15	4	6	9
14	1	7	12

Легко убедиться, что в качестве недостающих чисел основной диагонали числа 8 и 7 не подходят.

8.

3	36	2
4	6	9
18	1	12

10.

11	9	22	5	18
19	12	10	23	1
2	20	13	6	24
25	3	16	14	7
8	21	4	17	15

$$S = 1 + 2 + ... + 25 = \frac{1+25}{2} \cdot 25 = 13 \cdot 25 = 325;$$

$$S_1 = \frac{325}{5} = 65.$$

Варианты заполнения квадратов судоку.

8	**9**	**2**	1	6	**3**	**7**	**4**	**5**
3	**5**	**4**	**7**	**8**	**2**	**9**	1	**6**
7	**1**	**6**	**5**	**9**	**4**	**2**	8	**3**
6	**4**	**8**	**2**	**1**	7	**5**	**3**	**9**
1	**2**	**5**	**9**	**3**	**6**	**4**	7	8
9	7	**3**	4	**5**	**8**	**1**	**6**	**2**
2	**6**	**1**	**3**	**7**	**5**	**8**	**9**	**4**
4	8	**9**	**6**	**2**	**1**	**3**	**5**	**7**
5	**3**	**7**	**8**	4	**9**	**6**	**2**	**1**

8	**2**	5	**4**	**9**	**7**	**3**	1	**6**
4	**6**	9	**3**	1	5	**2**	**7**	**8**
1	**7**	**3**	**8**	**2**	**6**	**9**	5	**4**
5	**9**	**2**	**7**	**4**	**1**	**8**	**6**	**3**
7	**3**	**1**	**6**	**8**	**2**	**5**	**4**	**9**
6	**8**	**4**	**5**	**3**	9	**7**	**2**	**1**
3	1	**8**	**2**	**5**	**4**	**6**	**9**	**7**
2	**4**	**7**	**9**	6	**8**	1	**3**	**5**
9	5	**6**	**1**	**7**	**3**	**4**	**8**	**2**

6	**4**	3	**1**	**5**	9	**7**	**8**	**2**
8	**9**	**1**	**4**	**2**	7	**6**	5	**3**
2	**5**	**7**	**8**	**6**	**3**	**4**	1	**9**
4	**1**	2	**9**	**7**	**8**	**3**	**6**	**5**
5	**7**	**8**	**2**	**3**	**6**	**9**	**4**	**1**
3	**6**	**9**	**5**	**1**	**4**	**2**	**7**	**8**
1	3	**5**	**6**	**4**	**2**	**8**	**9**	7
9	2	**6**	**7**	**8**	**1**	**5**	**3**	**4**
7	**8**	**4**	3	**9**	**5**	**1**	**2**	**6**

К «Упражнениям Васи Задачкина»

1. $415 \cdot 382 = 158\,530$.
2. $452 \cdot 125$.
3. $27 \cdot 32$.
4. $66 \cdot 111$.
5. $324 \cdot 57$.
6. $358 \cdot 48$.
7. $452 \cdot 125$.
8. $6547 \cdot 3208$.
9. $74 \cdot 23$.
10. $528 \cdot 217$.

11. Так как на конце результата цифра 0, то первый множитель оканчивается цифрой 5 или 0. По цифре 7 и множителю 2 определяем, что первый множитель начинается с 3. По второму неполному произведению определяем, что вторая цифра второго множителя 1.

В итоге получаем 385 · 412.

12. В первом неполном произведении последняя цифра 8, во втором — 5. Это возможно, только если последняя цифра первого множителя 1, а второй множитель оканчивается на 58. Получим

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & 1 \\
\times & & & * & 5 & 8 \\
\hline
 & & * & 0 & * & 8 \\
+ & & & * & * & 5 \\
 & * & 1 & * & * & \\
\hline
* & * & * & * & * & 8
\end{array}
$$

Так как второе неполное произведение трехзначное, то первая цифра первого множителя 1. Далее в первом неполном произведении при умножении первого множителя на 8 в начале получится 10. Значит, при умножении второй цифры в уме осталось 2. Это возможно, только если вторая цифра первого множителя 3. В третьем неполном произведении получилось больше, чем в первом. Значит, первая цифра второго множителя больше последней. Следовательно, она равна 9. Итак, в условии 131 · 958.

Тема 5. ТРОПИНКОЙ В УДИВИТЕЛЬНЫЙ МИР ДЕЛЕНИЯ

Цель: рассмотреть задачи на делимость, различные способы деления, признаки делимости, систематизировать знания, полученные по данной теме.

На изучение этой темы отводится 3 часа. Основное внимание в ней уделяется делимости, простым и составным числам, использованию НОД (a; b) и НОК (a; b) при решении задач. Для проведения занятий предлагается занимательный исторический материал, который учитель, по желанию, может расширить, используя прилагаемый список литературы, а также интересные задания к «Веселым арифметическим соревнованиям».

Материал для проведения занятий

«Решето» Эратосфена для первой сотни натуральных чисел

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Алгоритм Евклида для нахождения НОД

Древнегреческий ученый Евклид находил НОД своим способом, суть которого состоит в следующем: большее из двух чисел заменяется разностью большего и меньшего чисел, пока они не станут равны. Последнее число и является НОД.

Найдем методом Евклида НОД чисел 120 и 96:

120	96	Из 120 вычитаем 96.
24	96	Из 96 вычитаем 24.
24	72	Из 72 вычитаем 24.
24	48	Из 48 вычитаем 24.
24	24	Так как числа равны, то результат равен 24.

Для решения некоторых задач полезна следующая формула:

$$\text{НОД}\,(a; b) \cdot \text{НОК}\,(a; b) = a \cdot b.$$

Совершенные числа

Рассмотрим натуральное число 6. Оно нацело делится только на 1, на 2, на 3 и на себя. Найдем сумму делителей этого числа, отличных от самого числа 6: $1 + 2 + 3 = 6$.

Пифагорейцы называли совершенными те числа, которые были равны сумме всех своих *собственных делителей*, т. е. тех делителей, которые отличаются от самого числа. Примерами совершенных чисел являются $6 = 1 + 2 + 3$ и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Совершенные числа весьма почитались в древнем мире.

Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число 6. Этому числу придавалось большое значение. Так, в библейских преданиях утверждается, что мир был создан за шесть дней, на шестом месте на званом пиру сидел самый уважаемый, самый знаменитый и самый почетный гость.

Следующим совершенным числом, известным еще в древности, было число 28. Этому числу также придавалось большое значение, например египетская мера длины локоть содержала 28 «пальцев». В Риме в 1917 г. при подземных работах открыли оригинальное сооружение: вокруг большого центрального зала располагалось 28 келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было 28 членов. В настоящее время столько же членов, по традиции, во многих научных обществах.

Долгое время были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли другие совершенные числа и сколько вообще таких чисел может быть. Впоследствии Евклид обнаружил еще два таких числа, это 496 и 8128, и вывел формулу для совершенных чисел.

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа. Следующее, пятое совершенное число было обнаружено лишь в XV в. Оказалось, что оно равно 33 550 336.

Спустя сто лет итальянский профессор математики во Флоренции и Болонье Катальди указал значения шестого и седьмого совершенных чисел: 8 589 869 056 (шестое число), 137 438 691 328 (седьмое число). Спустя еще сто лет французский математик и музыкант Марин Мерсенн, независимо от Катальди, также смог назвать эти же совершенные числа. Затем с помощью формулы Евклида было найдено восьмое совершенное число, которое равно 2 305 843 008 139 952 128.

С изобретением электронных счетных машин было открыто еще несколько совершенных чисел. На сегодняшний день известно более 20 совершенных чисел и их поиски продолжаются.

Дружественные числа

Рассмотрим пару чисел 220 и 284. Если сложить все собственные делители каждого из этих чисел, то заметим, что сумма собственных делителей числа 220 ($220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$) равна

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

В свою очередь, для числа 284 ($284 = 2 \cdot 2 \cdot 71$) соответствующая сумма равна $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Эта связь между числами дала возможность древним математикам объявить данную пару чисел символом дружбы. С тех пор два числа, каждое из которых равно сумме собственных делителей другого числа, называются *дружественными*. Благодаря применению ЭВМ найдено около 1100 таких пар. Вот первые 12 пар дружественных чисел:

220	и	284;	12 285	и	14 595;
1184	и	1210;	17 296	и	18 416;
2620	и	2924;	63 020	и	76 084;
5020	и	5564;	66 928	и	66 992;
6232	и	6368;	67 095	и	71 145;
10 744	и	10 856;	69 615	и	87 633.

До сих пор неизвестно, сколько пар дружественных чисел существует.

В теории простых чисел существуют числа-близнецы, так называют пары простых чисел, разность между которыми равна 2. Например, парами чисел-близнецов являются числа 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. Если n — натуральное простое число, то $n + 2$ или $n - 2$ может с числом n образовывать пару чисел-близнецов. Первые две пары 3 и 5 и 5 и 7 — хороший пример, если $n = 5$. Чем дальше продвигаться вперед по натуральному ряду чисел, тем реже встречаются простые числа вообще, а близнецы — и совсем редко.

Кроме близнецов, в последовательности простых чисел существует аналогичная тройка (3, 5, 7). Оказывается, она единственная. Кстати, в любой тройке ($n - 2$, n, $n + 2$), где $n - 2 > 3$, одно из чисел обязательно делится на три.

Две пары близнецов, исключая пары (3, 5) и (5, 7), могут находиться друг от друга самое меньшее на «расстоянии», равном 4. Это, например, пары (5, 7), и (11, 13), и (17, 19). Они определяют четверку ($n - 4$, $n - 2$, $n + 2$, $n + 4$) простых чисел. Таких четверок на достаточно большом отрезке числового ряда не так уж мало. Например, среди первых 10 миллионов натуральных чисел их насчитывается 899. Одной из них является четверка (2 863 308 731, 2 863 308 733, 2 863 308 737, 2 863 308 739).

И если мы не знаем, бесконечно ли множество чисел-близнецов, то тем более неизвестно, бесконечно ли множество четверок простых чисел указанного вида.

Дополнительные вопросы

1. Какие числа называются совершенными? Приведите примеры таких чисел.

2. Сколько совершенных чисел в первой сотне натурального ряда?

Дополнительные упражнения

Задачи на определение числа по остатку

1. Женщина принесла яблоки для продажи, число их меньше 500. Когда она их разложила по парам, 1 яблоко осталось. Когда разложила яблоки по 3, то опять осталось 1. Женщина раскладывала яблоки по 4, 5, 6, но каждый раз оставалось 1 яблоко. Но когда она разложила яблоки по 7, то остатка не было. Сколько было яблок?

2. Я задумал трехзначное число. Если к нему прибавить 6, то оно разделится на 7, если к задуманному числу прибавить 7, то оно разделится на 8, если прибавить к задуманному числу 8, то оно разделится на 9. Какое число я задумал?

3. Какое наименьшее число при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает соответствующие остатки 1, 2, 3, 4, 5, а на 7 делится без остатка?

4. Трехзначное число при делении на 13 дает остаток 11, при делении на 11 дает остаток 9, при делении на 7 — остаток 5. Найдите его.

5. Выберите наибольшее из тех четырехзначных чисел, которые при делении на любое однозначное число, кроме 1, дают в остатке 1?

6. Числа 4373 и 826 разделили на одно и то же число, и получилось соответственно в остатке 8 и 7. На какое число делили?

7. Брат и сестра выбрали маме подарок, но, чтобы купить его, брату не хватило 20 ден. ед., а сестре 14 ден. ед. Когда же они сложили вместе имеющиеся у них деньги, то оказалось, что им не хватает еще 4 ден. ед. Сколько стоил подарок?

8. Какое наименьшее натуральное число, делящееся на 7, при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает в остатке 1?

9. Определите наименьшее число, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 дает в остатке 1.

Задачи на нахождение остатков

1. Найдите все числа, при делении которых на 7 в частном получается то же число, что и в остатке.

2. При делении на 2 число дает в остатке 1, а при делении на 3 остаток 2. Какой остаток дает это число при делении на 6?

3. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 5 ден. ед., а на 15 тетрадей у него не хватило 7 ден. ед. Сколько денег было у школьника?

4. Два ученика решили купить по одинаковой книге. Одному из них не хватило на покупку книги 1 ден. ед., а другому — 42 ден. ед. Когда они сложили свои деньги, им все равно не хватило денег для покупки даже одной книги. Сколько стоила книга?

5. Найдите сумму остатков от деления числа 1 872 368 154 634 528 на 2, 4, 5, 9, 10.

6. При делении некоторого числа на 13 и 15 получились одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе — без остатка. Найдите это число.

7. Известна пословица «Семь раз отмерь — один раз отрежь». Сколько раз отрезали, если сто раз отмеряли?

Задача из учебника Л. Ф. Магницкого «Арифметика»

Пришел христианин в торг и принес лукошко яиц. И торговцы его спрашивали: «Много ли у тебя в том лукошке яиц?» И христианин молвил им так: «Яз, господне, всего не помню на перечень, сколько в том лукошке яиц. Только яз помню: перекладывал яз те яйца из лукошка по два яйца, ино одно яйцо лишне осталось на земли; и яз клал в лукошко по три яйца, ино одно же яйцо осталось; и яз клал по 4 яйца, ино одно яйцо осталось; и яз клал по 7 яиц, ино все по сему пришло. Ино сколько в том лукошке яиц было, сочти ми?»

Веселые математические соревнования

В соревнованиях могут участвовать два человека или две команды, или каждый ученик может сам себе устроить «соревнование». Все задания представлены в двух вариантах. За каждое задание начисляется определенное количество очков.

Вариант 1

1. Найдите сумму остатков от деления числа 623 756 431 287 на 2, 3, 4, 5, 9 (*2 балла*).

2. Найдите, какое частное и остаток получится при делении числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$ на 5 (*2 балла*).

3. Дано число $99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + ... + 7 - 5 + 3 - 1$. Найдите частное и остаток от деления этого числа на 3 (*3 балла*).

4. Какое натуральное число в 7 раз больше цифры его единиц (*2 балла*)?

5. Когда произведение двух чисел равно их частному (*1 балл*)?

6. Чему равен наибольший общий делитель двух чисел, если наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению (*2 балла*)?

7. Сколько раз к наибольшему однозначному числу нужно прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трехзначное (*2 балла*)?

8. К данному трехзначному числу дважды приписали точно такое же число и полученное число разделили на данное число. Какое получилось частное (*3 балла*)?

9. Найдите сумму всех четных чисел, которые делятся на 7 и меньше 100 (*2 балла*).

10. Составьте пример, используя пять раз цифру 3 и знаки арифметических действий (+, –, :, ·), ответом которого является число 100 (*2 балла*).

Вариант 2

1. Найдите сумму остатков от деления числа 326 746 531 287 на 2, 3, 4, 5, 9 (*2 балла*).

2. Найдите, какое частное и остаток получится при делении числа $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 2$ на 5 (*2 балла*).

3. Дано число $100 - 98 + 96 - 94 + 92 - 88 + ... + 8 - 6 + 4 - 2$. Найдите частное и остаток от деления этого числа на 3 (*3 балла*).

4. Какое натуральное число в 9 раз больше цифры его единиц (*2 балла*)?

5. Когда делимое и частное равны между собой (*1 балл*)?

6. Чему равно наименьшее общее кратное двух чисел, если наибольший общий делитель этих чисел равен 1 (*2 балла*)?

7. Сколько раз к наибольшему двузначному числу нужно прибавить наибольшее однозначное число, чтобы получить наибольшее трехзначное (*2 балла*)?

8. К данному двузначному числу дважды приписали точно такое же число и полученное число разделили на данное число. Какое получилось частное (*3 балла*)?

9. Найдите сумму всех четных чисел, которые делятся на 11 и меньше 100 (*2 балла*).

10. Составьте пример, используя пять раз цифру 5 и знаки арифметических действий (+, –, :, ·), ответом которого является число 100 (*2 балла*).

Комментарии и ответы

К «Упражнениям Васи Задачкина»

1. Пусть искомое число $\overline{aaaa}$, тогда его можно представить в виде произведения $a \cdot 1111$, но $1111 = 11 \cdot 101$. Следовательно, искомое число будет состоять только из двух простых делителей при $a = 1$.

Ответ: 1111.

2. Частное увеличится в 20 раз.

3. Частное увеличится в 2 раза.

4. Частное увеличится на 1, остаток останется прежним. Пусть $a = b \cdot m + r$, где a — делимое, b — делитель, m — частное, r — остаток, $0 \le r \le b - 1$. Тогда $a + b = b \cdot m + r + b = b \cdot (m + 1) + r$. Получим: $m + 1$ — частное, r — остаток.

5. а) Если $a : b = a$, то или $a = 0$, b — любое, $b \ne 0$, или $b = 1$, a — любое; если $a : b = b$, то $a = b^2$, т. е. числитель является квадратом знаменателя.

б) $a : a = a$, следовательно, $a = 1$.

6. Возможны варианты ответов:

а) 11 112; б) 11 100; в) 11 112; г) 11 115; д) 10 000.

7. а) $7 + 1 + 4 + 2 = 14$. Чтобы число делилось на 3, последней цифрой должна быть или 1, или 4, или 7, тогда сумма цифр будет делиться на 3.

б) Чтобы число делилось на 4, достаточно, чтобы число, состоящее из двух последних цифр, делилось на 4. Следовательно, последней цифрой может быть 0, 4, 8.

в) Число заканчивается цифрой 0 или 5.

г) Число должно делиться на 2 или на 3, поэтому (см. п. а) число должно заканчиваться цифрой 4.

д) Число должно заканчиваться цифрой 4.

8. а) Любую цифру.

б) $5 + 4 + 7 + 1 + 6 = 23$. Следовательно, вместо знака «*» можно поставить 1, 4, 7.

в) Можно поставить 1, 3, 5, 7, 9.

г) Можно поставить 4.

9. а) Первое число, кратное 3, — 501. Далее следуют: 504, 507, 510, 513, 516, 519, 522, 525, 528, 531, 534, 537, 540, 543, 546, 549.

б) Первое число, кратное 9, — 504. Далее следуют: 513, 522, 531, 540, 549.

10. Пусть n, $n+1$, $n+2$ — три последовательных натуральных числа. Тогда сумма $S=n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3\cdot(n+1)$ делится на 3 и поэтому не является простым числом.

11. Из четырех последовательных натуральных чисел 2 — четных, 2 — нечетных, поэтому сумма всех чисел — число четное и поэтому не может быть простым.

12. Найдем сумму остатков от деления каждого слагаемого на 3: $1+1+1+2+0=5$. Так как сумма остатков не делится на 3, то и сама сумма не делится на 3.

13. Из первого условия следует, что само число также делится на 5, из второго — что оно делится на 3, из третьего — что оно делится на 4. Следовательно, число делится на 60. Из двузначных чисел такое число только одно — 60.

14. Пусть $\overline{ab}$ — двузначное число. Тогда четырехзначное число:

$$\overline{abab}=100\cdot ab+ab=ab\cdot 101,$$

т. е. это число не является простым.

15. Последовательные нечетные числа можно записать как $2n+1$ и $2n+3$. Тогда их сумма $4n+4=4\cdot(n+1)$, т. е. она делится на 4.

16. Очевидно, таким числом будет НОК (2; 3; ...; 10) + 1.

НОК (2; 3; ...; 10) $=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot5=2520$. Ответ: 2521.

17. Из первого условия следует, что число 96 делится на искомое число без остатка, из второго — что число $90-18=72$ делится на искомое число без остатка, причем делитель должен быть больше 18. НОД (96; 72) = 24; другие делители не подходят, так как они меньше 18.

18. Пусть $2n$, $2n+2$, $2n+4$ — последовательные четные натуральные числа. Разделим их на 2, получим n, $n+1$, $n+2$. Из трех последовательных натуральных чисел одно обязательно делится на 3. Тогда и соответствующее ему четное число также делится на 3. Пусть $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$ — три последовательных нечетных числа. Натуральное число n при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Если остаток 0, то число $2n+3$ делится на 3. Если остаток 1, то $2n+1=2\cdot(3k+1)+1=6k+3$ делится на 3. Если остаток 2, то $2n+5=2\cdot(3k+2)+5=6k+9$ делится на 3. Ответ: да.

19. Рассмотрим числа $a+b$ и a. Пусть они не взаимно простые. Тогда существует число $k\neq 1$, такое, что $a+b$ делится на k и a делится на k. Следовательно, b делится на k. Пришли к противоречию. Аналогично показывается, что $a+b$ и b — взаимно простые. Тогда $a+b$ и $a\cdot b$ — взаимно простые.

20. Воспользуемся формулой: НОД $(a; b)\cdot$ НОК $(a; b)=a\cdot b$.
Получим: НОД $(a; b)=21$.

21. НОК $(a; b)=21\,600:60=360$
(использовали формулу: НОД $(a; b)\cdot$ НОК $(a; b)=a\cdot b$).

22. $330=2\cdot3\cdot5\cdot11$, $44=2^2\cdot11$, НОД $(330; 44)=2\cdot11=22$,
НОК $(330; 44)=2^2\cdot3\cdot5\cdot11=660$; НОК $(330; 44)-$ НОД $(330; 44)=$
$=660-22=638$.

23. 233.

24. 19 999 999 999 900 — в числе 11 девяток.

25. Выписываем все двузначные числа, которые делятся на 17: 17, 34, 51, 68, 85. Из них можно составить следующие числа, в которых каждые соседние цифры дают число, делящееся на 17: 17, 34, 51, 68, 85, 517, 8517, 68 517. Большее из них — 68 517.

26. Отбросим четные числа, останется 500 нечетных. В каждой пятерке следующих друг за другом оставшихся нечетных чисел ровно одно число делится на 5. Всего таких чисел 100. Остается 400.

27. а) 1 023 467 895; б) 1 234 567 980.

28. Сумма цифр такого числа должна делиться на 3, но не делиться на 9. Наибольшее такое число 996.

29. Найдем сумму разностей чисел:

$$\underbrace{(2-1)+(4-3)+\ldots+(100-99)}_{\text{50 слагаемых}}=50$$

Ответ: на 50.

30. Все простые числа, кроме числа 2, — нечетные. Разность двух нечетных чисел есть всегда число четное: $(2n+1)-(2k+1)=2\cdot(n-k)$.

31. Четных цифр 5: 0, 2, 4, 6, 8. На первом месте могут стоять 4 цифры, на остальных трех — 5. Всего чисел: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \cdot 4 = 500$.

32. Среди чисел 1, ..., 10 нечетных — 5. При сложении или вычитании нечетного количества получается число нечетное. Следовательно, и значение всего выражения — число нечетное.

Ответ: нет.

К дополнительным упражнениям «Задачи на определение числа по остатку»

1. $n = k \cdot$ НОК $(2; 3; 4; 5; 6) + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot k + 1 = 60 \cdot k + 1$.
Среди чисел $60 \cdot k + 1$ найдем все, кратные 7 и меньше 500.
$k = 1$, 61 не делится на 7;
$k = 2$, 121 не делится на 7;
$k = 3$, 181 не делится на 7;
$k = 4$, 241 не делится на 7;
$k = 5$, 301 делится на 7;
$k = 6$, 361 не делится на 7;
$k = 7$, 421 не делится на 7;
$k = 8$, 481 не делится на 7.
Ответ: 301.

2. Пусть x — искомое число, тогда $x - 1$ делится на 7, на 8 и на 9;
$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Следовательно, $x = 504 + 1 = 505$.

3. Очевидно, если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делиться на 2, 3, 4, 5, 6.
НОД $(2; 3; 4; 5; 6) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$;
$60 - 1 = 59$ — не делится на 7;
$60 \cdot 2 - 1 = 119$ — делится на 7.
Ответ: 119.

4. Очевидно, если x — искомое число, то $x + 2$ делится на 13, на 11 и на 7. $x + 2 = 13 \cdot 11 \cdot 7 = 1001$, тогда $x = 999$.

5. $n =$ НОК $(2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9) \cdot k + 1$.
НОК $(2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9) = 2520$. Следовательно, $k = 3$,
$n = 2520 \cdot 3 + 1 = 7561$.

6. Искомое число больше 8;
$4373 - 8 = 4365$; $826 - 7 = 819$.
В качестве искомого числа можно взять НОД (4365; 819);
$4365 = 3^2 \cdot 5 \cdot 137$; $819 = 3^2 \cdot 91$;
НОД $(4365; 819) = 9$.

7. x — количество денег у брата;
y — у сестры;
z — стоимость подарка.

$$\begin{cases} x+20=z, \\ y+14=z, \\ x+y+4=z. \end{cases}$$

Из двух первых уравнений:
$x+y+34=2z$;
$x+y=2z-34$.
Подставим $x+y$ в третье уравнение:
$2z-34+4=z$,
$z=30$.
Арифметический способ решения следует из решения системы.

8. Это число имеет вид: $k \cdot$ НОК $(2; 3; 4; 5; 6)+1$.
k подбираем так, чтобы число делилось на 7.
НОК $(2; 3; 4; 5; 6)=3 \cdot 4 \cdot 5=60$.
61 — не делится на 7;
121 — не делится на 7;
181 — не делится на 7;
241 — не делится на 7;
301 — делится на 7.
Ответ: 301.

9. Если из искомого числа вычесть единицу, то получим число, кратное 5, 8, 9. Следовательно, искомое число равно 361.

Ответ: $5 \cdot 8 \cdot 9+1=361$.

К дополнительным упражнениям «Задачи на нахождение остатков»

1. $x : 7 = a$ (ост. a), $a<7$; $x=7a+a$; $x=8a$.
a может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Ответ: 0; 8; 16; 24; 32; 40; 48.

2. Так как при делении целого числа на 6 можно получить один из остатков — 0, 1, 2, 3, 4, 5, то множество целых неотрицательных чисел можно разбить на непересекающиеся подмножества чисел вида $6k$; $6k+1$; $6k+2$; $6k+3$; $6k+4$; $6k+5$; $k=0, 1, 2, 3, \ldots$. Так как нечетное число при делении на 2 дает в остатке 1, то остается рассмотреть числа вида: $6k+1$; $6k+3$; $6k+5$. Из них только числа вида $6k+5$ при делении на 3 дают остаток 2.

Ответ: $6k+5$, остаток 5.

3. y — стоимость одной тетради.

Выразим количество денег у школьника в двух случаях и приравняем:

$11y + 5 = 15y - 7$; $4y = 12$; $y = 3$.

Количество денег у школьника тогда будет: $11 \cdot 3 + 5 = 38$ (ден. ед.).

4. 42 ден. ед. (у одного не было денег, у другого была 41 ден. ед.).

5. Остаток от деления на 2 — 0; на 4 — 0; на 5 — 3; на 9 — 1; на 10 — 8.
Ответ: сумма остатков от деления равна 12.

6. Пусть a — данное число, x — одинаковое частное, тогда число a можно записать:

$a = 13x + 8$; $a = 15x$; отсюда $13x + 8 = 15x$; $x = 4$; $a = 60$.

7. $100 = 7 \cdot 14 + 2$. Ответ: 14.

К «Задаче из учебника Л. Ф. Магницкого “Арифметика”»

Количество яиц в лукошке должно быть кратно 7.

1) Пусть в лукошке 7 яиц, тогда
   $7 : 2 = 3$ (ост. 1),
   $7 : 3 = 2$ (ост. 1),
   $7 : 4 = 1$ (ост. 3) — не выполняется условие задачи.
2) Пусть в лукошке 14 яиц, тогда
   $14 : 2 = 7$ (ост. 0) — не выполняется условие задачи.
3) Пусть в лукошке 21 яйцо, тогда
   $21 : 2 = 10$ (ост. 1),
   $21 : 3 = 7$ (ост. 0) — не выполняется условие задачи.
4) Пусть в лукошке 28 яиц, тогда
   $28 : 2 = 14$ (ост. 0) — не выполняется условие задачи.
5) Пусть в лукошке 35 яиц, тогда
   $35 : 2 = 17$ (ост. 1),
   $35 : 3 = 11$ (ост. 2) — не выполняется условие задачи.
6) Пусть в лукошке 42 яйца, тогда
   $42 : 2 = 21$ (ост. 0) — не выполняется условие задачи.
7) Пусть в лукошке 49 яиц, тогда
   $49 : 2 = 24$ (ост. 1),
   $49 : 3 = 16$ (ост. 1),
   $49 : 4 = 12$ (ост. 1),
   $49 : 7 = 7$ (ост. 0) — выполняется условие задачи.

Ответ: 49 яиц.

Задача допускает более короткое решение.
$n = k \cdot$ (НОК (2; 3; 4)) + 1; k подбираем так, чтобы n делилось на 7.
НОК (2; 3; 4) = 12

$k = 1,$	$12 + 1$	не делится на 7;
$k = 2,$	$24 + 1 = 25$	не делится на 7;
$k = 3,$	$36 + 1 = 37$	не делится на 7;
$k = 4,$	$48 + 1 = 49$	делится на 7.

Ответ: 49.

К «Веселым математическим соревнованиям»

Вариант 1

1. Остаток от деления на 2 — 1; на 3 — 0; на 4 — 3; на 5 — 2; на 9 — 0.
Ответ: сумма остатков равна 6.

2. Остаток 1 (так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ делится на 5).
Частное $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144$.

3. Нечетных чисел от 1 до 99 будет 50, пар — 25; сумма разностей — $25 \cdot 2 = 50$.
Ответ: частное — 16, остаток — 2.

4. Так как $9 \cdot 7 = 63 < 100$, то искомое число меньше 100 (двузначное).
Пусть число имеет вид $\overline{ab}$. Тогда $10a + b = 7b$, $10a = 6b$, $5a = 3b$.
Если $b = 5$, то $a = 3$.
Двух вариантов нет.
Ответ: 35.

5. $a \cdot b = \dfrac{a}{b}$.
Если $a = 0$ (b — любое, не равное 0); при $a \neq 0$, $b^2 = 1$, $b = \pm 1$, a — любое.

6. Так как НОК $(a; b) = ab$ и НОК $(a; b) = \dfrac{ab}{\text{НОД}(a; b)}$, то НОД $(a; b) = 1$.

7. $9 + x \cdot 99 = 999$; $x \cdot 99 = 990$; $x = 10$.
Арифметический способ:
1) $999 - 9 = 990$;
2) $990 : 99 = 10$.

8. Пусть трехзначное число $\overline{abc}$, тогда $\overline{abcabcabc}$ — девятизначное число. Если разделить уголком девятизначное число $\overline{abcabcabc}$ на трехзначное $\overline{abc}$, то получим 1 001 001:

$$\begin{array}{l|l} abcabcabc & abc \\ \cline{2-2} \underline{abc} & 1\,001\,001 \\ abc & \\ \underline{abc} & \\ 0 & \end{array}$$

9. Первое число — 14.

Получаем все двузначные числа вида $14 \cdot k$: 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98.

Складываем эти числа, получаем 392.

10. Возможный вариант: $33 \cdot 3 + 3 : 3$.

Вариант 2

1. $1 + 0 + 3 + 2 + 0 = 6$.

2. Остаток — 2; частное $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144$.

3. Представим выражение в виде суммы разностей:

$$(100 - 98) + (96 - 94) + ... + (4 - 2).$$

Таких разностей получится 25, каждая разность равна 2, поэтому сумма равна 50. Тогда частное от деления этой суммы на 3 равно 16, остаток от деления равен 2.

4. Наибольшая возможная цифра единиц 9, поэтому само число меньше или равно $9 \cdot 9 = 81 < 100$, т. е. двузначное.

Пусть число имеет вид $\overline{ab}$, тогда $10a + b = 9 \cdot b$; $10a = 8b$; $5a = 4b$.

Если $b = 5$, то $a = 4$. Других вариантов нет.

Ответ: 45.

5. Когда делитель равен 1.

6. Так как НОК $(a; b) = \dfrac{ab}{\text{НОД}\,(a; b)}$, то НОК $(a; b) = \dfrac{ab}{1} = ab$.

7. $99 + 9 \cdot x = 999$; $11 + x = 111$; $x = 100$.

