Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия

9 класс

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся
общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

Минск • «Аверсэв» • 2011

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721
Р59

Серия основана в 2010 году

Рогановский, Н. М.

Р59 Геометрия. 9 класс. Многообразие идей и методов : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 144 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-529-663-9.

Пособие составлено в соответствии с программой факультативного курса. В издании содержится теоретический и практический материал, приводятся различные методы решения геометрических задач.

Предназначено учащимся 9 классов для использования на факультативных занятиях по геометрии.

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна
Тавгень Олег Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. 9 КЛАСС

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 20.12.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 6,35. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

ISBN 978-985-529-663-9

Метод — это ключ к вратам познания.
От авторов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие ребята!

Надеемся, что вы обратили внимание на то, что геометрия обладает громадным потенциалом для развития мышления человека, и с пользой для себя воспользовались этим потенциалом. В этом году вы познакомитесь с новыми темами:

1. Замечательные точки треугольника. Вписанные и описанные четырехугольники. Новые сведения о тригонометрическом методе: решение произвольного треугольника.
2. Метод геометрических преобразований.
3. Правильные многоугольники. Длина окружности. Площадь круга.

Первая тема данного факультативного курса примечательна во многих отношениях. Прежде всего тем, что в ней применяются различные математические методы, известные из предыдущих классов, — в новых условиях, на новом материале. С введением теорем косинусов и синусов для произвольного треугольника существенно будут расширены ваши представления о тригонометрическом методе. В этой теме еще раз обратимся к одному из наиболее сильных геометрических методов — методу подобия. В определенной мере получат завершение в данной теме сведения о треугольнике и четырехугольнике: они будут рассматриваться в комбинации с окружностью. Комбинации фигур всегда приводят к наиболее интересным задачам школьной геометрии и предоставляют исключительные возможности для углубления знаний и развития геометрического мышления.

Метод геометрических преобразований — новый метод, с которым вы познакомитесь во второй теме. Эта тема для школьной геометрии действительно обладает большой новизной. Вы познакомитесь с двумя видами геометрических преобразований. Одни из них сохраняют расстояния между точками (они называются движениями), другие — изменяют расстояния и сохраняют только их отношение (они называются преобразованиями подобия). Необходимо иметь в виду, что геометрические преобразования — это и новая тема, и новый математический метод, и новый способ мышления. В предыдущих темах геометрические фигуры рассматривались неподвижными, статичными. Геометрические преобразования приводят к рассмотрению фигур в динамике: они показывают, каким образом из одной фигуры получается другая фигура, чем-то похожая на первую и в то же время существенно отличающаяся от нее. Эта тема дает уникальную возможность познакомиться с современной геометрической наукой, ее идеями и методами.

Не менее интересной является и третья тема. Ее можно рассматривать как первую попытку ознакомления с методами математического анализа, элементы которых вы будете изучать в старших классах.

Надеемся, что вы узнаете в этом году много полезного и интересного.

Тема 1 ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА. НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА: РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 1. Замечательные точки треугольника: разнообразие геометрических методов

1.1. Теория

О ***геометрическом методе*** обычно говорят в тех случаях, когда доказательства теорем и решения задач не используют аналитические (вычислительные) методы. При рассмотрении замечательных точек треугольника этот метод выражается в применении свойств средней линии треугольника, параллелограмма, серединного перпендикуляра к отрезку, биссектрисы угла и т. д. В свою очередь свойства замечательных точек, которые мы сейчас рассмотрим, существенно обогатят геометрический метод.

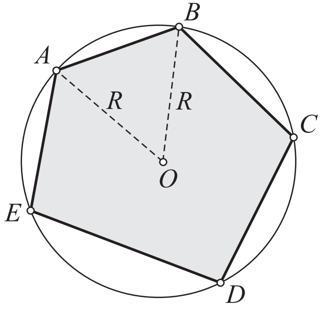

Рис. 1

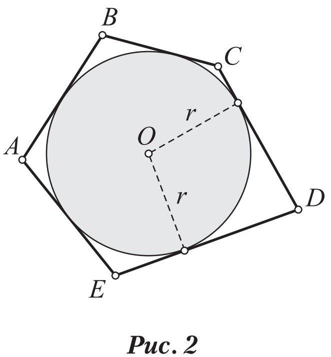

Рис. 2

С некоторыми *замечательными точками* треугольника вы знакомились в предыдущих классах при решении задач (с точками пересечения медиан, биссектрис, прямых, на которых лежат высоты). Систематизируем и дополним эти сведения.

Если окружность (рис. 1) проходит через все вершины многоугольника, то она называется ***описанной*** около многоугольника (многоугольник называется *вписанным* в окружность).

Если окружность (рис. 2) касается всех сторон многоугольника, то она называется ***вписанной*** в многоугольник (многоугольник называется *описанным* около окружности).

Теоремы 1

О центроиде треугольника

1. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке (называемой центроидом треугольника). В точке пересечения медианы делятся в отношении 2 : 1 считая от вершины.**

О центре описанной окружности

2. **Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром описанной окружности.**

3. **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.**

4. **Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (называемой ортоцентром треугольника).**

Доказательства. **1.** 1) Рассмотрим вначале только две медианы AA_1 и BB_1 (рис. 3). Пусть M — точка их пересечения. Докажем, что точка M делит каждую из этих медиан в отношении 2 : 1 считая от вершин треугольника.

Пусть A_2 и B_2 — середины соответственно отрезков AM и BM.

Так как A_1B_1 и A_2B_2 — средние линии соответственно треугольников ABC и ABM, то

$$\left.\begin{aligned} A_1B_1 \parallel AB, \\ A_2B_2 \parallel AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1B_1 = \frac{1}{2}AB, \\ A_2B_2 = \frac{1}{2}AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1B_1 = A_2B_2; \qquad (2)$$

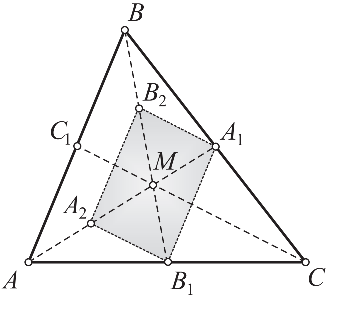

Рис. 3

2) из (1) и (2) следует, что четырехугольник $A_2B_2A_1B_1$ — параллелограмм, а точка M — точка пересечения его диагоналей;

3) по свойству диагоналей параллелограмма

$$B_1M = MB_2,\ A_1M = MA_2;$$

4) тогда, учитывая, что $BB_2 = B_2M$ и $AA_2 = A_2M$, будем иметь: $BB_2 = B_2M = MB_1$, $AA_2 = A_2M = MA_1$. Следовательно, точка M делит медианы AA_1 и BB_1 в отношении 2 : 1 считая от вершин треугольника;

5) если бы мы рассмотрели другую пару медиан, например AA_1 и CC_1, то пришли бы к такому же выводу: медианы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке, которая делит медиану AA_1 в таком же отношении 2 : 1. Это означает, что *медиана CC_1 проходит через ту же точку M*;

6) итак, все три медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в постоянном отношении 2 : 1 считая от вершин треугольника.

2. 1) Проведем сначала два серединных перпендикуляра s_1 и s_2 соответственно к сторонам AB и BC (рис. 4). Пусть O — точка их пересечения. Докажем, что третий серединный перпендикуляр (к стороне AC) пройдет через полученную точку O.

Воспользуемся свойством точек, принадлежащих серединному перпендикуляру:

$$\left.\begin{aligned} O \in s_1 &\Rightarrow AO = OB, \\ O \in s_2 &\Rightarrow BO = OC \end{aligned}\right\} \Rightarrow AO = OC;$$

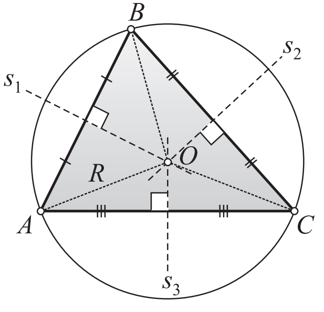

Рис. 4

2) если точка O равноудалена от концов отрезка AC, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка (применяем обратную теорему): $AO = OC \Rightarrow O \in s_3$;

3) итак, все три серединных перпендикуляра s_1, s_2 и s_3 пересекаются в одной точке — точке O;

4) так как $OA = OB = OC$, то окружность с центром O и радиусом, равным OA, пройдет через все вершины данного треугольника. Значит, точка O является центром описанной окружности.

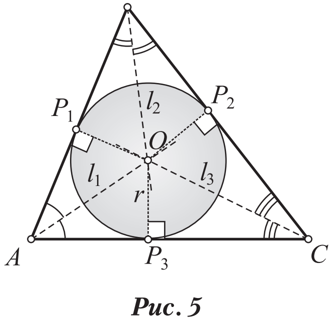

Рис. 5

3. 1) Проведем сначала две биссектрисы l_1 и l_2 соответственно углов A и B (рис. 5). Пусть O — точка их пересечения. Докажем, что биссектриса l_3 угла C также пройдет через точку O.

Воспользуемся свойством точек, принадлежащих биссектрисе угла. Для этого из точки O проведем перпендикуляры OP_1, OP_2 и OP_3 к сторонам треугольника. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} O \in l_1 \Rightarrow OP_1 = OP_3, \\ O \in l_2 \Rightarrow OP_1 = OP_2 \end{array}\right\} \Rightarrow OP_3 = OP_2;$$

2) на основании обратного утверждения (если внутренняя точка угла равноудалена от сторон угла, то она принадлежит биссектрисе этого угла): $OP_3 = OP_2 \Rightarrow O \in l_3$;

3) итак, все три биссектрисы пересекаются в одной точке — точке O;

4) проведем теперь окружность с центром O и радиусом, равным OP_1. Эта окружность пройдет через точки P_1, P_2 и P_3;

5) получаем, что сторона AB перпендикулярна к радиусу окружности в его конце, лежащем на окружности. Поэтому AB — касательная к окружности (аналогично устанавливаем, что BC и AC — касательные к окружности);

6) итак, окружность с центром O и радиусом OP_1 является вписанной окружностью.

4. 1) пусть h_1, h_2 и h_3 — высоты данного ΔABC (или их продолжения). Построим ΔDEK, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника (рис. 6).

В получившейся фигуре выделим три параллелограмма: $ABCK$, $ADBC$ и $ABEC$;

2) из первых двух параллелограммов имеем:

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC, \\ AK = BC \end{array}\right\} \Rightarrow AD = AK, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 \perp BC, \\ BC \parallel AK \end{array}\right\} \Rightarrow h_1 \perp DK; \qquad (2)$$

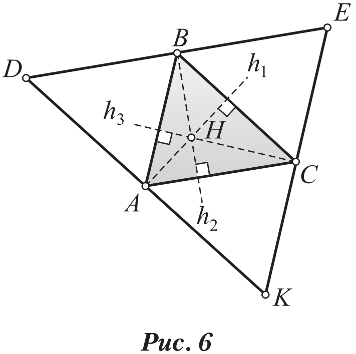

Рис. 6

3) из (1) и (2) следует, что h_1 — серединный перпендикуляр к стороне DK ΔDEK;

4) аналогично получаем, что h_2 и h_3 — серединные перпендикуляры к сторонам DE и EK этого треугольника;

5) только что было доказано, что серединные перпендикуляры (h_1, h_2 и h_3 к сторонам ΔDEK) пересекаются в одной точке. Обозначим ее буквой H;

6) итак, доказано, что высоты ΔABC (или их продолжения) пересекаются в одной точке H.

Замечание. Рассмотренные точки (центроид, центры описанной и вписанной окружностей, ортоцентр) называются *замечательными* точками треугольника. Существуют и другие замечательные точки треугольника.

1.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть ΔABC — равносторонний, M — центроид треугольника, BB_1 — медиана, $MB_1 = 3$ см. Найдите сторону треугольника.

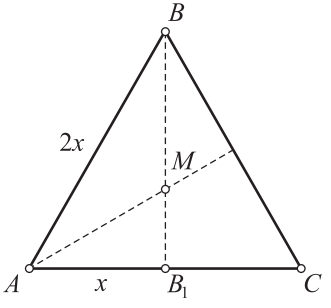

Рис. 7

Решение.

1) По свойству медиан треугольника (рис. 7) $BM = 2MB_1 = 6$ см. Тогда медиана $BB_1 = 6 + 3 = 9$ см;

2) в равностороннем треугольнике если $AB_1 = x$, то $AB = 2x$;

3) применим к ΔABB_1 теорему Пифагора:

$$(2x)^2 - x^2 = 9^2,$$
$$3x^2 = 81,$$
$$x^2 = 27,$$
$$x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$
$$AB = 2x = 6\sqrt{3}.$$

Ответ: $6\sqrt{3}$ см.

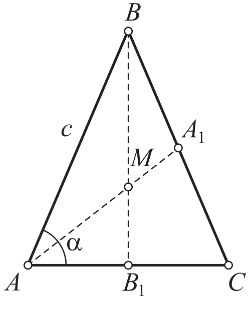

Рис. 8

Задача 2. Пусть ΔABC — равнобедренный, $AB = BC = c$, $\cos A = \sqrt{\frac{3}{8}}$. Найдите медианы треугольника (рис. 8).

Решение.

1) Найдем медиану BB_1 из прямоугольного ΔABB_1, предварительно отыскав $\sin A$:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}},$$

$$\frac{BB_1}{AB} = \sin A \Rightarrow BB_1 = m_b = AB \sin A = c\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}};$$

2) для нахождения медианы AA_1 найдем вначале отрезок AM — часть искомой медианы. Для этого рассмотрим ΔAMB_1.

В нем:

$$MB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{c}{6}\sqrt{\frac{5}{2}},$$

$$AB_1 = AB\cos A = c\cos A = c\sqrt{\frac{3}{8}} \text{ (из } \Delta ABB_1\text{)},$$

$$AM = \sqrt{AB_1^2 + MB_1^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{8} + \frac{5c^2}{72}} = \sqrt{\frac{4c^2}{9}} = \frac{2c}{3};$$

3) тогда $AA_1 = \frac{3}{2}AM = \frac{3}{2}\cdot\frac{2c}{3} = c$.

Ответ: $m_a = m_c = c,\ m_b = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Задача 3. В условиях задачи 2 найдите высоты ΔABC (рис. 9).

Решение.

1) $BB_1 = h_b = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$;

2) из ΔAA_1C: $\frac{AA_1}{AC} = \sin A \Rightarrow$

$$\Rightarrow AA_1 = AC\sin A = 2c\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{c\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $h_a = h_c = \frac{c\sqrt{15}}{4},\ h_b = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$.