Арифметический способ:

1) $999 - 99 = 900$;

2) $900 : 9 = 100$.

8. Пусть $\overline{ab}$ — исходное число, приписав к нему такое же, получим $\overline{ababab}$. В результате деления получим:

$$\begin{array}{r|l}
-\,ababab & ab \\
\underline{ab} & \overline{10\,101} \\
-\,ab & \\
\underline{ab} & \\
-\,ab & \\
\underline{ab} & \\
0 &
\end{array}$$

9. Четные числа, которые меньше 100 и делятся на 11, — это кратные числу 22: 22, 44, 66, 88. Их сумма равна $22 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 22 \cdot 10 = 220$.

10. Возможный вариант: $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$.

Тема 6. ТРОПИНКОЙ С МАТЕМАТИКОЙ ВО ВРЕМЕНИ

Цель: развить познавательную и творческую активность учащихся на основе упрощенных вариантов античных задач, познакомить их с задачами математического содержания на основе народных сказок.

На изучение этой темы отводится 4 часа. Основное внимание в ней уделяется математическим задачам-загадкам античных времен, старинным занимательным историям по математике.

На занятиях учащимся предлагаются интересные занимательные задачи, а также некоторые задачи русских писателей.

Материал для проведения занятий

В процессе проведения занятий можно кратко обсуждать с учащимися известные им сказочные сюжеты. При этом может быть обращено внимание на то, что на основе отдельных сказок при передаче их от одного поколения к другому возникали различные вопросы, а также задания для разрешения тех или иных проблемных ситуаций. Некоторые из них так и остались неопубликованными из-за отсутствия письменности, поэтому целесообразно рассмотреть несколько сказочных сюжетов и математических заданий, составленных на их основе.

Внимание обращается на известную сказку «Репка». Ребята вспоминают всех сказочных героев: дедку, бабку, внучку, Жучку, кошку, мышку. Затем учитель делает следующее предположение: «Пусть дедка вдвое сильнее бабки, бабка вдвое сильнее внучки, внучка вдвое сильнее Жучки, Жучка вдвое сильнее кошки, кошка вдвое сильнее мышки. Дедка, бабка, внучка, Жучка, кошка вместе с мышкой могут вытащить репку, а без мышки не могут. Сколько надо позвать равных между собой по силе мышек, чтобы они смогли сами вытащить репку?»

В процессе рассуждения учащиеся устанавливают, что вместо кошки нужно взять двух мышек, а вместо Жучки — двух кошек или четырех мышек, вместо внучки — двух Жучек или восемь мышек, вместо бабки — двух внучек или шестнадцать мышек и, наконец, вместо дедки — две бабки или тридцать две мышки. Таким образом, надо позвать тридцать три мышки, чтобы они вытащили репку.

Можно промоделировать и другие ситуации для этой сказки. Например, пусть дедка втрое сильнее бабки, бабка вдвое сильнее внучки, внучка в четыре раза сильнее Жучки, Жучка вдвое сильнее кошки, кошка в пять раз сильнее мышки. Только все вместе они могут вытянуть репку.

На основе условия учитель формулирует различные вопросы. Сколько надо позвать мышек, чтобы они смогли сами вытащить репку? Какое наименьшее число таких же по силе Жучек необходимо, чтобы они смогли вытащить репку? Достаточно ли еще позвать такого же по силе дедку, чтобы двое дедок смогли вытащить репку?

Следует отметить, что в зависимости от уровня подготовки группы (класса), а также задач, поставленных учителем, могут быть промоделированы и другие ситуации с разнообразной серией вопросов.

Для развития логического мышления учащихся, что особенно важно в младшем подростковом возрасте, следует рассмотреть и другие сказочные сюжеты.

«Илья Муромец, преследуя врагов родной земли, попал в селение, которое пылало от пожара, и никого из жителей не было. Умирая от жажды, он слез со своего коня и увидел одну Старицу. Илья Муромец попросил у Старицы воды, на что она ответила, что недавно враги подожгли селение и разрушили колодцы. Однако, когда они здесь находились, оставалось три колодца: один с чистой, другой с ядовитой и третий со смешанной водой, причем надписи на них ранее соответствовали действительности. Уходя из селения, враги изменили все надписи так, что на каждом колодце оказалась неправильная надпись. Старица сказала Илье Муромцу, что в случае выпитого глотка ядовитой или смешанной воды он вынужден будет надолго уснуть и поэтому сама пожелала первой выпить воду. Из какого из трех колодцев с надписями «чистая вода», «ядовитая вода», «смешанная вода» Старица должна была выпить воду, чтобы по ее реакции Илья Муромец мог определить, где чистая вода, для того чтобы напоить себя и своего коня и отправиться в погоню за врагами?»

Правильное рассуждение ребят будет основано на том, что Старица должна выпить воду из колодца с надписью «смешанная вода». В случае, если она уснет, Илья Муромец выпьет воду из колодца с надписью «ядовитая вода», а если она не уснет, то нужно напиться из колодца, где пила воду Старица.

Отметим, что на основе данной сказочной ситуации могут быть промоделированы и другие условия с различной степенью истинности, в частности «ядовитая вода здесь», «чистая вода в другом колодце» и т. д. Для учащихся с более высоким уровнем подготовки целесообразно усложнить условие, включив четыре, пять, шесть колодцев.

В качестве еще одной сказочной истории может быть описана ситуация сражения Ивана-царевича со Змеем Горынычем.

В процессе решения этой задачи и ей аналогичных учащимся нужно заполнять таблицу, в которой следует указывать: номер удара, что отрубается, что остается, что вырастает, что получается. Учитель на доске изображает общую схему таблицы.

Каждый учащийся вырабатывает свою стратегию действий Ивана-царевича. Для примера рассмотрим следующие варианты.

Вариант 1

Номер удара	Что отрубается	Что остается	Что вырастает	Что получается
0	0	3 г., 3 х.	0	0
1	1 х.	3 г., 2 х.	2 х.	3 г., 4 х.
2	1 х.	3 г., 3 х.	2 х.	3 г., 5 х.
3	1 х.	3 г., 4 х.	2 х.	3 г., 6 х.
4	2 х.	3 г., 4 х.	1 г.	4 г., 4 х.
5	2 х.	4 г., 2 х.	1 г.	5 г., 2 х.
6	2 х.	5 г.	1 г.	6 г.
7	2 г.	4 г.	0	4 г.
8	2 г.	2 г.	0	2 г.
9	2 г.	0	0	0

Вариант 2

Номер удара	Что отрубается	Что остается	Что вырастает	Что получается
0	0	3 г., 3 х.	0	0
1	2 г.	1 г., 3 х.	0	1 г., 3 х.
2	2 х.	1 г., 1 х.	1 г.	2 г., 1 х.
3	2 г.	1 х.	0	1 х.
4	1 х.	0	2 х.	2 х.
5	2 х.	0	1 г.	1 г.
6	1 г.	0	2 г.	2 г.
7	2 г.	0	0	0

В зависимости от уровня подготовки учащихся, целей и задач, которые ставятся учителем при проведении занятия, данная задача может быть усложнена, например, участием шестиглавого и шестихвостого Змея Горыныча.

«Предлагает Баба-яга Ивану-царевичу три различных меча-кладенца:

— Выбирай один из трех мечей-кладенцов, — сказала царевичу Баба-яга. Если выберешь первый меч, то одним ударом ты можешь отрубить Змею либо две головы, либо два хвоста, либо три хвоста. Запомни: отрубишь две головы — две новые вырастут; отрубишь два хвоста — четыре новых вырастут; отрубишь три хвоста — ничего не вырастет. Если выберешь второй меч, то одним ударом ты можешь отрубить Змею либо одну голову, либо три головы, либо три хвоста. Запомни: отрубишь одну голову — два новых хвоста вырастут; отрубишь три хвоста — ничего не вырастет; отрубишь три головы — одна вырастет. Если выберешь третий меч, то одним ударом ты можешь отрубить Змею либо две головы, либо два хвоста, либо четыре хвоста. Запомни: отрубишь две головы — один хвост вырастет; отрубишь два хвоста — голова вырастет; отрубишь четыре хвоста — ничего не вырастет».

Каждым ли из трех мечей Иван-царевич может победить Змея Горыныча? Каким из трех мечей и каким образом он может одолеть Змея Горыныча за наименьшее количество ударов?

Данное задание может быть выполнено на занятии частично.

Полный ответ на второй вопрос учащиеся могут по желанию получить дома. Для самостоятельной работы целесообразно предложить ребятам решить задачу, когда Змей Горыныч девятиглавый и девятихвостый.

В качестве индивидуальной творческой работы учащиеся могут придумать и другие задания математического содержания на примерах сказок. Такая работа может быть выполнена и сдана учителю в письменном виде. С лучшими заданиями на следующем занятии отдельные учащиеся выступают перед своими сверстниками.

В процессе путешествия во времени можно на одной из тропинок обратить внимание на задания из истории Древней Греции. Если от математики Древнего Востока сохранились отдельные задачи с решениями и таблицы, то Древняя Греция явилась родоначальницей науки математики, основанной на строгих доказательствах. Этому способствовала деятельность ряда школ и, в частности, школы Пифагора. Обоснованность рассуждений и доказательность утверждений благоприятствовали зарождению новых различных научных направлений. Так, например, впоследствии появилась отдельная наука — логика.

В школе Пифагора, как и во всей Древней Греции, учеников прежде всего учили правильно рассуждать. В качестве примера учащимся приводится один из древнегреческих мифов, который содержит сказание о суде царевича Париса.

«Однажды на свадьбе богиня раздора Эрида подбросила собравшимся гостям яблоко с надписью «прекраснейшей». Из-за этого яблока возник спор между богиней мудрости и справедливой войны Афиной, богиней любви и красоты Афродитой, а также супругой Зевса Герой. Они обратились к царю и отцу богов и людей Зевсу, чтобы он решил, кому должно достаться яблоко. Зевс отправил богинь на гору к Парису, который пас там свои стада. Парис должен был решить, какая из богинь самая прекрасная. Каждая из богинь старалась склонить юношу в свою сторону: Афина предлагала ему мудрость и военную славу, Афродита — красивейшую женщину на земле в жены, Гера — власть и богатство».

Как Парис определил прекраснейшую из богинь, можно узнать, решив следующую задачу.

«Представ перед Парисом, богини высказали следующие утверждения.

А ф р о д и т а. Я самая прекрасная (1).

А ф и н а. Афродита не самая прекрасная (2).

Г е р а. Я самая прекрасная (3).

А ф р о д и т а. Гера не самая прекрасная (4).

А ф и н а. Я самая прекрасная (5).

Парис, отдыхающий у дороги с закрытыми от яркого солнца глазами, предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух остальных богинь ложны. Как, исходя из такого предположения, можно определить, кто же прекраснейшая из богинь?»

Учитель предлагает осуществить проверку на истинность высказываний каждой из богинь. После определенных дискуссий целесообразно представить три возможные ситуации в сокращенной записи на доске с соответствующими комментариями, характерными для рассуждений Париса.

а) Предположим, что Афина высказала истину. Тогда Афина — прекраснейшая из богинь, и, по предположению, утверждение (4) ложно. Мы приходим к противоречию, так как Гера не может быть прекраснейшей из богинь, поскольку таковой является Афина. Следовательно, исходное предположение ложно.

А ф р о д и т а. Я самая прекрасная (1) — Л.

А ф и н а. Афродита не самая прекрасная (2) — И.

Г е р а. Я самая прекрасная (3) — Л.

А ф р о д и т а. Гера не самая прекрасная (4) — Л.

А ф и н а. Я самая прекрасная (5) — И.

б) Предположим, что Гера высказала истину. Тогда Гера — прекраснейшая из богинь, и, по предположению, утверждение (2) ложно. Мы приходим к противоречию, так как Афродита не может быть прекраснейшей из богинь, поскольку таковой является Гера. Следовательно, исходное предположение ложно.

А ф р о д и т а. Я самая прекрасная (1) — Л.

А ф и н а. Афродита не самая прекрасная (2) — Л.

Г е р а. Я самая прекрасная (3) — И.

А ф р о д и т а. Гера не самая прекрасная (4) — Л.

А ф и н а. Я самая прекрасная (5) — Л.

в) Предположим, что Афродита высказала истину. Тогда Афродита — прекраснейшая из богинь. Ложность утверждений (2), (3), (5) и истина утверждений (1), (4) подтверждает, что Афродита — прекраснейшая из богинь.

А ф р о д и т а. Я самая прекрасная (1) — И.

А ф и н а. Афродита не самая прекрасная (2) — Л.

Г е р а. Я самая прекрасная (3) — Л.

А ф р о д и т а. Гера не самая прекрасная (4) — И.

А ф и н а. Я самая прекрасная (5) — Л.

Таким образом, по предположению Париса, прекраснейшая из богинь Афродита.

На основе этого древнегреческого мифа можно более подробно познакомить учащихся с деятельностью школы Пифагора. Пифагор Самосский (около 570—500 гг. до н. э.) основал знаменитый пифагорейский союз (школу). Деятельность этого союза была окружена тайной, поскольку противоречила идеологии античной демократии. Пифагор даже скрывал информацию о количестве своих учеников. Однажды на пиру у Пифагора Поликрат спросил, сколько у того учеников. «Охотно скажу тебе, о Поликрат, — отвечал Пифагор. — Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Сколько учеников веду я к рождению вечной истины?»

Затем можно решить данную задачу и определить, сколько учеников было у Пифагора. Для решения задачи найдем наименьшее число, кратное 7, 4 и 2, — это 28. Непосредственная проверка показывает, что оно и является искомым.

Важно подчеркнуть, что в школе Пифагора были получены интересные математические зависимости, которые будут изучаться и доказываться учащимися в старших классах, а с учетом их возраста можно предложить следующее задание для установления того, что сумма первых последовательных нечетных натуральных чисел есть квадратное число. Учащиеся находят сумму натуральных чисел, например: а) от 1 до 9; б) от 1 до 30; в) от 1 до 99; г) от 1 до 499. Окончательные результаты оформляются в виде:

а) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 1 + 9 + 3 + 7 + 5 = 25 = 5 \cdot 5$;

б) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 23 + 25 + 27 + 29 = 1 + 29 + 3 + 27 + 5 + 25 + 7 + 23 + {}$
$+ ... + 13 + 17 + 15 = 30 \cdot 7 + 15 = 210 + 15 = 225 = 15 \cdot 15$;

в) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 93 + 95 + 97 + 99 = 1 + 99 + 3 + 97 + 5 + 95 + 7 + 93 + {}$
$+ ... + 49 + 51 = 100 \cdot 25 = 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 5 = 50 \cdot 50$;

г) $1 + 3 + 5 + ... + 495 + 497 + 499 = 1 + 499 + 3 + 497 + 5 + 495 + ... + 249 + {}$
$+ 251 = 500 \cdot 125 = 5 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 10 = 250 \cdot 250$.

Заметим, что учителю целесообразно во втором, третьем и четвертом случаях перед соответствующим подсчетом установить количество всех нечетных чисел и пар слагаемых, которые получаются в результате группировки.

Дополнительные упражнения

1. У римлян задач-загадок было гораздо меньше, чем у греков. Некоторое число их содержит роман «Петрония», написанный около 400-го г. н. э. и содержащий 100 стихотворений-загадок, сочиненные Симфозием. Многие из задач-загадок того времени уже имели достаточно высокий уровень сложности.

Осел и мул тянули усердно поклажу.
Стонал и охал осел под тяжелою ношей.
Мул заметил беду и спешит на подмогу соседу:
«Я пособлю, — говорит, — дай мне лишь узел один,
Я тогда понесу вдвое больше, чем ты,
Возьмешь у меня ты один — равен будет наш груз».
Смекни ж, сколько было узлов на каждом из них.

Решение.

В условии задачи сказано, что если осел заберет у мула один мешок, то у них поклажа станет одинаковой, значит, мул несет на 2 мешка больше. Если же осел отдаст мулу 1 мешок, то ноша мула станет вдвое тяжелее поклажи осла. Очевидно, что осел несет нечетное количество мешков и не менее трех. Выясним, сколько несет каждый.

Пусть осел несет 3 мешка, тогда мул — 5 мешков; $5 + 1 \neq 2\,(3 - 1)$.

Пусть осел несет 5 мешков, тогда мул — 7 мешков; $7 + 1 = 2\,(5 - 1)$.

Ответ: у осла было 5 мешков, а у мула — 7 мешков.

2. До царя Гороха дошла молва, что кто-то из троих богатырей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явиться и рассказать, как было дело. Вот что они сказали.

Илья Муромец. Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.

Добрыня Никитич. Змея убил Алеша Попович.

Алеша Попович. Я убил змея.

При этом известно, что один из них сказал правду, а двое слукавили. Кто убил Змея?

Решение.

Добрыня Никитич и Алеша Попович утверждают одно и то же, следовательно, они лукавят, правду говорит Илья Муромец.

Ответ: Добрыня Никитич.

Комментарии и ответы

К «Упражнениям Васи Задачкина»

1. Пусть у каждой грации и каждой музы стало по x плодов. Тогда всего плодов $x \cdot 12 = 12x$, у каждой грации было по $\frac{12x}{3} = 4x$ плодов. По условию каждая муза получила плоды от каждой грации, поэтому x делится на 3, $x \geq 3$. Итак, у каждой грации было $4x$ плодов ($x = 3, 6, 9, ...$).

2. Если Иван пойдет прямо, исходя из условия задачи, то с ним ничего не случится. Тогда, чтобы вызволить Василису Прекрасную, ему нужно пойти налево.

3. Пусть было x петухов и y поросят. Тогда:
$2x + 4y = 30$, $x + y = 11$;
или $x + 2y = 15$, а также $x + y = 11$, получаем $y = 4$; $x = 7$.
Ответ: 7 петухов, 4 поросят.

4. 7 костылей;
49 сучков;
343 кошеля;
2401 пирог;
16 807 воробьев.

5. За одну минуту заяц пробегает 250 саженей, а собака — 260 саженей. Следовательно, за одну минуту расстояние между собакой и зайцем уменьшается на 10 саженей. Поскольку между собакой и зайцем, когда собака увидела зайца, было 150 саженей, то собака догонит зайца через 15 минут.

500 : 2 = 250 (саженей);
1300 : 5 = 260 (саженей);
260 – 250 = 10 (саженей);
150 : 10 = 15 (минут).

6. Ясно, что все три жернова должны работать одинаковое время, потому что простой любого из трех жерновов увеличивает время помола зерна. Поскольку за сутки все три жернова вместе могут смолоть 162 четверти зерна, а надо смолоть 81 четверть, то жернова должны работать 12 часов и за это время на первом жернове надо смолоть 30 четвертей, на втором — 27 четвертей, а на третьем — 24 четверти зерна.

60 + 54 + 48 = 162 (четверти зерна);

162 : 81 = 2 (во столько раз меньше надо смолоть в действительности за сутки);

24 : 2 = 12 (столько часов должны работать жернова);

$60 : 2 = 30$ (четвертей зерна надо смолоть на первом жернове);
$54 : 2 = 27$ (четвертей зерна надо смолоть на втором жернове);
$48 : 2 = 24$ (четверти зерна надо смолоть на третьем жернове).
Ответ: 12 часов, 30, 27, 24 четверти.

К дополнительным задачам для самостоятельного решения

7. а) За один прыжок собака догоняет кролика на $9 - 7 = 2$ (фута). Тогда прыжков потребуется $150 : 2 = 75$.

б) Перевезти козу; перевезти волка, забрать козу; перевезти капусту; перевезти козу.

8. а) Искомыми числами будут числа, кратные числам 2, 3, 4, 5, 6 плюс 1 и кратные 7.

$$\text{НОК } (2; 3; 4; 5; 6) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60.$$

61 — не делится на 7;
121 — не делится на 7;
181 — не делится на 7;
241 — не делится на 7;
301 — делится на 7.

Итак, это число 301, следующие числа имеют вид: $301 + 60 \cdot 7n$, $n = 1, 2, ...$, т. е. 721, 1141 и т. д.

б) Искомое число ищем среди чисел вида $p + 2$, где p — общее кратное чисел 3 и 7; $21 + 2 = 23$ — подходит. Остальные числа имеют вид:

$$23 + k \cdot \text{НОК } (3; 5; 7) = 23 + k \cdot 105, k = 1, 2, 3, ...$$

9. $7 + 49 + 343 + 2401 + 16\,807 + 117\,649 + 823\,543 = 960\,799$.

11. а) Поскольку за 8 часов 6 человек выпивают бочонок кваса, то за один час такой же бочонок кваса выпьют 48 человек, а тогда за 3 часа этот бочонок кваса выпьют 16 человек.

$6 \cdot 8 = 48$ (чел.) — столько человек выпивают бочонок кваса за 1 час;

$48 : 3 = 16$ (чел.) — столько человек выпивают бочонок кваса за 3 часа.

б) *1-й способ.*

Уменьшив втрое количество орехов в большей части, получим их столько же, как в четырех меньших частях. Значит, большая часть должна содержать в $3 \cdot 4 = 12$ (раз) больше орехов, чем меньшая, а общее число орехов должно быть в 13 раз больше, чем в меньшей части. Поэтому меньшая часть должна содержать 130 : 13 = 10 (орехов), а большая 130 – 10 = 120 (орехов).

2-й способ (*составлением уравнения*).

Пусть x — большая часть орехов, тогда $130 - x$ — меньшая;

$(130 - x) \cdot 4 = x : 3$, отсюда находим, что $x = 120$ (орехам), тогда меньшая часть равна 10 (орехам).

в) За один день путники сближаются на 70 верст. Поскольку расстояние между городами 700 верст, то встретятся они через 700 : 70 = = 10 (дней).

30 + 40 = 70 (верст) — проходят путники за один день;

700 : 70 = 10 (дней) — будут идти путники до встречи.

12. Три курицы стоят 46 копеек. Для того чтобы возместить эту сумму, необходимо продать 460 яиц. За 12 дней первая курица снесла 9 яиц, вторая — 8 яиц, а третья — 6 яиц. Вместе же они снесли 23 яйца. Так как 460 = 23 · 20, то за 12 · 20 = 240 (дней) курицы снесут 460 яиц. Значит, куры окупятся за 240 дней.

Если 5 яиц стоят полкопейки, то 10 яиц стоят 1 копейку, и

10 · 46 = 460 (яиц) — будут стоить 46 копеек;

3 · 3 = 9 (яиц) — снесет первая курица за 12 дней;

2 · 4 = 8 (яиц) — снесет вторая курица за 12 дней;

1 · 6 = 6 (яиц) — снесет третья курица за 12 дней;

9 + 8 + 6 = 23 (яйца) — снесут три курицы за 12 дней;

460 : 23 = 20 — столько раз нужно взять по 23 яйца, чтобы получить искомое количество — 460 яиц;

12 · 20 = 240 (дней).

13. *1-е решение.*

Пусть расстояние между городами равно наименьшему кратному чисел 10 и 15, т. е. 30 км;

$30 : 10 = 3\ (\frac{\text{км}}{\text{день}})$ — скорость первого путешественника;

$30 : 15 = 2\ (\frac{\text{км}}{\text{день}})$ — скорость второго путешественника;

$2 + 3 = 5\ (\frac{\text{км}}{\text{день}})$ — скорость сближения путешественников;

30 : 5 = 6 — через столько дней встретятся путешественники.

2-е решение (такое решение может рассматриваться после изучения темы «Обыкновенные дроби»).

Первый путник проходит в день $\frac{1}{10}$ пути, второй — $\frac{1}{15}$. Вместе за день они проходят $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$ (пути). Поэтому встретятся путники через $1:\frac{1}{6}=6$ (дней).

14. Решим эту задачу методом сравнения. Для этого запишем условие задачи в следующем виде:

5 в.; 3 б. — 13 золотых монет;

2 в.; 8 б. — 12 золотых монет.

Нужно приравнять количество волов или баранов. Сравним количество волов, для этого первую строку данных умножим на 2, а вторую — на 5. Получим:

10 в.; 6 б. — 26 золотых монет;

10 в.; 40 б. — 60 золотых монет.

Отсюда $40 - 6 = 34$ (барана) будут стоить $60 - 26 = 34$ (золотые монеты), один баран стоит $34 : 34 = 1$ (золотую монету). Подставляя этот результат в первую строку данных, получим, что 3 барана стоят 3 золотые монеты, а 5 волов будут стоить $13 - 3 = 10$ (золотых монет).

Откуда 1 вол стоит $10 : 5 = 2$ (золотые монеты).

15. Решение Л. Н. Толстого. «Три старших дали двум младшим 3 раза по 800: $3 \cdot 800 = 2400$. Меньшие разделили 2400 на две части: $2400 : 2 = 1200$, и у всех стало поровну, по 1200. Стало быть, дома стоили по 2000 рублей. А всего наследства было на 6000 рублей в домах».

$3 \cdot 800 = 2400$ — столько денег уплатили старшие братья;

$2400 : 2 = 1200$ — столько денег досталось каждому из младших братьев;

$1200 + 800 = 2000$ — столько стоит дом;

$2000 \cdot 3 = 6000$ — столько стоят 3 дома.

16. Решим эту задачу методом предположения. Предположим, что все 138 аршин были черного цвета, тогда купец заплатил бы $3 \cdot 138 = 414$ р., что на $540 - 414 = 126$ р. меньше, чем в действительности. Но так как 1 аршин черного сукна на $5 - 3 = 2$ р. дешевле 1 аршина синего, то было куплено $126 : 2 = 63$ (аршина) синего цвета, тогда черного — $138 - 63 = 75$ (аршин).

17. Вначале второй юноша отставал на 40 км, догонял он по $45 - 40 = 5$ (км в день). Следовательно, догонит за $40 : 5 = 8$ (дней).

18. Пусть n — количество дней, за которые второй воин догонит первого.

$$12n = \big((1 + n) : 2\big) \cdot n;\ 1 + n = 24;\ n = 23.$$

19. Пусть длина прыжка собаки 30 дм, тогда за 5 прыжков собака преодолевает 150 дм, а длина прыжка зайца $150 : 6 = 25$ (дм); за 5 прыжков заяц преодолевает $25 \cdot 5 = 125$ (дм), и собака за 5 прыжков догоняет зайца на $150 - 125 = 25$ (дм). Первоначальное расстояние от собаки до зайца равно $40 \cdot 30 = 1200$ (дм), собаке нужно $1200 : 25 = 48$ (групп) прыжков по 5. Общее количество прыжков, которые должна сделать собака: $48 \cdot 5 = 240$.

20. 29 лет назад отцу было $45 - 29 = 16$ (лет). Если меньшему сыну x лет, то старшему — $3x$ лет; вместе — $4x$ лет.

$4x = 16$; $x = 4$; $3x = 12$.

Ответ: младшему 4 года, старшему 12 лет.

Тема 7. ТРОПИНКОЙ В ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

Цель: сформировать у учащихся интерес к геометрическому материалу и с помощью соответствующих заданий развивать пространственное воображение, логику рассуждений, а также рассмотреть исторические аспекты возникновения некоторых геометрических величин.

На изучение этой темы отводится 6 часов. Основное внимание в ней уделяется геометрическим задачам на вычерчивание фигур без отрыва карандаша от бумаги, простейшим геометрическим задачам с использованием простейших многогранников (прямоугольного параллелепипеда, куба), простейшим задачам прикладного характера. На занятиях (или в качестве домашнего задания) рекомендуется изготовление моделей простейших многогранников, целесообразно также проведение геометрических соревнований.

Геометрические соревнования

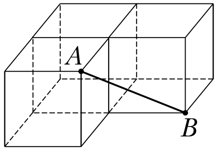
Можно проводить по вариантам: I в. (1—4); II в. (5—8).

1. Деревянный куб покрасили снаружи синей краской. После этого каждое ребро поделили на 5 частей и распилили данный куб на маленькие с ребром в 5 раз меньше. Сколько получилось маленьких кубиков?

У скольких кубиков окрашены три грани? Две грани? Одна грань? Ни одной?

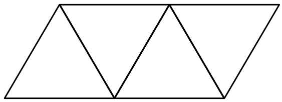
2. Отрезок, соединяющий две противолежащие (наиболее удаленные друг от друга) вершины куба, называется его диагональю. Как измерить диагональ непустого куба, используя линейку и имея в наличии три таких куба?

Решение.



Расстояние AB — искомое.

3. У Буратино была бумага, с одной стороны оклеенная полиэтиленом. Он сделал заготовку, изображенную на рисунке, чтобы склеить из нее пакет для молока. Лиса Алиса сказала, что может сделать другую заготовку и склеить такой же пакет. Какую?



4. Из восьми одинаковых прямоугольников со сторонами 3 см и 1 см и пяти одинаковых квадратов с периметрами 4 см составьте и изобразите фигуру с периметром 44 см. Какой будет ее площадь?

5. Окрашенный кубик с ребром 6 см распилили на кубики с ребром 1 см. Сколько будет кубиков с двумя окрашенными гранями? Какой длины будет полоска из этих кубиков?

Ответ: 48.

6. В открытую цилиндрическую бочку налита вода, на взгляд как будто до половины. Но вы хотите знать точно, половина ли в ней налита, больше половины или меньше половины. У вас нет под рукой ни палки, ни вообще какого бы то ни было инструмента для обмера бочки. Каким образом могли бы вы убедиться, налита ли в бочке вода ровно до половины?

7. Треугольник составлен из 10 кружков, которые пронумерованы от 1 до 10. Изменив положение трех кружков, переверните треугольник вниз вершиной.

8. На окраску кубика с ребром 2 ед. длины требуется 12 г краски. Сколько краски потребуется, чтобы окрасить кубик с ребром 6 ед. длины?

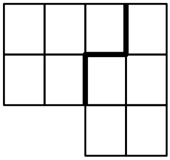
Ответ: 108 г.

Комментарии и ответы

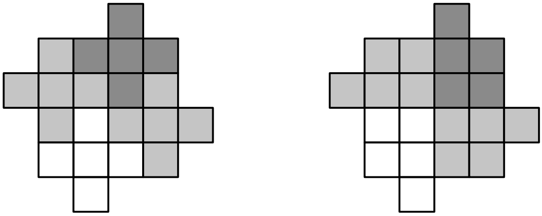
К «Упражнениям Васи Задачкина»

Задачи на разрезание

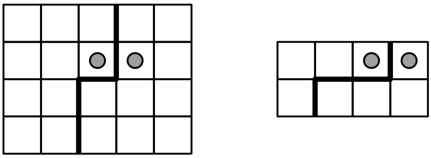
1.



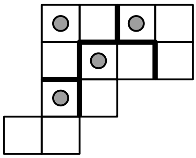
2.



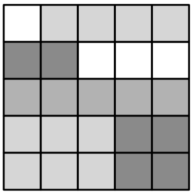
3.



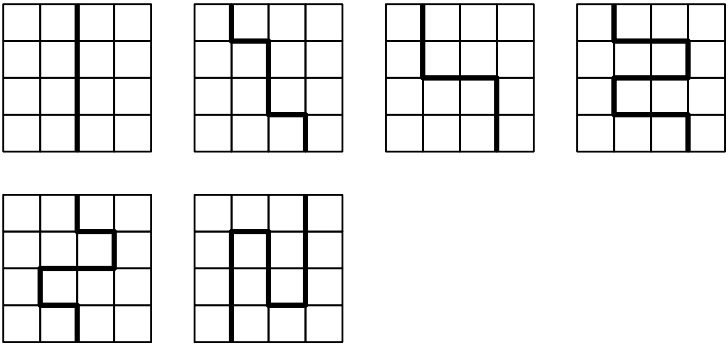
4.



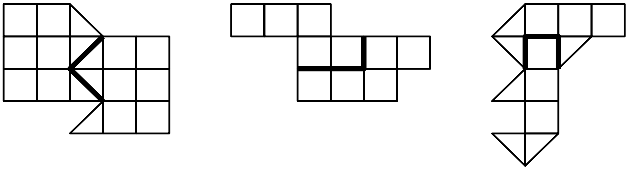
5.