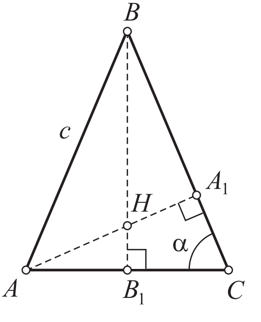

Рис. 9

Задача 4. Пусть ΔABC — равнобедренный, $AB = BC = c$, $\angle A = \alpha$. Найдите биссектрисы ΔABC (рис. 10).

Решение.

1) $BB_1 = l_b = c\sin\alpha$;

2) найти сразу биссектрису AA_1 из ΔAA_1C (он не прямоугольный) пока затруднительно. Для получения прямоугольных треугольников проведем высоту AK. Применим тригонометрический метод. Из прямоугольного треугольника ABK имеем:

$$AK = AB\sin B = c\sin(180^\circ - 2\alpha) = c\sin 2\alpha;$$

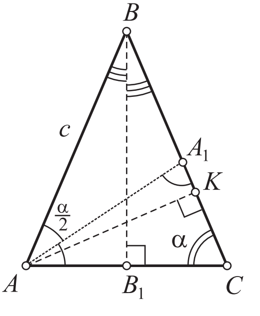

Рис. 10

3) учтем, что $\angle AA_1K = 180° - \left(\dfrac{\alpha}{2} + \alpha\right)$;

4) тогда $\dfrac{AK}{AA_1} = \sin\left(180° - \dfrac{3}{2}\alpha\right) = \sin\dfrac{3}{2}\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow AA_1 = \frac{AK}{\sin\dfrac{3}{2}\alpha} = \frac{c\sin 2\alpha}{\sin\dfrac{3}{2}\alpha}.$$

Ответ: $l_a = l_c = \dfrac{c\sin 2\alpha}{\sin\dfrac{3}{2}\alpha}$, $l_b = c\sin\alpha$.

Задача 5. В условиях задачи 4 найдите радиус описанной окружности (рис. 11).

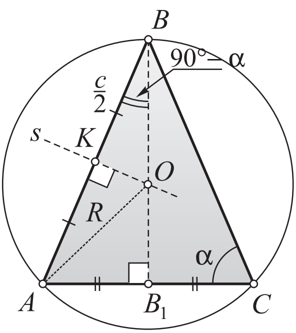

Рис. 11

Решение.

1) Центр O описанной окружности — точка пересечения двух серединных перпендикуляров к сторонам AC и AB: $O = BB_1 \cap s$;

2) $\angle ABB_1 = 90° - \alpha$;

3) из ΔKBO: $\dfrac{BK}{BO} = \cos(90° - \alpha) =$

$$= \sin\alpha \Rightarrow \frac{\frac{c}{2}}{R} = \sin\alpha \Rightarrow R = \frac{c}{2\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{c}{2\sin\alpha}$.

Задача 6. В условиях задачи 4 найдите радиус вписанной окружности.

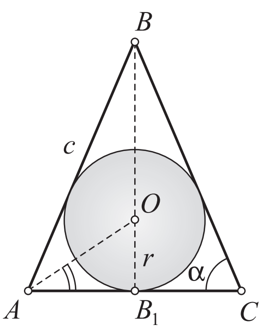

Рис. 12

Решение.

1) $\angle OAB_1 = \dfrac{\alpha}{2}$ (рис. 12);

2) из ΔAOB_1: $\dfrac{OB_1}{AB_1} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{r}{c\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow r = c\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $c\cos\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 7. В условиях задачи 4 найдите площадь ΔABC (см. рис. 8).

Решение.

Имеем: $S=\frac{1}{2}AC\cdot BB_1=\frac{1}{2}\cdot 2c\cos\alpha\cdot c\sin\alpha=\frac{1}{2}c^2\sin 2\alpha.$

Ответ: $\frac{1}{2}c^2\sin 2\alpha.$

Обратимся к *конструктивным методам в геометрии* — решению задач на построение.

Задача 8. Постройте ΔABC, зная сторону $AC=b$ и две медианы $AA_1=m_a$ и $CC_1=m_c$ (рис. 13).

1. *Анализ* (*поиск решения*). 1) Допустим, что искомый ΔABC построен. В нем: $AC=b$, $AA_1=m_a$ и $CC_1=m_c$. Пусть M — центроид ΔABC. Больше всего известных элементов в ΔAMC: $AC=b$, $AM=\frac{2}{3}m_a$, $CM=\frac{2}{3}m_c$.

Этот треугольник может быть построен по трем сторонам;

2) продолжив медиану MB_1 ΔAMC и, отложив на продолжении отрезок $MB=2MB_1$, получим вершину B ΔABC;

3) итак, построив ΔAMC, затем вершину B, построим ΔABC.

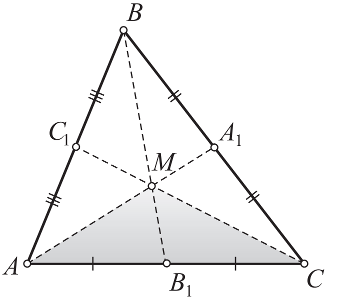

Рис. 13

2. *Построение.* Строим:

1) ΔAMC: $AC=b$, $AM=\frac{2}{3}m_a$, $CM=\frac{2}{3}m_c$;

2) B_1 — середину стороны AC;

3) B: $B\in MB_1$, $MB=2MB_1$; ΔABC — искомый.

3. *Доказательство.* Имеем: BB_1 — медиана ΔABC и $BM:MB_1=2:1$. Значит, M — центроид ΔABC.

Тогда AA_1 и CC_1 — медианы этого треугольника. Эти медианы имеют заданную длину: $AA_1=\frac{3}{2}AM=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}m_a=m_a$, $CC_1=\frac{3}{2}CM=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}m_c=m_c$.

Итак, ΔABC — искомый. В нем $AC=b$, $AA_1=m_a$, $CC_1=m_c$.

4. *Исследование.* ΔABC будет существовать, если существует ΔAMC. Последний треугольник существует при условии

$$\left|\frac{2}{3}m_a-\frac{2}{3}m_c\right|<b<\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_c.$$

При этом условии задача имеет единственное решение.

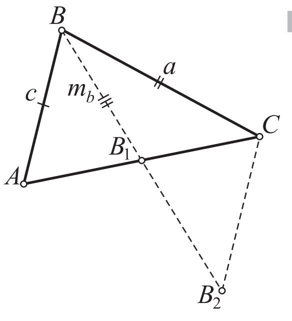

Рис. 14

Задача 9. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины (рис. 14).

1. *Анализ* (*поиск решения*). Пусть искомый ΔABC построен: в нем $AB = c$, $BC = a$, $BB_1 = m_b$ — медиана. При решении задач, в которых дается медиана, часто помогает следующий прием: продолжим медиану BB_1 за точку B_1 и на продолжении отложим отрезок $B_1B_2 = BB_1$. Четырехугольник $ABCB_2$ — параллелограмм (в нем диагонали в точке пересечения делятся пополам). Тогда $CB_2 = c$. Получили ΔBCB_2, в котором известны все его стороны: $BB_2 = 2m_b$, $BC = a$, $CB_2 = c$. Построив ΔBCB_2, нетрудно построить ΔABC (как?).

2—3. *Построение* и *доказательство* проведите самостоятельно.

4. *Исследование*. Задача имеет решение, причем единственное при условии (см. ΔBCB_2): $|a - c| < 2m_b < a + c$.

§ 2. Вписанные и описанные четырехугольники

2.1. Теория

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется ***вписанным*** в окружность.

На рисунке 15, *а—в* $\angle ABC$ является углом, вписанным в окружность. Говорят, что этот угол *опирается на дугу AC*. По существу, вписанный угол всегда надо рассматривать вместе с дугой, на которую он опирается!

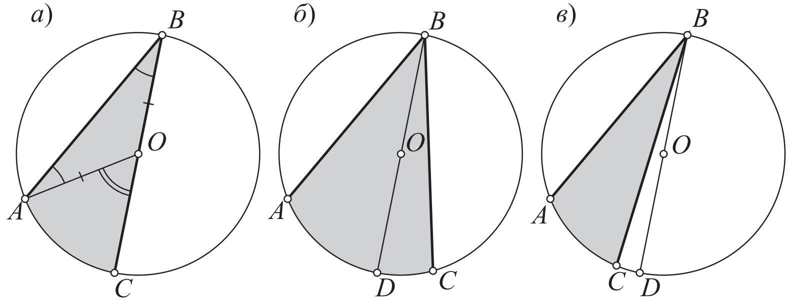

Рис. 15

Теоремы 2

1. **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.**

2. **Четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.**

3. **Четырехугольник является описанным тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.**

Доказательства. **1.** *1-й случай*: сторона угла проходит через центр окружности (см. рис. 15, *а*).

1) Нужно доказать, что $\angle ABC$ измеряется половиной $\cup AC$, т. е. градусная мера $\angle ABC$ в два раза меньше градусной меры $\cup AC$.

Рассмотрим $\angle AOC$: этот угол центральный, он измеряется дугой AC;

2) $\angle AOC$ — внешний угол ΔABO. Поэтому $\angle AOC = \angle OAB + \angle OBA$;

3) так как $OA = OB$ (как радиусы окружности), то ΔABO — равнобедренный. Поэтому $\angle OAB = \angle ABO$;

4) отсюда $\angle AOC = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle ABO = 2\angle ABC$;

5) следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Поэтому $\angle ABC$ измеряется половиной $\cup AC$.

Возможны еще два случая, которые сводятся к первому.

2-й случай: центр окружности лежит внутри угла (рис. 15, *б*).

Имеем:

$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$.

Поэтому $\angle ABC$ измеряется

$$\frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC =$$

$$= \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2}\cup AC.$$

3-й случай: центр окружности лежит вне данного угла (рис. 15, *в*).

Имеем:

$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD$.

Поэтому $\angle ABC$ измеряется

$$\frac{1}{2}\cup AD - \frac{1}{2}\cup DC =$$

$$= \frac{1}{2}(\cup AD - \cup DC) = \frac{1}{2}\cup AC.$$

2. а) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 16). Докажем, что $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$. В самом деле:

1) $\angle A$ — вписанный, поэтому он измеряется $\frac{1}{2}\cup BCD$;

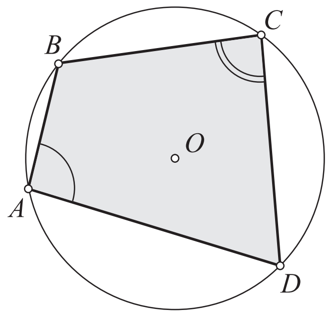

Рис. 16

2) $\angle C$ — также вписанный, поэтому он измеряется $\frac{1}{2}\cup DAB$;

3) сумма $\angle A + \angle C$ измеряется дугой, равной половине всей окружности;

4) следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$;

5) аналогично: $\angle B + \angle D = 180°$.

б) *Обратное утверждение*. Пусть

$$\angle A + \angle C = 180°, \angle B + \angle D = 180°.$$

Докажем, что около такого четырехугольника можно описать окружность:

1) Через точки A, B и C проведем окружность. Выясним, пройдет ли эта окружность через вершину D. Допустим, что окружность ABC через вершину D не проходит, причем возможны два случая: а) D лежит внутри окружности ABC (рис. 17); б) D лежит вне этой окружности (рис. 18);

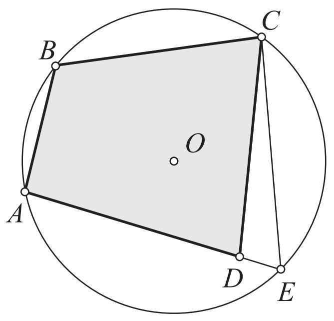

Рис. 17

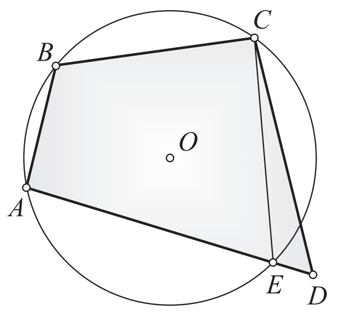

Рис. 18

2) в обоих случаях можно построить четырехугольник $ABCE$, вписанный в окружность ABC;

3) для каждого случая имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\angle B + \angle D = 180° \text{ — по условию,} \\ \angle B + \angle E = 180° \text{ — по прямой теореме}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D = \angle E;$$

4) с другой стороны, в первом случае $\angle D > \angle E$ — по свойству внешнего угла треугольника ($\angle D$ — внешний угол ΔCDE); во вто-

ром случае $\angle E > \angle D$ (здесь $\angle E$ — внешний угол ΔCDE). Оба неравенства противоречат полученному в п. 3 равенству $\angle D = \angle E$;

5) полученное противоречие означает, что окружность ABC проходит через вершину D и, значит, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

3. а) Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 19). Докажем, что $AB + CD = AD + BC$.

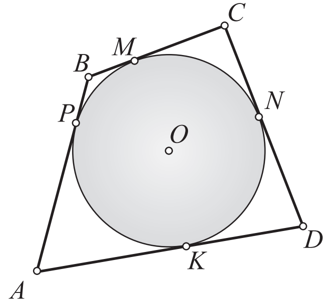

Рис. 19

1) Воспользуемся равенством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. На основании этого свойства: $AP = AK$, $BP = BM$, $CM = CN$, $DN = DK$;

2) тогда (равные отрезки подчеркнули одинаковыми линиями):

$$\left.\begin{aligned} AB + CD &= \underline{AP} + \underline{\underline{BP}} + \underset{-}{CN} + \underset{\sim\sim}{DN}, \\ AD + BC &= \underline{AK} + \underset{\sim\sim}{DK} + \underline{\underline{BM}} + \underset{-}{CM} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB + CD = AD + BC.$$

б) *Обратное утверждение.* Пусть $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

1) Построим окружность, касающуюся трех сторон AB, BC и CD (центр этой окружности находится в точке пересечения биссектрис углов B и C). Докажем, что эта окружность будет касаться четвертой стороны — AD. Допустим (рассуждаем методом от противного), что эта окружность не касается стороны AD, при этом возможны два случая, показанные на рисунках 20 и 21;

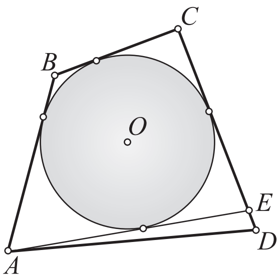

Рис. 20

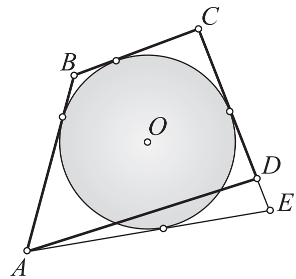

Рис. 21

2) в обоих случаях можно построить четырехугольник $ABCE$, в который указанная окружность будет вписана;

3) в первом случае имеем:

$$
\begin{array}{rll}
 & AB + CE + ED = BC + AD & \text{(по условию)} \\
- & & \\
 & AB + CE = BC + AE & \text{(по прямой теореме)} \\
\hline
 & ED = AD - AE; &
\end{array}
$$

4) но этого быть не может: в ΔADE сторона ED должна быть больше разности двух других его сторон. К аналогичному противоречию приводит и второй случай;

5) следовательно, допущение о том, что сторона AD не касается указанной выше окружности, неверно. Значит, сторона AD касается этой окружности, которая оказывается искомой — вписанной в четырехугольник $ABCD$.

2.2. Углы, связанные с окружностью. Касающиеся окружности

Рассмотрим еще некоторые углы, измерение которых проводится при помощи дуг окружности. Такими углами являются углы с вершиной внутри или вне окружности (рис. 22 и 23) и угол, образованный касательной и хордой (рис. 24). Приведем следующие определения.

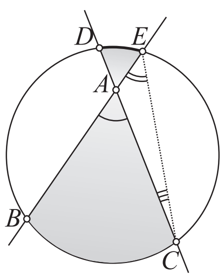

Рис. 22

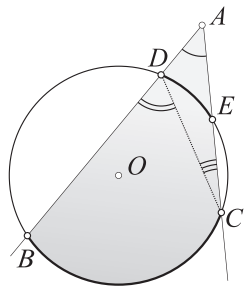

Рис. 23

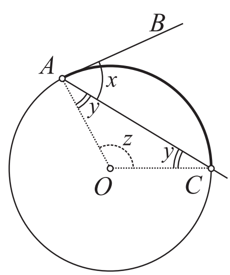

Рис. 24

Пусть AB (см. рис. 24) — касательная к окружности, AC — хорда окружности. Угол BAC называется *углом, образованным касательной и хордой*.

Две окружности называются ***касательными*** друг к другу, если они имеют единственную общую точку (рис. 25 и 26).

Общая точка называется *точкой касания*. Если одна из окружностей расположена внутри другой, то касание называется *внутренним*, в противном случае — *внешним*.

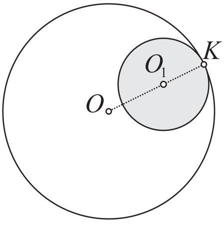

Рис. 25

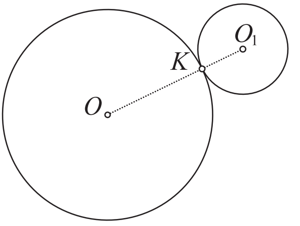

Рис. 26

Если прямая проходит через центры двух окружностей, то она называется *линией центров* этих окружностей.

Следствия.

1. *Угол, вершина которого находится внутри окружности, измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями.*

2. *Угол, вершина которого находится вне окружности, а стороны пересекают эту окружность, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.*

3. *Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами.*

4. *Точка касания двух окружностей лежит на линии центров.*

Доказательства. **1.** 1) Вершина $\angle BAC$ лежит внутри окружности (см. рис. 22). Требуется доказать, что этот угол измеряется полусуммой дуг BC и DE. Для доказательства проведем хорду EC. Угол BAC является внешним углом ΔACE. Поэтому $\angle BAC = \angle E + \angle C$;

2) но углы E и C измеряются соответственно $\frac{1}{2}\cup BC$ и $\frac{1}{2}\cup DE$;

3) поэтому $\angle BAC$ измеряется полусуммой дуг BC и DE.

2. 1) Вершина $\angle BAC$ лежит вне окружности (см. рис. 23). Докажем, что этот угол измеряется полуразностью дуг BC и DE. Для доказательства проведем хорду DC. Угол BDC является внешним углом ΔACD. Поэтому $\angle A = \angle BDC - \angle ACD$;

2) но углы BDC и ACD как вписанные измеряются соответственно половинами дуг BC и DE;

3) поэтому $\angle BAC$ измеряется полуразностью дуг BC и DE.

3. 1) Докажем, что $\angle BAC$ (см. рис. 24) измеряется половиной $\cup AC$. В обозначениях, указанных на рисунке, имеем: $x = 90° - y$, $z = 180° - 2y$;

2) если $\angle BAC$ в 2 раза меньше центрального $\angle AOC$ и $\angle AOC$ измеряется $\cup AC$, то $\angle BAC$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AC$.

4. Обратимся вначале к вспомогательной задаче. Пусть дана некоторая точка A окружности и прямая s, проходящая через центр O (рис. 27). Проведем из точки A перпендикуляр AM к прямой s и на его продолжении отложим отрезок $MA_1 = MA$. Докажем, что полученная точка A_1 будет лежать на окружности.

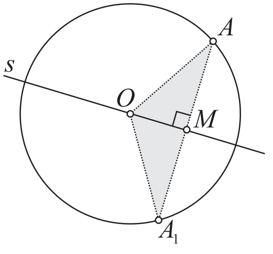

Рис. 27

В самом деле, прямоугольные треугольники OAM и OA_1M равны по двум катетам. Из их равенства следует, что $OA = OA_1$. Поэтому точка A_1 лежит на данной окружности. Вернемся к двум касающимся окружностям. Если допустить, что точка касания — точка A — не лежит на линии центров OO_1 (рис. 28), то, выполнив для точки A построения, указанные во вспомогательной задаче в каждой окружности, получим точку A_1, которая отлична от точки A и принадлежит как одной из данных окружностей, так и другой. Это противоречит единственности общей точки A у данных окружностей. Значит, $A \in O_1O_2$.

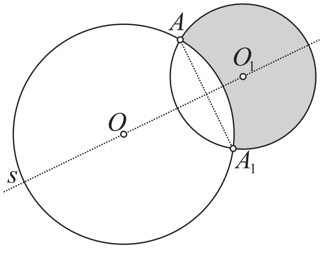

Рис. 28

2.3. Примеры решения задач

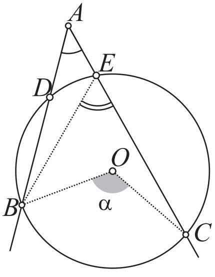

Рис. 29

Задача 1. На рисунке 29 $\angle BOC = \alpha$ — центральный угол окружности, точка A не лежит на окружности. Может ли быть, что $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$?

Решение.

Пусть луч AC пересекает окружность в точке E. По свойству вписанного угла $\angle BEC = \frac{\alpha}{2}$.

Угол BEC как внешний угол ΔABE больше угла A. Поэтому $\angle BAC \neq \frac{\alpha}{2}$.

Задача 2. В окружность вписан выпуклый четырехугольник $ABCM$ (рис. 30). В точках A и B проведены касательные a и b. Касательная a образует с хордой AB угол α, а касательная b — с хордой BC угол β. Дуги AB и BC не пересекаются. Докажите, что $\angle M = \alpha + \beta$.

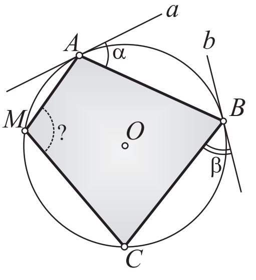

Рис. 30

Доказательство. По следствию $2 \cup AB = 2\alpha$, $\cup BC = 2\beta$. Поэтому $\cup ABC = \cup AB + \cup BC = 2(\alpha + \beta)$ дуговым градусам. Угол AMC — вписанный угол, опирающийся на $\cup ABC$. Поэтому $\angle AMC = \alpha + \beta$.

Задача 3. Докажите, что если около параллелограмма описана окружность, то этот параллелограмм является прямоугольником (рис. 31).

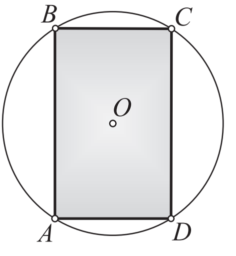

Рис. 31

Доказательство. В параллелограмме $ABCD$ противоположные углы равны: $\angle A = \angle C$. Кроме того, так как четырехугольник вписанный, то $\angle A + \angle C = 180°$. Поэтому $\angle A = \angle C = 90°$. Аналогично: $\angle B = \angle D = 90°$. Значит, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

Задача 4. Докажите, что если около трапеции описана окружность, то она является равнобедренной (рис. 32).

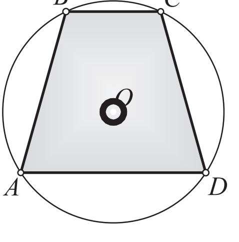

Рис. 32

Доказательство. В трапеции $ABCD$ $\angle C + \angle D = 180°$. По свойству вписанного четырехугольника $\angle C + \angle A = 180°$. Из этих двух равенств следует, что $\angle A = \angle D$. Если углы при основании трапеции равны, то она является равнобедренной.

Задача 5. Докажите, что если в параллелограмм вписана окружность, то он является ромбом (рис. 33).

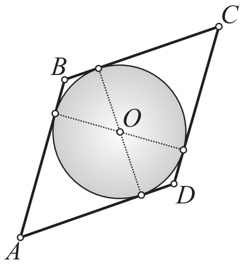

Рис. 33

Доказательство. Пусть в параллелограмм $ABCD$ вписана окружность. Тогда $AB + CD = AD + BC$ (по свойству описанного четырехугольника);
$AB = CD$, $AD = BC$ (по свойству параллелограмма).

Отсюда: $2AB = 2BC$.

Следовательно, $AB = BC$ и в параллелограмме $ABCD$ все стороны оказываются равными. Поэтому он является ромбом.

Задача 6. Докажите, что высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного ΔABC являются биссектрисами $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 34).

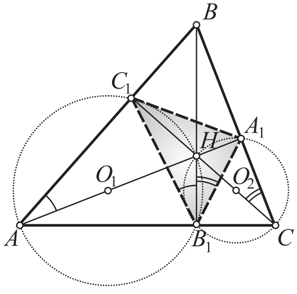

Рис. 34

Замысел доказательства. Пусть H — ортоцентр ΔABC. Рассмотрим окружности с диаметрами AH и CH. Находя равные вписанные углы, докажем, что

$$\angle C_1B_1H = \angle A_1B_1H.$$

Доказательство. 1) Так как AH — гипотенуза ΔAC_1H и ΔAB_1H, то окружность с центром в середине гипотенузы и радиусом, равным ее половине, пройдет через точки A, C_1, H и B_1;

2) аналогично: окружность с центром в середине гипотенузы CH и радиусом, равным ее половине, пройдет через точки B_1, H, A_1 и C;

3) $\angle C_1AH = \angle C_1B_1H$ как вписанные углы, опирающиеся на $\cup C_1H$;

4) для второй окружности аналогично: $\angle HB_1A_1 = \angle HCA_1$;

5) из прямоугольных треугольников ABA_1 и CBC_1 находим, что $\angle HAB = 90° - \angle B = \angle HCA_1$;

6) Из п. 3—5 следует искомое равенство: $\angle C_1B_1H = \angle HB_1A_1$;

7) следовательно, луч B_1B — биссектриса $\angle C_1B_1A_1$;

8) этот вывод справедлив и для других высот ΔABC.

Задача 7. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ (рис. 35) диагонали перпендикулярны, E — точка пересечения диагоналей, K — середина стороны AB. Докажите, что $EK \perp CD$.

Доказательство. 1) Пусть $\angle BAE = \alpha$. Тогда $\angle ABE = 90° - \alpha$;

2) $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу BC;

3) воспользуемся тем, что медиана EK прямоугольного ΔABE равна половине гипотенузы: $EK = AK = BK$;

4) в равнобедренном ΔBEK: $\angle BEK = \angle KBE = 90° - \alpha$;

5) тогда $\angle DEM = \angle BEK = 90° - \alpha$;

6) если $\angle EDM = \alpha$ и $\angle DEM = 90° - \alpha$, то $\angle DME = 90°$.

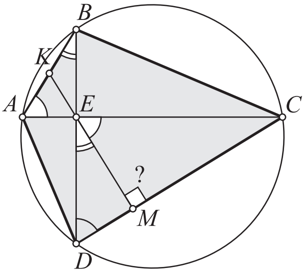

Рис. 35

Задание 8. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению задачи 7.

Задача 9. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом (рис. 36). Проведена прямая, касающаяся окружностей в точках K_1 и K_2 и пересекающая линию центров под некоторым углом в точке A. Найдите синус угла A, если радиусы окружностей равны соответственно r и R.

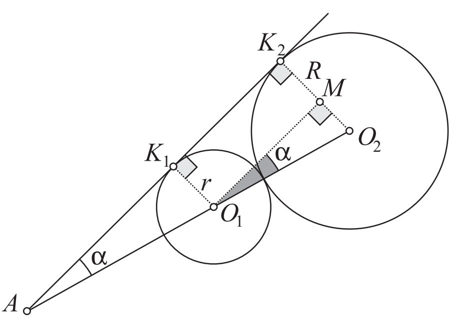

Рис. 36

Решение.

1) Проведем $O_1M \parallel AK_2$, тогда четырехугольник $O_1K_1K_2M$ — прямоугольник;

2) приходим к выводу, что ΔO_1MO_2 — прямоугольный;

3) в этом треугольнике: $O_1O_2 = r + R$, $O_2M = R - r$, $\angle MO_1O_2 = \alpha$;

4) тогда $\sin\alpha = \dfrac{O_2M}{O_1O_2} = \dfrac{R - r}{R + r}$.

Ответ: $\sin\alpha = \dfrac{R - r}{R + r}$.

Задача 10. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом в точке A (рис. 37), AB — диаметр большей окружности. Из точки B проведена касательная к меньшей окружности. Большая окружность отсекает на этой касательной хорду BC. Найдите длину этой хорды, если радиус меньшей окружности равен r и $\angle ABC = \alpha$.

Решение.