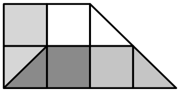
6.



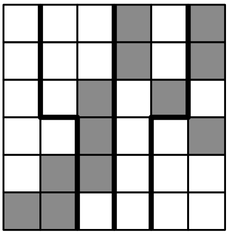
7.



8.

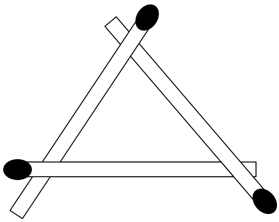


9.

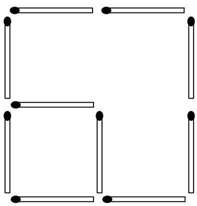


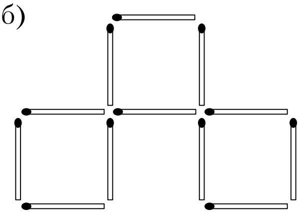
Задачи с использованием спичек

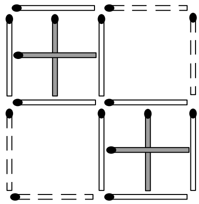
1.



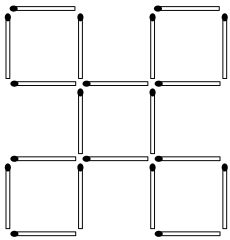
2.

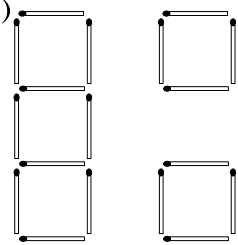
а) 

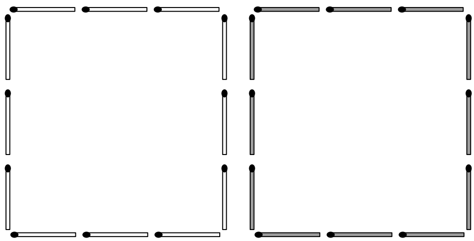
б) 

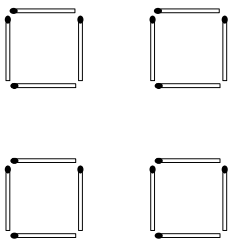
в) 

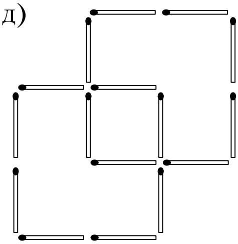
3.

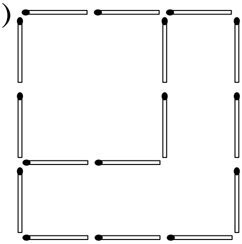
а) 

б) 

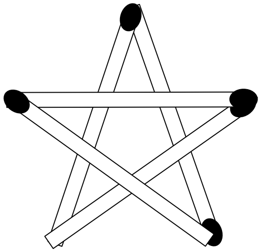
в) 

г) 

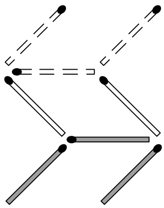
д) 

е) 

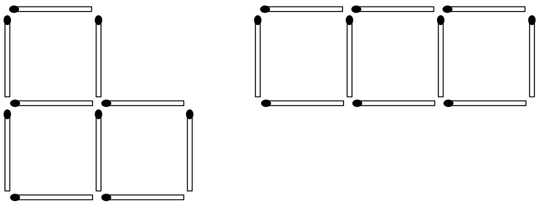
4.



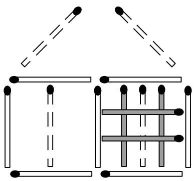
5.



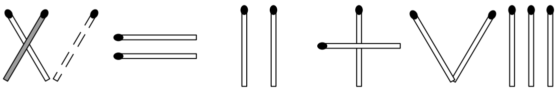
6.



7.



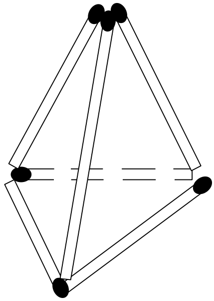
8.



9. Да. Аня может играть так, чтобы выиграть, как бы ни старался Вова.

Первым своим ходом Аня целиком забирает одну из кучек со спичками. Остается 2 кучки по 10 спичек. Теперь, сколько бы спичек ни забрал Вова из одной из кучек, Аня сможет забрать то же количество спичек из другой кучки. Поэтому, когда Вова возьмет последнюю спичку из одной кучки (а это обязательно случится, ведь спичек конечное число), Аня заберет последнюю спичку из другой кучки и выиграет, так как больше спичек не останется.

11. Это пространственная фигура — тетраэдр.



Простейшие многогранники

1. Будем нумеровать грани по количеству точек, на них изображенных. Тогда:

а) развертка соответствует игральному кубику (противоположными гранями являются 2 и 5, 3 и 4, 1 и 6).

б) — соответствует;

в) — нет (грани 3 и 4 должны быть противоположными);

г) — соответствует;

д) — нет (грани 2 и 5 должны быть противоположными).

Тема 8. ТРОПИНКОЙ В СТРАНУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Цель: обобщить знания и умения, полученные на уроках по данной теме, и познакомить учащихся с историей возникновения обыкновенных дробей.

На изучение этой темы отводится 4 часа. Основное внимание в ней необходимо уделить решению задач с использованием обыкновенных дробей и различным вычислениям с обыкновенными дробями. Для проведения занятий предлагается интересный исторический материал, включая с числами-лилипутами, и много занимательных заданий, список которых учитель может расширить, используя прилагаемый список литературы. Учащимся можно предложить подготовить сообщения по теме «Занимательные истории об обыкновенных дробях».

Дополнительные сведения

В Древнем Вавилоне использовали шестидесятеричные дроби — это дроби, у которых числитель любой, а знаменатель равен 60, или 60^2, или 60^3 и т. д.

Шестидесятеричными вавилонскими дробями пользовались греческие и арабские математики и астрономы. Эти дроби использовались, особенно в научных целях, многими народами вплоть до XVII в., поэтому их часто называли астрономическими или физическими. Шестидесятеричные дроби в какой-то степени применяются и в настоящее время: 1 минута — $\frac{1}{60}$ часть часа, 1 секунда — $\frac{1}{60}$ часть минуты. Но работать с натуральными числами, записанными по десятичной системе, и дробями, записанными по шестидесятеричной, было неудобно.

Интересная система дробей существовала в Древнем Риме. Она основывалась на делении на 12 долей единицы веса, которая называлась асс. Двенадцатую долю асса называли унцией, а путь, время и другие величины сравнивали с наглядной вещью — весом. Например, римлянин мог сказать, что он прошел семь унций пути или прочел пять унций книги. При этом, конечно, речь шла не о взвешивании пути или книги. Имелось в виду, что пройдено $\frac{7}{12}$ пути или прочтено $\frac{5}{12}$ книги. А для дробей, которые получаются после сокращения числителя со знаменателем 12 или раздроблением двенадцатых долей на более мелкие, были особые названия.

Сейчас говорят: «Он скрупулезно изучил этот вопрос». Это значит, что вопрос изучен до конца и неясностей не осталось. А происходит слово «скрупулезно» от римского названия $\frac{1}{288}$ асса — «скрупулус». Еще были и такие названия: «семис» — половина асса, «секстанс» — шестая его доля, «семиунция» — половина унции, т. е. $\frac{1}{24}$ асса и т. д. Всего применялось 18 различных названий дробей. Чтобы работать с дробями, надо было помнить для этих дробей таблицу сложения и таблицу умножения. Например, римские купцы твердо знали, что при сложении триенса $\left(\frac{1}{3}\text{ асса}\right)$ и секстанса получается семис. Для облегчения работы составлялись специальные таблицы, некоторые из которых дошли до нас.

Дроби в Древней Руси назывались долями, а позднее — «ломаными числами» и имели специальные названия. Приведем примеры некоторых из них:

$\frac{1}{2}$ — половина, полтина, $\frac{1}{4}$ — четь, $\frac{1}{3}$ — треть, $\frac{1}{6}$ — полтреть, $\frac{1}{10}$ — десятина.

Комментарии и ответы

К «Упражнениям Васи Задачкина»

1. Чтобы подняться на второй этаж, нужно подняться с первого этажа на один этаж, а чтобы подняться с первого на четвертый — на три этажа. Поэтому лестница на второй этаж составляет $\frac{1}{3}$ от лестницы на четвертый этаж.

2. Приведем дроби к общему знаменателю: $\frac{14}{21}$ и $\frac{12}{21}$. Итак, $\frac{2}{3} > \frac{4}{7}$.

3. $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$.

4. Задача решается в обратном порядке: 2 картофелины, оставшиеся после Кота, составляют $\frac{2}{3}$ от оставшихся после Пса. Следовательно, после Пса осталось 3 картофелины. Эти 3 картофелины составляют $\frac{2}{3}$ от оставшихся после Осла. Следовательно, после Осла осталось $3 : \frac{2}{3} = \frac{9}{2}$ картофелины. Тогда в самом начале было $\frac{9}{2} : \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$ (картофелины).

5. После первого дня осталось $\frac{1}{2}$ количества страниц, за второй день прочитано $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ количества страниц. За 2 дня прочитано $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ книги. Тогда в третий день прочитано $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ книги. Всего за 3 дня прочитано $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3+1+2}{6} = 1$, т. е. вся книга.

Ответ: да.

6. 6 батонов разрезать каждый пополам, 1 батон разрезать на 12 частей. Каждый получит $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$ батона.

7. $\frac{2008}{2009}=\frac{2009-1}{2009}=1-\frac{1}{2009}$; $\frac{2009}{2010}=\frac{2010-1}{2010}=1-\frac{1}{2010}$.

Так как $\frac{1}{2009}>\frac{1}{2010}$, то $1-\frac{1}{2009}<1-\frac{1}{2010}$, то $\frac{2008}{2009}<\frac{2009}{2010}$.

8. $\frac{2}{5}\cdot 25=10$; $\frac{1}{3}\cdot 27=9$.

Ответ: первое число больше.

9. Ответ: 98.

10. $\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

11. $\frac{1}{2}$ — четверть числа, следовательно, число равно 2.

12. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$; $21:\frac{7}{12}=\frac{21\cdot 12}{7}=36$.

13. Полтрети это $\frac{1}{6}$; $100:\frac{1}{6}=600$.

14. $240\cdot\frac{1}{6}=40$; $40:\frac{2}{5}=\frac{40\cdot 5}{2}=100$.

15. Возьмем в качестве общего знаменателя 36. Тогда $\frac{1}{3}=\frac{12}{36}$; $\frac{1}{2}=\frac{18}{36}$.

Между данными числами можно вставить числа: $\frac{13}{36}$; $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$; $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$; $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$; $\frac{17}{36}$.

18. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

19. 10 составляет $\frac{2}{3}$ суммы, поэтому сама сумма равна $10:\frac{2}{3}=15$.

15 составляет $1\frac{2}{3}$ исходного числа, поэтому само число равно

$15:1\frac{2}{3}=15:\frac{5}{3}=\frac{15\cdot 3}{5}=9$.

20. а) $1:2:3:4:5:6:7:8:9 = \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$ — минимальное число.

б) $1:(2:3:4:5:6:7:8:9) = 1:\dfrac{2}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9} = 3\cdot2\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$ — максимальное число.

21. $2-\dfrac{2}{2}$.

22. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3+1+2}{6}=1.$

Ответ: да.

23. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{6+3+4}{12}=\dfrac{13}{12}>1.$

Ответ: да.

24. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{10+5+4}{20}=\dfrac{19}{20}<1.$

Ответ: нет.

25. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{9+6+2}{18}=\dfrac{17}{18}$, т. е. отец дал неправильное распределение долей. Добавление в общее количество одного верблюда позволило распределить их, так как $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=1$, $\dfrac{1}{18}$ осталась у мудреца.

26. Пусть $\dfrac{1}{a}$ — доля Винни-Пуха вначале, $1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}$ — доля Пятачка. Винни-Пух отдал $\dfrac{1}{3a}$ часть, в результате:

$\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{1}{3a}=3\cdot\dfrac{a-1}{a}$; $(a-1)+\dfrac{1}{3}=3(a-1)$;

$2(a-1)=\dfrac{1}{3}$; $a-1=\dfrac{1}{6}$; $a=\dfrac{7}{6}$.

Первоначально у Винни-Пуха $\dfrac{1}{a}=\dfrac{6}{7}$, у Пятачка — $\dfrac{1}{7}$.

27. Распилов — 4; $4\cdot1\dfrac{1}{2}=4\cdot\dfrac{3}{2}=6$ (минут).

Несколько дополнительных задач

1. На одну чашку весов положен брусок мыла, на другую — $\frac{3}{4}$ такого же бруска и еще $\frac{3}{4}$ кг. Весы в равновесии. Сколько весит целый брусок мыла?

Ответ: $\frac{3}{4}$ кг составляют $\frac{1}{4}$ бруска мыла. Следовательно, брусок весит в 4 раза больше, т. е. 3 кг.

2. Проехав половину всего пути, пассажир заснул. Когда он проснулся, то оказалось, что ему осталось ехать половину того пути, который он проехал спящим. Какую часть всего пути пассажир проехал спящим?

Ответ: вторую половину пути нужно разделить на три части, т. е. спящим он проехал $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (пути).

3. Какое это число, если четверть его — половина и еще четверть?

Ответ: пусть a — искомое число, тогда $\frac{1}{4}a = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; $a = 2 + 1$; $a = 3$.

4. Кот Матроскин отпил $\frac{1}{6}$ часть стакана черного кофе и долил его молоком. Затем он выпил $\frac{1}{3}$ стакана и снова долил его молоком. Потом я выпил полстакана и опять долил молоком. Наконец Кот Матроскин выпил полный стакан. Чего больше выпито: кофе или молока?

Ответ: всего долито молока $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$ (стакан). Следовательно, всего выпито 2 стакана, т. е. кофе и молока выпито поровну.

5. Задача из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Один человек выпивает бочонок кваса за 14 дней, а вместе с женой выпивает тот же бочонок кваса за 10 дней. Нужно узнать, за сколько дней жена одна выпивает такой же бочонок кваса.

Ответ: за 35 дней.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЗАДАЧИ-ШУТКИ И УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НА ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЯХ

1. На дереве сидело пять птиц. Охотник выстрелил и подстрелил одну птицу. Сколько птиц осталось сидеть на дереве?

Ответ: на дереве птиц не осталось, они улетели.

2. Горело десять свечей. Две свечи погасили. Сколько свечей осталось?

Ответ: две свечи, остальные сгорели.

3. Как из трех спичек, не ломая их, получить четыре? Как получить шесть спичек?

Ответ: IV, VI.

4. Как из четырех палочек сделать 15, не ломая?

Ответ: XV.

5. По дороге двое мальчиков шли и 2000 рублей нашли. За ними еще четверо идут. Сколько они найдут?

Ответ: нисколько.

6. Можно ли число 1888 разделить пополам так, чтобы в каждой половине была тысяча?

Ответ: $\frac{1000}{1000}$ — после разрезания.

7. Я задумала трехзначное число, вычла из него 1 и получила двузначное число. Какое число я задумала?

Ответ: 100.

8. Я задумала двузначное число, вычла из него 1 и получила однозначное число. Какое число я задумала?

Ответ: 10.

9. Из трехзначного числа вычли двузначное и получили единицу. Назовите уменьшаемое и вычитаемое.

Ответ: 100 и 99.

10. Сумма трех чисел равна 80. Сумма первого и второго равна 60, а сумма первого и третьего — 20. Найдите эти числа.

Ответ: 0 + 60 + 20.

11. Произведение трех чисел равно 140. Произведение первых двух равно 28, а произведение второго и третьего — 35. Найдите эти числа.

Ответ: 4, 7, 5.

12. На расстоянии 5 м друг от друга в один ряд посажено 10 молодых деревьев. Найдите расстояние между крайними деревьями.

Ответ: 45.

13. В колесе 10 спиц. Сколько промежутков между ними?

Ответ: 10.

14. Пять братьев хотели разделить 20 овец, чтобы каждый получил нечетное число овец. Возможно ли это?

Ответ: нет, потому что братьев нечетное число, а чтобы получить нечетное число овец, общее число должно быть нечетным, а 20 — четное число.

15. Если 2 кошки за 2 часа съедят 2 мышек, то сколько мышек съедят 4 кошки за 4 часа?

Ответ: 8. Так как 2 кошки за 2 часа съедят 2 мышек, то 2 кошки за 4 часа съедят 4 мышек. Тогда 4 кошки за 4 часа съедят 8 мышек.

16. 3 кошки съедают 3 мышек за 1 ч 30 мин. За какое время 10 кошек съедят 20 мышек?

Ответ: 3 часа. 3 кошки за 1 ч 30 мин съедят 3 мышек, 1 кошка за 1 ч 30 мин съест 1 мышку. 1 кошка за 3 часа съест 2 мышек. 10 кошек за 3 часа съедят 20 мышек.

17. Сколько концов у шести палок? А у шести с половиной палок?

Ответ: 12 — у шести и 14 — у шести с половиной.

18. Назвать пять дней подряд, не называя ни числа, ни названия этих дней.

Ответ: позавчера, вчера, сегодня, завтра, послезавтра.

19. Из города A в 9 часов вечера вышел в город B грузовой поезд со скоростью 80 км/ч. Из города B ему навстречу вышел скорый поезд со скоростью 120 км/ч. Расстояние между городами 600 км. Какой поезд в момент встречи будет ближе к городу A?

Ответ: оба.

20. Назовите два числа, у которых количество цифр равно количеству букв, составляющих название каждого из чисел.

Ответ: сто, миллион.

21. По обеим сторонам железной дороги на протяжении одного километра расставлены столбы на расстоянии 100 м друг от друга. Сколько всего столбов расставлено на данном расстоянии?

Ответ: 22.

22. Катя решила задачу первой. Она объяснила решение трем товарищам. Каждый из них объяснил решение задачи еще троим. Каждый из этих троих объяснил решение еще троим. К началу урока все учащиеся класса знали, как решить задачу. Сколько учеников было в классе?

Ответ: 40.

23. Произведение каких трех чисел равно их сумме?

Ответ: 1, 2, 3.

24. Какие два целых числа, если их сложить, дают число, большее, чем их произведение?

Ответ: 2 и 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

(на каждое задание отводится несколько минут, нечетные номера — I вариант, четные — II вариант)

I. Делители, кратные, НОД, НОК

1. Сколько делителей у составного числа?

2. Сколько делителей у простого числа?

3. Двузначное число оканчивается 5. Может ли это число быть простым?

4. Двузначное число оканчивается 7. Может ли это число быть простым?

5. Какое простое число самое маленькое?

6. Какое двузначное простое число самое большое?

7. Какое простое число следует за числом 80?

8. Какое простое число следует за числом 60?

9. Найдите сумму простых чисел третьего десятка.

10. Найдите сумму простых чисел пятого десятка.

11. Найдите сумму всех простых делителей числа 18.

12. Найдите сумму всех простых делителей 24.

13. Найдите сумму общих делителей чисел 12 и 15.

14. Найдите сумму общих делителей чисел 10 и 14.
15. Найдите НОД (7; 5; 12).
16. Найдите НОД (7; 3; 10).
17. Найдите НОД (6; 66).
18. Найдите НОД (7; 77).
19. Найдите НОК (7; 11).
20. Найдите НОК (5; 11).
21. Найдите сумму первых трех общих кратных чисел 2 и 5.
22. Найдите сумму первых трех общих кратных чисел 3 и 5.

II. Обыкновенные дроби

1. Запишите число 6 в виде дроби со знаменателем 13.
2. Запишите число 7 в виде дроби со знаменателем 15.
3. Запишите дробь со знаменателем 14, равную $\frac{1}{3}$.
4. Запишите дробь со знаменателем 16, равную $\frac{1}{3}$.
5. Запишите дробь с числителем 14, равную $\frac{1}{3}$.
6. Запишите дробь с числителем 17, равную $\frac{1}{3}$.
7. Найдите $\frac{2}{9}$ от числа 99.
8. Найдите $\frac{2}{9}$ от числа 90.
9. $\frac{12}{35}$ числа равны 36. Чему равно число?
10. $\frac{19}{37}$ числа равны 38. Чему равно число?
11. Какую часть число 17 составляет от числа 29?
12. Какую часть число 18 составляет от числа 35?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Среди занимательного материала по математике особая роль принадлежит дидактическим и логическим математическим играм, которые являются не только средством обучения и развития, но и воспитания, так как во время игровой деятельности наблюдаются наиболее тесные и продуктивные, с элементами соревнования взаимодействия между учащимися, а также между учащимися и учителем. Математические игры очень популярны, и не всегда более сложная игра — более интересная. Миллионы людей с огромным интересом играют в самые простые игры, которые в основном были придуманы древнегреческими математиками, но интересны и увлекательны и сегодня. Для взрослых и детей игра является живой творческой деятельностью и источником неиссякаемого удовольствия. В игре учащиеся развивают свою находчивость и инициативу, приучаются к точности, аккуратности и настойчивости в преодолении препятствий. Играя, учащиеся не замечают, что упражняются в приобретении математических и других навыков.

В процессе игры у учащихся возникает и усиливается интерес к предмету, развивается внимание, наблюдательность, сообразительность, дисциплинированность. Математические игры способствуют развитию логического мышления и творческих способностей. Игра — это труд, и в ее процессе учащимся необходимо планировать свои действия и разрабатывать различные выигрышные стратегии, при этом они лучше усваивают некоторый программный материал. Идея любой игры заключается в создании проблемной ситуации с последующим ее решением, таким образом, игра стимулирует учащихся к математической деятельности. Простейшие математические игры часто используют как задачи, которые иногда решаются просто известными методами, но есть очень простые, не разрешенные до сих пор задачи, связанные с математическими играми. В качестве примера можно привести популярную игру в «крестики-нолики» на бесконечном поле, которая называется «рендзю». Эта игра бесконечна при правильной стратегии каждого из игроков, причем выигрышную стратегию никто не знает. Существуют некоторые простейшие приемы этой игры, которыми пользуются игроки, но даже при использовании их решающей является внимательность. В настоящее время разработано множество алгоритмов этой игры, связанных с перебором различных вариантов и последующим анализом игры на следующие несколько ходов, что является близким к выигрышной стратегии, однако это возможно реализовать только на компьютере.

В методическом плане следует показать учащимся, что в математике нужно определить такую стратегию игрока, при которой его шансы на выигрыш оказались бы наибольшими. В основе поиска оптимальных стратегий лежит положение о том, что противник также активен, как и сам игрок, и предпринимает все меры для того, чтобы достичь успеха. При проведении занятий следует описывать определенную выигрышную стратегию, что предполагает: указание первого хода, если выигрывает начинающий; указание ответного хода на любой ход противника; пояснение возможности указанного ответного хода; пояснение возможности проигрыша противника.

Практически к каждой теме факультативных занятий можно подобрать соответствующие игры, которые могут быть как классными (их можно проводить во время занятий), так и внеклассными (для игры дома). На факультативных занятиях можно проводить игры, коллективные и индивидуальные, при этом необходимо придерживаться следующих методических указаний:

- игра должна быть понятной;
- правила игры должны быть выражены точно, а число их должно быть невелико;
- подбор числового и геометрического материала должен соответствовать программе факультативных занятий;
- игры не должны быть утомительными и занимать много времени;
- необходимо чередовать простые и более сложные игры;
- необходимо следить за тем, чтобы каждый ученик мог принять в игре участие и проявить свою инициативу.

При проведении игры необходимо выделить следующие вопросы:

1. Цель игры.
2. Количество учащихся, играющих в игру.
3. Объем теоретического материала, необходимого для проведения игры.
4. Правила проведения игры и возможные ее варианты.
5. Принадлежности для проведения игры.

I. Простейшие игры для проведения устных и письменных вычислений

Игра «Цепочка»

Учитель составляет «цепочки» примеров так, чтобы ответ на один пример являлся бы началом другого примера, примеры произносятся учителем с паузами, во время которых учащиеся производят вычисления. Возможна игра по вариантам (командами) с записью на доске соответствующих «цепочек».

Игра «Лесенка»

Учитель составляет различные по степени сложности задания по теме факультативных занятий и располагает их на лесенке в возрастающем по трудности порядке. Возможна игра командами.

Игра «Молчанка»

На доске рисуется круг, в центре которого записывается число, на которое нужно умножить или разделить каждое число, стоящее за кругом. Учитель указывает число вне круга, которое нужно умножить или разделить на число в центре. Учащиеся производят вычисления, которые проверяются (виды проверки могут быть различными).

Игра «Кто первым скажет 100?»

Играть можно парами. Первый называет любое число, но не большее 10, второй мысленно прибавляет к этому числу новое, тоже не большее 10, и говорит сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первый скажет 100.

Игра «Лабиринт»

На доске рисуются концентрические окружности (от 5 до 10), по окружности равномерно расставляются ворота с числами, в центре записывается число, которое нужно набрать при прохождении определенного количества ворот. Игру можно использовать для проведения командных соревнований. Выигрывает тот (или та команда), кто быстрее найдет такой путь.

Игра «Угадай задуманное число»

Задачи и игры на угадывание или предсказание задуманного натурального числа сводятся не к отгадке, а к решению некоторой задачи. Играющему предлагают задумать число, которое у него не спрашивают, а предлагают задумавшему произвести над задуманным им числом разные с виду, совсем произвольные действия и сказать угадывающему, что в результате получилось. Отгадывающий получает в руки «конец нити», по которой разматывает весь клубок, т. е. отгадывает задуманное число.

Математической основой угадывания чисел чаще всего является некоторое алгебраическое тождество. Рассматривая такие задания, необходимо довести до учащихся его математическую сущность, потому что в противном случае образовательная ценность таких заданий незначительна. Будет полезнее, если учащиеся сами найдут тождество, на котором основано задание или игра. «Угадывание задуманного числа» — очень хорошее и полезное развлечение для всех играющих, потому что постепенно развивает навыки в быстром устном счете и можно задумывать малые и большие числа, смотря по желанию и силам участвующих в игре лиц.

Задания на угадывание чисел можно разбить на два типа.

1. Угадывается результат некоторых операций, произведенных над задуманным числом; в этом случае результат не зависит от величины задуманного числа.

2. Угадывается задуманное число; при этом сообщается отгадчику результат некоторых операций, которые были произведены над задуманным числом.

Пример игры «Угадай задуманное число»

В игре могут принимать участие все учащиеся, присутствующие на факультативных занятиях, можно организовать игру парами или командами.

Первому игроку (если игра организована командами) предлагается написать на листе бумаги произвольное трехзначное число и передать листок с записями другому участнику, который должен приписать к этому числу справа или слева то же число. Таким образом, третьему участнику листок передается уже с шестизначным числом, которое ему нужно разделить на 7 и передать листок с результатом следующему участнику игры. Четвертый участник должен разделить полученный на листке результат на 11 и записать свой. Пятый ученик делит полученное частное на 13 и конечный результат передает учителю. Выигрывает команда (или игрок), которая выполнила задание первой и правильно. Учитель угадывает числа, которые записывали первые участники игры. Проводить игру можно подряд несколько раз, меняя членов команды. Если на этапах деления учащиеся получают остатки, то необходимо напомнить, что при любом задуманном трехзначном числе все производимые действия деления будут без остатка. После нескольких проведенных игр можно попросить учащихся объяснить, почему в результате получается задуманное число.

Объяснение: приписывая с правой стороны то же самое число, мы фактически умножаем его на $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Игру можно разнообразить, взяв делителями числа 77 и 13 или 143 и 11.

II. Простейшие геометрические игры

Игры с использованием спичек

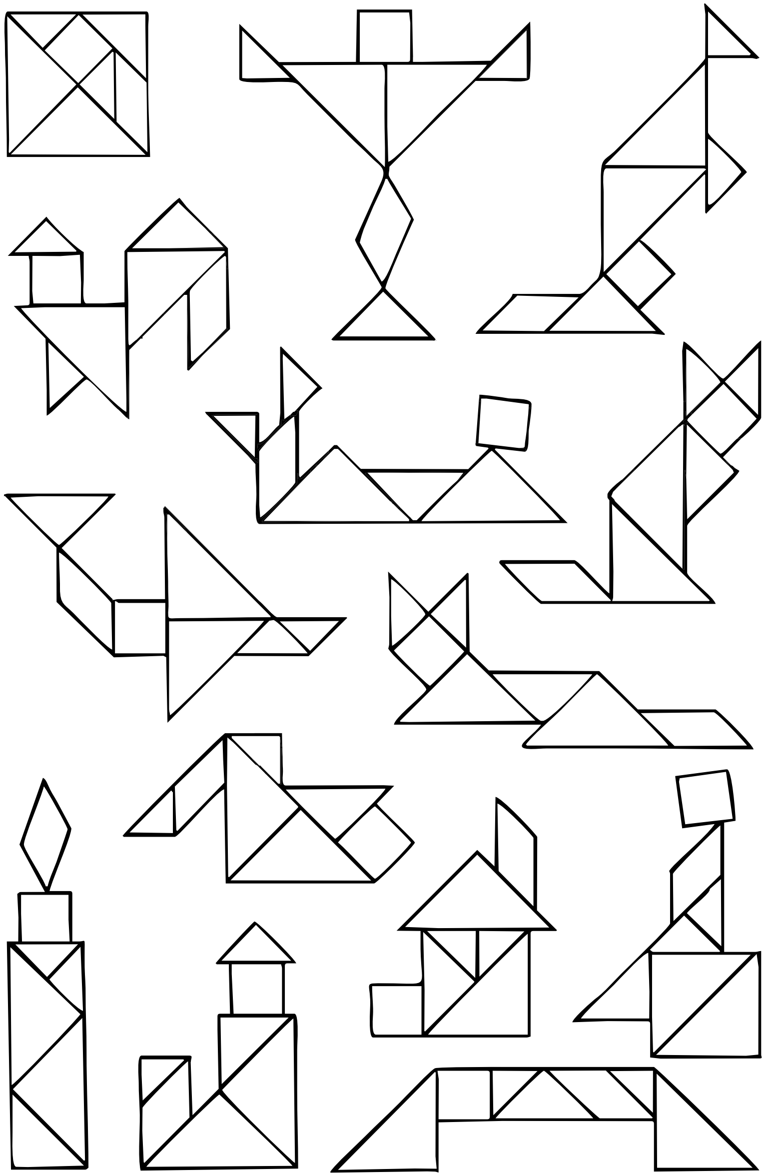
Для проведения этих игр можно использовать счетные палочки. Как правило, в таких играх предлагается сложить из спичек (счетных палочек) какую-либо фигуру, которая получается в результате решения некоторого задания, или переставить спички у данной фигуры и получить новую.

В дидактических материалах для проведения факультативных занятий содержится материал для проведения этих игр.