1) Учтем, что треугольники O_1BK и ABC — прямоугольные (почему?);

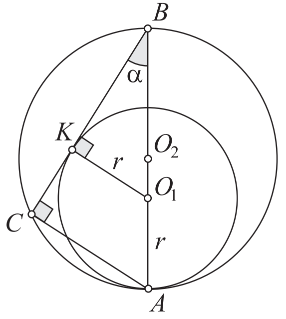

Рис. 37

2) $\frac{O_1K}{O_1B} = \sin\alpha \Rightarrow O_1B = \frac{O_1K}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha}$;

3) $AB = AO_1 + O_1B = r +$

$$+\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{r(\sin\alpha + 1)}{\sin\alpha};$$

4) из ΔABC:

$$\frac{BC}{AB} = \cos\alpha \Rightarrow BC = AB\cos\alpha =$$

$$= \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha = r(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $BC = r(1+\sin\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$.

§ 3. Дальнейшее развитие тригонометрического метода: теоремы косинусов и синусов, формулы площади треугольника

3.1. Основные теоремы

Теоремы 3

Теорема косинусов

1. **Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними** (рис. 38):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad (1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos B, \qquad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C. \qquad (3)$$

Выражение площади треугольника через синус угла

2. **Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними** (рис. 39):

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C, \qquad (4)$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B, \qquad (5)$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A. \qquad (6)$$

Теорема синусов

3. **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (**рис. 40):

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \qquad (7)$$

Новые формулы площади треугольника

4. **Пусть a, b, c — стороны треугольника, R и r – радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей, p — полупериметр, S — площадь. Тогда**

$$S=\frac{abc}{4R}=rp=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (8–10)$$

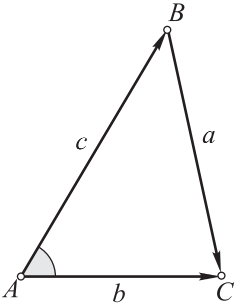

Рис. 38

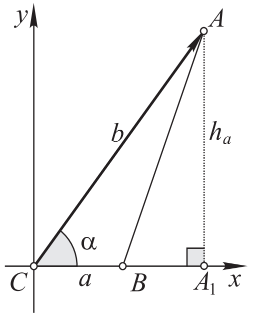

Рис. 39

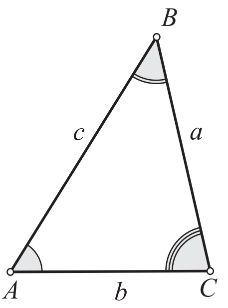

Рис. 40

Доказательства. **1.** 1) Докажем равенство (1). Воспользуемся векторной разностью (см. рис. 38): $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$;

2) рассмотрим скалярное произведение вектора $\overrightarrow{BC}$ на себя:
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}^{\,2}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^{\,2}+\overrightarrow{AB}^{\,2}-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$;

3) учтем, что $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$;

4) получим $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-2|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A$;

5) так как $|\overrightarrow{BC}|=a$, $|\overrightarrow{AC}|=b$, $|\overrightarrow{AB}|=c$, то $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

6) равенства (2) и (3) доказываются аналогично.

2. 1) Докажем равенство (4). Воспользуемся системой координат (см. рис. 39). В этой системе координат вектор $\overrightarrow{CA}$ имеет ординату $y=b\sin C$;

2) учтем, что ордината вектора $\overrightarrow{CA}$ равна высоте h_a: $h_a = b \sin C$;

3) поэтому $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \sin C$;

4) аналогично доказываются два других равенства.

3. 1) На основании предыдущей теоремы можно записать следующие равенства (см. рис. 40): $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$;

2) разделив каждую часть этих равенств на $\frac{1}{2}abc$, получим: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$;

3) приходим к искомым равенствам: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

4. 1) Выразим площадь треугольника через его стороны и радиус описанной окружности (см. формулу (8)). Для этого установим, что $\frac{c}{\sin C} = 2R$. (*) Проведем диаметр BA' (рис. 41 и 42) и рассмотрим вписанный угол $BA'C$. В первом случае $\angle A' = \angle A$, так как они вписанные и опираются на $\cup BC$. Во втором случае $\angle A' = 180° - \angle A$ (учли, что сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна $180°$).

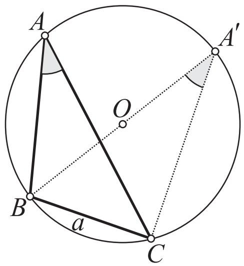

Рис. 41

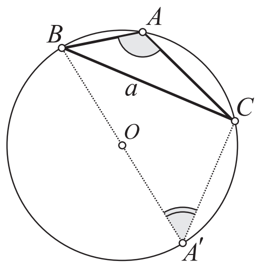

Рис. 42

Важно, что в каждом из этих случаев $\sin A' = \sin A$. Из прямоугольного $\Delta BA'C$ имеем: $\sin A' = \frac{a}{2R}$. Тогда $\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$. Итак, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (эти равенства являются существенным дополнением к теореме синусов). С учетом равенства (*) имеем: $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$. Итак, равенство (8) доказано;

2) выразим площадь треугольника через его полупериметр p и радиус вписанной окружности r (рис. 43). Имеем:

$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{ACO} + S_{BCO} =$$
$$= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar =$$
$$= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rp.$$

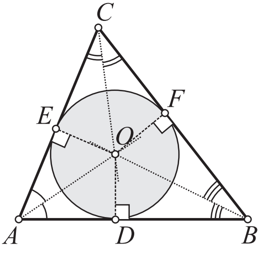

Рис. 43

3.2. Следствия из теорем

Обратим внимание на то, что приводимые ниже следствия являются существенным развитием и углублением тригонометрического метода.

Следствия.

1 (из теоремы косинусов). *Для произвольного* ΔABC:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

2 (из формулы, выражающей площадь треугольника через синус угла). *Для произвольного* ΔABC: $\sin A = \frac{2S}{bc}$, $\sin B = \frac{2S}{ac}$, $\sin C = \frac{2S}{ab}$.

3 (из формулы площади треугольника). *Площадь параллелограмма равна произведению двух смежных его сторон на синус угла между ними*: $S = ab \sin A$.

4 (дополнение к теореме синусов). *Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равны* $2R$, *где* R — *радиус описанной окружности*: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

3.3. Примеры решения задач

Убедимся в том, что применение теорем синусов и косинусов является наиболее распространенной формой тригонометрического метода.

Задача 1. Вычислите ширину реки в месте, отмеченном точкой A (рис. 44). Какие построения и измерения на местности необходимо для этого выполнить?

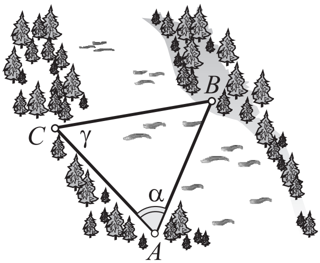

Рис. 44

Решение.

1) Выберем на противоположном берегу некоторый «приметный» пункт B. Требуется определить расстояние AB. Для этого на местности построим отрезок AC и измерим углы α и γ;

2) по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin(180°-(\alpha+\gamma))} = \frac{AB}{\sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)};$$

3) пусть: $AC = 80$ м, $\alpha \approx 98°$, $\gamma \approx 50°$. Тогда

$$AB \approx \frac{80\cdot\sin 50°}{\sin 148°} = \frac{61{,}2836}{0{,}5299} \approx 116 \text{ (м)}.$$

Ответ: $AB \approx 116$ м.

Задача 2. Докажите, что если a, b и c — стороны треугольника, то его медианы могут быть найдены по формулам:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

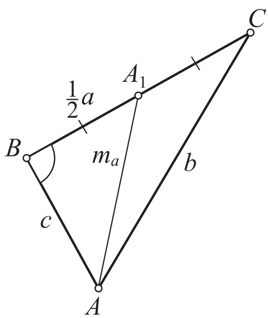

Рис. 45

Доказательство. Выведем первую формулу (рис. 45). Применяя теорему косинусов к ΔABA_1 (AA_1 — медиана) и следствие из нее к ΔABC, имеем:

$$m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c\cdot\frac{a}{2}\cos B = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

Отсюда приходим к первой формуле. Аналогично выводятся две другие.

Задача 3. В ΔABC (см. рис. 45) $AB = 1$, $AC = 2$, $\angle A = 60°$. Найдите неизвестные стороны и углы этого треугольника.

Решение.

1) По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\alpha =$$

$$= 1 + 4 - 2\cdot 1\cdot 2\cos 60° = 5 - 4\cdot\frac{1}{2} = 3,\ BC = \sqrt{3};$$

2) найдем угол B: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{3+1-4}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1} = 0$, $\angle B = 90°$;

3) тогда $\angle C = 180° - (90° + 60°) = 30°$.

Ответ: $BC = \sqrt{3}$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$.

Задача 4. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 46) $AD = a$, $AB = b$, $\angle A = \alpha$. Найдите диагонали BD и AC. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Решение.

1) По теореме косинусов из ΔABD:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha};$$

2) аналогично из ΔABC:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$$

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha};$$

3) складывая BD^2 и AC^2, получаем $BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2$, отсюда следует искомое утверждение.

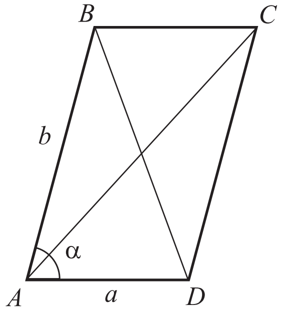

Рис. 46

Задача 5. Во внешнюю сторону равнобедренного ΔABC на боковых сторонах AB и BC построены квадраты (рис. 47). В результате получили ΔBDE. Докажите, что $S_{ABC} = S_{BDE}$.

Решение.

1) В обозначениях, принятых на рисунке, имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha;$$

2) углы ABC и DBE — углы со взаимно перпендикулярными сторонами, причем так как один из

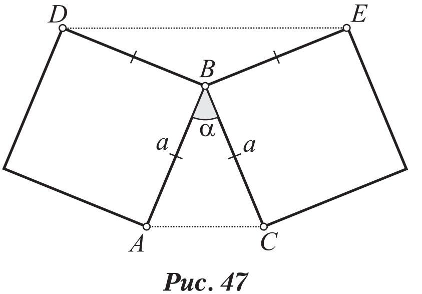

Рис. 47

них острый, то другой — тупой. Сумма таких углов равна 180°. Поэтому $\angle DBE = 180° - \alpha$;

3) тогда $S_{BDE} = \frac{1}{2}a^2 \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha = S_{ABC}$.

Задача 6. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

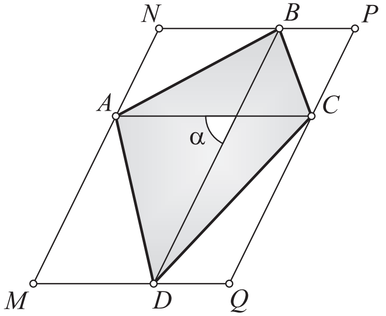

Рис. 48

Доказательство. 1) Пусть $ABCD$ (рис. 48) — выпуклый четырехугольник. «Опишем» около него параллелограмм $MNPQ$ так, как показано на рисунке (стороны параллелограмма параллельны диагоналям данного четырехугольника);

2) учтем, что площадь четырехугольника в 2 раза меньше площади параллелограмма $MNPQ$;

3) тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MN \cdot MQ \sin\angle NMQ = \frac{1}{2}BD \cdot AC \sin\alpha.$$

Ответ: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC \sin\alpha$.

Задача 7. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Доказательство. 1) Ранее это утверждение доказывалось методом площадей. Докажем его с помощью теоремы синусов. Пусть BB_1 — биссектриса ΔABC (рис. 49). Требуется доказать, что $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a}{c}$. Введем обозначения для углов:

$$\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = \frac{\beta}{2}, \ \angle AB_1B = \varphi, \ \angle CB_1B = 180° - \varphi;$$

2) применяя теорему синусов к ΔABB_1 и ΔCBB_1, будем иметь:

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{b_1} = \frac{\sin\varphi}{c}, \ \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{b_2} = \frac{\sin(180° - \varphi)}{a} = \frac{\sin\varphi}{a};$$

3) деля одноименные части этих равенств (каких?), находим, что $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a}{c}$.

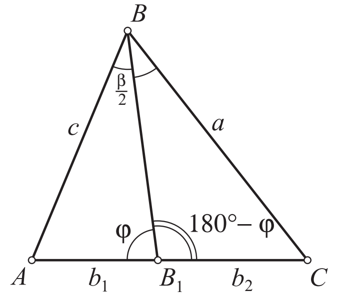

Рис. 49

Часто математические методы применяются совместно. Так, при решении приводимой ниже задачи используются метод площадей, тригонометрический метод, метод равных треугольников.

Задача 8. В ромбе $ABCD$ известны площадь S и сторона a (рис. 50), M и K — середины соответственно сторон BC и CD. Найдите синус $\angle MAK$.

Замысел решения. Положим, что $\angle MAK = \beta$. Воспользуемся формулой

$$S_{AMK} = \frac{1}{2} AM \cdot AK \sin\beta. \qquad (*)$$

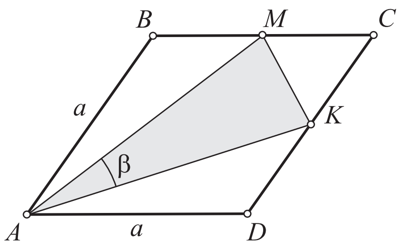

Рис. 50

Чтобы найти $\sin\beta$, необходимо знать S_{AMK}, AM и AK.

Решение.

1) Для нахождения S_{AMK} найдем площади трех треугольников:

$$S_{ABM} = \frac{1}{4}S,\ S_{ADK} = \frac{1}{4}S,\ S_{CMK} = \frac{1}{8}S.$$

Поэтому $S_{AMK} = S - \left(\frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}S\right) = S - \frac{5}{8}S = \frac{3}{8}S;$

2) положим, что $\angle BAD = \alpha$. Тогда $S = a^2 \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{S}{a^2}$,

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{S^2}{a^4}} = \frac{\sqrt{a^4 - S^2}}{a^2};$$

3) применим теорему косинусов к ΔABM:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos(180° - \alpha) =$$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4} + 2a \cdot \frac{a}{2}\cos\alpha = \frac{5a^2}{4} + a^2\cos\alpha = \frac{5a^2}{4} + a^2 \cdot \frac{\sqrt{a^4 - S^2}}{a^2} =$$

$$= \frac{5a^2}{4} + \sqrt{a^4 - S^2} = \frac{5a^2 + 4\sqrt{a^4 - S^2}}{4};$$

4) $\Delta ABM = \Delta ADK \Rightarrow AK = AM$;

5) тогда равенство (*) примет вид:

$$\frac{3}{8}S = \frac{1}{2}AM^2 \cdot \sin\beta, \ \frac{3}{8}S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a^2 + 4\sqrt{a^4 - S^2}}{4} \cdot \sin\beta.$$

Ответ: $\sin\beta = \dfrac{3S}{5a^2 + 4\sqrt{a^4 - S^2}}$, где $S \le a^2$.

§ 4. Тригонометрический метод решения произвольных треугольников

4.1. Теория

Ранее рассматривался тригонометрический метод для решения прямоугольного треугольника. Тригонометрический метод позволяет решать аналогичные задачи для произвольного треугольника (рис. 51).

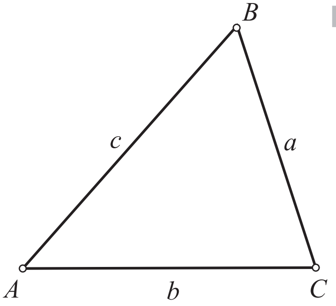

Рис. 51

Задача 1. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите косинусы или синусы его углов.

Решение.

1-й способ. По теореме косинусов находим:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2-й способ. Углы B и C можно найти и более коротким путем:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Задача 2. Даны стороны a и b треугольника и угол C между ними. Найдите третью сторону и остальные два угла (см. рис. 51).

Решение.

1) По теореме косинусов находим сторону c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C};$$

2) далее воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow \sin A=\frac{a\sin C}{c};$$

3) после чего находим угол A и затем угол B:

$$\angle B=180°-(\angle A+\angle C).$$

Задача 3. Даны сторона a треугольника и два прилежащих к ней угла B и C. Найдите третий угол и другие две стороны.

Решение.

1) Сразу находим угол A: $\angle A=180°-(\angle B+\angle C)$;
2) воспользуемся теперь теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow b=\frac{a\sin B}{\sin A},$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Задача 4. Даны две стороны a и b треугольника и угол, противолежащий одной из них, например угол A. Найдите неизвестные углы и третью сторону (см. рис. 51).

Решение.

1) По теореме синусов находим синус угла B:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow \sin B=\frac{b\sin A}{a};$$

2) если $\sin B\le 1$, то задача имеет решение. Если $\sin B>1$, то задача не имеет решения. Зная $\sin B$, находим угол B. Может случиться, что задаче удовлетворяют два значения угла B. В этом случае задача имеет два решения;

3) зная углы A и B, находим угол C: $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)$;

4) сторону c находим по теореме синусов:

$$\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow c=\frac{b\sin C}{\sin B}.$$

4.2. Примеры задач на решение произвольного треугольника

Задания:

1. Найдите косинусы углов треугольника, если $a=2$, $b=3$, $c=4$.

2. Даны стороны треугольника и угол между ними: $a=12$, $b=8$, $\angle C=60°$. Найдите третью сторону и синусы других двух углов.

3. В треугольнике $a = 5$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$. Найдите третий угол и другие две стороны.

4. В треугольнике $a = 12$, $b = 5$, $\angle A = 120°$. Найдите $\sin B$.

5. В условиях задания 1 найдите радиус описанной окружности.

6. В условиях задания 2 найдите площадь треугольника.

7. В условиях задания 2 найдите радиус вписанной окружности.

8. Найдите медиану m_a треугольника из первого задания.

9. Найдите высоту h_a треугольника из второго задания.

10. Найдите биссектрису l_a треугольника, зная b, $\angle C$ и $\angle A$.

Решения.

1. Имеем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9+16-4}{24} = \frac{21}{24},$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4+16-9}{16} = \frac{11}{16},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4+9-16}{12} = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$.

2. 1) По теореме косинусов:

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{144+64-2\cdot 12\cdot 8\cdot 0,5} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7};$

2) по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a\sin C}{c} = \frac{12\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{7}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}};$$

3) по теореме синусов:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}}{12} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ: $c = 4\sqrt{7}$, $\sin A = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\sin B = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

3. 1) $\angle A = 180° - (30° + 45°) = 105°$;

2) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{5\sin 30°}{\sin 105°}$;

3) $\sin 105° = \sin (180° - 75°) = \sin 75° = \sin (45° + 30°) =$
$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

4) $b = \frac{5\sin 30°}{\sin 105°} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{10}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$;

5) $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{5\sin 45°}{\sin 105°} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Ответ: $\angle A = 105°, b = \frac{10}{\sqrt{6}+\sqrt{2}},\ c = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

4. По теореме синусов находим $\sin B$:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{5\sin 120°}{12} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{24}.$$

Ответ: $\sin B = \frac{5\sqrt{3}}{24}$.

5. Имеем: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A}$, $\cos A = \frac{7}{8} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{15}}{8}$,

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{2}{2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $R = \frac{8}{\sqrt{15}}$.

6. Воспользуемся формулой площади:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \sin 60° = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}.$$

Ответ: $24\sqrt{3}$.

7. Воспользуемся формулой радиуса вписанной окружности:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{24\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\left(12+8+4\sqrt{7}\right)} = \frac{12\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}.$$

Ответ: $r = \frac{12\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}$.

8. Найдем медиану m_a треугольника из первого задания:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 9 + 2\cdot 16 - 4} = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

Ответ: $m_a = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

9. Найдем высоту h_a треугольника из второго задания:

$$\frac{h_a}{c} = \sin B \Rightarrow h_a = c\sin B = 4\sqrt{7}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}} = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $h_a = 4\sqrt{3}$.

10. Воспользуемся теоремой синусов (рисунок выполните самостоятельно):

$$\frac{l_a}{\sin C} = \frac{b}{\sin\left(180^\circ - \left(C + \frac{A}{2}\right)\right)} = \frac{b}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)} \Rightarrow l_a = \frac{b\sin C}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)}.$$

Ответ: $l_a = \frac{b\sin C}{\sin\left(C + \frac{A}{2}\right)}$.

§ 5. Признаки подобия треугольников и метод подобных треугольников

Признаки подобия треугольников являются обобщением признаков равенства треугольников и приводят к новому методу — ***методу подобных треугольников***.

5.1. Подобные треугольники

Два треугольника называются ***подобными***, если у них соответственные углы равны и соответственные стороны пропорциональны (рис. 52).

Обозначение: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.
Символическая запись определения:

$$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k. \end{cases}$$

Число k называется *коэффициентом подобия треугольников*.

Если $k = 1$, то подобные треугольники окажутся равными. Поэтому равенство треугольников является частным случаем подобия треугольников.

Подобные треугольники имеют одинаковую *форму*, но могут отличаться друг от друга *размерами*. Подобные треугольники находят большие применения в элементарной геометрии. Как и метод равных треугольников, *метод подобных треугольников* позволяет проще и рациональнее решить многие геометрические задачи. Определение подобных треугольников подсказывает, что метод подобия позволяет доказывать равенство углов, находить отношения сторон, зная отношение сторон, находить сами стороны и т. д.

5.2. Признаки подобия треугольников

В определении подобных треугольников указываются шесть равенств (три равенства для углов и три равенства для отношений сторон). Подобие треугольников можно обеспечить меньшим числом таких равенств. В признаках подобия треугольников указываются именно такие равенства. Заметим, что признаки подобия треугольников являются обобщением признаков равенства треугольников.

Теоремы 4

1-й признак подобия треугольников

1. **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между ними равны, то треугольники подобны.**

2-й признак подобия треугольников

2. **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

3-й признак подобия треугольников

3. **Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого, то треугольники подобны.**

Доказательства. **1.** *Краткая запись теоремы* (см. рис. 52):

$$\left(\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k, \angle A = \angle A_1\right) \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1.$$

Воспользуемся теоремой косинусов. 1) Докажем, что $\frac{B_1C_1}{BC} = k.$

При этом учтем равенства

$$A_1B_1 = kAB,$$
$$A_1C_1 = kAC,$$
$$\angle A_1 = \angle A:$$

а) $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$ (для ΔABC);

б) $B_1C_1 = \sqrt{(kb)^2 + (kc)^2 - 2(kb)(kc)\cos A_1} =$

$= k\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$ (для $\Delta A_1B_1C_1$);

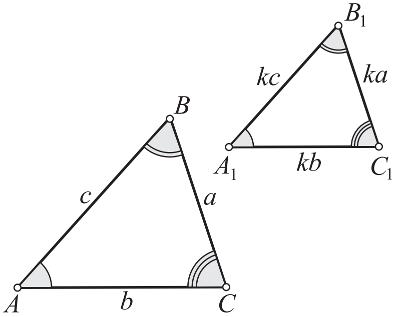

Рис. 52

в) поэтому $\dfrac{B_1C_1}{BC} = k.$

2) Докажем равенство $\angle B = \angle B_1$:

а) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ (для ΔABC);

б) $\cos B_1 = \dfrac{(ka)^2 + (kc)^2 - (kb)^2}{2(ka)(kc)} =$

$= \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos B$

(для $\Delta A_1B_1C_1$);

в) поэтому $\angle B = \angle B_1$.

3) Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\angle C = \angle C_1$.

4) Если $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$ и $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

2. *Краткая запись теоремы* (см. рис. 52):

$$(\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1) \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1.$$

1) Ясно, что $\angle C = \angle C_1$. Остается доказать пропорциональность сторон данных треугольников.

2) Воспользуемся теоремой синусов:

а) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ (для ΔABC);

б) $\dfrac{a_1}{\sin A} = \dfrac{b_1}{\sin B}$ (для $\Delta A_1B_1C_1$, учли равенство углов A и A_1, B и B_1);

в) тогда $\left(a = \dfrac{b\sin A}{\sin B}, a_1 = \dfrac{b_1\sin A}{\sin B}\right) \Rightarrow \dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b}$.

3) Аналогично получаем: $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{c_1}{c}$.

4) Итак, соответственные углы данных треугольников равны, а стороны пропорциональны. Поэтому $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

3. *Краткая запись теоремы* (см. рис. 52):

$$\left(\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}\right) \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1.$$

5.3. Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике $h_c = \frac{ab}{c}$.

Доказательство. 1) Эта формула ранее выводилась с помощью теоремы Пифагора, метода площадей и векторного метода. Докажем ее при помощи подобия треугольников (рис. 53). Итак, применим метод подобия: $\Delta ACC_1 \backsim \Delta ABC$ ($\angle A$ — общий, $\angle ACC_1 = \angle ABC$);

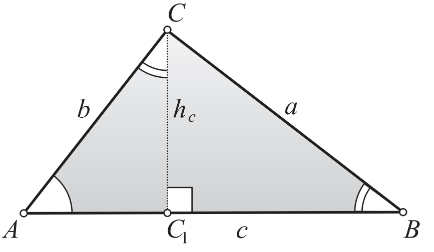

Рис. 53

2) из подобия треугольников получаем: $\frac{h_c}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow h_c = \frac{ab}{c}$.

Задача 2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, проведенной к гипотенузе, равен произведению отрезков, на которые гипотенуза делится высотой.

Доказательство.

1) Применим метод подобия: $\Delta ACC_1 \backsim \Delta CBC_1$ (см. рис. 53) по двум углам;

2) из подобия треугольников получаем:

$$\frac{CC_1}{BC_1} = \frac{AC_1}{CC_1} \Rightarrow CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1.$$

Задача 3. Стороны параллелограмма равны a и b. Из одной его вершины проведены две высоты. Найдите одну из них, если вторая равна H.

Решение.

1) Применим метод подобия: $\Delta ABB_1 \backsim \Delta ABB_1 \backsim \Delta C\text{BB}_2$ (рис. 54) по двум углам: $\angle A = \angle C$, $\angle ABB_1 = = \angle CBB_2$;

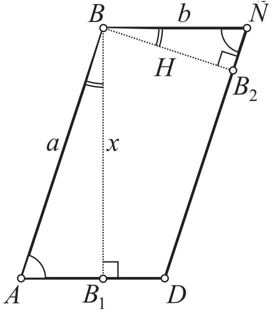

Рис. 54

2) из подобия этих треугольников получаем: $\frac{x}{H}=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\frac{aH}{b}$.

Ответ: $x=\frac{aH}{b}$.

Задача 4. В равнобедренном ΔABC $AB=BC=a$, $AC=b$. Высота, проведенная к основанию, равна h_b. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне (рис. 55).

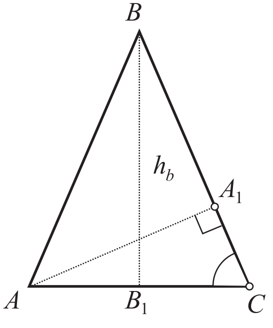

Рис. 55

Решение.

1) Применим метод подобия: $\Delta ACA_1 \backsim \Delta BCB_1$ по двум углам ($\angle C$ — общий, $\angle CAA_1=\angle CBB_1$);

2) из подобия треугольников получаем:

$$\frac{AA_1}{h_b}=\frac{b}{a}\Rightarrow AA_1=\frac{bh_b}{a}.$$

Ответ: $h_a=h_c=\frac{bh_b}{a}$.

(Есть ли в задаче лишнее данное?)

Задача 5. (*Обобщенная теорема Фалеса.*) Докажите, что если стороны угла ($\angle MON$, рис. 56) пересечь параллельными прямыми, то отношение отрезков, получившихся на одной стороне угла, равно отношению соответствующих отрезков на второй стороне.

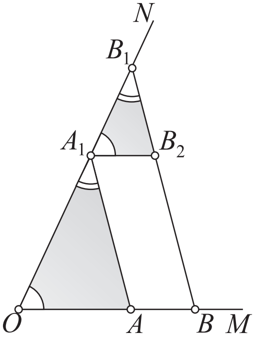

Рис. 56

Доказательство. 1) Пусть на одной стороне $\angle MON$ образовались отрезки OA и AB, а на второй стороне — отрезки OA_1 и A_1B_1. Докажем равенство $\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1}$. Проведем $A_1B_2 \| OM$. Применим метод подобия: $\Delta A_1B_1B_2 \backsim \Delta OA_1A$ (по двум углам);

2) из их подобия получаем: $\frac{OA}{A_1B_2}=\frac{OA_1}{A_1B_1}$;

3) так как $A_1B_2=AB$ (как противоположные стороны параллелограмма), то $\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1}$.

Задача 6. В ΔABC $AB = c$, $BC = a$, $DE \parallel AC$, $BD = EC$ (рис. 57). Найдите BD.

Решение.