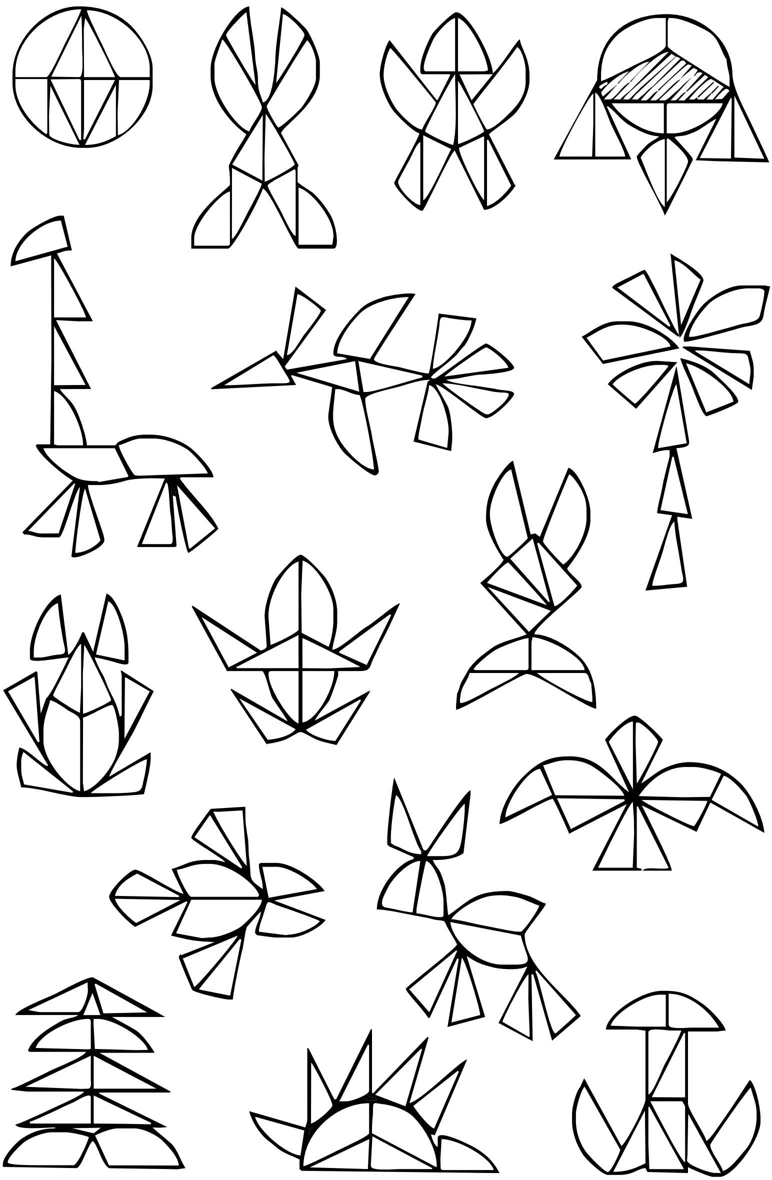
Геометрические игры-головоломки

К таким играм относятся: «Волшебный круг», «Танграм», «Головоломка Пифагора», «Архимедова игра», «Пентамино», «Гексамино», «Колумбово яйцо» и т. д. Эти игры являются эффективным средством умственного развития школьников. Они развивают пространственные представления, воображение, конструктивное мышление, а также комбинаторные способности и смекалку. Во всех предлагаемых играх необходимо сложить силуэты из всех частей, на которые разрезана данная фигура. Игры допускают соревнование между отдельными учениками или командами. Побеждает тот, кто скорее составит предлагаемую фигуру. Заготовки для проведения игры учащиеся легко могут выполнить из цветного картона, используя рисунки, которые даны в приложении.

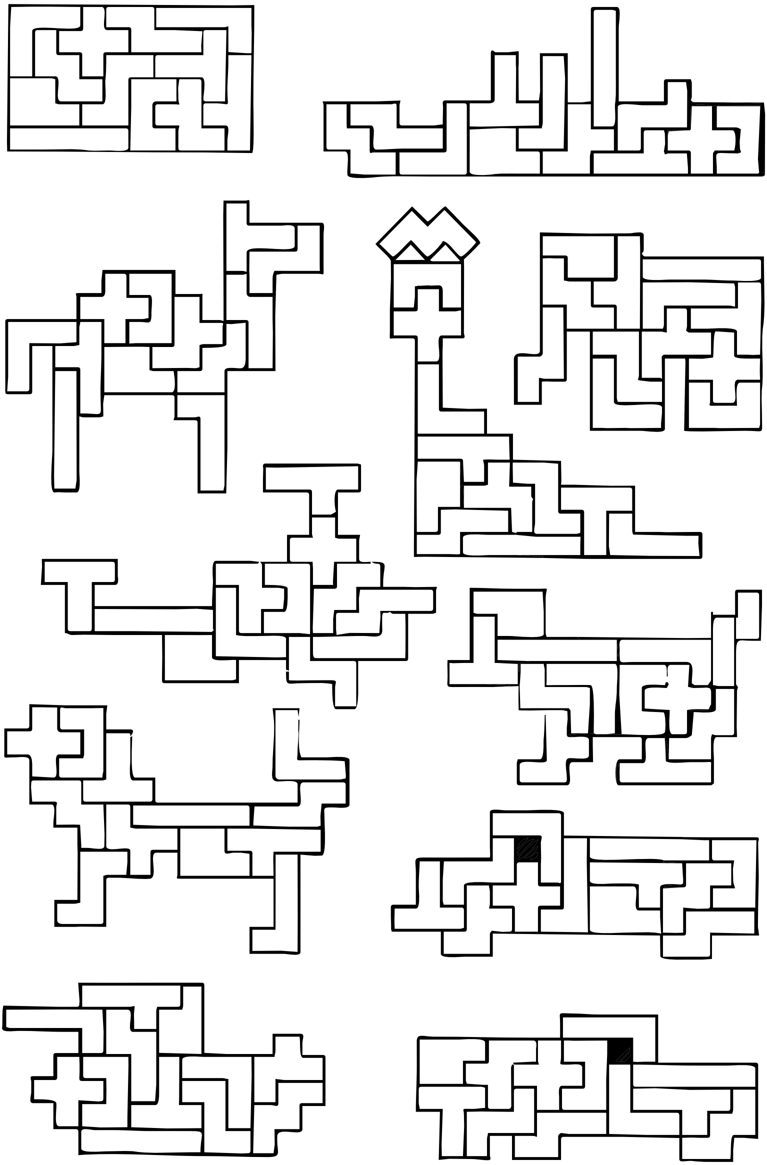
Игра «Танграм»



Игра «Волшебный круг»



Игра «Пентамино»



III. Настольные игры

Игра в 11

На поверхности стола раскладывают 11 счетных палочек. Оба играющих по очереди берут палочки, причем каждый за один раз берет не более трех. Проигрывает тот, кто возьмет последнюю палочку. Как нужно играть, чтобы не проиграть?

Игра в 15

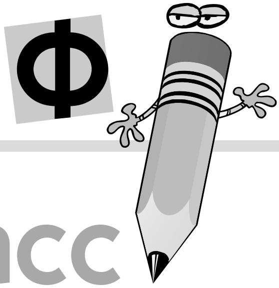
Правила аналогичны правилам игры в 11, но на столе раскладывают 15 счетных палочек. Как должен играть второй игрок, чтобы не проиграть?

Игра в 30

На поверхности стола раскладывают 30 счетных палочек. Оба играющих по очереди берут палочки, причем каждый за один раз может брать до шести палочек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю палочку. Как нужно начинать первому игру, чтобы не проиграть?

6 класс

Путешествие с математикой



Программа факультативных занятий для учащихся 6-х классов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Важной общеобразовательной задачей современной школы является развитие интеллектуального потенциала учащихся. Однако в современном образовании существует противоречие между уменьшением количества часов, отводимых на изучение математики, вызванным устранением перегрузки учащихся, и повышением требований к качеству знаний и умений. Поэтому существенное значение в устранении этого противоречия отводится факультативным занятиям, которые способствуют повышению интереса у учащихся к математике, развитию их математических способностей, формируют у них умения самостоятельно и творчески работать с научной литературой и, что особенно важно, повышают их внутреннюю мотивацию.

Данная программа факультативного курса «Путешествие с математикой» предназначена для работы с учащимися 6-х классов. Она составлена с учетом содержания программы по математике для учреждений, обеспечивающих получение среднего образования. Рассчитана данная программа на 35 часов и содержит девять тем, на изучение которых рекомендуется отводить от 2 до 7 часов учебного времени. Тематика факультативных занятий с системой соответствующих заданий позволит учителю дифференцировать процесс обучения, осуществлять личностно-ориентированное, развивающее, гуманистически направленное обучение.

Основная цель факультативных занятий: сформировать у учащихся интерес к математике как науке и с помощью соответствующих заданий развивать пространственное воображение, логическое мышление, познавательную и творческую активность, а также математические способности и внутреннюю мотивацию к предмету.

Задачи факультативных занятий:

- развивать познавательную и творческую активность учащихся;
- показать учащимся исторические аспекты возникновения становления и развития счета;
- выработать у учащихся навыки работы с научной литературой с соответствующим составлением кратких текстов прочитанной информации;

- рассмотреть с учащимися некоторые методы решения старинных арифметических и логических задач;
- познакомить учащихся с различными системами мер;
- провести с учащимися пропедевтическую работу по возможностям изучения математики в будущем.

Рекомендуемые формы и методы проведения занятий

Изложение теоретического материала факультативных занятий может осуществляться с использованием традиционных словесных и наглядных методов: рассказ, беседа, демонстрация видеоматериалов, наглядного материала, различного оборудования.

На занятиях целесообразно проведение дискуссий, выполнение учениками индивидуальных заданий, подготовка ими научных сообщений и докладов.

Ведущее место должно уделяться задачам, развивающим познавательную и творческую активность учащихся. Изложение материала может осуществляться с использованием активных методов обучения. В процессе работы учитель может, учитывая математическое развитие учащихся, сокращать или увеличивать время на изучение определенной темы за счет часов других тем.

Каждая тема предусматривает ознакомление с теоретическими сведениями, поэтому подготовку к занятиям целесообразно начинать с рекомендуемой литературы и методических рекомендаций. Некоторые вопросы факультативных занятий можно изучить глубже.

Важным условием правильной организации процесса обучения на факультативных занятиях является выбор учителем рациональной системы форм и методов обучения, ее оптимизация с учетом возрастных особенностей учащихся, уровня их математической подготовки, а также специфики образовательных и воспитательных задач.

СОДЕРЖАНИЕ

Путешествие по времени

Меры времени различных народов. Математические задачи с использованием циферблата часов. Календари различных народов. Часы-календарь. (3 ч)

Путешествие в мир десятичных дробей

Как и зачем были изобретены десятичные дроби? Примеры вычислений с десятичными дробями. Интересные задания и головоломки. (3 ч)

Путешествие в область отношений и пропорций

Что такое отношения? Пропорция и ее основное свойство. Практическое применение пропорций и отношений. Золотое сечение. Некоторые свойства пропорций. Решение задач с использованием пропорций. (5 ч)

Путешествие по дорогам денежных систем мер

Денежные системы мер различных народов. Современные денежные единицы. Решение задач с использованием различных денежных единиц. (3 ч)

Путешествие в страну занимательных процентов

Что мы знаем о процентах? Три основные задачи на проценты. Занимательные задачи на проценты. (4 ч)

Путешествие в страну рациональных чисел

История возникновения отрицательных чисел. Примеры вычислений с отрицательными числами и числами разных знаков. Рациональные числа. Занимательные и интересные задания и головоломки с рациональными числами. (2 ч)

Путешествие в область длин, площадей и объемов

Старинные меры длины, площади и объема. Возникновение мер площадей. Единицы измерения площадей. Нахождение площадей различных земельных участков. Решение задач на нахождение площадей. Составление плана квартиры и нахождение ее площади. Измерение сыпучих тел. Измерение объема жидкости. Единицы измерения сыпучих и жидких тел. Задачи с практическим содержанием. (7 ч)

Путешествие в мир масс с единой системой мер

Старинные меры массы. Задачи с практическим содержанием на нахождение массы тела. Попытки создания единой системы мер. Метрическая система мер. Задачи на сравнение вычислений в различных системах мер. (3 ч)

Путешествие в страну геометрических фигур

Геометрические фигуры: отрезок, угол, треугольник, круг, окружность. Решение занимательных задач. Диаграммы в повседневной жизни. (5 ч)

ОЖИДАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате изучения факультативных занятий «Путешествие с математикой» у учащихся углубятся знания, связанные с содержанием программы школьного курса математики, улучшатся вычислительные навыки и навыки работы с величинами, выработаются навыки самостоятельной и творческой работы с дополнительной математической литературой.

Исторический материал позволит повысить интерес учащихся к изучению математики, сформирует положительное эмоциональное отношение к учебному предмету, расширит их математический кругозор, будет способствовать развитию интеллектуальных и творческих способностей и даст возможность выявить одаренных и талантливых учащихся.

Предлагаемые факультативные занятия, отвечая образовательным, воспитательным и развивающим целям обучения, усилят прикладную направленность преподавания математики.

Таким образом, программа факультативных занятий «Путешествие с математикой», отвечая образовательным, воспитательным и развивающим целям обучения, имея большую информационную насыщенность, даст возможность познакомить учащихся с интересным занимательным математическим материалом, который окажется полезным не только для расширения их знаний по математике, но и для развития познавательных интересов и творческой активности. Факультативный курс «Путешествие с математикой» имеет и пропедевтическую направленность, его изучение позволит учащимся сформировать представления о своих возможностях в области математики.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрова, Э. Б.* Стол находок утерянных чисел / Э. Б. Александрова, В. А. Левшин. — М. : Детская литература, 1988. — 63 с.

2. *Аменицкий, Н. Н.* Забавная арифметика / Н. Н. Аменицкий, И. П. Сахаров. — М. : Наука, 1991. — 125 с.

3. *Баврин, И. И.* Старинные задачи : кн. для учащихся / И. И. Баврин, Е. А. Фрибус. — М. : Просвещение, 1994. — 128 с.

4. *Балк, М. Б.* Математика после уроков / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. — М. : Просвещение, 1971. — 464 с.

5. *Бендукидзе, А.* Бал у принцессы арифметики / А. Бендукидзе // Квант. — 1974. — № 7. — С. 66—68.

6. *Беррондо, М.* Занимательные задачи / М. Беррондо ; пер. с фр. Ю. Н. Сударева ; под ред. И. М. Яглома. — М. : Мир, 1983. — 229 с.

7. *Болгарский, Б. В.* Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский ; под ред. В. Д. Чистякова. — Минск : Вышэйшая школа, 1974. — 288 с.

8. *Виленкин, Н. Я.* Тайны бесконечности / Н. Я. Виленкин // Квант. — 1970. — № 3. — С. 3—13.

9. *Волина, В. В.* Мир математики / В. В. Волина. — Ростов н/Д. : Феникс, 1999. — 508 с.

10. Вырежи и сложи: игры-головоломки / сост. З. А. Михайлова, Р. Л. Непомнящая. — Минск : Народная асвета, 1992. — 179 с.

11. *Ганчив, И.* Математический фольклор / И. Ганчив, К. Чимев, Й. Стоянов. — М. : Знание, 1987. — 205 с.

12. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе. IV—VI кл. : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1981. — 239 с.

13. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе. VII—VIII кл. : пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.

14. *Гуцанович, С. А.* Занимательная математика в базовой школе : пособие для учителей / С. А. Гуцанович. — Минск : ТетраСистемс, 2004. — 96 с.

15. *Депман, И. Я.* История арифметики / И. Я. Депман. — М. : Просвещение, 1965. — 415 с.

16. *Депман, И. Я.* Рассказы о математике / И. Я. Депман. — Л. : Детгиз, 1957. — 142 с.

17. *Депман, И. Я.* Рассказы о решении задач / И. Я. Депман. — Л. : Детская литература, 1957. — 127 с.

18. *Депман, И. Я.* Совершенные числа / И. Я. Депман // Квант. — 1971. — № 8. — С. 1—6.

19. *Дорофеева, А. В.* Страницы истории на уроках математики / А. В. Дорофеева. — Львов : Журнал «Квантор», 1991. — 96 с.

20. *Игнатьев, Е. И.* В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М. : Наука, 1978. — 190 с.

21. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. А. П. Юшкевича. — Т. 1. — М. : Наука, 1970. — 350 с.

22. *Козлова, Е. Г.* Сказки и подсказки: Задачи для математического кружка / Е. Г. Козлова. — М. : МИРОС, 1994. — 128 с.

23. *Кордемский, Б. А.* Математическая смекалка / Б. А. Кордемский. — М. : Физматлит, 1958. — 574 с.

24. *Кордемский, Б. А.* Удивительный мир чисел / Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. — М. : Просвещение, 1986. — 143 с.

25. *Левинова, Л. А.* Приключения Кубарика и Томика, или Веселая математика / Л. А. Левинова, Г. В. Сангир. — М. : Педагогика, 1975. — 160 с.

26. *Левшин, В. А.* Магистр Рассеянных Наук / В. А. Левшин. — М. : Московский клуб, 1994. — 256 с.

27. *Леман, И.* 2×2 + шутка / И. Леман. — Минск : Народная асвета, 1985. — 71 с.

28. *Леман, И.* Увлекательная математика / И. Леман ; пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М. : Знание, 1985. — 270 с.

29. *Лоповок, А. М.* Математика на досуге / А. М. Лоповок. — М. : Просвещение, 1981. — 158 с.

30. *Мазаник, А. А.* Реши сам / А. А. Мазаник. — Минск : Народная асвета, 1980. — 240 с.

31. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров. — М. : Советская энциклопедия, 1988. — 847 с.

32. *Нагибин, Ф. Ф.* Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. — М. : Просвещение, 1984. — 160 с.

33. *Олехник, С. Н.* Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потаров. — М. : Наука, 1985. — 160 с.

34. *Перельман, Я. И.* Живая математика / Я. И. Перельман. — М. : Наука, 1978. — 160 с.

35. *Перельман, Я. И.* Занимательная арифметика / Я. И. Перельман. — М. : Физматгиз, 1959. — 190 с.

36. *Перли, С. С.* Страницы русской истории на уроках математики : нетрадиц. задачник : 5—6 кл. / С. С. Перли, Б. С. Перли. — М. : Педагогика-Пресс, 1994. — 287 с.

37. *Русанов, В. Н.* Математический кружок младших школьников : кн. для учителя / В. Н. Русанов. — М. : Просвещение, 1990. — 77 с.

38. *Русанов, В. Н.* Математический кружок младших школьников : кн. для учителя / В. Н. Русанов. — Оса : Ростаин-на-Каме, 1994. — 144 с.

39. *Свечников, А. А.* Числа, фигуры, задачи во внеклассной работе / А. А. Свечников, П. И. Сорокин. — М. : Просвещение, 1977.

40. *Хренов, Л. С.* Время и календарь / Л. С. Хренов, И. Я. Голуб. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 128 с.

41. Час веселой математики: Задачи на сказочные сюжеты, смекалку, сообразительность / авт.-сост. Л. К. Круз. — Мозырь : Белый Ветер, 2001. — 28 с.

42. *Чистяков, В. Д.* Старинные задачи по элементарной математике / В. Д. Чистяков. — Минск : Вышэйшая школа, 1978. — 270 с.

43. *Чопенко, О. П.* Про счеты / О. П. Чопенко // Квант. — 1975. — № 5. — С. 72—75.

44. *Шеврин, Л. Н.* Математика 5—6. Учебник-собеседник / Л. Н. Шеврин, А. Г. Гейн. — М. : Просвещение, 1989.

45. *Шустеф, Ф. М.* Материал для внеклассной работы по математике : кн. для учителя / Ф. М. Шустеф. — Минск : Народная асвета, 1984. — 224 с.

46. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А. П. Савин. — М. : Педагогика, 1989. — 352 с.

47. Я познаю мир : дет. энцикл. : математика / авт.-сост. А. П. Савин, В. В. Стацко, А. Ю. Котова. — М. : ООО «Изд-во АСТ» ; ООО «Изд-во Астрель», 2002. — 475 с.

Примерное тематическое планирование факультативных занятий для учащихся 6-х классов «Путешествие с математикой»

№ п/п	Тема	Опорный учебный материал по содержательным линиям	Количество часов	Программное содержание	Задания для самостоятельной работы	Литература
1	Путешествие по времени	Выражения и их преобразование. Числа и вычисления. Уравнения и неравенства	3	Меры времени различных народов. Математические задачи с использованием циферблата часов. Календари различных народов. Часы-календарь	Перечень заданий для самостоятельной работы	33, 36, 39, 40, 46
2	Путешествие в мир десятичных дробей	Числа и вычисления	3	Как и зачем были изобретены десятичные дроби? Примеры вычислений с десятичными дробями. Интересные задания и головоломки	Перечень заданий, которые учащиеся выполняют после прохождения темы	1, 7, 13, 18, 21,22, 30, 34, 38, 39
3	Путешествие в область отношений и пропорций	Числа и вычисления. Уравнения и неравенства. Координаты и функции	5	Что такое отношения? Пропорция и ее основное свойство. Практическое применение пропорций и отношений. Золотое сечение. Некоторые свойства пропорций. Решение задач с использованием пропорций	Перечень заданий для самостоятельной работы. Выполнение практических работ	5, 13, 23, 27, 28, 34, 44

№ п/п	Тема	Опорный учебный материал по содержательным линиям	Количество часов	Программное содержание	Задания для самостоятельной работы	Литература
4	Путешествие по дорогам денежных систем мер	Числа и вычисления. Выражения и их преобразование	3	Денежные системы мер различных народов. Современные денежные единицы. Решение задач с использованием различных денежных единиц	Перечень заданий для самостоятельной работы. Выполнение практических работ	24, 28, 29, 32, 35, 37, 43
5	Путешествие в страну занимательных процентов	Числа и вычисления. Уравнения и неравенства	4	Что мы знаем о процентах? Три основные задачи на проценты. Занимательные задачи на проценты	Перечень заданий для самостоятельной работы	13, 18, 21, 28, 31, 34, 38, 44
6	Путешествие в страну рациональных чисел	Выражения и их преобразование. Числа и вычисления	2	История возникновения отрицательных чисел. Примеры вычислений с отрицательными числами и числами разных знаков. Рациональные числа. Занимательные и интересные задания и головоломки с рациональными числами	Перечень заданий для самостоятельной работы	34, 38, 39

№ п/п	Тема	Опорный учебный материал по содержательным линиям	Количество часов	Программное содержание	Задания для самостоятельной работы	Литература
7	Путешествие в область длин, площадей и объемов	Числа и вычисления. Уравнения и неравенства	7	Старинные меры длины, площади и объема. Возникновение мер площадей. Единицы измерения площадей. Нахождение площадей различных земельных участков. Решение задач на нахождение площадей. Составление плана квартиры и нахождение ее площади. Измерение сыпучих тел. Измерение объема жидкости. Единицы измерения сыпучих и жидких тел. Задачи с практическим содержанием	Перечень заданий для самостоятельной работы. Выполнение практических работ	5, 6, 19, 22, 30, 45
8	Путешествие в мир масс с единой системой мер	Уравнения и неравенства. Числа и вычисления	3	Старинные меры массы. Задачи с практическим содержанием на нахождение массы тела. Попытки создания единой системы мер. Метрическая система мер. Задачи на сравнение вычислений в различных системах мер	Перечень заданий для самостоятельной работы	27, 28, 35, 37, 39, 47
9	Путешествие в страну геометрических фигур	Геометрические фигуры и их свойства. Геометрические величины. Геометрические построения	4	Геометрические фигуры: отрезок, угол, треугольник, круг, окружность. Решение занимательных задач. Диаграммы в повседневной жизни	Выполнение практических работ. Перечень заданий для самостоятельной работы	10, 23, 28, 35, 45, 46

Организация образовательного процесса

Тема 1. ПУТЕШЕСТВИЕ ПО ВРЕМЕНИ

Цель: рассмотреть с учащимися теоретические и практические аспекты применения различных единиц измерения времени, показать возможности использования полученных знаний для решения задач.

На изучение этой темы отводится 3 часа. Основное внимание в ней уделяется переводу одних единиц измерения времени площади в другие и решению задач с практическим содержанием. В дидактических материалах содержится исторический материал о мерах измерения времени и календарях, а также различного типа задания. На факультативных занятиях рекомендовано проведение практической работы по изготовлению календаря (часы-календарь), подготовка различных сообщений.

Дополнительный материал для проведения занятий

Солнечные сутки равны промежутку времени между двумя последовательными прохождениями (обязательно в полдень) Солнца через меридиан. Таким образом, сутки — это промежуток времени от одного полдня до другого. Поскольку сутки, как это показывают точные измерения, в течение года изменяются, то за единицу времени принимают средние солнечные сутки.

Для измерения более длительных промежутков времени человечество научилось использовать повторяющиеся, т. е. периодические, природные явления. Систему счета больших промежутков времени, основанных на периодических явлениях окружающего мира, а именно счета годов, месяцев и дней, называют календарем. Сочетать все необходимые единицы было трудно, потому что ни лунный месяц, ни солнечный год не содержат целого числа суток. Поэтому при создании календаря пришлось вводить условный календарный год, в котором целое число суток, и условный календарный месяц с целым числом суток. Вследствие этого календарь возник не сразу. Латинское слово *calendarium* означает «долговая книга». В Древнем Риме должники платили причитающиеся с них проценты первого числа каждого месяца, которое объявлялось глашатаями и называлось «календы». Зарождение календаря можно отнести к древнейшим завоеваниям человечества и сопоставимо с появлением письменности и счета. В разное время у разных народов появились различные календари, первые из которых были примитивными. В результате попыток согласования суток, месяца и года возникли три системы календарей:

а) лунные — в них согласовывали календарный месяц с фазами Луны,

б) солнечные — в них согласовывали продолжительность года с вращением Земли вокруг Солнца,

в) лунно-солнечные — в них согласовывали и то и другое.

Лунный календарь — самая древняя система счета времени. В его основе лежал промежуток времени между двумя последовательными одинаковыми фазами Луны. Постепенно было установлено, что в лунном месяце 29,5 суток, а, значит, в лунном году 354 суток, что было на 11,25 суток короче продолжительности солнечного года. Люди заметили, что каждая фаза Луны длится около семи суток, поэтому лунный месяц разделили на четыре недели продолжительностью семь дней. Дни недели получили названия от семи «блуждающих» небесных светил: суббота — день Сатурна, понедельник — день Луны, вторник — день Марса, среда — день Меркурия, четверг — день Юпитера, пятница — день Венеры, воскресенье — день Солнца.

Многие из этих названий недели сохранились в некоторых европейских странах (Франция, Англия, Италия и др.).

Первый лунно-солнечный календарь появился в Древнем Китае. А в нач. 1-го тыс. до н. э. такой календарь появился в Древней Греции. В его основе лежит тропический год, который равен 365,24220 суток. В таком календаре год состоит из 12 лунных месяцев, по 29 и 30 дней в каждом, и были введены «високосные годы», которые содержали 13 месяцев. Этот календарь применялся в Вавилоне, Иудее, Древнем Риме и до сих пор действует в Израиле и в христианском церковном календаре.

Как известно, прибор, с помощью которого измеряется время, называется часами. Их изобрели в древности. Первыми часами было Солнце. Солнечные, а затем водяные часы применяли индийцы, египтяне и другие древние народы. Солнечные часы явились первыми приборами для измерения времени.

Водяные часы считались более совершенными. Ими пользовались в Древнем Египте, Иудее, Вавилоне, Греции, Китае. Самые простейшие водяные часы представляли собой сосуд с отверстиями, из которых вода выливалась за определенный промежуток времени. Более поздние водяные часы имели различные формы и состояли из нескольких сосудов.

Комментарии и ответы

К «Заданиям для самостоятельной работы»

1. Пусть мальчику сейчас x лет, тогда через 2 года ему будет $(x+2)$ года, 2 года назад ему было $(x-2)$ года. По условию

$$2(x-2)=x+2;\ 2x-4=x+2;\ x=6.$$

Пусть девочке y лет, тогда через 3 года ей будет $(y+3)$ года, 3 года назад ей было $(y-3)$ года; по условию $3(y-3)=y+3$; $3y-9=y+3$; $2y=12$; $y=6$, т. е. девочке и мальчику по 6 лет.

2. Пусть сыну сейчас x лет, тогда отцу сейчас $3x$ лет; 5 лет назад сыну было $(x-5)$ лет, отцу — $(3x-5)$ лет. По условию $(x-5)\cdot 4=3x-5$; $4x-20=3x-5$; $x=15$, т. е. сыну 15 лет.

3. Пусть отвечающему теперь x лет. Тогда получаем выражение: $3(x+3)-3(x-3)$, значение которого равно 18, т. е. ему 18 лет.

4. Жене — 1 год и 9 месяцев, Володе — 3 года и 6 месяцев; Наде — 5 лет и 3 месяца; Алеше — 10 лет и 6 месяцев; Лиде — 21.

6. Может, например 1, 8, 15, 22, 29-е числа.

7. Четными числами, на которые пришлись три воскресенья, могут быть только 2, 16, 30-е числа. Тогда 20-е число — четверг.

8. 1.1.11; 2.2.22; 3.3.33; 4.4.44; 5.5.55; 6.6.66; 7.7.77; 8.8.88; 9.9.99.

9. Сначала пустить обое часов. Когда закончится 7 минут, на 11-минутных часах останется 4 минуты. Отсчитываем эти 4 минуты и затем снова ставим часы на 11 минут, $4+11=15$.

10. Часовщик открыл кабинет и услышал последний удар 12-часового боя.

11. Пусть Татьяна станет старше Оли через x лет, тогда имеем уравнение:

$$11+x=3(1+x);\ 11+x=3+3x;\ 2x=8;\ x=4;\ 11+x=15,$$

т. е. Татьяне будет 15 лет.

12. 31 декабря. Разговор состоялся 1 января, сейчас Саше 11 лет, 31 декабря этого года ему исполнится 12, а 31 декабря следующего года — 13 лет.

13. В 1 ч, 2 ч, ..., 12 ч часы пробили $1+2+3+...+12=78$ (раз). Кроме того, они пробили в 12:30, 1:30, ..., 2:30, ..., 11:30, т. е. 12 раз. Всего: $78+12=90$ (раз).

14. Если сын отца профессора может быть братом профессора, то отец сына профессора — это сам профессор и такого не может быть.

15. 6 детей.

16. 3 девочки, 4 мальчика.

К «Дополнительным задачам о часах»

1. Поскольку хозяин вернулся вечером, то механические часы на самом деле показали 20:21, аналоговые часы — 19:50. Таким образом, электроэнергия отсутствовала 20:21 – 19:50 = 31 (мин). С момента включения электроэнергии прошло 6 ч 03 мин. Следовательно, электроэнергию дали в 20:21 – 6:03 = 14:18, тогда отключили ее в 14:18 – 0:31 = = 13:47. Итак, начало перерыва — 13:47, конец — 14:18.

2. Часы расходятся на 3 мин в час. Расхождение за все время составило 1 час. Следовательно, прошло 60 : 3 = 20 (ч). За это время будильник ушел вперед на $20 \cdot 2 = 40$ (мин). Следовательно, часы были поставлены в 8:00 – 20:20 = 32:00 – 20:20 = 11:40, т. е. в 11 ч 40 мин.

3. Если часы механические, то все трое часов будут показывать одинаковое время через $12 \cdot 60 = 720$ (суток).

Если часы электронные, то все трое часов будут показывать через $24 \cdot 60 = 1440$ (суток).

4. Пусть до отхода поезда осталось x минут. Переводя все в минуты, получаем, что настоящее время $6 \cdot 60 - x = 360 - x$, время 50 минут назад $360 - x - 50 = 310 - x$. 3 часа = 180 минут, вчетверо больше минут после трех, чем осталось до отправления поезда: $180 + 4x$. Получаем уравнение: $310 - x = 180 + 4x$; $5x = 130$, $x = 26$, т. е. было 5 ч 34 мин.

Определим момент встречи стрелок между 5 и 6 часами. В этот момент часовая и минутная стрелки проходят одинаковую часть полной окружности. Пусть это произойдет через x минут после 5 часов. Тогда минутная стрелка пройдет $\frac{x}{60}$ часть полной окружности, часовая — $\frac{5}{12}$ полной окружности и еще $\frac{x}{60}$ часть $\frac{1}{12}$-й окружности (5 минут соответствуют для часовой стрелки одному часу); итого часовая стрелка пройдет $\frac{5}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}$ часть полной окружности. Итак, $\frac{x}{60} = \frac{5}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}$, $12x = 300 + x$, $11x = 300$, $x = 27\frac{3}{11}$, таким образом, разговор состоялся в 5 ч 34 мин, стрелки сошлись в 5 ч $27\frac{3}{11}$ мин.

5. За 12 часов часовая и минутная стрелки сходятся 11 раз. Пусть после k часов ($k = 0, 1, ..., 10$) стрелки сошлись в момент, когда часовая и минутная стрелки показывали x минут. Тогда минутная стрелка прошла $\frac{x}{60}$ часть круга, часовая — $\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}$, отсюда получаем уравнение: $\frac{x}{60} = \frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}$; $12x = 60k + x$; $1x = 60k$; $x = \frac{60}{11}k$.

Получаем следующие значения, когда сходятся обе стрелки:

k	x	Время
0	0	0 ч 0 мин
1	$5\frac{5}{11}$ мин	1 ч $5\frac{5}{11}$ мин
2	$10\frac{10}{11}$ мин	2 ч $10\frac{10}{11}$ мин
3	$16\frac{4}{11}$ мин	3 ч $16\frac{4}{11}$ мин
4	$21\frac{9}{11}$ мин	4 ч $21\frac{9}{11}$ мин
5	$27\frac{3}{11}$ мин	5 ч $27\frac{3}{11}$ мин
6	$32\frac{8}{11}$ мин	6 ч $32\frac{8}{11}$ мин
7	$38\frac{2}{11}$ мин	7 ч $38\frac{2}{11}$ мин
8	$43\frac{7}{11}$ мин	8 ч $43\frac{7}{11}$ мин
9	$49\frac{1}{11}$ мин	9 ч $49\frac{1}{11}$ мин
10	$54\frac{6}{11}$ мин	10 ч $54\frac{6}{11}$ мин

Определим моменты, когда стрелки направлены в противоположные стороны. Рассматривая циферблат, замечаем, что на протяжении 12 часов таких моментов 11. Пусть часовая стрелка в момент, когда стрелки направлены в противоположные стороны, находится между k и $k + 1$ часами, а минутная стрелка показывает x минут. Минутная стрелка при этом прошла $\frac{x}{60}$, часовая — $\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}$ часть. При $k < 6$ часовая стрелка отстает от минутной, поэтому получаем уравнение:

$$\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12} + \frac{1}{2} = \frac{x}{60};$$

$$60k + x + 360 = 12x;\ 11x = 60k + 360;\ x = \frac{60}{11}k + \frac{360}{11};\ k = 0,\ 1,\ ...,\ 5. \quad (1)$$

При $k > 6$ часовая стрелка опережает минутную, поэтому получаем уравнение:

$$\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12} - \frac{1}{2} = \frac{x}{60};$$

$$60k + x - 360 = 12x;\ x = \frac{60}{11}k - \frac{360}{11};\ k = 7,\ 8,\ ...,\ 11. \quad (2)$$

Подставляя в формулы (1) и (2) значения k, получаем таблицу:

k	x	Время
0	$32\frac{8}{11}$ мин	0 ч $32\frac{8}{11}$ мин
1	$38\frac{2}{11}$ мин	1 ч $38\frac{2}{11}$ мин
2	$43\frac{7}{11}$ мин	2 ч $43\frac{7}{11}$ мин
3	$49\frac{1}{11}$ мин	3 ч $49\frac{1}{11}$ мин
4	$54\frac{6}{11}$ мин	4 ч $54\frac{6}{11}$ мин
5	60 мин	6 ч 00 мин
7	$5\frac{5}{11}$ мин	7 ч $5\frac{5}{11}$ мин
8	$10\frac{10}{11}$ мин	8 ч $10\frac{10}{11}$ мин
9	$16\frac{4}{11}$ мин	9 ч $16\frac{4}{11}$ мин
10	$21\frac{9}{11}$ мин	10 ч $21\frac{9}{11}$ мин
11	$27\frac{3}{11}$ мин	11 ч $27\frac{3}{11}$ мин

6. Рассмотрим два случая:

1) Часовая стрелка находится справа от цифры 6, а минутная — слева. Пусть минутная стрелка указывает x минут, а часовая расположена между k и $k+1$ часами ($k = 0, 1, ..., 5$). Тогда часовая стрелка прошла $\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}$ часть окружности, а минутная — $\frac{x}{60}$ часть окружности. Учитывая, что стрелки отстоят от цифры 6 одинаково, получаем уравнение:

$$\frac{1}{2} - \frac{k}{12} - \frac{x}{60 \cdot 12} = \frac{x}{60} - \frac{1}{2}; \; 360 - 60k - x = 12x - 360; \; 13x = 720 - 60k;$$

$$x = \frac{720}{13} - \frac{60k}{13}; \; k = 0, 1, ..., 5. \qquad (1)$$

2) Часовая стрелка находится слева от цифры 6, а минутная — справа. Получаем уравнение:

$$\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{60};$$

$$60k + x - 360 = 360 - 12x; \; 13x = 720 - 60k;$$

$$x = \frac{720}{13} - \frac{60k}{13}; \; k = 6, 7, ..., 11. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$x = \frac{720}{13} - \frac{60k}{13}; \; k = 0, 1, ..., 11.$$

Подставляем в нее значения k, получаем таблицу:

k	x	Время
0	$55\frac{5}{13}$ мин	0 ч $55\frac{5}{13}$ мин
1	$50\frac{10}{13}$ мин	1 ч $50\frac{10}{13}$ мин
2	$46\frac{2}{13}$ мин	2 ч $46\frac{2}{13}$ мин
3	$41\frac{7}{13}$ мин	3 ч $41\frac{7}{13}$ мин
4	$36\frac{12}{13}$ мин	4 ч $36\frac{12}{13}$ мин

k	x	Время
5	$32\frac{4}{13}$ мин	5 ч $32\frac{4}{13}$ мин
6	$27\frac{9}{13}$ мин	6 ч $27\frac{9}{13}$ мин
7	$23\frac{1}{13}$ мин	7 ч $23\frac{1}{13}$ мин
8	$18\frac{6}{13}$ мин	8 ч $18\frac{6}{13}$ мин
9	$13\frac{11}{13}$ мин	9 ч $13\frac{11}{13}$ мин
10	$9\frac{3}{13}$ мин	10 ч $9\frac{3}{13}$ мин
11	$4\frac{8}{13}$ мин	11 ч $4\frac{8}{13}$ мин

7. Пусть минутная стрелка указывает x минут, а часовая — время между k и $k + 1$ $(0 \le k \le 5)$. Тогда минутная стрелка отстоит от 12 на $\frac{x}{60}$ часть окружности, а часовая — $\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}$. По условию $2\left(\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12}\right) = \frac{x}{60}$; $\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12} = \frac{x}{60}$; $60k + x = 6x$; $5x = 60k$; $x = 12k$.

Получаем таблицу:

k	x	Время
0	0 мин	0 ч 0 мин
1	12 мин	1 ч 12 мин
2	24 мин	2 ч 24 мин
3	36 мин	3 ч 36 мин
4	48 мин	4 ч 48 мин
5	60 мин	6 ч 00 мин

8. В данном случае по сравнению с предыдущей задачей получаем другое уравнение:

$$\frac{k}{12} + \frac{x}{60 \cdot 12} = 2 \cdot \frac{x}{60};\ 60k + x = 24x;\ 23x = 60k;\ x = \frac{60k}{23};\ k = 6, 7, ..., 11.$$

Получаем таблицу:

k	x	Время
6	$15\frac{15}{23}$ мин	6 ч $15\frac{15}{23}$ мин
7	$18\frac{6}{23}$ мин	7 ч $18\frac{6}{23}$ мин
8	$20\frac{20}{23}$ мин	8 ч $20\frac{20}{23}$ мин
9	$23\frac{11}{23}$ мин	9 ч $23\frac{11}{23}$ мин
10	$26\frac{2}{23}$ мин	10 ч $26\frac{2}{23}$ мин
11	$28\frac{16}{23}$ мин	11 ч $28\frac{16}{23}$ мин

9. Предполагается, что 3 с — промежуток между началом 1-го удара и началом 3-го; между этими ударами 2 промежутка, каждый из них длится $3 : 2 = 1{,}5$ (с). Между 1-м и 7-м ударами 6 промежутков; $6 \cdot 1{,}5 = 9$ (с).

Тема 2. ПУТЕШЕСТВИЕ В МИР ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Цель: познакомить учащихся с историей возникновения и развития десятичных дробей, систематизировать знания, полученные на уроках математики по данной теме.

На изучение этой темы отводится 3 часа. Основное внимание в ней уделяется десятичным дробям и соответствующим вычислениям с использованием десятичных дробей. Для проведения занятий предлагается исторический материал, который учитель может расширить, используя прилагаемый список литературы, а также интересные задания и головоломки.

Дополнительный материал для проведения занятий

Зарождение и развитие десятичных дробей в Китае было тесно связано с метрологией (учением о мерах). Уже во II в. до н. э. там существовала десятичная система мер длины. Примерно в III в. н. э. десятичный счет распространился на меры массы и объема. Тогда и было создано понятие о десятичной дроби, сохранившей, однако, метрологическую форму.

В Древнем Китае уже пользовались десятичной системой мер, обозначали дробь словами, используя меры длины чи: цуни, доли, порядковые, шерстинки, тончайшие, паутинки. Например, для дроби 1,243276 запись была:

1 чи, 2 цунь, 4 доли, 3 порядковых, 2 шерстинки, 7 тончайших, 6 паутинок.

Если вначале в Китае десятичные дроби выступали в качестве метрологических, конкретных дробей, т. е. десятых, сотых и т. д. частей более крупных мер, то позже они стали все больше приобретать характер отвлеченных десятичных дробей. Целую часть стали отделять от дробной особым иероглифом «дянь» (точка). Но все равно и в древности, и в средние века китайские десятичные дроби не имели полной самостоятельности, а оставались связанными с метрологией. Однако уже Лю Хуэй в III в. н. э. в «Математике в девяти книгах» рекомендовал пользоваться дробями со знаменателями 10, 100 и т. д., т. е. из множества дробных чисел он выделил те, у которых знаменатели записываются единицей с последующими нулями.

В V в. китайский ученый Цзю-Чун-Чжи принял за единицу не чи, а чжан, равный 10 чи, что расширило возможности в записи десятичных дробей.

В странах Востока попытки введения десятичных дробей делались еще в X в., сразу после введения десятичной нумерации. Такие дроби имеются в «Книге разделов об индийской арифметике» Абу-л-Хасана Ахмада ал-Уклидиси («ал-Уклидиси» можно перевести как «последователь Евклида»), написанной в Дамаске в 952—953 гг. Автор, не давая общего описания системы десятичных дробей и их свойств, приводит только примеры употребления их при делении нечетных чисел пополам и в других вычислениях. Но интересно, что целую часть десятичной дроби он отделял от дробной апострофом сверху. Однако трактат ал-Уклидиси не оказал особого влияния на других ученых стран Востока.

В Европе, как и на Востоке, долгое время были в ходу шестидесятеричные дроби (знаменатель которых — степени числа 60). В анонимном произведении «Алгоритм дробей» XIV в. указывается, что вместо основания 60 можно взять и другое, например 12 или 10. Во второй половине того же века систему десятичных дробей описал Иммануил Бонфис из Тараскона. Он являлся одним из представителей процветавшей тогда в Южной Франции школы еврейских астрономов и математиков. В трактате «Путь деления», написанном на древнееврейском языке, Бонфис строит систему дробей, в которой 1 = 10 примам, 1 прима = = 10 секундам, 1 секунда = 10 терциям и т. д., и кратко объясняет правила основных операций. Это сочинение, скорее всего, не получило известности у современников из-за языка, на котором было написано. Трактат обнаружили около 300 лет тому назад.

Изобретателем десятичных дробей считают Симона Стевина, уроженца Брюгге. Вначале он был купцом, затем во время Нидерландской революции — инженером в войсках. Книга «Десятая» — это маленькая работа (всего 7 страниц), содержащая объяснение записи и правил действий с десятичными дробями. В ней автор старается убедить людей пользоваться десятичными дробями, говоря, что при этом «изживаются трудности, распри, ошибки, потери и прочие случайности, обычные спутники расчетов».

Стевин был скромным человеком. Вот как он пишет о себе и своем изобретении: «Может же недалекий умом деревенский медведь по счастливой случайности набрести на дорогой клад, не применяя никакой учености! Такой именно случай имел место здесь», т. е. в его книге. На самом деле Симон Стевин был, конечно, человеком незаурядным, иначе он не сумел бы так доходчиво и убедительно изложить свою «случайную» находку.

Десятичные дроби. Тестовые задания

1. Как записывается число одиннадцать целых пять тысячных?
А. 11005; Б. 11,0005; В. 11,005; Г. 11,500.

2. В каком разряде числа 1,020345 записана цифра 3?

А. В разряде сотых; Б. в разряде десятитысячных;
В. в разряде тысячных; Г. в разряде стотысячных.

3. Сравните числа 0,065 и 0,5.

А. $0,065 < 0,5$; Б. $0,065 > 0,5$;
В. числа равны; Г. верный ответ не указан.

4. Соедините чертой обыкновенную дробь с равной ей десятичной дробью.

$\frac{1}{8}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{20}$ $\frac{4}{25}$ $\frac{1}{5}$

0,15 0,2 0,16 0,125 0,4

5. Какое из следующих чисел является наименьшим?
А. 0,25; Б. 0,5; В. 0,125; Г. 0,105.

6. Укажите верное равенство:

А. 0,056 м = 56 см; Б. 0,056 м = 0,56 см;
В. 0,056 м = 5,6 см; Г. 0,056 м = 560 см.

7. Выразите в килограммах 1 кг 70 г.
А. 1,7 кг; Б. 1,07 кг; В. 1,007 кг; Г. 1070 кг.

8. При подстановке какой из цифр 0, 1, 2 или 3 вместо знака «*» неравенство 6,*7 > 6,27 окажется верным?
А. 0; Б. 1; В. 2; Г. 3.

9. Вычислите: 5,6 – 0,42.
А. 5,18; Б. 6,02; В. 1,4; Г. 0,98.

10. Запишите все возможные десятичные дроби, которые можно составить из цифр 1, 2 и 3 при условии, что каждая из указанных цифр будет использована только один раз. Сколько таких дробей?
А. 12; Б. 10; В. 8; Г. 6.

11. На координатной прямой найдите точку, которая является серединой отрезка, соединяющего точки с координатами 0,24 и 0,258. В ответе запишите координату середины.

Комментарии и ответы

К «Заданиям для самостоятельной работы»

1. 1) 5,2 + 1,8 = 7; 4) 7,36 – 3,36 = 4;
2) 3 + 1,08 = 4,08; 5) 63 – 2,7 = 60,3;
3) 4,2 + 17 = 21,2; 6) 5,7 – 4 = 1,7.

2. Запятая.

3. Например, 5,23.

4. ((0,3 + 7,7) · 0,125).

5. 0,1 + 0,2 + 0,3 + ... + 1,8 + 1,9 + 2 = ((0,1 + 2) · 10 = 21).

6. $(13 - 2{,}46 : 3{,}54) \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{2}\right) = 0.$

7. Зашифровано слово «вычисление».

8. а) $+\begin{array}{r} 3{,}757 \\ 0{,}43 \\ \hline 4{,}187 \end{array}$; б) $-\begin{array}{r} 4{,}23 \\ 2{,}783 \\ \hline 1{,}447 \end{array}$.

9. Пятачок: 26,7 – 22,9 = 3,8 (кг);
Кролик: 26,7 – 23,8 = 2,9 (кг);
Пятачок и Кролик вместе: 6,7 кг;
Винни-Пух: 26,7 – 6,7 = 20 (кг).

Десятичные дроби. Тесты

1. В.
2. Б.
3. А.
4. $\frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{2}{5}$ $\quad$ $\frac{3}{20}$ $\quad$ $\frac{4}{25}$ $\quad$ $\frac{1}{5}$

0,15 $\quad$ 0,2 $\quad$ 0,16 $\quad$ 0,125 $\quad$ 0,4

5. Г.
6. В.
7. Б.
8. Г.
9. А.
10. 12.
Если в целой части 2 цифры, то имеем числа: 12,3; 13,2; 21,3; 23,1; 31,2; 32,1. Еще 6 чисел получаем, перенеся в этих числах запятую на один разряд влево.
11. 0,249.

Тема 3. ПУТЕШЕСТВИЕ В ОБЛАСТЬ ОТНОШЕНИЙ И ПРОПОРЦИЙ

Цель: систематизировать знания, полученные на уроках математики по базовой программе, выработать навыки при решении различных типов задач с использованием отношений, пропорций и основного свойства пропорции.

На изучение этой темы отводится 5 часов. Основное внимание в ней уделяется отношениям, пропорциям, некоторым свойствам пропорции и практическому применению пропорций и отношений при решении задач.

Для проведения занятий предлагается интересный материал, связанный с золотым сечением, а также интересные задания и головоломки.

Дополнительный материал для проведения занятий

В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в «Началах» Евклида. Во 2-й книге «Начал» дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались Гипсикл (II в. до н. э.), Папп (III в. н. э.) и др. В средневековой Европе с золотым делением познакомились по арабским переводам «Начал» Евклида. Переводчик Дж. Кампано из Наварры (III в.) сделал к переводу комментарии. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.

В эпоху Возрождения усиливается интерес к золотому делению среди ученых и художников в связи с его применением как в геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре. В фасаде древнегреческого храма Парфенона также присутствуют золотые пропорции. При его раскопках обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого деления.

В 1509 г. в Венеции была издана книга Луки Пачоли «Божественная пропорция» с блестяще выполненными иллюстрациями, ввиду чего полагают, что их сделал Леонардо да Винчи. Книга была восторженным гимном золотой пропорции. Леонардо да Винчи также много внимания уделял изучению золотого деления. Его творчество и сегодня не перестает восхищать пропорциями золотого сечения.

В то же время на севере Европы, в Германии, над теми же проблемами трудился Альбрехт Дюрер, который подробно разработал теорию пропорций человеческого тела. Важное место в своей системе соотношений Дюрер отводил золотому сечению. Рост человека делится в золотых пропорциях линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных рук, нижняя часть лица — ртом и т. д. Известен пропорциональный циркуль Дюрера.

Комментарии и ответы

К «Заданиям для самостоятельной работы»

1. а) $0,6 : \frac{1}{12} = \frac{3}{5} \cdot 12 = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$;

б) $\frac{7}{18} : 0,18 = \frac{7}{18} : \frac{18}{100} = \frac{7 \cdot 100}{18 \cdot 18} = \frac{175}{81} = 2\frac{13}{81}$;

в) $0,0003 : 0,003 = 3 : 30 = 0,1$.

2. Стоимость одного метра светлой ткани: 180 000 : 15 = 12 000 (р.), стоимость одного метра темной ткани: 168 000 : 12 = 14 000 (р.), отсюда стоимость одного метра темной ткани выше.

3. Скорость до обеда: $15 : 3 = 5\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$;

после обеда турист прошел 31 − 15 = 16 (км);

скорость после обеда: $16 : 4 = 4\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$, т. е. скорость до обеда была выше.

4. За 60 с бегун пробегает 600 м, за час — 600 · 60 = 36 000 (м), т. е. его скорость $36\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и она больше скорости теплохода.

5. Первая бригада в час красит 45 : 5 = 9 (м^2), вторая — 44 : 4 = 11 (м^2), т. е. производительность второй бригады выше.

6. $15 : 12 = 5 : 4$; $32 : 16 = 2 : 1$; $35 : 28 = 5 : 4$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2 : 1$, отсюда следуют пропорции: $15 : 12 = 35 : 28$; $32 : 16 = \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$.

7. $900\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{900\,000}{3600} = 250\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

$80\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{80\,000}{3600} = 22\frac{2}{9}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

$900 : 80 = 250 : 22\frac{2}{9}$.

8. а) $\frac{1000\text{ г}}{1000\text{ см}^3} = 1\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$; $\frac{1\text{ кг}}{1\text{ л}} = \frac{1\text{ кг}}{1\text{ дм}^3} = \frac{1\text{ кг}}{0{,}001\text{ м}^3} = 1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

б) $\frac{4\text{ т}}{5\text{ м}^3} = \frac{4000\text{ кг}}{5\text{ м}^3} = 800\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $800\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{800 \cdot 1000}{1\,000\,000} = 0{,}8\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$;

в) $\frac{1412{,}5\text{ г}}{125\text{ см}^3} = 11{,}3\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = \frac{0{,}0113}{0{,}000001} = 11\,300\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

9. Масса нефти: 50 · 800 = 40 000 = 40 (т).

Масса свинцового куба: 1 · 11 300 = 11,3 (т).

Масса 50 м^3 нефти больше массы 1 м^3 свинца.

10. $375\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{375\,000}{1\,000\,000}\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0{,}375\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Масса пихтового кубика: 0,375 · 216 = 81 (г).

Объем алюминиевого кубика: 81 : 2,7 = 30 (см^3).

11. Плотность тела: $\frac{361}{380} = 0{,}95 \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$. Так как $0{,}95 > 0{,}8$, то в нефти тело утонет; так как $0{,}95 < 1$, то в воде тело будет плавать.

12. $1 : 2{,}4 = 149 : x$,
$x = 149 \cdot 2{,}4 = 357{,}6$ (млн км^2).

13. Рожью: $9 : 5 = x : 410$; $x = \frac{410 \cdot 9}{5} = 82 \cdot 9 = 738$ (га);
ячменем: $9 : 3 = 738 : x$; $x = \frac{738 \cdot 3}{9} = 246$ (га).

14. $8{,}5 : x = 25 : 20$; $x = \frac{8{,}5 \cdot 20}{25} = 6{,}8$ (м);
$15 : x = 25 : 20$; $x = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (м).

15. Число частей: $2 + 7 + 5 = 14$.
На одну часть приходится: $35 : 14 = 2{,}5$.
$2{,}5 \cdot 2 = 5$; $2{,}5 \cdot 7 = 17{,}5$; $2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5$.
Проверка: $5 + 17{,}5 + 12{,}5 = 35$.

16. Для удобства переведем дроби в обыкновенные: $0{,}75 = \frac{3}{4}$; $0{,}8 = \frac{4}{5}$.
Приведем дроби к общему знаменателю: $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5} \to \frac{40}{60}; \frac{45}{60}; \frac{48}{60}$.

Следовательно, число нужно разделить пропорционально числам: 40; 45; 48.
Количество частей: 133.
На одну часть приходится: $798 : 133 = 6$.
Искомые числа: $6 \cdot 40 = 240$; $6 \cdot 45 = 270$; $6 \cdot 48 = 288$.
Проверка: $240 + 270 + 288 = 798$.

17. Разложить число обратно пропорционально числам 1, 2, 4, 5 — значит разложить его прямо пропорционально числам $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ или 20; 10; 5; 4.
Сумма частей: 39; на 1 часть приходится $741 : 39 = 19$.
$19 \cdot 20 = 380$; $19 \cdot 10 = 190$; $19 \cdot 5 = 95$; $19 \cdot 4 = 76$.
Проверка: $380 + 190 + 95 + 76 = 741$.

18. В отношении $1 : 3 : 6$ умножим все числа на 5, а в отношении $5 : 3$ — на 6. Получим отношение четырех чисел: $5 : 15 : 30 : 18$.

Сумма частей: 68, на 1 часть приходится 136 : 68 = 2. Искомые числа: $2 \cdot 5 = 10$; $2 \cdot 15 = 30$; $2 \cdot 30 = 60$; $2 \cdot 18 = 36$.

Проверка: $10 + 30 + 60 + 36 = 136$; $10 : 30 : 60 = 1 : 3 : 6$; $30 : 18 = 5 : 3$.

19. Обратно пропорционально числам 2 и 3 означает прямо пропорционально числам $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, т. е. числам $\frac{3}{6}$ и $\frac{2}{6}$ или числам 3 и 2.

Итак, получим: числа должны быть прямо пропорциональны числам 1 и 2; 3 и 2. Уравняем в отношениях члены 2 и 3, получим 3 : 6 и 6 : 4 или 3 : 6 : 4; сумма частей 13; на 1 часть приходится 52 : 13 = 4. Числа: $4 \cdot 3 = 12$; $4 \cdot 6 = 24$; $4 \cdot 4 = 16$.

20. а) $x = \frac{12 \cdot 2}{3} = 8$;

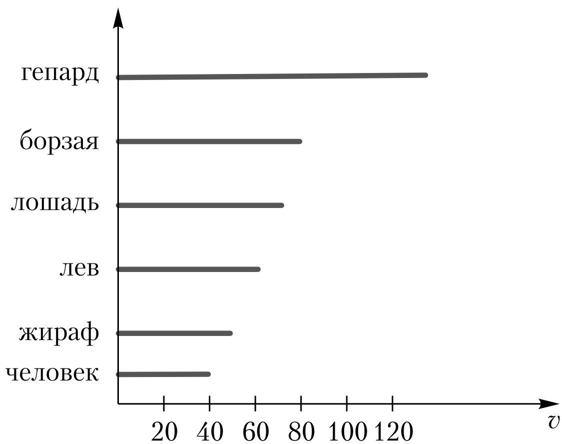
б) $x = \frac{63 \cdot 143}{117} = 77$;

в) $x = \frac{6 \cdot 35}{7} = 30$.

21. Например. В трех мешках содержится 240 кг картофеля. Сколько мешков требуется для 53 кг картофеля?

$3 : x = 240 : 53$; $x = \frac{3 \cdot 53}{240} = \frac{53}{80}$, т. е. достаточно одного мешка.

22. Отношение скоростей: 40 : 50 : 60 : 64 : 72 : 120 = 20 : 25 : 30 : 32 : 36 : 60.



23. Человек: $40\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{40\,000}{3600} = 11\frac{1}{9}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 100 м пробежит за $100 : \frac{100}{9} = 9$ (с).

Лев: $60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{60\,000}{3600} = \frac{50}{3} = 18\frac{2}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 100 м пробежит за $100 : \frac{50}{3} = 6$ (с).

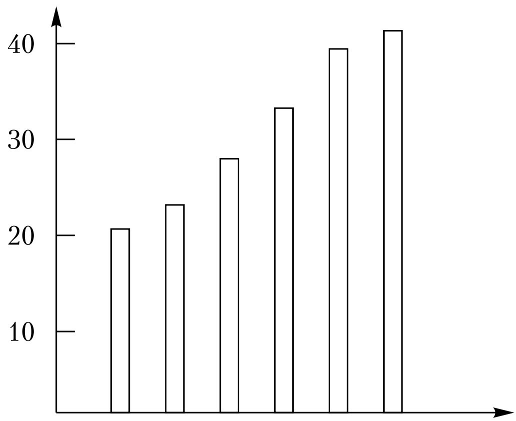
Борзая: $72\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{72\,000}{3600} = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 100 м пробежит за $100 : 20 = 5$ (с).

Гепард: $120\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{120\,000}{3600} = \frac{100}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 33\frac{1}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 100 м пробежит за $100 : \frac{100}{3} = 3$ (с).

$$S = v \cdot t;\ v = \frac{100}{t};\ k = 100.$$

24. Коэффициент пропорциональности — 20.

Диаграмма



Тема 4. ПУТЕШЕСТВИЕ ПО ДОРОГАМ ДЕНЕЖНЫХ СИСТЕМ МЕР

Цель: познакомить учащихся с историей возникновения и развития денежных систем мер различных народов и современными денежными единицами, выработать умения и навыки решения задач с использованием различных денежных единиц.

На изучение этой темы отводится 3 часа. Основное внимание в ней уделяется переводу одних денежных единиц в другие и задачам с практическим содержанием. Для проведения занятий предлагается интересный исторический материал, который учитель может расширить, используя прилагаемый список литературы. На факультативных занятиях рекомендовано выполнение учениками индивидуальных заданий, подготовка различных сообщений.

Дополнительный материал для проведения занятий

В далеком прошлом племена первобытных людей жили обособленно друг от друга. Все необходимое — пищу, одежду, орудия труда — они производили сами, т. е. вели натуральное хозяйство. Между племенами не было никакого обмена. У одних племен были лучше условия для охоты, у других — для ловли рыбы, у третьих — для сбора съедобных растений. Охотники приручали диких животных — появилось скотоводство, кто собирал растения, стали выращивать их, занялись земледелием. Разделение труда и развитие производительной силы человека привело к тому, что резко расширились добываемые им различные продукты труда. Со временем люди научились производить больше продуктов, чем им было необходимо. Излишки можно было обменять на другие продукты. Так возник обмен: сначала небольшой, а постепенно — массовый и постоянный. Племена стали обмениваться между собой продуктами своего труда, специально созданными для обмена (купли и продажи), — товарами. Первоначально это был простой натуральный обмен одной вещи на другую, который в небольших масштабах сохранился до сих пор и известен под названием «бартер». В таком товарообмене продажа одного товара была неизбежно сопряжена с куплей другого.

По мере увеличения объема обменных операций и изменения разнообразия обмениваемых товаров натуральный обмен стал производиться «товар на товар», но это приводило к потере времени и убыткам, если скоропортящийся товар залеживался. Можно предположить, что некоторые незадачливые продавцы, боясь порчи товара или с отчаяния, меняли его не на нужный, а на ходовой товар, чтобы затем уже обменять последний на необходимый. Тем самым выделились ходовые товары-посредники, выступившие в роли первых «товарных» денег. Эти деньги становятся счетными единицами, которыми приходится платить за приобретаемые товары.

Денежные единицы у многих народов совпадали с мерами веса. Происходило это потому, что до употребления чеканных монет денежными единицами служили весовые единицы металла.

В России до появления металлических денег использовались кожаные деньги, меха, позднее — четырехугольные кусочки кожи с клеймом.

О применении «меховых» денег в России свидетельствует название древнерусской денежной единицы «куна», берущей свое происхождение от меха куницы.

Постепенно основными денежными материалами на Руси становятся золото и серебро, из которых чеканятся монеты разного достоинства. В Киевской Руси чеканка таких монет началась в X в. В это время стали встречаться серебряные гривны весом в весовую гривну. Если иностранные серебряные монеты попадали в Россию, то они перечеканивались также в гривну. Такие чеканные русские монеты известны с X в., начиная со времен Владимира Святославовича.

Во время монголо-татарского ига отдельные российские княжества чеканили свои монеты, одновременно имела хождение «теньга», от которой и произошло название российских денег. Из серебряных слитков в XIII в. рубились куски, получившие название рублей.

Слово «рубль» происходит от слова «рубить». В XIV в. стали большую весовую гривну рубить пополам. Серебряный слиток весом в половину гривны (≈ 205 граммов) получил название рубля или рублевой гривенки.

В XVI в. начали выпускать монеты — новгородки, с рисунком всадника с копьем в руках. Эти монеты получили название копейных денег. Скорее всего, отсюда и произошло слово «копейка». Наряду с этими деньгами чеканились и другие. Однако к концу XVI ст. остались лишь рубли и их сотые доли — копейки.

Копейка, весившая 0,68 грамма и состоящая из чистого серебра, представляла в то время довольно ценную монету, потому, кроме нее, в ходу были полукопеечная «деньга» и четвертькопеечная «полушка». Затем, в петровские времена, российская монетно-денежная система пополнилась серебряным алтыном, гривной, полтиной, червонцем и начали выпускать серебряные монеты достоинством в 10 копеек (гривенники) и в 50 копеек (полтинники).

Комментарии и ответы

К «Заданиям для самостоятельной работы»

1. 1 р. 3 к. = 1,03 р.; 3 к. = 0,03 р.; 4 р. 1 к. = 4,01 р.; 50 к. = 0,5 р.; 18 р. 5 к. = = 18,05 р.; 1 р. 75 к. = 1,75 р.

2. 3,65 р. = 3 р. 65 к.; 2,04 р. = 2 р. 4 к.; 1,03 р. = 1 р. 3 к.; 0,7 р. = 70 к.; 0,06 р. = 6 к.

3. На одного взрослого идет столько же, сколько на двух детей. Поэтому на 15 взрослых — столько же, сколько на 30 детей. Всего можно считать, что нужно одеть $30 + 10 = 40$ (детей), потребуется $40 : 4 = 10$ (шкур).

4. 0,25 денежных единиц.

5. 4 денежные единицы.

6. 1 марку по 50 к., 39 — по 10 к., 60 — по 1 к. Задачу можно решать перебором возможных вариантов.