1) Пусть $BD = EC = x$, тогда $AD = c - x$, $BE = a - x$;

2) на основании предыдущей задачи:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{c-x} = \frac{a-x}{x},$$

$$x^2 = ac - ax - cx + x^2,$$

$$x(a+c) = ac,\ x = \frac{ac}{a+c}.$$

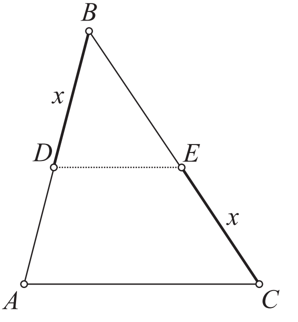

Рис. 57

Ответ: $BD = \frac{ac}{a+c}$.

Задача 7. В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей, $AO = \sqrt{3}$, $OC = \sqrt{2}$, $BD = 2$. Найдите OD (рис. 58).

Решение.

1) Применим метод подобия: $\Delta OAD \backsim \Delta OCB$ по двум углам: $\angle OAD = \angle BCO$, $\angle ODA = \angle CBO$;

2) из подобия треугольников следует:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{BO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2-x},$$

$$2\sqrt{3} - x\sqrt{3} = x\sqrt{2},\ x\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3},$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-1} =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 2\left(3-\sqrt{6}\right).$$

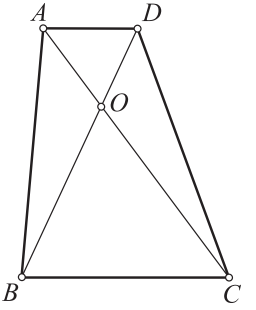

Рис. 58

Ответ: $2\left(3-\sqrt{6}\right)$.

Задача 8. В ΔABC (рис. 59) помещен ромб $AMNP$, $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$. Найдите сторону ромба, если $AB = c$, $AC = b$.

Решение.

1) Применим метод подобия: $\Delta ABC \backsim \Delta MBN$ по двум углам;

2) обозначим сторону ромба через x. Из подобия треугольников следует:

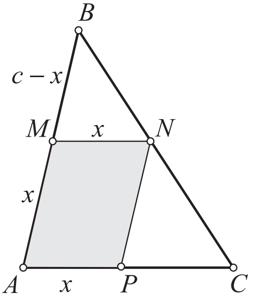

Рис. 59

$$\frac{MN}{AC}=\frac{BM}{BA}\Rightarrow\frac{x}{b}=\frac{c-x}{c},$$

$$xc=bc-bx\Rightarrow x(b+c)=bc\Rightarrow x=\frac{bc}{b+c}.$$

Ответ: $\frac{bc}{b+c}$.

Задача 9. В ΔABC (рис. 60) помещен квадрат $MNPQ, M\in AC$, $N\in AB$, $P\in BC$, $Q\in AC$. Найдите сторону квадрата, если сторона $AC=b$ и высота $BB_1=h_b$.

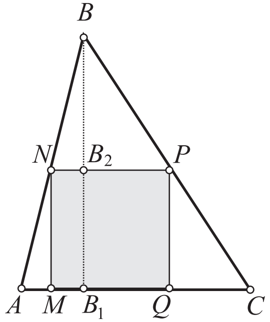

Рис. 60

Решение.

1) Обозначим сторону квадрата через x;

2) воспользуемся тем, что $\Delta BNP\sim\Delta BAC$ и $\Delta BNB_2\sim\Delta BAB_1$ (почему?):

$$\frac{NP}{AC}=\frac{NB}{AB}=\frac{BB_2}{BB_1},\ \frac{x}{b}=\frac{h_b-x}{h_b}, xh_b=bh_b-xb,$$

$$x(b+h_b)=bh_b.$$

Ответ: $x=\frac{bh_b}{b+h_b}$.

В следующей задаче показывается применение метода подобия при решении задачи на построение.

Задача 10. Постройте ΔABC, зная углы A и C и высоту h_b (рис. 61).

Анализ. Вначале нетрудно построить некоторый ΔA_1BC_1, у которого $\angle A_1=\angle A, \angle C_1=\angle C$. Этот треугольник будет подобен ΔABC. Проведем высоту BK_1 ΔA_1BC_1. С помощью ΔA_1BC_1 можно теперь построить ΔABC. Наглядно ясно, что ΔA_1BC_1 надо «уменьшить» так, чтобы получился ΔABC с заданной высотой $BK=h_b$. Для этого на луче BK_1 отложим отрезок $BK=h_b$ и через точку K проведем $AC\parallel A_1C_1$. Убедитесь в том, что ΔABC удовлетворяет условию задачи.

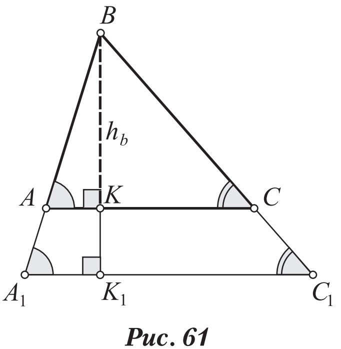

Рис. 61

Построение, доказательство и *исследование* проведите самостоятельно.

Тема 2 МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 6. Движение. Преобразование подобия

6.1. Теория

Отметим сразу, что геометрические преобразования вносят в школьный курс «дух» современной геометрии. В этом состоит немалая познавательная ценность данной темы. Геометрические преобразования могут служить методом решения многих задач. Этот метод называется ***методом геометрических преобразований***.

Что такое геометрическое преобразование плоскости? Это *взаимно однозначное соответствие* между точками плоскости. В геометрии принято в таком случае говорить о *взаимно однозначном отображении* плоскости на себя.

Итак, ***геометрическим преобразованием плоскости*** называется взаимно однозначное отображение плоскости на себя.

При выполнении геометрического преобразования плоскости фигура Φ отображается на фигуру Φ_1. При этом говорят, что *фигура* Φ *переходит в фигуру* Φ_1 *в данном преобразовании* (или при выполнении данного преобразования). В этом случае говорят также, что фигура Φ_1 является *образом* фигуры Φ в данном преобразовании.

Замечание. Геометрические преобразования являются примерами функций, только областью определений и областью значений в них являются не числовые множества, а множества точек.

Приведем два основных определения.

Преобразование, сохраняющее расстояние между точками, называется ***движением***. Преобразование, изменяющее расстояние между точками в k раз, называется ***преобразованием подобия***. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Примерами геометрических преобразований являются осевая и центральная симметрии (рис. 62, *а*, *б*), которые часто встречаются в архитектуре, живописи и природе.

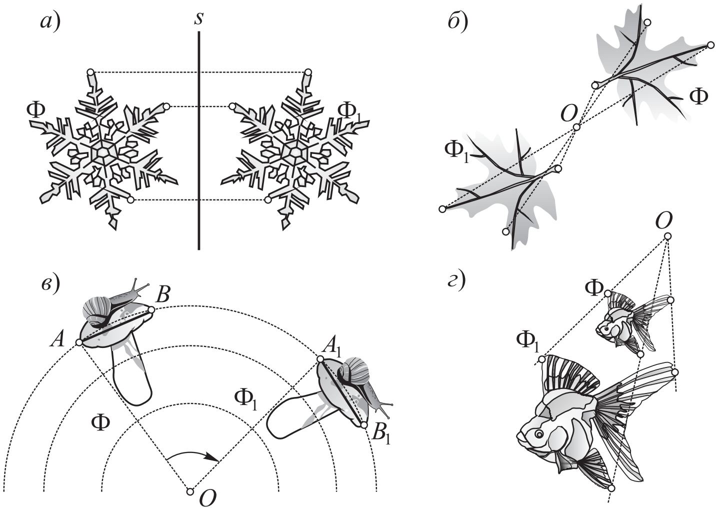

Рис. 62

Наглядное представление о движении дает, например, поворот каких-либо тел около точки (рис. 62, *в*). При движении тела сохраняют свои размеры и форму.

С преобразованием подобия встречаются при изготовлении копий предметов (с уменьшением или увеличением), фотографий, географических карт, планов местности и т. д. На рисунке 62, *г* изображены фигурки рыбок. Размеры второй фигурки получаются увеличением размеров первой в одно и то же число раз. Эти две фигурки подобны друг другу.

При изучении геометрических преобразований вначале выясняют *вид преобразования*: является ли оно движением, или преобразованием подобия, или относится к другим видам преобразований. Для этого берут две произвольные точки A и B, а также точки A_1 и B_1, соответствующие точкам A и B в данном преобразовании (точки A_1 и B_1 называются *образами* точек A и B), сравнивают расстояние A_1B_1 с расстоянием AB; выясняют, сохранилось расстояние AB или изменилось, если изменилось, то не остается ли постоянным отношение $A_1B_1 : AB$.

Если при преобразовании некоторые точки переходят в себя, то они называются *неподвижными* точками. Наличие или отсутствие неподвижных точек также является одним из возможных свойств преобразования.

Важно знать, сохраняет ли преобразование прямолинейное расположение точек, переводит ли оно отрезок в отрезок, луч — в луч, отрезок — в равный отрезок, угол — в равный угол и т. д.

При изучении преобразований существенно установить определенные закономерности в расположении соответственных точек A и A_1, B и B_1 и т. д. Не параллельны ли отрезки AA_1 и BB_1, не пересекаются ли они в одной точке, не перпендикулярны ли они к одной какой-либо прямой, не лежат ли эти точки на некоторой окружности и т. д.

Пользуясь определениями движения и преобразования подобия и свойствами расстояния между точками, можно доказать следующие утверждения.

Следствие. *Движение и преобразование подобия прямую переводят в прямую, отрезок — в отрезок, окружность — в окружность.*

(Доказательства этих утверждений опустим.)

Отметим также, что в данной теме мы познакомимся с еще одним важным геометрическим методом — *методом преобразований*. С помощью этого метода изящно решаются многие геометрические задачи. Геометрические фигуры при этом рассматриваются в динамике, что крайне важно для развития пространственного представления и воображения.

6.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть дана некоторая прямая s (рис. 63, *а*). Зададим соответствие между точками плоскости следующим образом:

1) каждую точку прямой s будем считать неподвижной (соответствующей самой себе);

2) каждой точке $A \notin s$ поставим в соответствие точку A_1 такую, что $AA_1 \perp s$ и $AA_1 = \frac{1}{2}AM$, где AM — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой s.

Является ли это соответствие геометрическим преобразованием плоскости?

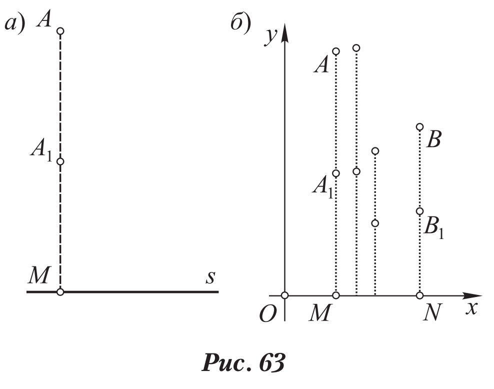

Рис. 63

Решение.

1) В этом соответствии каждая точка плоскости имеет, причем единственный, образ (для точки A образом является точка A_1, для точки B — точка B_1);

2) существенно, что каждая точка плоскости является образом некоторой, причем единственной точки плоскости (точка A_1 является образом точки A, точка B_1 — точки B);

3) значит, это соответствие — геометрическое преобразование плоскости.

Задача 2. Установите, является ли геометрическое преобразование, данное в задаче 1, движением.

Решение.

Нет, не движение. Так как хотя отрезок AM переходит в отрезок A_1M, но $AM \neq A_1M$ (рис. 63, *б*).

Задача 3. В условиях задачи 1 на прямой AB найдите точку, которая в данном преобразовании остается неподвижной.

Задача 4. Выясните, является ли геометрическое преобразование, данное в задаче 1, преобразованием подобия.
(Задачи 3—4 решите самостоятельно.)

§ 7. Свойства движений и преобразований подобия

7.1. Теория

Из определений движения и преобразования подобия можно вывести ряд следствий.

Следствия.

1. *Движение переводит отрезок в равный отрезок, треугольник — в равный треугольник, угол — в равный угол.*

2. *Преобразование подобия переводит треугольник в подобный треугольник, угол — в равный угол.*

3. *Последовательное выполнение (композиция) двух движений (преобразований подобия) есть снова движение (преобразование подобия).*

Доказательства.

1. Пусть движение отрезок AB (рис. 64) переводит в отрезок A_1B_1. Так как движение сохраняет расстояние между точками, то

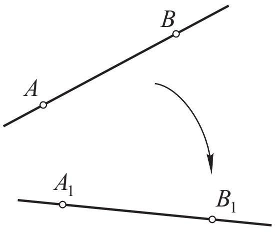

Рис. 64

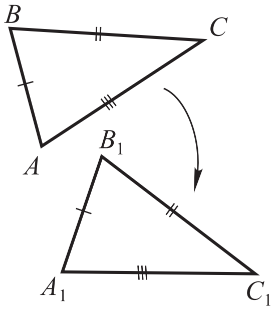

Рис. 65

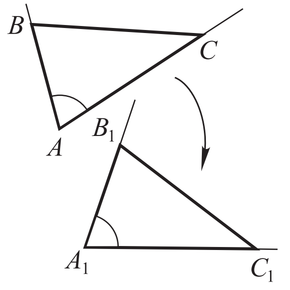

Рис. 66

$AB = A_1B_1$. Значит, движение отрезок переводит в равный отрезок. Рассмотрим ΔABC (рис. 65). Пусть движение переводит ΔABC в $\Delta A_1B_1C_1$. Так как $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (на основании предыдущего свойства), то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Поэтому движение переводит треугольник в равный треугольник.

Пусть движение переводит $\angle A$ (рис. 66) в $\angle A_1$. Докажем, что $\angle A = \angle A_1$. Для этого на сторонах угла A построим ΔABC. При движении он перейдет в равный ему $\Delta A_1B_1C_1$. Поэтому $\angle A = \angle A_1$.

2. Докажем, что преобразование подобия так же, как и движение, переводит угол в равный ему угол. Пусть преобразование подобия переводит $\angle A$ (рис. 67) и вместе с ним ΔABC соответственно в $\angle A_1$ и $\Delta A_1B_1C_1$. По определению преобразования подобия: $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Отсюда $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$. Значит, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$.

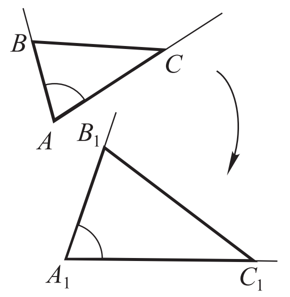

Рис. 67

3. Докажите это следствие самостоятельно.