7. Количество кВт · ч: $832 - 743 = 89$ (кВт · ч).
Следует оплатить: $150 \cdot 89 = 13\,350$ (р.).

8. Январь: $4 \cdot 50 + 2 \cdot 32 = 264$ (денежные единицы).
Февраль: $4 \cdot 45 + 2 \cdot 28 = 236$ (денежных единиц).
Март: $4 \cdot 36 + 2 \cdot 25 = 194$ (денежные единицы).
Апрель: $4 \cdot 25 + 2 \cdot 20 = 140$ (денежных единиц).

9. Если в первый день экскурсанты израсходовали x р., то во второй — $2x + 8000$ р., тогда имеем уравнение:

$x + 2x + 8000 = 188\,000$; $3x = 180\,000$; $x = 60\,000$, т. е. израсходовали 60 000 р. в первый день, $2x + 8000 = 128\,000$ (р.) — во второй день.

10. За 4 года износ составил $4 \cdot \frac{2}{25} = \frac{8}{25}$ (первоначальной стоимости).

В рублях износ составил: $12\,000\,000 \cdot \frac{8}{25} = 3\,840\,000$.

Стоимость станка стала: $12\,000\,000 - 3\,840\,000 = 8\,160\,000$ (р.).

11. Первый внес 104 000 р., второй — 78 000 р., третий — 0 р., четвертый — 130 000 р., стоимость лодки 312 000 р.

12. Общий объем борща $0{,}5 + 1{,}5 = 2$ (л).
Количество тарелок $2 : 0{,}5 = 4$ (шт.).
Стоимость одной тарелки борща: $3\,600 : 4 = 900$ (р.).

13. Пусть x — количество неправильно нарезанных стекол, тогда количество правильно нарезанных $120 - x$. Сумма удержания — $8200x$; за правильно нарезанные стекла он получил $3800(120 - x)$, отсюда следует уравнение: $3800(120 - x) - 8200x = 336\,000$, из которого $x = 10$, т. е. испорчено 10 стекол.

14. Решим задачу «с конца». Последнему покупателю крестьянка продала половину оставшихся яиц и еще пол-яйца. Следовательно, пол-яйца составляет вторую половину оставшихся яиц, а всего оставалось 1 яйцо, которое и было продано последнему покупателю. После продажи третьему покупателю оставалось 1 яйцо. Следовательно, перед продажей третьему покупателю было $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=3$ (яйца), из них 2 было продано третьему покупателю. Перед продажей второму покупателю было $\left(3+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=7$ (яиц), из них 4 было продано второму покупателю. Наконец, в самом начале было $\left(7+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=15$ (яиц), из них 8 было продано первому покупателю.

15. Потери хозяина: шляпа — 10 р.; 15 р. — сдача; 25 р. — возврат соседу; итого 50 р.

16. 10 шкур стоят 10 тудей · 10 = 100 тудей; 40 сосудов стоят 5 тамов · 40 = 200 тамов; следовательно, 100 тудей = 200 тамов или 1 туды = = 2 тама.

Тема 5. ПУТЕШЕСТВИЕ В СТРАНУ ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕНТОВ

Цель: обобщить и систематизировать знания, полученные на уроках математики по учебной программе, ознакомить с различными методами и приемами решения задач с использованием процентов.

На изучение этой темы отводится 4 часа. Основное внимание в ней уделяется различным типам задач на проценты и занимательным задачам. Дидактические материалы содержат различного типа задания, исторический материал и задачи для самопроверки.

Дополнительный материал для проведения занятий

Проценты были известны еще в V в. в Индии и связано это с тем, что счет там велся в десятичной системе счисления. Индийцы упорядочили записи чисел путем введения цифр для десятичной системы счисления и установления принципа поместного значения цифр. Кроме того, в Индии для указания отсутствующих разрядных единиц употреблялся нуль, что тоже сыграло большую роль в усовершенствовании числовых записей и облегчении операций над числами.

Проценты были особенно распространены в Древнем Риме. Римляне называли процентами деньги, которые платил должник человеку, давшему взаймы за каждую сотню. Поэтому долгое время под процентами понимали прибыль или убыток в торговых денежных делах и сделках на каждые 100 денежных единиц. Самое интересное, что законодательство разных народов уже в глубокой древности стремилось установить норму допустимой процентной ставки. Так, в 347 г. до н. э. в Древнем Риме нормальная процентная ставка была определена в 5 %, а в 341 г. и совсем запрещено было брать проценты, однако запрещение оставалось только в виде закона. Затем применение процентов встречается в хозяйственных и финансовых расчетах, статистике, науке и технике. Таким образом, происходит расширение области применения процентов. От римлян проценты перешли к другим народам Европы. В период XIII—XVI вв. процентным вычислениям уделяется много внимания в учебниках того времени. Первые печатные таблицы процентов издал Симон Стевин, который включил их в свою «Арифметику». Это произошло в 1585 г.

Зачет по теме «Занимательные проценты»

Вариант 1

1. Первое число равно 0,4, второе — 0,6. Сколько процентов составляет второе число от суммы этих чисел? На сколько процентов второе число больше первого и на сколько процентов первое меньше второго?

2. Банк дает своим вкладчикам 25 % годовых. Чему будет равен вклад в 100 000 р. через два года?

3. При выполнении контрольной работы по математике 12 % учеников не выполнили ни одного задания, 32 % допустили ошибки, а остальные 14 человек решили задания верно. Сколько всего учеников в классе?

4. Определите первоначальную стоимость продукта, если после подорожания соответственно на 120 %, 200 % и 100 % его конечная стоимость составила 26 400 р.

5. Лекарственная ромашка теряет при сушке 84 % массы. Сколько килограммов ромашки нужно собрать, чтобы получить 8 кг сухого вещества?

6. Сбербанк в конце года начисляет 20 % к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 500 000 р. через три года?

7. Один раствор содержит 20 % (по объему) соляной кислоты, а второй — 70 %. Сколько литров первого и второго растворов нужно взять, чтобы получить 100 л 50%-го раствора соляной кислоты?

Вариант 2

1. Первое число равно 0,5, второе — 0,3. Сколько процентов составляет второе число от суммы этих чисел? На сколько процентов второе число меньше первого и на сколько процентов первое больше второго?

2. Снижение себестоимости производства товара равно 5 % в год. Первоначальная себестоимость товара равна 10 000 р. Чему станет равной его себестоимость через два года?

3. На заводе были изготовлены легковые и грузовые машины, причем 35 % всех изготовленных машин — легковые. Определите число изготовленных машин, если грузовых изготовлено на 240 больше, чем легковых.

4. Цена товара сначала повысилась на 100 %, затем на 40 % и, наконец, на 20 %. В результате цена товара составила 268 800 р. Какова первоначальная стоимость товара?

5. При добавлении воды к раствору его объем увеличился на 42 % и стал равным 71 л. Определите первоначальный объем раствора.

6. Сбербанк в конце года начисляет 20 % к сумме, находящейся на счету в начале года. Каким станет первоначальный вклад в 120 000 р. через четыре года?

7. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 15 кг, содержащий 40 % меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску, чтобы получившийся новый сплав содержал 30 % меди?

Комментарии и ответы

К «Основным задачам на проценты»

Задачи на закрепление

1. $0,23 \cdot 12 = 2,76$; $1,5 \cdot 4 = 6$; $0,005 \cdot 200 = 1$.

2. $0,002 \cdot 200 = 0,4$; $0,04 \cdot 160 = 6,4$, отсюда следует, что второе число больше.

3. $0,3 \cdot 50 = 15$; $50 - 15 = 35$, т. е. в линейку — 15, в клетку — 35.

4. $1 - 0,4 = 0,6$; $0,6 \cdot 0,5 = 0,3$; $0,4 + 0,3 = 0,7$; $1 - 0,7 = 0,3$, т. е. 30 %.

5. $36\ \% + 40\ \% = 76\ \%$; $100\ \% - 76\ \% = 24\ \%$; $500 \cdot 0,24 = 120$.

6. x кг — в первом мешке, $140 - x$ — во втором.

$x - 0,125x = 140 - x + 0,125x$; $2x - 0,25x = 140$; $1,75x = 140$;

$x = \dfrac{140}{1,75} = 80$ (кг), тогда во втором $140 - 80 = 60$ (кг).

Самый простой вариант: в первом мешке первоначально было x, после перекладывания стало $x - 0,125x = 70$, так как в мешках стало поровну.

$$0,875 \cdot x = 70; x = 80 \text{ (кг)}.$$

Задачи на закрепление

1. а) $\dfrac{54}{0,27} = \dfrac{5400}{27} = 200$; б) $\dfrac{456}{1,14} = 400$; в) $\dfrac{50}{0,0025} = 20\,000$.

2. Сухое вещество составляет в свежих грибах 15 %. Нужно собрать:

$$\frac{3}{0,15} = \frac{300}{15} = 20 \text{ (кг)}.$$

3. $\dfrac{2}{0,05} = \dfrac{200}{5} = 40$ (кг).

4. Сухого вещества первоначально было 2 %, т. е. 2 кг.

После просушки эти 2 кг составляют 4 %;

$$\frac{2}{0,04} = \frac{200}{4} = 50 \text{ (кг)}.$$

5. Сухого вещества первоначально было 100 % – 60 % = 40 %.

Масса сухого вещества: $12 \cdot 0,4 = 4,8$ (кг).

Это сухое вещество в подсушенных желудях составляет 100 % – 20 % = 80 %.

Масса подсушенных желудей:

$$\frac{4,8}{0,8} = 6 \text{ (кг)}.$$

6. Сухого вещества — 10 %, $50 \cdot 0,1 = 5$ (кг). Эти 5 кг составляют в подсушенных сливах 20 %. Тогда масса подсушенных слив $\dfrac{5}{0,2} =$ $= 25$ (кг).

К «Заданиям для самостоятельной работы»

1. $1\,000\,000 \cdot 6 : 100 = 60\,000$ (р.).

2. $1\,500\,000 : 7,5 \cdot 100 = 20\,000\,000$ (р.).

3. $36\,000 : 40\,000 \cdot 100 = 90$ (%).

4. Пусть исходное число a, тогда после уменьшения — $0{,}8a$; после увеличения — $0{,}8a \cdot 1{,}2 = 0{,}96a$, т. е. число уменьшится на 4 %.

5. Пусть a — исходная цена; после первого повышения цена стала $1{,}2a$; после второго — $1{,}2a \cdot 1{,}15 = 1{,}38a$; после третьего — $1{,}38 \cdot a \cdot 1{,}1 = 1{,}518a$, т. е. первоначальную цену повысили на 51,8 %.

6. Пусть a — исходная цена; после первого понижении она стала $0{,}8a$; после второго — $0{,}8a \cdot 0{,}85a = 0{,}68a$; после третьего — $0{,}68a \cdot 0{,}9 = 0{,}612a$;

$a - 0{,}612a = 0{,}388a$, т. е. цена понизилась на 38,8 %.

7. Пусть a — исходная цена; после первого повышения цена стала $1{,}1a$; после понижения — $1{,}1a \cdot 0{,}9 = 0{,}99a$; после второго повышения — $0{,}99a \cdot 1{,}1 = 1{,}089a$, т. е. цена повысилась на 8,9 %.

8. а) В 4 кг жира $4 \cdot 0{,}03 = 0{,}12$ (кг). В 16 кг жира $16 \cdot 0{,}06 = 0{,}96$ (кг). Всего жира $0{,}12 + 0{,}96 = 1{,}08$ (кг). Жирность смеси: $\frac{1{,}08}{20} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}54}{10} \times 100\,\% = 5{,}4\,\%$.

б) В 20 л жира $20 \cdot 0{,}05 = 1$ (кг). В 10 л жира $10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$ (кг). В смеси жира $1 + 0{,}8 = 1{,}8$ (кг). Всего молока $20 + 10 = 30$ (л). Жирность смеси: $\frac{1{,}8}{30} \cdot 100\,\% = 6\,\%$.

9. а) За 100 % принимаем то число, с которым сравниваем, т. е. число 50. Тогда 70 составляет $\frac{70}{50} \cdot 100\,\% = 140\,\%$ и 70 больше, чем 50, на 40 %.

б) $\frac{36}{40} \cdot 100\,\% = 90\,\%$; меньше на 10 %.

в) $\frac{72}{60} \cdot 100\,\% = 120\,\%$; больше на 20 %.

г) $\frac{45}{50} \cdot 100\,\% = 90\,\%$; меньше на 10 %.

10. а) Пусть стороны исходного прямоугольника a и b, его площадь $S_1 = ab$. Стороны второго прямоугольника $1{,}3a$ и $0{,}8b$, его площадь $S_2 = 1{,}3a \cdot 0{,}8b = 1{,}04ab$. Площадь увеличилась на 4 %.

б) $1{,}2a \cdot 0{,}7b = 0{,}84ab$, площадь уменьшилась на 16 %.

11. а) $\frac{48}{0{,}6} = 80$ (листов);

б) $\frac{56}{0{,}7} = 80$ (листов).

12. а) $0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$, т. е. 28 %; б) $0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$, т. е. 24 %.

13. а) Знаменатель увеличился на 100 %, т. е. знаменатель увеличился в 2 раза, поэтому дробь уменьшилась в 2 раза, т. е. на 50 %.

б) Знаменатель уменьшился на 50 %, т. е. знаменатель уменьшился в 2 раза, поэтому дробь увеличилась в 2 раза, т. е. на 100 %.

14. а) 20 т примесей отделяется при выплавке; в металле остается примесей $20 \cdot 0{,}06 = 1{,}2$ (т). Всего примесей в руде $20 + 1{,}2 = 21{,}2$ (т), т. е. $\frac{21{,}2}{40} \cdot 100 = 10{,}6 \cdot 5\ (\%) = 53\ \%$.

б) При выплавке отделяется 30 т примесей, в металле остается примесей $30 \cdot 0{,}05 = 1{,}5$ (т). Всего в 60 т руды примесей $30 + 1{,}5 = 31{,}5$ (т), что составляет $\frac{31{,}5}{60} \cdot 100\ \% = 10{,}5 \cdot 5\ (\%) = 52{,}5\ \%$.

15. Величина всех расходов на поход: $176\,000 : 0{,}32 = 550\,000$ (р.).

Шефская организация дала: $550\,000 - 176\,000 = 374\,000$ (р.).

16. а) Если x — стоимость более дешевой книги, то стоимость более дорогой — $1{,}25x$. Тогда $x + 1{,}25x = 12\,600$; $2{,}25x = 12\,600$; $x = 5600$; $1{,}25x = 7000$, т. е. одна книга стоит 5600 р., другая — 7000 р.

б) Если x – стоимость более дорогой книги, то стоимость более дешевой равна $0{,}75x$, тогда $x + 0{,}75x = 12\,600$; $1{,}74x = 12\,600$; $x = 7200$; $0{,}75x = 5400$, т. е. одна книга стоит 7200 р., другая — 5400 р.

17. Пусть x р. положено на 14%-й вклад, тогда на 20%-й вклад положено $(300\,000 - x)$ р. Через год по обоим вкладам будет получено:

$1{,}14x + (300\,000 - x) \cdot 1{,}2 = 354\,000$; $1{,}14x + 360\,000 - 1{,}2x = 354\,000$; $0{,}06x = 6000$;

$x = 100\,000$; $300\,000 - x = 200\,000$, т. е. положено 100 000 — на 14%-й вклад; 200 000 — на 20%-й вклад.

18. Пусть первоначальная цена товара a р., тогда после повышения цена товара станет $1{,}5a$. После объявления распродажи цена товара станет $0{,}5 \cdot 1{,}5a = 0{,}75a$, т. е. торговец потеряет четверть от стоимости товара.

19. 240 000 р.

К зачету по теме «Занимательные проценты»

Вариант 1

1. Сумма: $0{,}4 + 0{,}6 = 1$; $\frac{0{,}6}{1} \cdot 100\ \% = 60\ \%$.

$\frac{0{,}6}{0{,}4} \cdot 100\ \% = 1{,}5 \cdot 100\ \% = 150\ \%$; $150\ \% - 100\ \% = 50\ \%$.

$\frac{0{,}4}{0{,}6} \cdot 100\ \% = \frac{200}{3}\ \% = 66\frac{2}{3}\ \%$; $100\ \% - 66\frac{2}{3}\ \% = 33\frac{1}{3}\ \%$.

2. $25\ \% - \frac{1}{4}$. За первый год вклад станет $100\,000 \cdot 1\frac{1}{4} = 100\,000 + 25\,000 = 125\,000$ (р.)

За второй год: $125\,000 \cdot 1\frac{1}{4} = 125\,000 + 31\,250 = 156\,250$ (р.)

3. $12\ \% + 32\ \% = 44\ \%$ — не выполнили или выполнили с ошибками; $100\ \% - 44\ \% = 56\ \%$ — выполнили полностью.

В классе: $\frac{14}{0{,}56} = \frac{14 \cdot 100}{56} = 25$ (учеников).

4. Пусть первоначальная стоимость была a р. Тогда после первого подорожания она стала $2{,}2a$; после второго — $6{,}6a$; после третьего — $13{,}2a$.

$$13{,}2a = 26\,400;\ \ a = \frac{264}{13{,}2} = 2000 \text{ (р.)}$$

5. Сухое вещество составляет $100\ \% - 84\ \% = 16\ \%$; ромашки нужно взять $\frac{8}{0{,}16} = \frac{800}{16} = 50$ (кг).

6. $500\,000 \cdot (1 + 0{,}2)^3 = 500\,000 \cdot 1{,}2^3 = 500\,000 \cdot 1{,}728 = 864\,000$ (р.).

7. Пусть первого раствора нужно взять x л, тогда второго — $(100 - x)$ л. Соляной кислоты в первом растворе $0{,}2x$ л, во втором — $0{,}7(100 - x)$ л, в полученном — $0{,}5 \cdot 100 = 50$ (л).

$0{,}2x + 0{,}7(100 - x) = 50$; $0{,}2x + 70 - 0{,}7x = 50$; $0{,}5x = 20$; $x = 40$; $100 - x = 60$, т. е. 40 л первого раствора и 60 л второго.

Вариант 2

1. $\frac{0{,}3}{0{,}5+0{,}3} \cdot 100\ \% = \frac{3}{8} \cdot 100\ \% = 37{,}5\ \%$;

$0{,}5 - 100\ \%$; $x = \frac{0{,}3}{0{,}5} \cdot 100\ \% = 60\ \%$;

$0,3 - x\ \%$; $100\ \% - 60\ \% = 40\ \%$;

$0,3 - 100\ \%$; $x = \dfrac{0,5 \cdot 100}{0,3} = \dfrac{500}{3} = 166\dfrac{2}{3}\ \%$;

$0,5 - x\ \%$; $166\dfrac{2}{3}\ \% - 100\ \% = 66\dfrac{2}{3}\ \%$.

2. $10\,000 \cdot (1 - 0,05)^2 = 10\,000 \cdot 0,95^2 = 10\,000 \cdot 0,9025 = 9025$ (р.).

3. $100\ \% - 35\ \% = 65\ \%$ — грузовых машин;

$65\ \% - 35\ \% = 30\ \%$ — на столько больше грузовых, чем легковых;

$\dfrac{240}{0,3} = \dfrac{2400}{3} = 800$ — количество всех машин.

4. Пусть первоначальная цена товара была a р. Тогда после первого повышения она стала $2a$ р.; после второго — $2a \cdot 1,4 = 2,8a$ (р.); после третьего — $2,8a \cdot 1,2 = 3,36a$ (р.). По условию $3,36a = 268\,800$, откуда $a = 80\,000$.

5. $\dfrac{71}{1,42} = \dfrac{7100}{142} = 50$ (л).

6. $120\,000 \cdot (1 + 0,2)^4 = 120\,000 \cdot 1,2^4 = 120\,000 \cdot 1,44^2 = 120\,000 \cdot 2,0736 = 248\,832$ (р.).

7. В исходном куске меди содержится $15 \cdot 0,4 = 6$ (кг).

Масса нового сплава: $\dfrac{6}{0,3} = 20$ (кг).

Нужно добавить олова: $20 - 15 = 5$ (кг).

Тема 6. ПУТЕШЕСТВИЕ В СТРАНУ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Цель: показать возможности расширения понятия «число» в условиях преемственности между I и II ступенями системы общего образования, выработать вычислительные навыки с рациональными числами.

На изучение темы отводится 2 часа. Основное внимание в ней уделяется примерам вычислений с отрицательными числами и числами разных знаков. Дидактические материалы для проведения факультативных занятий содержат исторический материал, а также занимательные и интересные задания и головоломки, рекомендовано проведение различных игр и соревнований.

Дополнительный материал для проведения занятий

Отрицательные числа и правила умножения, деления, сложения и вычитания были предложены в III в. греческим математиком Диофантом. Диофант уже знал правило знаков и умел умножать отрицательные числа. Однако и он рассматривал их лишь как временные значения. Эти правила звучали примерно так: «вычитаемое, умноженное на прибавляемое, дает вычитаемое», «вычитаемое, умноженное на вычитаемое, дает прибавляемое».

В Древнем Египте и Вавилоне отрицательные числа не использовались, а если получались отрицательные корни уравнений (при вычитании), они отвергались как невозможные.

В V—VI вв. отрицательные числа появляются и очень широко распространяются в математике Индии и трактуются как долги (недостача) или признаются как промежуточный этап, полезный для вычисления окончательного положительного результата. Правда, умножение и деление для отрицательных чисел тогда еще не были определены.

Уже в произведении выдающегося индийского математика и астронома Брахмагупты (598 — около 660 гг.), который рассматривал отрицательные числа наравне с положительными, мы читаем: «Имущество и имущество есть имущество; сумма двух долгов есть долг; сумма имущества и нуля есть имущество; сумма двух нулей есть нуль... Долг, который отнимают от нуля, становится имуществом, а имущество — долгом. Если нужно отнять имущество от долга, а долг от имущества, то берут их сумму».

Отрицательными числами индийские математики пользовались при решении уравнений, причем вычитание заменяли добавлением с равнопротивоположным числом.

В Европе признание наступило на тысячу лет позже, да и то долгое время отрицательные числа называли «ложными», «мнимыми» или «абсурдными». Даже Паскаль считал, что $0 - 4 = 0$, так как ничто не может быть меньше, чем ничто. Отголоском тех времен является то обстоятельство, что в современной арифметике операция вычитания и знак отрицательных чисел обозначаются одним и тем же символом (минус), хотя алгебраически это совершенно разные понятия.

В Европе к идее отрицательного количества достаточно близко подошел в начале XIII ст. Леонардо Пизанский, однако в явном виде отрицательные числа в математический обиход ввели Михаэль Штифель (1487—1567) в книге «Полная арифметика» (1544) и Никола Шюке (1445—1500), хотя в XVI ст. многие математики (например, Виет) не признавали отрицательных чисел. И так было до XVII в., математики все еще не признавали отрицательных чисел, называли их «меньшими, чем ничто».

В XVII в. голландский математик Жирар стал пользоваться отрицательными числами наравне с положительными. Современное обозначение положительных и отрицательных чисел со знаками «+» и «–» применил немецкий математик Видман.

С помощью рациональных чисел можно осуществлять различные измерения (например, длины отрезка при выбранной единице масштаба) с любой точностью, т. е. совокупность рациональных чисел достаточна для удовлетворения большинства практических потребностей.

В XVII в., с появлением аналитической геометрии, отрицательные числа получили наглядное геометрическое представление на числовой оси. С этого момента наступает их полное равноправие. Тем не менее теория отрицательных чисел долго находилась в стадии становления. Оживленно обсуждалась, например, странная пропорция $1 : (-1) = (-1) : 1$ — в ней первый член слева больше второго, а справа — наоборот, и получается, что большее равно меньшему («парадокс Арно»). Непонятно было также, какой смысл имеет умножение отрицательных чисел и почему произведение отрицательных положительно.

Комментарии и ответы

к «Заданиям для самостоятельной работы»

1. 1) 0; 2) 0; 3) $-0{,}1111$; 4) 5,6; 5) 1; 6) 0.

2. $-\frac{1}{11}$; -111.

3. 20 слагаемых.

4. $-0{,}1$.

5. $\{-4; -3; ...; 1; 2\}$.

17. Сложить.

20.

n	$-2\frac{3}{7}$	$-1{,}3$	$\frac{8}{55}$	$-4{,}4$	$-\frac{4}{15}$
m	1,2	$4\frac{47}{90}$	$-1\frac{5}{11}$	$\frac{14}{15}$	$-1\frac{14}{15}$
$n+m$	$-1\frac{8}{35}$	$3\frac{2}{9}$	$-1\frac{17}{55}$	$-3\frac{7}{15}$	$-2{,}2$
$n-m$	$-3\frac{22}{35}$	$-5\frac{37}{45}$	1,6	$-5\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
$m-n$	$3\frac{22}{35}$	$5\frac{37}{45}$	$-1{,}6$	$5\frac{1}{3}$	$-1\frac{2}{3}$

Тема 7. ПУТЕШЕСТВИЕ В ОБЛАСТЬ ДЛИН, ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Цель: научить учащихся решать задачи с использованием различных единиц измерения длины, площади и объема, сформировать умение перевода одних единиц измерения в другие.

На изучение этой темы отводится 7 часов. Основное внимание в ней уделяется переводу одних единиц измерения в другие и решению задач с практическим содержанием. Дидактические материалы содержат интересный исторический материал о старинных мерах длины и площади, измерении сыпучих тел и измерении объема жидкости, а также содержат различного типа задания по теме. На факультативных занятиях рекомендовано проведение дискуссий, выполнение учениками индивидуальных заданий, подготовка различных сообщений.

Дополнительный материал для проведения занятий

В старину моряки измеряли расстояние в трубках или сигарах. Это расстояние, проходимое судном при определенной скорости за время, пока курится набитая табаком трубка, которую моряк не выпускает изо рта. У многих народов в старину мерой расстояния служила дальность полета стрелы. А в Японии мерой расстояния служил лошадиный башмак. Это путь, который проходила лошадь, пока износится привязываемая к ее ногам соломенная подошва, заменявшая в Японии подкову.

Рассмотрим более мелкие единицы длины. В крупной оптовой торговле полотно, сукно и прочее поступали в виде больших отрезов — «поставов», длина которых в разное время и в разных местах колебалась от 30 до 60 локтей (в местах торговли эти меры имели конкретное, вполне определенное значение).

Локоть равнялся длине руки от пальцев до локтя (по другим данным — «расстояние по прямой от локтевого сгиба до конца вытянутого среднего пальца руки»). Величина этой древнейшей меры длины, по разным источникам, составляла от 38 до 47 см, так как 2 аршина = = 3 локтям, следовательно, локоть равен $10^{\frac{1}{3}}$ вершка. С XVI в. локоть постепенно вытесняется аршином и в XIX в. почти не употребляется.

Пядь (пядница) — древняя русская мера длины. *Малая пядь* — расстояние между концами расставленных большого и указательного (или среднего) пальцев, равное 17,78 см.

Большая пядь — расстояние между концами большого пальца и мизинца (22—23 см).

Пядь с кувырком («пядень с кувырком», по Далю — «пядь с кувыркой») — пядь с прибавкой двух суставов указательного пальца, это 27—31 см.

Сажень — одна из наиболее распространенных на Руси мер длины. Различных по назначению (и, соответственно, величине) саженей было больше десяти. Эта старинная мера длины упоминается Нестором в 1017 г. Слово «сажень» происходит от глагола «сягать» («досягать») — на сколько можно было дотянуться рукой. Для определения значения древнерусской сажени большую роль сыграла находка камня, на котором славянскими буквами была высечена надпись: «В лето 6576 (1068 г.) индикта 6 дня, Глеб князь мерил ... 10 000 и 4000 саженей». Из сравнения этого результата с измерениями топографов получено значение сажени 151,4 см. С этим значением совпали результаты измерений храмов и значение русских народных мер. Существовали саженные мерные веревки и деревянные «складени», имевшие применение при измерении расстояний и в строительстве.

Литовский локоть. Делением косой сажени на два и половины ее еще раз на два получаем меру «литовский локоть». Если считать, что косая сажень равна 248 см, то литовский локоть — 62 см. Такой локоть употреблялся на Украине и в соседних с Литвой областях России.

Остановимся подробнее на истории появления некоторых мер длины для измерения расстояний между населенными пунктами в России.

Верста — старорусская путевая мера (ее раннее название — «поприще»). Этим словом первоначально называли расстояние, пройденное от одного поворота плуга до другого во время пахоты. Два названия долгое время употреблялись параллельно как синонимы. Известны упоминания в письменных источниках XI в. В рукописях XV в. есть запись: «Поприще саженей 7 сот и 50» (длиной в 750 саженей). До царя Алексея Михайловича в 1 версте считали 1000 саженей. При Петре I одна верста равнялась 500 саженей, в современном исчислении — $213{,}36 \cdot 500 = 1066{,}8$ (м). Верстой также назывался верстовой столб на дороге.

Величина версты неоднократно менялась в зависимости от числа саженей, входивших в нее, и величины сажени. Уложением 1649 г. была установлена межевая верста в 1 тысячу саженей. Позже, в XVIII в., наряду с ней, стала использоваться и «путевая верста» в 500 саженей (пятисотная верста).

Межевая верста — старорусская единица измерения, равная двум верстам. Версту в 1000 саженей (2,16 км) употребляли широко в качестве межевой меры, обычно при определении выгонов вокруг крупных городов, а на окраинах России, особенно в Сибири, — и для измерения расстояний между населенными пунктами.

500-саженная верста применялась несколько реже, в основном для измерения расстояния в европейской части России. Большие расстояния, особенно в Восточной Сибири, определялись в днях пути. В XVIII в. межевые версты постепенно вытесняются путевыми, и единственной верстой в XIX в. остается путевая верста, равная 500 саженям.

Указом короля Генриха I (XII в.) за основную меру длины в Англии был взят *ярд* — расстояние от носа короля до конца среднего пальца его вытянутой руки. Длина ярда в настоящее время равна 0,9144 м. Впрочем, документальных свидетельств об упомянутом здесь происхождении ярда не сохранилось. По другим литературным источникам прообразом длины ярда явилась длина меча Генриха I. Согласно предыдущим расчетам видим, что 1 ярд = 3 футам, что равно 36 дюймам. Следовательно, 1 ярд = 914,4 мм. Таким образом, 1 ярд приближается к нашему метру.

Приведенные примеры единиц длины основаны на размерах частей человеческого тела. Возникали эти меры постепенно, в результате трудовой деятельности человека и его борьбы за существование. С развитием общества, появлением частной собственности, обменом продуктами производства и разделением труда первоначальные, примитивные способы измерения перестали удовлетворять требованиям человека, поэтому меры стали уточняться, способы измерения совершенствовались. Очевидно, что первый период истории мер, в течение которого человек не нуждался в других эталонах мер, кроме частей своего тела, продолжался очень долго. Даже теперь мы иногда применяем первобытные способы измерения, например размеры стола можем измерить пядью, определяемой расстоянием между концами пальцев, большого и указательного или среднего.

Очень распространена в древности у разных народов была мера длины, впоследствии получившая название *стадий*. Стадий равнялся расстоянию, которое человек проходит спокойным шагом за промежуток времени от появления первого луча Солнца при восходе его до того момента, когда весь солнечный диск целиком окажется над горизонтом. Из астрономии известно, что это время продолжается приблизительно 2 минуты. За это время человек может пройти от 185 до 195 м.

В более поздние времена в России установилась мера расстояния *верста*, приравненная к 500 саженям, что приблизительно равно 1,07 км.

Площадью называется величина, которая характеризует размер некоторой геометрической фигуры. Нахождение площадей геометрических фигур — одна из практических задач древности.

В Риме мерой полей служила единица *югер*. Слово это происходит от латинского слова *jugum* — ярмо, т. е. деревянная рама, которую надевали на шеи пары волов, впряженных в плуг. Югер — это участок земли, вспахиваемый за день плугом, в который впряжена пара волов. Аналогичный прием измерения земли существовал и у славян.

В России употреблялась земельная мера плуг как мера земли, с которой платили дань. Согласно некоторым источникам плуг был равен приблизительно 8—9 гектарам. Мерой полей служила также десятина, равная 1,1 гектара, и четверть, равная половине десятины. Четверть, в свою очередь, делилась на 2 осьмины, осьмина — на 2 полуосьмины, а полуосьмина — на 2 четверика и т. д.

Остановимся подробнее на истории появления некоторых мер площадей в России.

В Киевской Руси, судя по сохранившимся источникам, квадратных мер не было, но древнерусские зодчие и землемеры имели о них представление.

Меры площади всегда были нужны для определения размеров земельных участков, которые не всегда были четко разграничены, соприкасались друг с другом и имели межевые знаки.

В Древней Руси в целях податного обложения использовали чисто условные единицы, характеризовавшие рабочую силу или сельскохозяйственный инвентарь, а также меры, в основе которых лежали трудовые возможности. Отсюда такие наименования земледельных мер (единиц обложения), как «дом» (семья) или «дым», «рало», «соха», «обжа» и пр. Трудовой характер мер «соха» и «обжа» и их соотношение явствуют из сохранившегося ответа новгородцев на запрос Ивана III в 1478 г.: «Три обжи — соха, а обжа — 1 человек на 1 лошади орет (пашет); а кто на 3 лошадях и сам третий орет, ино то соха».

Для определения площади сенокосных угодий широко применяли «урожайные» меры — копны сена. Копны иногда использовали и в качестве мер посевных площадей.

Все «трудовые», «урожайные» и «посевные» меры заключали в себе элементы субъективизма и произвола, которые проявлялись непосредственно в практике использования этих мер.

Во время феодальной раздробленности Руси как меры площади применялись «дом» (дым), «соха», «обжа». Но они отличались по количеству в зависимости от княжества. Отличия были и в наименованиях мер. В Новгороде, например, в качестве посевной меры применялась «коробья» (площадь, на которую высевали коробью ржи — меру объема).

Площади сенокосных участков оценивали копной (площадь луга, на которой можно накосить копну сена). Эти меры позволяли определить урожайность, а о форме и размерах земельных участков полного представления не давали.

В середине XIII в. татары проводили в значительных масштабах описи земельных площадей. В основу описей в качестве единицы измерения было положено отдельное хозяйство («дом» или «дым»).

Переход от четверти к десятине оказался затруднительным, так как в основе четверти лежало реальное засеваемое зерно, это было понятно всем, кроме того, в писцовых книгах было зафиксировано определение земельных площадей в четвертях.

В эпоху укрепления Московского государства установленные ранее геометрические меры стали частичными мерами площади, т. е. определяемыми как квадрат, сторона которого равна единице длины: квадратная верста, квадратная (круглая) десятина и квадратная сажень. Взамен слова «квадратный», не существовавшего в то время, употребляли прилагательные «дробный», «четвероугольный» и др.

В городах результаты измерений небольших площадей выражали только в мерах длины (практически в саженях) без перевода их в квадратные меры. Вот как записана была площадь участка в документах того времени: «двор истопника Юрия вдоль — полчетверты саж., поперечь — 3 саж... Подле Яузы от мосту к Москве-реке огород князя Романа Пожарского, вдоль от ворот к Яузе-реке — 46 саж., поперечь от мосту 36 саж.».

В XVII в. смысл меры «соха» изменился; под ней стали понимать единицу обложения. В качестве общей единицы обложения была установлена большая московская соха в 800 четвертей «доброй» земли.

Основной мерой измерения площадей стала десятина. Непосредственные результаты измерений обычно выражали в долях десятины: полдесятины, четверть (четь) десятины и пр. Землемеры применяли преимущественно казенную трехаршинную сажень, равную 2,16 м, таким образом, десятина в 2400 квадратных саженей равнялась приблизительно 1,12 га.

Масштабы использования десятины и четверти росли в соответствии с освоением угодий и увеличением территории государства. Однако уже в первой половине XVI в. выяснилось, что при измерении земель в четвертях общая опись земель затянется на много лет. И тогда в 40-х годах XVI в. один из просвященнейших людей Ермолай Еразм предложил пользоваться более крупной единицей, под которой подразумевалась квадратная площадь со стороной в 1000-саженную версту. Это предложение не было принято, но сыграло определенную роль. Для сенокосных угодий стала широко применяться «урожайная» мера — копна. Постепенно эту меру увязали с десятиной, и она подразделялась на 2 полукопны, на 4 четверти копны, на 8 полчетвертей копны и т. д.

С течением времени копна как мера площади была приравнена к 0,1 десятины (т. е. считали, что с десятины снимали в среднем 10 копен сена).

Московская государственная власть стремилась к проведению единой метрологической политики в области землеустройства и взимания налогов с земель.

Мероприятия по устранению метрологического разногласия в области измерения проводились осторожно и постепенно. В первую очередь устанавливали соотношения между московскими и различными местными мерами.

«Трудовые» и «посевные» меры стали выражать через геометрическую меру — десятину, позволявшую более точно измерять земельные площади.

При Петре I в системе единиц площади прочно утвердились квадратные меры. В учебниках давали сведения о них и о действиях с ними. Еще Л. Ф. Магницкий пользуется словом «квадратный» – «квадратные стопы», «квадратные цоли», «квадратные мили» и пр.

Квадратные единицы образовали определенную систему, которая может быть представлена в следующем виде:

квадратная верста = 250 000 квадратных саженей.

(1 000 000 квадратных саженей, когда употреблялась верста в 1000 саженей);

квадратная сажень = 9 квадратным аршинам = 49 квадратным футам;

квадратный аршин = 256 квадратным вершкам = 784 квадратным дюймам;

квадратный фут = 144 квадратным дюймам.

Линейные размеры участков измеряли уже не «мерными веревками», а 10-саженными железными цепями, в которых каждая сажень была разделена на звенья по $\frac{1}{2}$ аршина. Сами измерения проводили лица, достаточно знакомые с основаниями геометрии и тригонометрии, — геодезисты. В «Инструкции» был приведен пример организации и методики выполнения измерения земель и пример обработки результата.

Номенклатура единиц измерения площадей не изменилась и в XIX в. «Положение о мерах и весах» 1899 г. узаконило квадратные единицы, образованные от узаконенных единиц длины. В качестве специфической единицы была узаконена десятина, равная 2400 квадратных саженей.

Обратим внимание на появление некоторых мер объемов.

К XVIII в. была установлена следующая система сыпучих мер:

1 четверть = 8 четверикам ≈ 2,1 гектолитра;

1 четверик = 8 гарнцам ≈ 26,2 литра;

1 гарнец ≈ 3,3 литра.

В торговой практике и в быту, по данным Л. Ф. Магницкого, долго еще употреблялись следующие меры сыпучих тел («хлебные меры»):

ласт — 12 четвертей;

четверть (четь) — $\frac{1}{4}$ часть кади;

осьмина (осьмая — восьмая часть);

кадь (кадка, окова) = 20 ведер и больше;

большая кадка — больше кадки;

цыбик — ящик (чаю) = от 40 до 80 фунтов (по весу).

Комментарии и ответы

К «Заданиям для самостоятельной работы

1. а) 1 мм $= \frac{1}{25{,}4}$ дюйма ≈ 0,030 дюйма;

б) 1 мм ≈ 0,039 дюйма $= 0{,}039 \cdot \frac{1}{12}$ фунта ≈ 0,0033 фунта;

1 см ≈ 0,033 фунта;

в) 1 ярд = 91,44 см => 1 см $= \frac{1}{91{,}44} \approx$ 0,011 ярда;

1 ярд = 9,144 дм => 1 дм $= \frac{1}{9{,}144} \approx$ 0,109 ярда.

2. 3 фута 5 дюймов = {1 фут = 12 дюймов} = 36 + 5 (дюймов) = = 41 дюйм = 41 · 2,54 см ≈ 104,14 см ≈ 1041, мм;

21 дюйм ≈ 21 · 2,54 см = 53,34 см = 533,4 мм;

2 ярда 3 дюйма = {1 ярд = 36 дюймов} = 72 + 3 = 75 (дюймов) ≈ ≈ 75 · 25,4 мм = 1905 мм.

3. 4 ярда 2 фута 3 дюйма = (4 · 3 + 2) фута 3 дюйма = (14 · 12 + 3) дюйма = 171 дюйм = 171 · 2,54 см = 434, 34 см ≈ 4,34 м;

2 прута = 2 · 7,5 локтей = 15 · 44 см = 660 см = 6,6 м;

3 шнура = 3 · 10 прутов = 30 · 7,5 локтей = 225 локтей = 225 · 44 см = 9900 см = 99 м.

4. 3 локтя = 3 · 44 см = 132 см;

4 сажени = 4 · 2,1336 м ≈ 853 см;

2 сажени 2 локтя = (2 · 3 + 2) локтя = 8 локтей = 8 · 44 см = 352 см.

5. 1 аршин = 71,12 см;

1 миля = 5280 футов = 5280 · 12 дюймов = 63 360 дюймов = = 63 360 · 2,54 см = 1,609 км;

1 верста = 1066,78 м.

6. 1 аршин = 71 см, 1 сажень ≈ 2,13 м, 1 аршин < 1 сажени.

Сравнить можно и по-другому: 1 сажень = 3 аршинам.

7. 192 м · 250 000 = 48 000 000 м = 48 000 км.

8. 250 000 · 360 = 90 000 000 (локтей).

9. 2 фута 2 дюйма = 24 + 2 = 26 (дюймов);

1 фут 3 дюйма = 15 дюймам.

V = 26 · 15 · 8 = 3120 (куб. дюймов).

10. 1 фут = 30,48 см; 1 дюйм = 2,54 см. Следовательно, 2 фута 2 дюйма = 2 · 30,48 + 2 · 2,54 = 60,96 + 5,08 = 66,04 (см) ≈ 66 см.

1 фут 3 дюйма = 30,48 + 3 · 2,54 = 30, 48 + 7,62 = 38,1 (см).

8 дюймов = 2, 54 · 8 = 20,32 (см).

V = 66 · 38,1 · 20,32 = 51 096,7 (см^3) ≈ 0,051 м^3.

11. 14 000 саженей = 14 000 · $\frac{1}{500}$ верст = 28 верст;

28 верст ≈ 28 · 1,0668 км = 29,87 км.

12. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, т. е. полчетверти.

13. 300 см = 3 м;

$3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ (м^2).

14. $0{,}25 \cdot 0{,}33 = 0{,}0825$ (м^2);

$7{,}5 : 0{,}0825 = 91$, т. е. потребуется 91 плитка.

15. ≈ 20 см^2.

16. а) $5 \cdot 2{,}5 + 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 2{,}5 \cdot 7{,}5 = 18{,}75$ (см^2) = 0,1875 дм^2 = 0,001875 м^2;

б) $6{,}7 \cdot 5{,}4 - 3{,}5 \cdot 2{,}5 = 36{,}18 - 8{,}75 = 27{,}43$ (см^2) = 0,2743 дм^2 = = 0,002743 м^2;

в) $5{,}1 \cdot 1{,}7 + 5{,}1 \cdot 1{,}7 - 1{,}7 \cdot 1{,}7 = 1{,}7 \cdot (5{,}1 + 5{,}1 - 1{,}7) = 1{,}7 \cdot 8{,}5 = 14{,}45$ (см^2) = 0,1445 дм^2 = 0,001445 м^2;

г) фигура состоит из трех вертикальных прямоугольников:

$$S = 5{,}1 \cdot 1{,}6 + 3{,}5 \cdot 1{,}6 + 1{,}6 \cdot 1{,}6 = 1{,}6(5{,}1 + 3{,}5 + 1{,}6) = 16{,}32 \text{ (см}^2) = 0{,}1632 \text{ дм}^3 = 0{,}001632 \text{ м}^2.$$

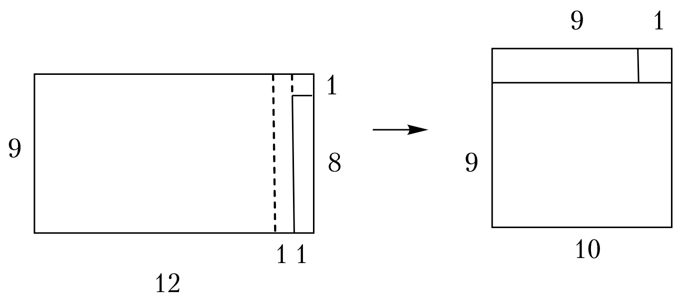
17. 5 см^2 = 500 мм^2; 12 дм^2 = 120 000 мм^2; 0,5 м^2 = 50 дм^2 = 5000 см^2 = = 500 000 мм^2.

18. 15 м^2 = 150 000 см^2; 1,2 дм^2 = 120 см^2; 5 м^2 = 50 000 см^2.

19. 50 см^2 = 0,5 дм^2; 20 м^2 = 2000 дм^2; 10,5 м^2 = 1050 дм^2.

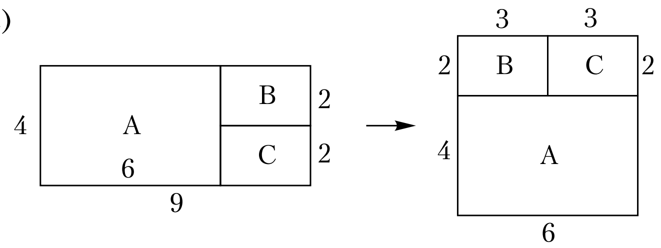
20. 500 см^2 = 5 дм^2 = 0,05 м^2; 120 дм^2 = 1,2 м^2; 0,5 дм^2 = 0,005 м^2; 6 ар = 600 м^2; 0,02 га = 200 м^2; 4,8 га = 480 ар = 48 000 м^2.

21. Площадь старого ковра: $9 \cdot 12 = 108$ (дм^2); площадь нового ковра: $108 - 8 \cdot 1 = 100$ (дм^2).

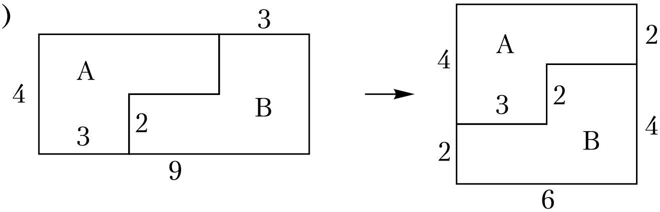


22. Так как площадь прямоугольника $9 \cdot 4 = 36$ (см^2), то каждый квадрат будет иметь такую же площадь.

а)



б)

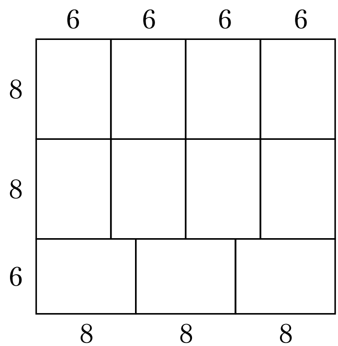


23. 0,8 см = 8 мм. Пусть x — ширина прямоугольника, тогда $x + 8$ — длина, периметр: $(x + x + 8) \cdot 2 = 136$; $2x + 8 = 68$; $x = 30$; $x + 8 = 38$; $S = 30 \cdot 38 = 1140$ (мм^2) $= 11{,}4$ см^2.

24. 6,5 дм = 65 см; вторая сторона: 2210 : 65 = 34 (см); периметр: $(65 + 34) \cdot 2 = 99 \cdot 2 = 198$ (см).

25. Если не будет остатков, то получится $n = \dfrac{24 \cdot 22}{6 \cdot 8} = 11$ (пластинок).

Практическая реализация, не допускающая остатков.



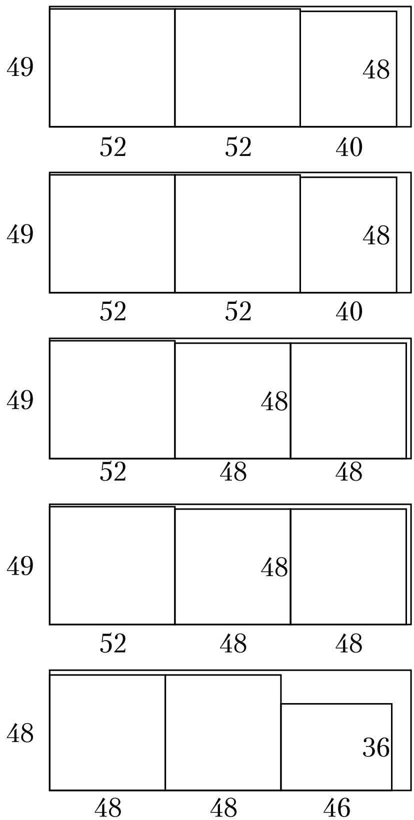
26. Исходя из площадей требуемых стекол, нужно

$6 \cdot 5{,}2 \cdot 4{,}9 + 6 \cdot 4{,}8 \cdot 4{,}8 + 2 \cdot 4 \cdot 4{,}8 + 3{,}6 \cdot 4{,}6 = 152{,}88 + 138{,}24 + 38{,}4 + 16{,}56 = 346{,}08$ (дм^2).

Площадь исходного листа: $15 \cdot 5 = 75$ (дм^2).

Требуется листов: $346{,}08 : 75 = 4{,}6$, т. е. 5 листов.

Практическая реализация:



27. Площадь второй комнаты: $12{,}8 + 11{,}8 = 24{,}6$ (м^2); площадь третьей комнаты $24{,}6 - 10{,}6 = 14$ (м^2); общая площадь комнат $12{,}8 + 24{,}6 + 14 = 51{,}4$ (м^2).

28. Ширина луга: $2{,}25 - \dfrac{1}{4} = 2$ (км).

Площадь луга: $2{,}25 \cdot 2 = 4{,}5$ (км^2) = 450 га; $450 \cdot 12 = 5400$ (т).

29. Площадь вишневого сада: $6{,}25 \cdot 4000 = 25\,000$ (м^2); длина сада: $25\,000 : 100 = 250$ (м).

30. Площадь поля: $2,4 \cdot 2 = 4,8$ (км^2) $= 480$ га; семян потребуется: $1,4 \cdot 480 = 672$ (ц) $= 67,2$ т.

31. $25 \cdot 200 = 5000$ (см) $= 50$ м.

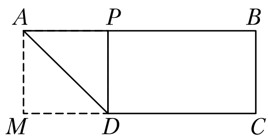
32. Длина участка: $10 \cdot 10\,000 = 100\,000$ (см) $= 1000$ м $= 1$ км;
ширина участка: $8 \cdot 10\,000 = 80\,000$ (см) $= 800$ м;
площадь участка: $1000 \cdot 800 = 800\,000$ (м^2) $= 80$ га;
пшеницы потребуется: $0,24 \cdot 80 = 19,2$ (т).

33. Так как 0,4 делится нацело на 0,2 и 10 делится нацело на 0,2, то остаток при разрезании не получится и нужно просто сравнить площадь имеющихся листов железа и требуемого количества пластинок.

Общая площадь пластинок: $0,2 \cdot 0,2 \cdot 5000 = 200$ (дм^2).

Общая площадь листов: $0,4 \cdot 10 \cdot 48 = 192$ (дм^2), т. е. листов железа не хватит.

34. $AP = 65 - 45 = 20$ (м); $AM = BC = 20$ м;
$S_{APD} = 20 \cdot 30 : 2 = 300$ (м^2);
$S_{PBCD} = 45 \cdot 30 = 1350$ (м^2);
$S_{ABCD} = 1350 + 300 = 1650$ (м^2) $= 16,5$ ар.



35. Целых клеточек — 4; половинок — 12; площадь: $\left(4 + \frac{12}{2}\right) \cdot 0,25 = 10 \cdot 0,25 = 2,5$ (см^2).

36. а) Верхний треугольник — 2 клеточки; тело ракеты — 12 клеточек; каждое крыло — по 2 клеточки; общая площадь: $(2 + 12 + 2 \cdot 2) \times 0,25 = 18 \cdot 0,25 = 4,5$ (см^2).

б) Целых клеточек — 26; половинок — 6.

Треугольники: верхний — $\frac{5}{2}$ клеточек; хвост — $\frac{3}{2}$ клеточек; снизу — 1 клеточка.

Вся площадь: $\left(26 + \frac{6}{2} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 1\right) \cdot 0,25 = 34 \cdot 0,25 = 8,5$ (см^2).

37. 1 км = 1000 м = 1 000 000 см.

а) 140 км = 140 000 000 см.

В 1 см $\frac{140\,000\,000}{6}$ см $\approx 23\,000\,000$ см, т. е. масштаб $\approx 1 : 23\,000\,000$.

б) 15 км = 15 000 000 см.

В 1 см $\frac{15\,000\,000}{6}$ см $= 2\,500\,000$ см, т. е. масштаб $1 : 2\,500\,000$.

в) 2400 км = 2 400 000 000 см.

В 1 см $\frac{2\,400\,000\,000}{6} = 400\,000\,000$ (см), т. е. масштаб 1 : 400 000 000.

38. 200 км = 200 000 м.

а) 50 мм = 5 см = 0,05 м;

0,05 м — 200 000;

1 м — x;

$x = \frac{200\,000}{0{,}05} = 4\,000\,000$, т. е. масштаб 1 : 400 000.

б) 40 см = 0,4 м;

0,4 м — 200 000;

1 м — x;

$x = \frac{200\,000}{0{,}4} = 500\,000$, т. е. масштаб 1 : 500 000.

в) 10 см = 0,1 м;

0,1 м — 200 000;

1 м — x;

$x = \frac{200\,000}{0{,}1} = 2\,000\,000$, т. е. масштаб 1 : 2 000 000.

39. 613 км = 61 300 000 см;

x см — 61 300 000 см;

1 см — 2 500 000 см;

$x = \frac{61\,300\,000}{2\,500\,000} = 24{,}5$ (см).

40. 5 м = 500 см;

1 см — 200 см;

x см — 500 см;

$x = 2{,}5$ см.

3,2 м = 320 см;

1 – 200;

x – 320;

$x = \frac{320}{200} = 1{,}6$ (см).

2,8 м = 280 см;

1 – 200;

x – 280;

$x = \frac{280}{200} = 1{,}4$ (см).

Тема 8. ПУТЕШЕСТВИЕ В МИР МАСС С ЕДИНОЙ СИСТЕМОЙ МЕР

Цель: познакомить учащихся с мерами массы и с попытками создания единой системы мер, а также с метрической системой мер, выработать навыки решения задач на сравнение вычислений в различных системах мер.

На изучение этой темы отводится 3 часа. Основное внимание в ней уделяется переводу одних единиц измерения в другие и задачам с практическим содержанием на взвешивание и переливание. В дидактических материалах для проведения факультативных занятий содержится исторический материал о мерах масс и попытках создания единой системы мер. На факультативных занятиях рекомендовано проведение соревнований, игр, выполнение учениками индивидуальных заданий, подготовка различных сообщений.

Дополнительный материал для проведения занятий

Согласно современным справочникам 1 гран = 64,8 мг. В Англии, например, единицей массы являлась драхма.

1 драхма = 27,34 гран = 1,77 г.

1 унция = 16 драхмам = 28,35 г.

1 фунт = 16 унциям = 7000 гран = 453,6 г.

Древнейшей русской весовой единицей является гривна, равная приблизительно 409,5 г. Позднее в обиход вошли фунт, камень и берковец. Русский фунт равен примерно 375 г, 1 камень = 40 фунтам, 1 берковец = 5 камням. Использовались и более крупные единицы, например пуд, равный 16,32 кг, безмен, равный приблизительно 1 кг. Безменом назывались и весы с подвижной точкой опоры и неподвижной гирей.

Гривна (позднейший фунт) оставалась неизменной. Слово «гривна» употребляли для обозначения как весовой, так и денежной единицы. Это наиболее распространенная мера веса в розничной торговле и ремесле. Ее применяли и для взвешивания металлов, в частности золота и серебра.

Берковец — это большая мера веса, употреблялась в оптовой торговле преимущественно для взвешивания воска, меда и т. д. Слово «берковец» происходит от названия острова Бьерк. Берковцом на Руси называлась мера веса в 10 пудов, как раз стандартная бочка с воском, которую один человек мог закатить на купеческую ладью, плывущую на этот самый остров (163,8 кг). Известно упоминание берковца в XII в. в уставной грамоте князя Всеволода Гавриила Мстиславича новгородскому купечеству.

Золотник равнялся $\frac{1}{96}$ фунта, в современном исчислении 4,27 г. О нем говорили: «мал золотник, да дорог». Это слово первоначально обозначало золотую монету.

Фунт (от латинского слова *pondus* — вес, гиря) равнялся 32 лотам, 96 золотникам, $\frac{1}{40}$ пуда, в современном исчислении 409,50 г. Используется в сочетаниях: «не фунт изюма», «узнать, почем фунт лиха». Сахар продавали фунтами. Чай покупали на золотники. До недавнего времени маленькая пачка чаю весом в 50 г называлась «осьмушка» ($\frac{1}{8}$ фунта).

Лот — старорусская единица измерения массы, равная трем золотникам или 12,797 г.

Доля — самая мелкая старорусская единица измерения массы, равная $\frac{1}{96}$ золотника или 0,044 г.

Пуд равнялся 40 фунтам, в современном исчислении — 16,38 кг. Еще в XI—XII вв. употребляли различные весы с равноплечим и неравноплечим коромыслом: «пуд» — разновидность весов с переменной точкой опоры и неподвижной гирей, «скалвы» — равноплечие весы (двухчашечные). Пуд как единица массы был отменен в СССР в 1924 г.

Рассмотрим вопрос, связанный с попытками создания единой системы мер. В процессе развития росли требования к точности мер и измерений.

В старых учебниках арифметики помещали подробные таблицы мер как отечественных, так и зарубежных стран. В старых справочниках можно было найти около 100 различных футов, 46 различных миль и около 100 фунтов и т. д. В России одна и та же мера в разных губерниях имела разную величину. Каждое государство пыталось упорядочить свою систему мер, сделать это было трудно. Например, в России Петр I указом ввел следующие сложные соотношения между бытовавшими в то время единицами: 1 миля = 7 верст = 3500 саженей = 10 500 аршин = = 168 000 вершков = 294 000 дюймов = 2 940 000 линий = 29 400 000 точек. Однако эти изменения не упростили систему вычислений.

Неупорядоченность системы мер значительно затрудняла развитие торговых и других отношений между государствами, поэтому была необходима общая система мер, в которой каждая мера должна была иметь определенную величину. Начиная с XVII в. этот вопрос обсуждался учеными практически во всех странах мира и в результате появилась метрическая система мер, которой стали пользоваться самые развитые государства.

Создание и распространение метрической системы мер не обошлось без борьбы и трудностей, вызванных сопротивлением противников ее введения. Нелегко было преодолеть и вековые привычки к старым мерам.

Согласно метрической системе мер основной мерой длины является метр. Его эталон под названием «международный метр». Были изготовлены 34 копии международного эталона метра для стран — участников международного соглашения. Однако проверка копий в разных странах, произведенная в начале XX ст., показала значительные отклонения длин разных эталонов по сравнению с международным эталоном. Это заставило ученых искать более устойчивую величину в качестве единицы длины. Метрическая система мер введена во многих странах мира, однако не во всех. Например, в Англии, в США действует старая английская система мер. В бывшем Советском Союзе метрическая система мер была введена в 1918 г.

Основным преимуществом метрической системы мер перед всеми другими существующими системами мер является совпадение основания десятичной системы счисления и единичного отношения мер. Вследствие этого совпадения оснований обеих систем в нашей арифметике уже нет утомительных преобразований составных именованных чисел. В старых учебниках арифметики такие преобразования занимали 30 % времени, отводимого в школе на арифметику.

Комментарии и ответы

К «Заданиям для самостоятельной работы»

1. 1 пуд ≈ 16,4 кг; 2 пуда ≈ 32,8 кг; 1 фунт ≈ 0,41 кг; 3 фунта ≈ 1,23 кг; 9 фунтов ≈ 3,69 кг; 27 фунтов ≈ 11,07 кг; 1 золотник ≈ 4,3 г; 3 золотника ≈ ≈ 12,9 г; 9 золотников ≈ 38,7 г; 27 золотников ≈ 116,1 г; 81 золотник ≈ ≈ 348,3 г.

2. $V = 3 \cdot 1{,}3 \cdot 2 = 7{,}8$ (куб. ярда); 1 ярд = 3 футам = 36 дюймам; 1 ярд-куб. = $36 \cdot 36 \cdot 36 = 46\ 656$ (куб. дюймов).

Масса воды: $3{,}84 \cdot 46\ 656 = 179\ 159{,}04$ (золотника) ≈ 770 383 г ≈ ≈ 770 кг.

3. 1 точка = $\frac{1}{10}$ линии = 0,254 мм;

1 линия ≈ 2,54 мм;

1 дюйм = 10 линий ≈ 25,4 мм = 2,54 см;

1 фут = 12 дюймов = $12 \cdot 2{,}54$ см = 30,48 см;

16 вершков = 28 дюймов;

1 вершок = $\frac{28}{16}$ дюйма = 1,75 · 2,54 см ≈ 4,445 см;

1 четверть = 4 вершка = 17,78 см;

1 аршин = 4 четверти = 71,12 см;

1 сажень = 3 аршина = 71,12 см · 3 ≈ 2,134 м;

1 верста = 500 саженей = 1,067 км;

1 миля = 7 верст ≈ 7,468 км.

4. 1 малая гривенка = $\frac{96}{2}$ = 48 (золотников) = 48 · 4,27 г = 204,96 г.

1 большая гривенка = 1 фунт = 2 малые гривенки = 204,96 · 2 = = 409,92 (г).

1 пуд = 40 фунтов = 409,92 г · 40 = 16,3968 кг.

1 безмен = $\frac{1}{16}$ пуда = $\frac{16{,}3968}{16}$ = 1,0248 кг ≈ 1 кг;

1 берковец = 10 пудов = 163,968 кг.

1 ласт = 72 пуда = 72 · 16,3968 кг ≈ 1180,6 кг.

5. Аптекарский фунт равен 4,27 г · 84 = 358,68 г.

Торговый фунт равен 4,27 г · 96 = 409,92 г.

409,92 – 358,68 = 51,24 (г).

6. 48 золотников = 4,27 · 48 = 204,96 (г).

4 золотника = 4,27 · 4 = 17,08 (г).

Содержание серебра упало на 204,96 – 17,08 = 187,88 (г).

7. Пусть a, b, c, d, e — массы каждого из мешков. В результате взвешиваний получились массы: $a + b$; $b + c$; $c + d$; $d + e$; $a + c$; $b + d$; $c + e$; $a + d$; $b + e$; $a + e$.

Сложив все эти числа, получим $4a + 4b + 4c + 4d + 4e$, что равно 110 + 112 + 113 + 114 + 115 + 116 + 117 + 118 + 120 + 121 = 1156 (кг).

Итак, $a + b + c + d + e = 289$. Масса двух самых легких мешков вместе 110 кг, двух самых тяжелых — 121 кг. Следовательно, средний по массе мешок весит 289 – (110 + 121) = 58 (кг). Тогда 120 кг — сумма самого тяжелого и среднего мешков. Поэтому масса самого тяжелого мешка 120 – 58 = 62 (кг). Тогда масса четвертого мешка 121 – 62 = 59 (кг).

Аналогично рассуждая, заключаем, что 112 кг — сумма масс самого легкого и среднего по массе мешков. Поэтому масса самого легкого мешка 112 – 58 = 54 (кг), тогда масса второго мешка 110 – 54 = = 56 (кг). Итак, масса мешков: 54 кг, 56 кг, 58 кг, 59 кг, 62 кг.

8. 89,4 г · 1 000 000 = 89 400 000 г = 89 400 кг = 89,4 т.

9. 200 г.

10. $\frac{3}{4}$ кг составляют $\frac{1}{4}$ бруска мыла. Следовательно, масса всего бруска мыла 3 кг.

11. 7 персиков.

12. 5 стаканов.