7.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть при движении ΔABC (рис. 68) перешел в $\Delta A_1B_1C_1$. Докажите, что медиана AM ΔABC перейдет в медиану A_1M_1 $\Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. 1) В этом движении отрезок BC переходит в отрезок B_1C_1. Точка M отрезка BC перейдет в некоторую точку отрезка B_1C_1;

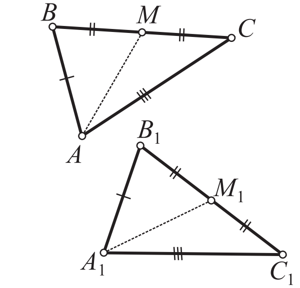

Рис. 68

2) так как $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B_1C_1 = B_1M_1$, то точка M_1 будет именно той точкой, в которую перейдет точка M;

3) если точка A переходит в точку A_1, точка M — в точку M_1, то медиана AM ΔABC переходит в медиану A_1M_1 $\Delta A_1B_1C_1$.

Задача 2. Преобразование подобия (рис. 69) ΔABC переводит в $\Delta A_1B_1C_1$. Докажите, что биссектриса AL ΔABC переходит в биссектрису A_1L_1 $\Delta A_1B_1C_1$.

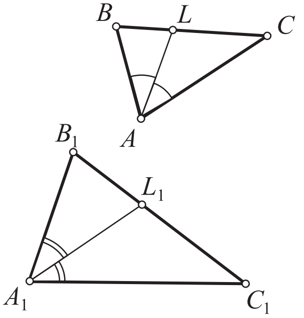

Рис. 69

Доказательство. 1) В данном преобразовании подобия отрезок BC переходит в отрезок B_1C_1. Поэтому точка L отрезка BC перейдет в некоторую точку отрезка B_1C_1;

2) так как $\angle BAL = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1A_1L_1$, то точка L_1 будет именно той точкой, в которую перейдет точка L;

3) если точка A переходит в точку A_1, а точка L — в точку L_1, то биссектриса AL ΔABC перейдет в биссектрису A_1L_1 $\Delta A_1B_1C_1$.

§ 8. Методы осевой и центральной симметрии

8.1. Теория

Каждое геометрическое преобразование дает свой метод, который конкретизирует общий метод геометрических преобразований. В этой связи говорят о ***методе осевой симметрии***, ***методе центральной симметрии*** и т. д.

Осевая и центральная симметрии (на примере треугольников) представлены на рисунке 70. Дадим им определения.

Точки X и X_1 называются *симметричными относительно оси* s (см. рис. 70, a), если прямая s — серединный перпендикуляр к отрезку XX_1. Если точка A принадлежит прямой s, то она сама себе симметрична.

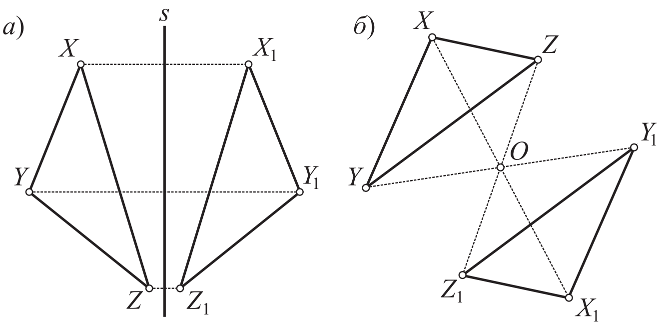

Рис. 70

Преобразование, при котором каждая точка X переходит в симметричную относительно прямой s точку X_1, называется ***осевой симметри́ей***, прямая s называется *осью симметри́и*.

Точки X и X_1 называются *симметричными относительно центра* O (см. рис. 70, *б*), если точка O — середина отрезка XX_1.

Точка O сама себе симметрична.

Преобразование, при котором каждая точка X переходит в точку X_1, симметричную относительно точки O, называется ***центральной симметрией***, точка O называется *центром симметрии*.

Теорема 5

Осевая и центральная симметрии являются движениями.

Доказательство. *1-е утверждение*. Пусть A и A_1 (рис. 71, *а*), B и B_1 — точки, симметричные относительно оси s. Примем ось s

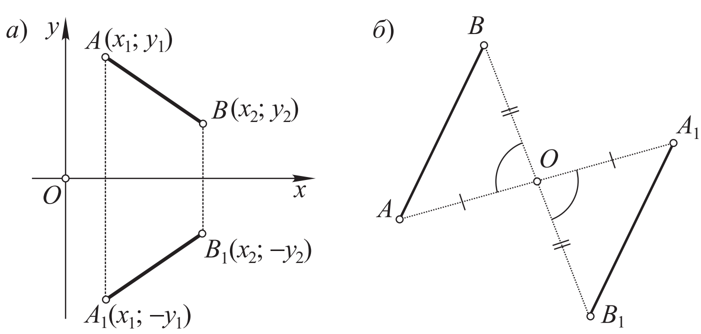

Рис. 71

за ось абсцисс. Тогда $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $A_1(x_1; -y_1)$, $B_1(x_2; -y_2)$. Поэтому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, A_1B_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2.$$

Отсюда $AB^2 = A_1B_1^2$ и, следовательно, $AB = A_1B_1$.

2-е утверждение. Пусть A и A_1, B и B_1 — точки, симметричные относительно центра O (рис. 71, *б*). Докажем, что $AB = A_1B_1$. Равенство этих отрезков следует из того, что $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ (по двум сторонам и углу между ними).

Следствие. *Центральная симметрия прямую переводит в параллельную прямую.*

Доказательство. Из равенства $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ (см. рис. 71, *б*) следует равенство накрест лежащих углов A и A_1. Поэтому $AB \parallel A_1B_1$. Это означает, что при центральной симметрии прямая AB переходит в параллельную ей прямую A_1B_1.

8.2. Примеры решения задач

Задача 1. Даны прямая s — ось симметрии и некоторая прямая a, пересекающая ось s в точке A (рис. 72). Докажите, что прямая a при осевой симметрии с осью s переходит в прямую a_1, которая также проходит через точку A.

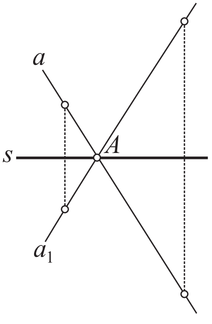

Рис. 72

Доказательство. 1) Так как точка A лежит на оси симметрии s, то при осевой симметрии относительно этой оси она перейдет сама в себя (является неподвижной точкой преобразования);

2) это означает, что точка A_1 — образ точки A в этом преобразовании — совпадает с точкой A;

3) учтем также, что $A_1 \in a_1$;

4) так как точки A_1 и A совпадают и $A_1 \in a_1$, то $A \in a_1$.

Следствие. *Если две прямые симметричны относительно оси и пересекаются, то точка пересечения лежит на оси симметрии.*

Задача 2. Пусть прямые a и a_1 пересекаются в точке A и симметричны относительно оси s (рис. 73). На этих прямых отложены равные отрезки AB и AB_1. Докажите, что при симметрии с осью s точка B переходит в точку B_1.

Доказательство. 1) Точка A в этом преобразовании остается неподвижной. Так как прямая a в данном преобразовании переходит в прямую a_1, то точка B прямой a перейдет в некоторую точку прямой a_1;

2) отрезок AB перейдет в равный отрезок. Таким отрезком является отрезок AB_1. Значит, отрезок AB перейдет в отрезок AB_1, а точка B — в точку B_1.

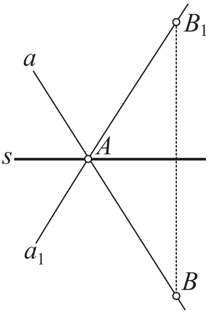

Рис. 73

Задача 3. Пусть прямая a (рис. 74) при центральной симметрии с центром O переходит в прямую a_1. Прямая b — произвольная прямая, пересекающая прямые a и a_1. При пересечении образовались накрест лежащие углы 1 и 2. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

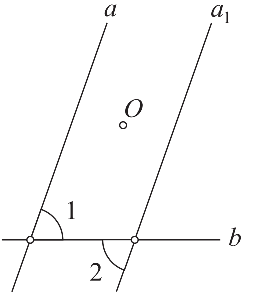

Рис. 74

Доказательство. 1) При центральной симметрии прямая переходит в параллельную прямую. Поэтому $a \parallel a_1$;

2) если прямые a и a_1 параллельны, то накрест лежащие углы, образуемые при пересечении указанных прямых прямой b, равны. Значит, $\angle 1 = \angle 2$.

Задача 4. Пусть прямая a проходит через центр симметрии O (рис. 75). Прямая b перпендикулярна к прямой a и при симметрии с центром O переходит в прямую b_1. Докажите, что $b_1 \perp a$.

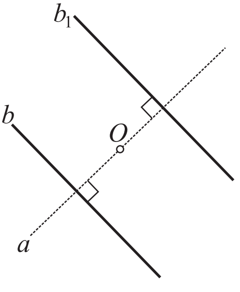

Рис. 75

Доказательство. 1) Так как при симметрии с центром O прямая b переходит в прямую b_1, то $b \parallel b_1$;

2) тогда $\left.\begin{array}{l} b \parallel b_1, \\ b \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 \perp a.$

Задача 5. Пусть прямая s проходит через центр O данной окружности (рис. 76), точка A принадлежит этой окружности. При симметрии относительно оси s точка A переходит в точку A_1. Докажите, что точка A_1 принадлежит данной окружности.

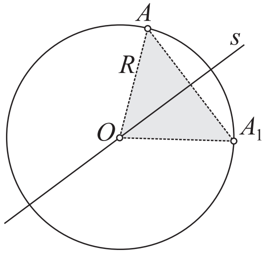

Рис. 76

Доказательство. 1) Так как $O \in s$, то точка O при симметрии с осью s переходит сама в себя;

2) если точка O переходит в точку O, а точка A — в точку A_1, то отрезок OA переходит в отрезок OA_1;

3) осевая симметрия является движением, т. е. она отрезок переводит в равный отрезок. Поэтому $OA_1 = OA = R$ — радиусу окружности;

4) если $OA_1 = R$, то точка A_1 принадлежит окружности.

Следствие. *Прямая s, проходящая через центр окружности, является осью симметрии окружности, т. е. при симметрии относительно оси s окружность переходит сама в себя.*

Задача 6. Пусть ΔABC (рис. 77) — равнобедренный: $AB = BC$. К основанию AC проведен серединный перпендикуляр s. Докажите, что прямая s является осью симметрии ΔABC, т. е. при симметрии относительно оси s ΔABC переходит сам в себя.

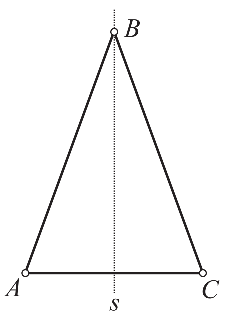

Рис. 77

Доказательство. 1) Так как $AB = BC$, то точка B равноудалена от концов отрезка AC. Поэтому точка B принадлежит серединному перпендикуляру s к отрезку AC: $B \in s$;

2) получаем, что точка A в этой осевой симметрии переходит в точку C, точка C — в точку A. Значит, отрезок AC переходит в отрезок CA (сам в себя);

3) так как $B \in s$, то точка B переходит сама в себя. Поэтому отрезок BA переходит в отрезок BC, а отрезок BC — в отрезок BA;

4) в итоге ΔABC перешел сам в себя;

5) следовательно, прямая s является осью симметрии ΔABC.

Задача 7. Даны параллельные прямые a и a_1 и точки A и A_1 (рис. 78): $A \in a$, $A_1 \in a_1$, O — середина отрезка AA_1. Докажите, что при центральной симметрии с центром O прямая a переходит в прямую a_1.

Доказательство (методом от противного). 1) Допустим, что прямая a при симметрии с центром O переходит не в прямую a_1, а в прямую a_2. Так как точка A_1 — образ точки A в этой симметрии, то $A_1 \in a_2$;

2) кроме того, $a_2 \parallel a$ (так как при центральной симметрии прямая переходит в параллельную прямую);

3) получили, что через точку A_1 проходят две прямые a_1 и a_2, параллельные прямой a ($a_1 \parallel a$ по условию, $a_2 \parallel a$ по следствию, полученному из допущения);

4) это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, при симметрии с центром O прямая a переходит в данную прямую a_1.

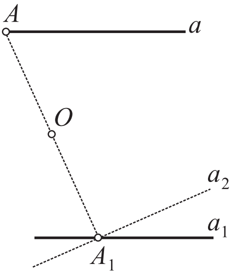

Рис. 78

Задача 8. Пусть точка A принадлежит окружности с центром O и при симметрии относительно точки O переходит в точку A_1 (рис. 79). Докажите, что точка A_1 принадлежит окружности.

Доказательство. *1-й способ.* 1) Так как точка A при симметрии с центром O переходит в точку A_1 (по условию) и точка O остается неподвижной в этом преобразовании, то отрезок OA переходит в отрезок OA_1;

2) симметрия относительно точки является движением. Поэтому она сохраняет расстояние между точками: $OA_1 = OA$;

3) так как $OA = R$ — радиусу окружности, то $OA_1 = R$. Значит, точка A_1 принадлежит данной окружности.

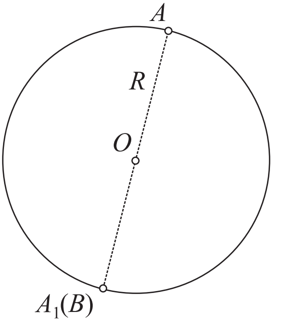

Рис. 79

2-й способ. 1) Проведем диаметр AB (см. рис. 79). Так как $OA = OB$, то при симметрии с центром O точка A перейдет в точку B;

2) но образом точки A в этой симметрии является точка A_1 (по условию). Значит, точка A_1 совпадает с точкой B и поэтому A_1 принадлежит окружности.

Рассмотрим две более сложные задачи, показывающие применение метода геометрических преобразований.

Задача 9. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и прямая s. Постройте отрезок XY, концы которого лежали бы на данных окружностях

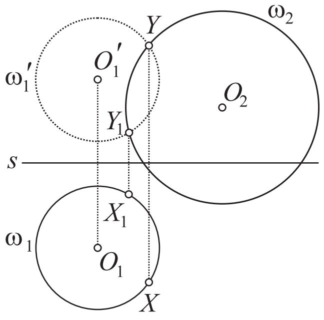

Рис. 80

и для которого прямая s являлась бы серединным перпендикуляром.

Решение.