13. Достаточно получить один 200-граммовый пакет, для развешивания остальных пакетов его можно использовать в качестве меры. Схема взвешивания:

500 + 900 = 1400 (остаток 600);
500 — 500 (остаток 100);
100 — 100;
100 + 100 = 200.

Вторая схема:

500 (гиря) + 400 (сахар) = 900 (молоток) (остаток сахара 1600);
500 (гиря) + 900 (молоток) = 1400 (сахар) (остаток 200).

14. Пусть изначально мастер заложил x кг золота и $(10 - x)$ кг серебра. Тогда вес короны под водой будет равен:

$x - \frac{x}{20} + 10 - x - \frac{10-x}{10} = 9\frac{1}{4}$; $-x + 200 - 20 + 2x = 37 \cdot 5$; $x = 5$, т. е. мастер заменил 3 кг золота тремя килограммами серебра.

15. Чтобы проползти мост, питону нужно проползти 32 + 16 = 48 (м). Чтобы проползти мимо столба, питону нужно проползти только свою длину — 16 м. Составляем пропорцию:

48 м — 18 мин,

16 м — x мин, где x — число минут, необходимое питону, чтобы проползти мимо столба; $x = \frac{16 \cdot 18}{48} = 6$, т. е. затратит 6 минут.

16. За оставшиеся 4 месяца молодой человек должен был заработать 2600 \$ – 1000 \$ = 1600 \$. Следовательно, его месячная зарплата составляет 1600 \$: 4 = 400 \$, а зарплата за год: 400 \$ · 12 = 4800 \$, тогда автомобиль стоит 4800 \$ – 2600 \$ = 2200 \$.

17. От первого до последнего гриба Винни-Пух совершил 14 переходов по 40 м, всего 40 · 14 = 560 (м).

18. Так как большая птица стоит вдвое дороже маленькой, то 5 больших и 3 маленькие стоят столько же, сколько $5 \cdot 2 + 3 = 13$ (маленьких), 5 маленьких и 3 большие стоят столько же, сколько $3 \cdot 2 + 5 = 11$ (маленьких). Тогда $13 - 11 = 2$ (маленькие) стоят 20 ден. ед., одна маленькая — 10 ден. ед., большая — 20 ден. ед.

19. Поскольку часы начали и закончили бить одновременно, то время должно быть кратно числам 2 и 3, т. е. кратно 6. За 6 с происходит (не считая 1-го) 4 удара (в 2, в 3, в 4 и в 6 с), за 3 периода по 6 с происходит $4 \cdot 3 = 12$ (ударов). Прибавляем 1-й удар, получаем 13. Итак, прошло $3 \cdot 6 = 18$ (с).

20. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$;

$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ — масса такой части камня 5 кг.

Вес камня: $5 : \frac{1}{6} = 30$ (кг).

21. Атос — 90 кг, д'Артаньян — 80 кг, Портос — 120 кг.

22. Пусть столяр заработал x р., тогда средний арифметический заработок всех семи членов бригады равен $\frac{20 \cdot 6 + x}{7}$. По условию $\frac{20 \cdot 6 + x}{7} + 3 = x$; $120 + x + 21 = 7x$; $6x = 141$; $x = 23{,}5$ (денежных единиц).

23. Второй за 25 мин очистил $25 \cdot 2 = 50$ (картофелин). Следовательно, за время, которое они чистили вместе, было почищено $400 - 50 = 350$ (картофелин). За 1 мин они вдвоем чистили 5 картофелин, тогда вдвоем они чистили $350 : 5 = 70$ (мин). Итак, первый чистил 70 мин, второй — 95 мин.

24. Двое выполняют двойной объем работы за 14 дней при условии, что второй приступит к работе на 4 дня позже. Сравнивая эти числа со второй частью условия, заключаем, что первый выполняет работу за 14 дней, второй — за 10.

25. 169 м^2 = 1 690 000 см^2 = 16 900 дм^2 = 169 000 000 мм^2 = 0,000169 км^2.

26. 0,62 дм = 62 мм = 0,062 м = 6,2 см = 0,000062 км.

27. 15 мин $= 15 \cdot 60 = 900$ (с) $= \frac{1}{4}$ (ч) $= \frac{1}{4 \cdot 24} = \frac{1}{96}$ (сут.).

28. 0,5 кг = 500 г = 0,005 ц = 500 000 мг.

29. Масса кирпичика меньше в 4^3 раза, тогда $\frac{4}{4^3} = \frac{4}{16}$, т. е. масса кирпичика $\frac{1}{16}$ (кг).

30. 1 $м^3$ = 1000 $дм^3$ = 1 000 000 $см^3$ = 1 000 000 000 $мм^3$.

Тогда высота этого столба будет 1 000 000 000 мм = 1 000 000 м = = 1000 км.

31. 6 часов.

32. Пусть x $см^3$ — объем железной детали, тогда объем медной детали — $(x - 2)$ $см^3$, получаем уравнение:

$x \cdot 7{,}8 + (x - 2)8{,}9 = 149{,}2$; $78x + 89x - 178 = 1492$; $167x = 1670$; $x = 10$; $x - 2 = 8$, т. е. объем железной детали — 10 $см^3$, медной — 8 $см^3$.

33. Пусть ученик занимался x ч русским языком, тогда географией он занимался $\left(x - \frac{1}{4}\right)$ ч, математикой — $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ ч. Составляем уравнение $x + x - \frac{1}{4} + x + \frac{1}{3} = 1\frac{5}{6}$, решив которое получаем, что ученик занимался русским языком — $\frac{7}{12}$ ч, географией — $\frac{1}{3}$ ч, математикой — $\frac{11}{12}$ ч.

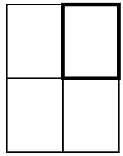
Тема 9. ПУТЕШЕСТВИЕ В СТРАНУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Цель: сформировать у учащихся внутреннюю мотивацию к геометрическому материалу и с помощью соответствующих заданий развивать пространственное воображение, логику рассуждений, познавательную и творческую активность.

На изучение этой темы отводится 4 часа. Основное внимание в ней уделяется геометрическим фигурам: углу, треугольнику, кругу, окружности, решению занимательных задач и диаграммам в повседневной жизни, простейшим задачам прикладного характера. На факультативных занятиях рекомендовано проведение геометрических соревнований и различных игр. В приложении расположен соответствующий геометрический материал.

Комментарии и ответы

К «Вопросам и заданиям для самостоятельной работы (2)»

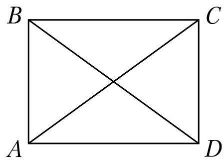


2. Верное утверждение: а).

6. Периметр малого прямоугольника: $2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)=a+b.$

$a+b=51$ (см).

Периметр большого прямоугольника: $2(a+b) =$
$= 2 \cdot 51 = 102$ (см).

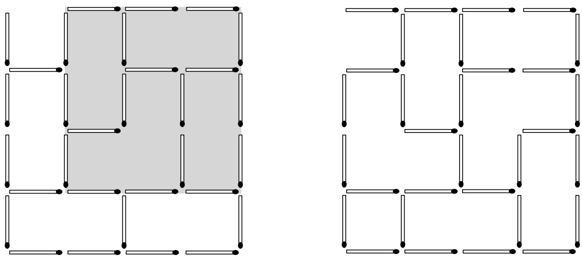


7. Получили 8 треугольников.

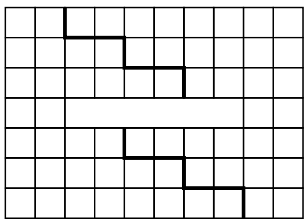
8. Периметр прямоугольника: $2 \cdot (80 + 120) =$
$= 400$ (м). Досок потребуется $400 : 0{,}1 = 4\,000$ (м).

9. д).

10. На нижеследующих рисунках убраны 9 спичек. Полностью сохранился на каждом контур только одного квадрата:

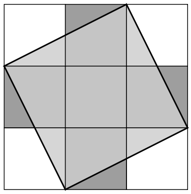


11.



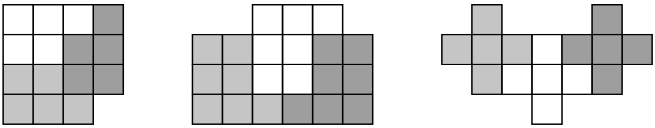
12. Пусть длина стороны нижнего среднего квадрата равна x. Тогда длина стороны правого нижнего квадрата равна $(x + 1)$, верхнего правого — $(x+2)$, левого верхнего — $(x+3)$, а искомая сторона нижнего левого квадрата равна $(x+3) - (x - 1) = 4$.

13. Указание:

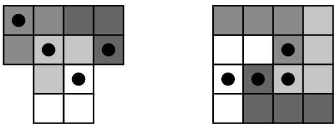


К «Занимательным задачам на разрезание»

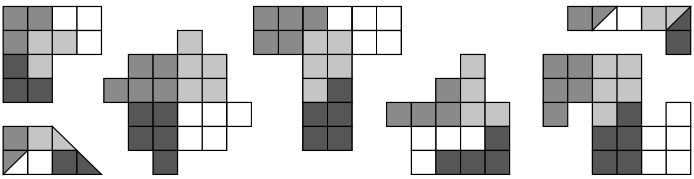
1.



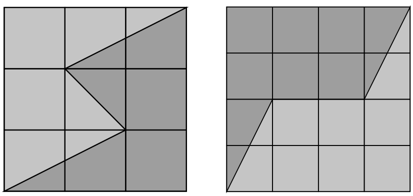
2.



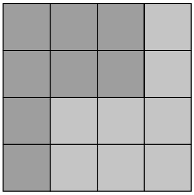
3.



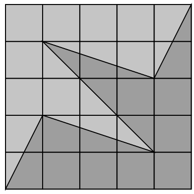
4. а)



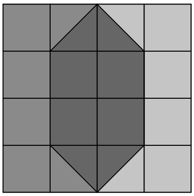
б)



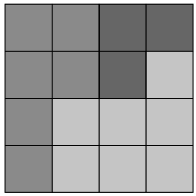
в)



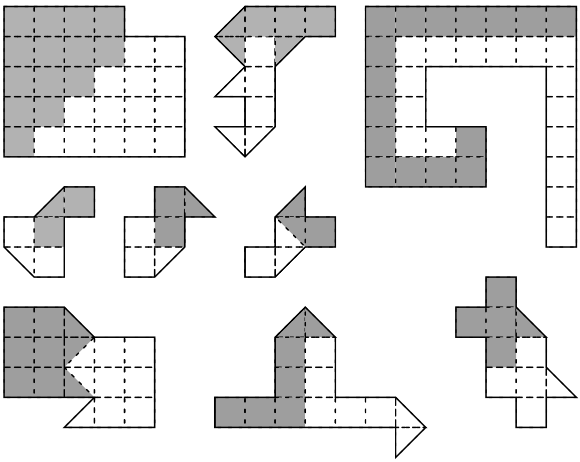
5. Способ 1



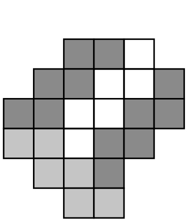
Способ 2



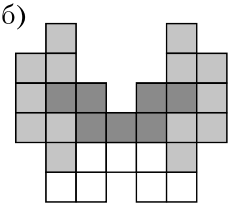
6.



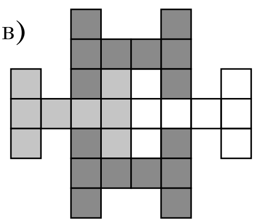
7. а)



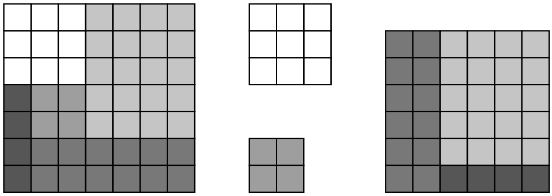
б)



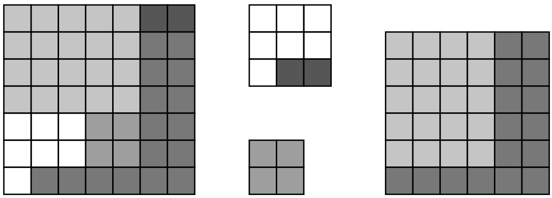
в)



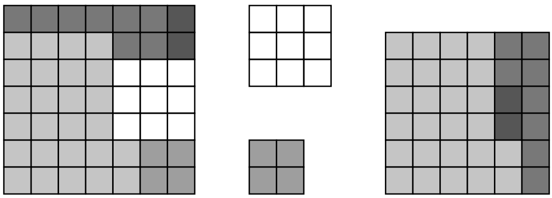
8. Способ 1



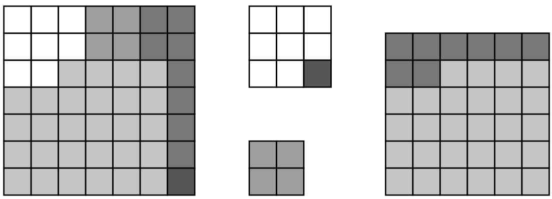
Способ 2



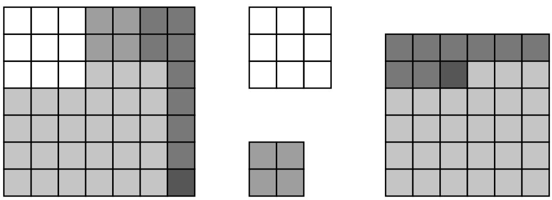
Способ 3



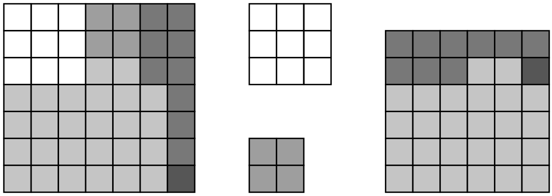
Способ 4



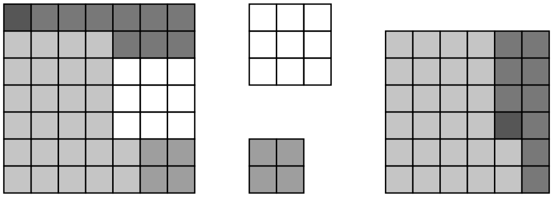
Способ 5



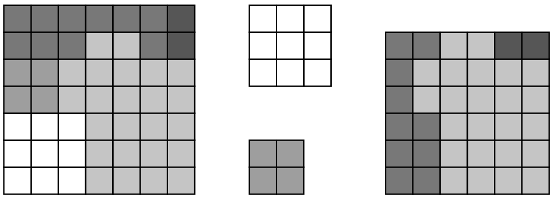
Способ 6



Способ 7



Способ 8



К рубрике «Давайте поиграем»

1. Выигрывает первый. Своим первым ходом начинающий может закрасить центральную клетку квадрата, а затем поддерживать центральную симметрию.

2. Выигрышная стратегия есть у начинающего. Первым своим ходом начинающий может провести хорду AB, по обе стороны которой будет одинаковое количество отмеченных точек. Занумеруем точки, лежащие по одну сторону от AB в порядке следования красными цифрами: 0 (точка A), 1, 2, ..., 9, 10 (точка B), а точки, лежащие по другую сторону, — зелеными цифрами: 0 (точка A), 1, 2, ..., 9, 10 (точка B). Теперь первый игрок может симметрично отражать ходы своего соперника относительно хорды AB, а именно: соединять точки с теми же номерами, что соединил перед этим соперник, но другого цвета (разноцветные точки соперник соединить не сможет, поскольку в этом случае ему придется пересечь хорду AB, что запрещено правилами).

3. а) Выигрышная стратегия есть у второго игрока. Для победы второму игроку достаточно совершать ходы, симметричные ходам соперника относительно центра квадрата.

б) Победит начинающий. Он может своим первым ходом отломить и съесть нижние 6 горизонтальных рядов. После этого останется прямоугольник с дегтем в центре. Далее работает центрально-симметричная стратегия.

в) Победит второй игрок. Клетка C находится на диагонали квадрата. Второй игрок может делать разломы вдоль прямых, симметричных прямым, вдоль которых делает разломы первый игрок, относительно этой диагонали. Таким образом, после каждого хода второго игрока будет получаться все меньший и меньший квадрат, в котором клетка с дегтем по-прежнему лежит на диагонали.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЗАДАЧИ-ШУТКИ И УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Два отца и два сына пошли гулять и купили три апельсина. Каждый из них получил по апельсину. Как это могло получиться?

Ответ: гуляли дед, отец и внук.

2. Что тяжелее: тонна пуха или тонна железа?

Ответ: весят одинаково.

3. Яйцо всмятку варится 3 минуты. Сколько времени потребуется, чтобы сварить 5 яиц?

Ответ: 3 минуты.

4. Четверо играли в домино 4 часа. Сколько часов играл каждый из противников?

Ответ: по 4 часа.

5. Пара лошадей пробежала 10 км. Сколько километров пробежала каждая лошадь?

Ответ: 10 км.

6. Во сколько раз лестница на шестой этаж длиннее лестницы на второй этаж этого же дома?

Ответ: в 5 раз.

7. В шашечном турнире с тремя участниками было сыграно шесть партий. Сколько партий сыграл каждый участник?

Ответ: 4 партии (так как в каждой партии участвуют два игрока).

8. У одного человека спросили, сколько у него детей. Ответ был замысловатый: «У меня шесть сыновей, а у каждого сына есть родная сестра». Сколько детей в этой семье?

Ответ: шесть сыновей и одна дочь.

9. Из двух станций навстречу друг другу одновременно вышли два поезда: товарный и скорый. Скорость первого поезда — 80 км в час, второго — 40 км в час. Через 6 часов после своего выхода скорый поезд встретился с товарным. Сколько времени до момента встречи шел товарный поезд?

Ответ: 6 часов.

10. 10 насосов за 10 минут выкачивают 10 тонн воды. За сколько минут 25 насосов выкачают 25 тонн воды?

Ответ: за 10 минут.

11. Отец оставил дочери конверт с деньгами и попросил купить ее кое-что в магазине. Девочка увидела на конверте сумму 98 ден. ед. и не стала пересчитывать деньги. В магазине ей нужно было заплатить 90 ден. ед., ей не хватило 4 ден. ед. Дома она рассказала об этом отцу, но он сразу объяснил ей, в чем дело. В чем была ошибка девочки?

Ответ: в конверте было 86 ден. ед., она просто его перевернула.

12. В колесе 10 спиц. Сколько промежутков между ними?

Ответ: 10.

13. В воскресенье в 6 ч утра гусеница, которая живет не более суток, а затем превращается в кокон, начала вползать на дерево. В течение дня, т. е. до 6 часов вечера, она забралась на высоту 5 м, но потом сползла на 2 м вниз. Когда и в каком часу гусеница, двигаясь таким образом, может достигнуть вершины, если высота дерева 12 м?

Ответ: никогда.

14. Рыба весит 1 кг и еще столько, сколько весит полрыбы. Сколько весит рыба?

Ответ: 2 кг.

15. Гусь стоит 2 рубля и еще половину действительной стоимости. Сколько стоит гусь?

Ответ: 4 рубля.

16. Если 2 кошки за 2 часа съедят 2 мышек, то сколько мышек съедят 4 кошки за 4 часа?

Ответ: 8. Так как 2 кошки за 2 часа съедят 2 мышек, то 2 кошки за 4 часа съедят 4 мышек, тогда 4 кошки за 4 часа съедят 8 мышек.

17. 3 кошки съедают 3 мышек за 1,5 часа. За какое время 10 кошек съедят 20 мышек?

Ответ: за 3 часа. 3 кошки за 1,5 часа съедят 3 мышек, 1 кошка за 1,5 часа съест 1 мышку. 1 кошка за 3 часа съест 2 мышек. 10 кошек за 3 часа съедят 20 мышек.

18. Из трех одинаковых по виду колец одно несколько легче других. Как найти его одним взвешиванием на чашечных весах?

Ответ: взять любые два кольца и положить на весы, если будет равновесие, то третье кольцо — искомое, если равновесия нет, то весы покажут, какое кольцо легче.

19. Из девяти монет одна фальшивая (более легкая). Как двумя взвешиваниями на чашечных весах определить фальшивую монету?

Ответ: положить на каждую из чашек весов по три монеты, если весы в равновесии, то из оставшихся трех монет положить на чашки весов по монете, и если весы в равновесии, то оставшаяся монета фальшивая, в противном случае весы определят фальшивую. Если первоначально весы не были в равновесии, то из трех монет, которые легче, положить на чашки весов по одной монете и определить более легкую.

20. Из 7 монет одна фальшивая (более легкая). Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах определить фальшивую?

Ответ: положить на каждую из чашек весов по три монеты, если весы в равновесии, то оставшаяся монета фальшивая. Если весы не уравновесятся, то положить на чашки весов по одной монете из тех трех, которые легче, и определить более легкую одним взвешиванием.

21. Из города A в 9 часов вечера вышел в город B грузовой поезд со скоростью 80 км в час. Из города B ему навстречу вышел скорый поезд со скоростью 120 км в час. Расстояние между городами 600 км. Какой поезд в момент встречи будет ближе к городу A?

Ответ: оба.

22. По обеим сторонам железной дороги на протяжении одного километра расставлены столбы на расстоянии 100 м один от другого. Сколько всего столбов расставлено на данном расстоянии?

Ответ: 22.

23. Катя решила задачу первой. Она объяснила решение трем подругам. Каждая из них объяснила решение задачи еще троим. Каждая из этих троих объяснила решение еще троим. К началу урока все учащиеся класса знали, как решить задачу. Сколько учеников было в классе?

Ответ: 40.

24. Старушка поднялась с 1-го этажа на 5-й за 5 минут. За сколько минут она поднимется с 1-го этажа на 9-й, если будет идти с той же скоростью?

Ответ: за 10 минут.

25. Два землекопа за 2 часа выкопали 2 ямы. Сколько ям выкопают 3 землекопа за 3 часа?

Ответ: 4,5 ямы.

26. Петя и Вася живут в одном доме и выходят в школу одновременно. Каждый шаг Пети на 10 % длиннее Васиного, но Петя делает в минуту на 10 % шагов меньше, чем Вася. Кто из них раньше придет в школу?

Ответ: первым придет Вася.

27. Имеется двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Яйцо варится 15 минут. Как отмерить это время при помощи этих часов?

Ответ: 1) перевернуть одновременно 7-минутные и 11-минутные часы, получим разницу в 4 минуты; 2) перевернуть 11-минутные часы, получим 4 мин + 11 мин = 15 мин.

28. Дана квадратная таблица 4 × 4, в каждой клетке которой стоит «+» или «–». За один ход можно поменять все знаки в любой строке или в любом столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из «+»?

а)

+	–	–	+
–	+	+	–
–	+	+	–
+	–	–	+

б)

+	+	+	–
+	+	+	+
–	–	+	+
+	+	+	+

Ответ: а) можно. Сначала надо поменять знаки во второй и третьей строках, затем во втором и третьем столбцах;

б) нельзя. Легко заметить, что любое изменение знаков в строке или столбце не меняет четность числа знаков в этой строке или в этом столбце, а следовательно, и во всей таблице. Так как в исходной таблице число знаков «–» нечетное, то получить таблицу с одними знаками «+» невозможно.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

(на каждое задание отводится несколько минут,
нечетные номера — I вариант, четные — II вариант)

I. Проценты

1. Если 8 % пути составляют 48 км, то чему равен весь путь?

2. Если 6 % пути составляют 48 км, то чему равен весь путь?

3. В классе 25 учеников, 20 % из них занимаются танцами. Сколько учащихся занимаются танцами?

4. В классе 28 учеников, 25 % из них занимаются музыкой. Сколько учащихся занимаются музыкой?

5. Найдите процентное отношение чисел 26 и 200.

6. Найдите процентное отношение чисел 34 и 200.

7. Число увеличили в 1,5 раза. На сколько процентов увеличили число?

8. Число увеличили в 1,3 раза. На сколько процентов увеличили число?

9. Какой процент жирности молока, если в одном его килограмме содержится 35 г жиров?

10. Какой процент жирности молока, если в одном его килограмме содержится 45 г жиров?

II. Единицы измерения длины, площади и объема

1. Какую длину имеет сторона квадрата, площадь которого 1 га?

2. Какую длину имеет сторона квадрата, площадь которого 1 а?

3. Какую часть ара содержит квадрат со стороной 1 м?

4. Какую часть гектара содержит квадрат со стороной 1 м?

5. Выразите в квадратных метрах 3 а.

6. Выразите в квадратных метрах 5 а.

7. Выразите в квадратных километрах 300 га.

8. Выразите в квадратных километрах 500 га.

9. Найдите площадь квадрата со стороной 0,5 см.

10. Найдите площадь квадрата со стороной 0,6 см.

11. Объем сосуда 8 дм^2. Войдет ли в этот сосуд 7 л воды?

12. Объем сосуда 6 дм^2. Войдет ли в этот сосуд 7 л воды?

13. Какую часть литра составляет 1 см^3?

14. Сколько литров содержится в 1 см^3?

15. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 0,2 см; 0,3 см; 0,1 см.

16. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 0,4; 0,5; 0,1.

17. Найдите объем куба с ребром 0,1 м.

18. Найдите объем куба с ребром 0,2 м.

19. Какой процент составляет 1 дм^3 от 1 м^3?

20. Какой процент составляет 1 см^3 от 1 дм^3?

ИГРЫ, КОТОРЫЕ МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ

I. Простейшие игры для проведения устных и письменных вычислений

Игры: «Цепочка», «Лесенка», «Молчанка», «Лабиринт» — рекомендуются для проведения на занятиях по темам «Путешествие в мир десятичных дробей» и «Путешествие в страну рациональных чисел».

II. Простейшие геометрические игры

1. Игры с использованием спичек

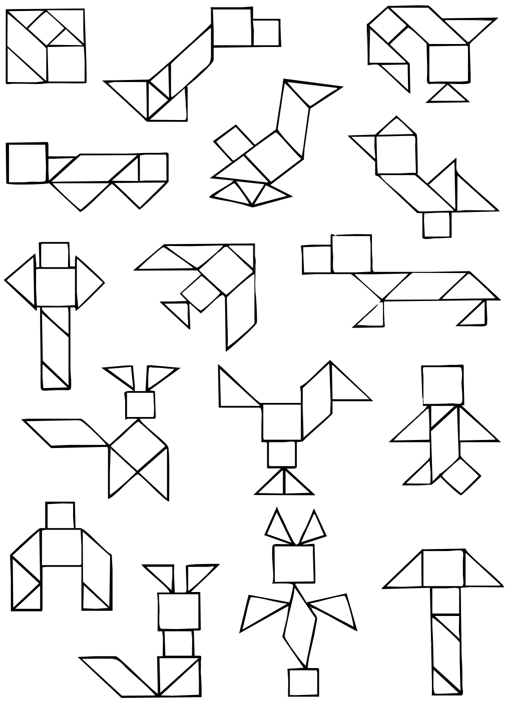
Для проведения этих игр можно использовать счетные палочки. Как правило, в таких играх предлагается сложить из спичек (счетных палочек) какую-либо фигуру, которая получается в результате решения некоторого задания, или переставить спички у данной фигуры и получить новую.

В дидактических материалах содержится материал для проведения этих игр.

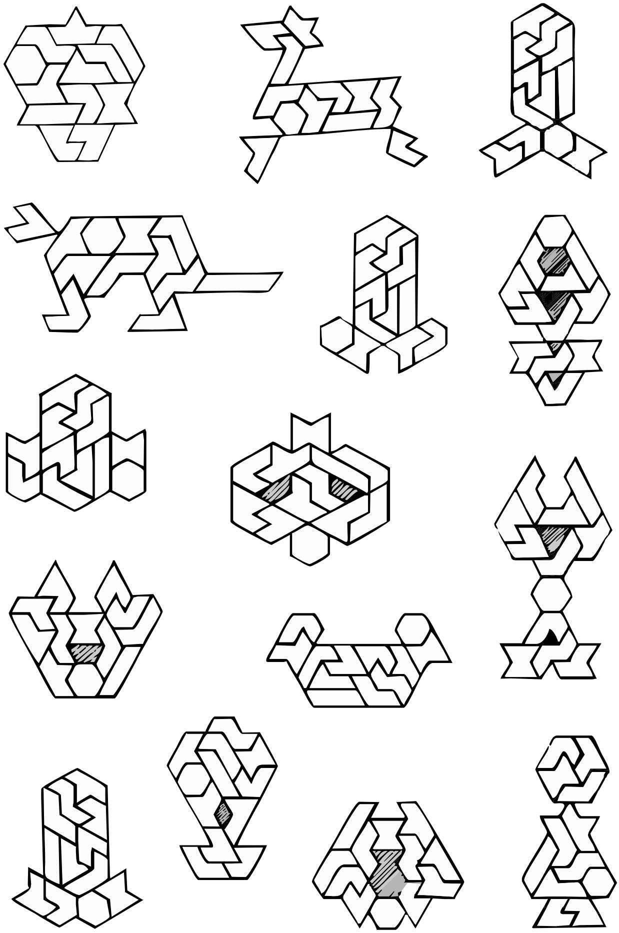
2. Геометрические игры-головоломки

Игры, которые рекомендуются на занятиях по теме «Путешествие в страну геометрических фигур».

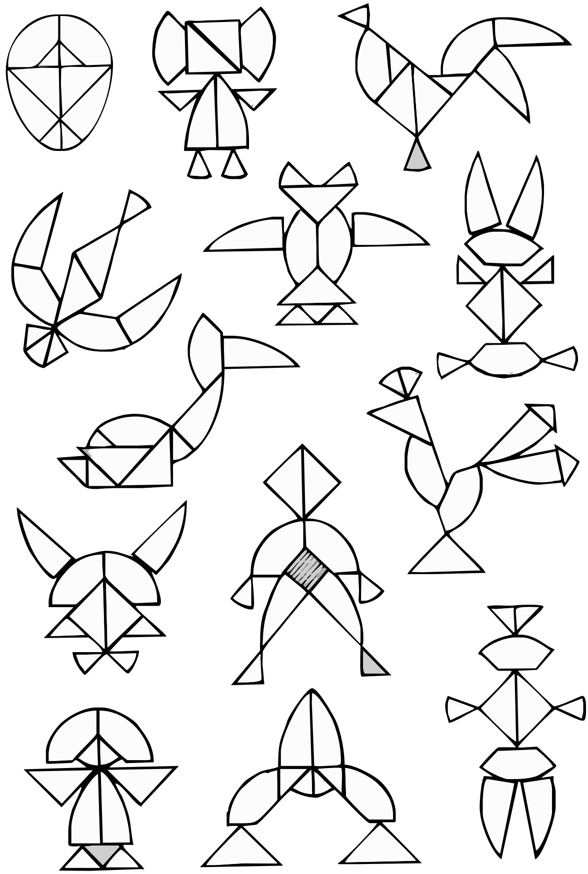
«Головоломка Пифагора». Квадрат делится на 7 частей (два квадрата, четыре треугольника и параллелограмм). На рисунке показано, как необходимо разрезать квадрат и какие фигуры из полученных частей нужно сложить [9].



«Гексамино». Каждый из 12 элементов игры состоит из 6 равных равносторонних треугольников. Чертежи элементов игры и силуэты фигур предлагаются ниже [9].



«Колумбово яйцо». Существует множество вариантов игры. В предлагаемом варианте овал разрезается на 10 частей. На рисунке даны силуэты фигур для составления и элементы игры [9].



III. Настольные игры

1. Игры: «игра в 11» и «игра в 30» рекомендуются на занятиях темы «Путешествие в страну геометрических фигур».

2. Игры с шашками

Игры, которые рекомендуются для организации игровых «привалов»: «Квартет», «Лиса и гуси», «Леопард и коровы», «Волк и овцы». (Оборудование и правила игр даны в дидактических материалах.)

Содержание

Организация образовательного процесса

Приложение 2

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Гуцанович Сергей Аркадьевич
Костюкович Наталья Владимировна

МАТЕМАТИКА. 5—6 КЛАССЫ

Пособие для учителей учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 13.09.2012. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 7,22. Доп. тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.