1. *Поиск решения.* Допустим, что искомый отрезок XY построен (рис. 80). Так как прямая s является серединным перпендикуляром к отрезку XY, то для построения этого отрезка достаточно построить один его конец, например точку Y; второй конец — точка X — после этого сразу строится. Выясним, какими свойствами обладает точка Y. Для этого заметим, что прямая s является осью симметрии точек X и Y (при симметрии относительно оси s точка X переходит в точку Y). Сделаем теперь самый важный шаг в поиске решения: представим, что при симметрии относительно оси s одновременно с точкой X переходит окружность ω_1 в некоторую окружность ω_1'. Точка Y должна лежать на окружности ω_1'. Итак, точка Y определяется как точка пересечения окружностей ω_2 и ω_1'.

2. *Построение.* Строим (см. рис. 80):

1) окружность ω_1'; для этого строим точку O_1', симметричную точке O_1 относительно оси s, и проводим окружность ω_1' с центром в точке O_1' и радиусом, равным радиусу окружности ω_1;

2) точку Y — точку пересечения окружностей ω_2 и ω_1';

3) точку X — точку, симметричную точке Y относительно оси s. Отрезок XY — искомый.

3. *Доказательство.* По построению точки X и Y симметричны относительно оси s, значит, прямая s является серединным перпендикуляром к отрезку XY. Кроме того, по построению точка $Y \in \omega_2$. Осталось доказать, что точка $X \in \omega_1$. Это действительно так: окружность ω_1' при симметрии относительно оси s переходит в окружность ω_1, а значит, ее точка Y перейдет в точку $X \in \omega_1$. Таким образом, построенный отрезок XY полностью удовлетворяет условиям задачи.

4. *Исследование.* Если окружности ω_2 и ω_1' имеют общие точки, то задача имеет решение. Если эти окружности общих точек не имеют, то и задача решения не имеет. По числу общих точек окружностей ω_2 и ω_1' задача может иметь два решения, одно решение или бесконечное множество решений (когда окружности ω_2 и ω_1' совпадают).

Задание. Подберите окружности ω_1 и ω_2 так, чтобы задача не имела решения, имела одно решение, имела бесконечное множество решений.

Задача 10. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и точка O. Постройте отрезок XY, концы которого лежали бы на данных окружностях и для которого точка O была бы серединой.

Решение.

1. *Поиск решения.* Допустим, что искомый отрезок XY построен (рис. 81). Так как точка O является серединой отрезка XY, то для построения этого отрезка достаточно построить один его конец, например точку Y; второй конец — точка X — после этого строится сразу. Выясним, какими свойствами обладает точка Y. Для этого охарактеризуем точку O иначе, чем это сделано в условии задачи: точка O является центром симметрии точек X и Y (при симметрии относительно центра O точка X переходит в точку Y). Наступает главный момент в поиске решения: представим, что одновременно с точкой X при симметрии относительно центра O окружность ω_1 переходит в окружность ω_1'. Точка Y должна лежать на окружности ω_1'. Итак, точка Y находится как точка пересечения двух окружностей ω_2 и ω_1'.

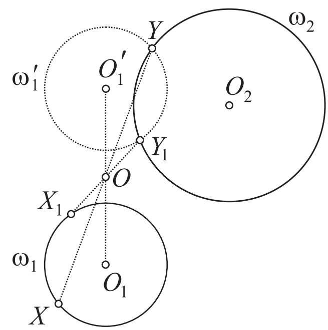

Рис. 81

2. *Построение.* Строим (см. рис. 81):

1) окружность ω_1'; для этого строим точку O_1', симметричную точке O_1 относительно центра O, и проводим окружность ω_1' с центром в точке O_1' и радиусом, равным радиусу окружности ω_1;

2) точку Y — точку пересечения окружностей ω_2 и ω_1';

3) точку X — точку, симметричную точке Y относительно центра O. Отрезок XY — искомый.

3. *Доказательство.* По построению точки X и Y симметричны относительно центра O, значит, точка O является серединой отрезка XY. Кроме того, по построению точка $Y \in \omega_2$. Осталось доказать, что точка $X \in \omega_1$. В самом деле, окружность ω_1' при симметрии относительно центра O переходит в окружность ω_1, а значит, ее точка Y перейдет в точку $X \in \omega_1$. Это означает, что отрезок XY удовлетворяет условию задачи.

4. *Исследование*. Если окружности ω_2 и ω_1' имеют общие точки, то задача имеет решение. Если эти окружности не имеют общих точек, то задача не имеет решения. По числу общих точек окружностей ω_2 и ω_1' задача может иметь два решения (как на рис. 81), одно решение или бесконечное множество решений (если окружности ω_2 и ω_1' совпадают).

Задание. Подберите окружности ω_1 и ω_2 так, чтобы задача не имела решения, имела одно решение, имела бесконечное множество решений.

§ 9. Методы параллельного переноса и поворота

Познакомимся с двумя новыми методами — ***методами параллельного переноса и поворота***.

9.1. Теория

Приведем определения.

Пусть дан вектор $\vec{m}$. Преобразование (рис 82, *а*), при котором каждая точка X переходит в точку X_1 такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{m}$, называется ***параллельным переносом***. Вектор $\vec{m}$ называется *вектором параллельного переноса*.

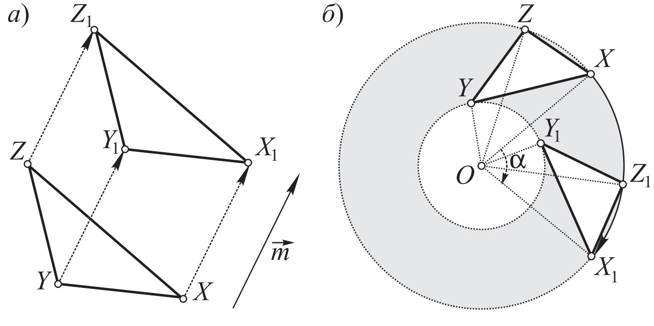

Рис. 82

Пусть даны некоторая точка O и угол α.

Движение (рис. 82, *б*), при котором каждая точка X переходит в точку X_1 такую, что $\angle XOX_1 = \alpha$, называется ***поворотом около данной точки*** O ***на угол*** α. Точка O при этом остается неподвижной и называется *центром поворота*. Угол α задается не только величиной, но и направлением, и называется *углом поворота*.

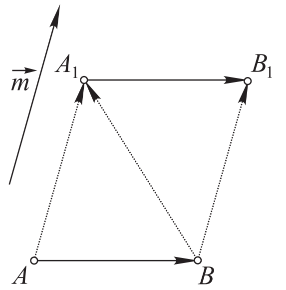

Рис. 83

Теорема 6

Параллельный перенос и поворот являются движениями.

Доказательство. Пусть точки A и B (рис. 83) при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$ переходят соответственно в точки A_1 и B_1. На основании определения параллельного переноса имеем:

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}, \\ \overrightarrow{BB_1} = \vec{m}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}.$$

Далее выполним следующие преобразования: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow AB = A_1B_1$.

Доказательство для поворота проведите самостоятельно.

Следствия.

1. *При параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей прямую.*

2. *Центральная симметрия с центром O является поворотом с центром O на угол в* $180°$.

Доказательства. **1.** Было доказано, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ (см. рис. 83). Отсюда следует, что $AB \parallel A_1B_1$.

2. Докажите это следствие самостоятельно.

9.2. Примеры решения задач

Задача 1. При повороте около точки O на угол α (рис. 84) точка A перешла в A_1, B — в B_1, C — в C_1. Докажите, что точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 лежат на концентрических окружностях с центром O.

Доказательство. Так как поворот около точки есть движение и точка O — центр поворота — является неподвижной точкой, то

$OA = OA_1$, $OB = OB_1$, $OC = OC_1$. Отсюда следует требуемое утверждение.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи (см. рис. 84) докажите, что $\Delta AOA_1 \sim \Delta BOB_1 \sim \Delta COC_1$.

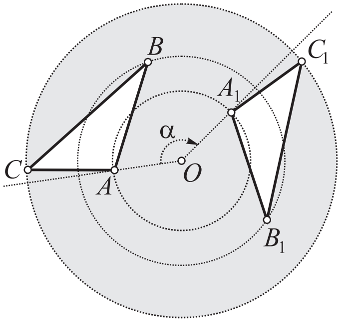

Рис. 84

Доказательство. 1) Эти треугольники равнобедренные, у них углы при вершине O равны между собой (они равны углу поворота);

2) имеем: две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы между этими сторонами равны. Значит, данные треугольники подобны.

Задача 3. Пусть четырехугольник $ABCD$ — трапеция (рис. 85), AD и BC — основания трапеции. Известны все стороны трапеции: $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$. С помощью параллельного переноса докажите, что

$$|c - d| < a - b < c + d. \quad (*)$$

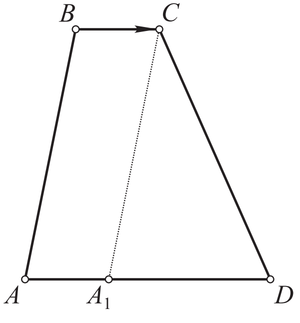

Рис. 85

Доказательство. Выполним параллельный перенос стороны AB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Точка A при этом перейдет в точку A_1. Получили ΔA_1CD, в котором $A_1C = AB = c$, $CD = d$, $A_1D = a - b$. Для ΔA_1CD неравенства (*) справедливы.

Задача 4. Пусть при повороте вокруг точки O на угол α точка A переходит в точку A_1, точка B — в точку B_1. Докажите, что точка O является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA_1 и BB_1.

Доказательство. Так как $OA = OA_1$ (см. рис. 84), то точка O равноудалена от концов отрезка AA_1. Поэтому точка O принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AA_1. Аналогично получаем, что точка O принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку BB_1. Отсюда следует доказываемое утверждение.

Задание. Даны две пары соответственных точек при повороте вокруг центра: точки A и A_1, B и B_1 (см. рис. 84). Постройте центр поворота. (Воспользуйтесь предыдущей задачей.)

Приведем примеры более сложных задач.

Задача 5. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и отрезок AB (рис. 86). Постройте отрезок XY, равный и параллельный отрезку AB, концы которого лежат на данных окружностях.

Решение.

1. *Поиск решения.* Допустим, что искомый отрезок XY построен (см. рис. 86). Так как отрезок XY равен и параллелен отрезку AB, то возможны случаи:

а) либо $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$; б) либо $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA}$.

Пусть, например, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$. Тогда точка Y получается из точки X параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$. Представим, что параллельному переносу подвергается (вместе с точкой X) и окружность ω_1. Пусть при этом параллельном переносе окружность ω_1 переходит в окружность ω_1'. Тогда точка X окружности ω_1 перейдет в точку Y окружности ω_1'. Итак, точка Y находится как точка пересечения окружностей ω_2 и ω_1'.

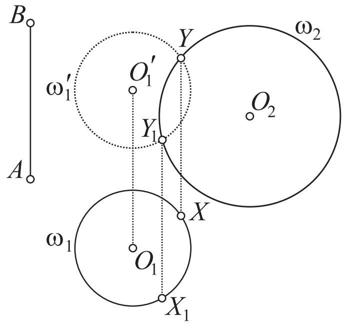

Рис. 86

Аналогично во втором случае, если $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BA}$, то точка Y находится как точка пересечения окружности ω_2 и окружности ω_1'', получающейся из окружности ω_1 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$.

2. *Построение.* Строим (см. рис. 86):

1) окружность ω_1', получающуюся из окружности ω_1 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$; для этого строим точку O_1', получающуюся из точки O_1 при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$, и проводим окружность ω_1' с центром в точке O_1' и радиусом, равным радиусу окружности ω_1;

2) точку Y — точку пересечения окружностей ω_2 и ω_1';

3) точку X — точку, в которую перейдет построенная точка Y при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BA}$;

4) предыдущие построения повторяем для второго случая, когда параллельный перенос окружности ω_1 совершается на вектор $\overrightarrow{BA}$.

Отрезок XY — искомый.

3. *Доказательство* проведите самостоятельно.

4. *Исследование.* Если окружности ω_1' и ω_1'' имеют общие точки с окружностью ω_2, то задача имеет решение. Если эти окружности с окружностью ω_2 общих точек не имеют, то задача решения не имеет. Задача имеет бесконечное множество решений, если хотя бы одна из окружностей ω_1' и ω_1'' совпадает с окружностью ω_2. В остальных случаях задача более четырех решений иметь не может.

Задание. Подберите окружности ω_1 и ω_2 так, чтобы задача не имела решения, имела одно решение (два, три, четыре, бесконечное множество решений).

Задача 6. Даны окружность ω, прямая a и точка O. Постройте квадрат так, чтобы одна его вершина находилась в точке O, а соседние вершины P и R: одна — на данной окружности, другая на данной прямой.

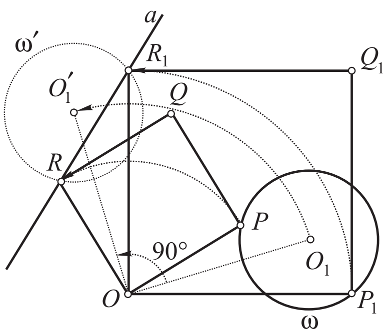

Рис. 87

Решение.

1. *Поиск решения.* Допустим, что искомый квадрат $OPQR$ построен (рис. 87). У него одна вершина находится в точке O, $P \in \omega$, $R \in a$. Задача сводится к построению вершин P и R, так как если эти вершины будут построены, то по трем вершинам нетрудно построить вершину Q. Выясним, какими свойствами обладают вершины P и R. Для этого заметим, что если совершить поворот точки P вокруг центра O на 90°, то точка P перейдет в точку R. Представим, что вместе с точкой P повороту подвергается и окружность ω, на которой лежит точка P. (Обратите внимание на то, что этот прием неоднократно применялся и в предыдущих задачах.) Пусть при этом повороте окружность ω переходит в окружность ω'. Окружность ω' (что важно) пройдет через точку R. Итак, точка R находится как точка пересечения прямой a и окружности ω'. Найдя точку R, точку P можно получить как точку, в которую перейдет точка R при повороте вокруг того же центра O

на угол, равный 90°, только в противоположном направлении. После этого можно построить оставшуюся вершину Q. Заметим, что поворот точки P вместе с окружностью ω можно совершать на угол, равный 90°, и в противоположном направлении. При этом получится окружность ω'', которая в решении играет такую же роль, как и окружность ω'.

2. *Построение*. Строим (см. рис. 87):

1) окружность ω': для этого поворачиваем центр O_1 окружности ω на 90° вокруг точки O, получаем точку O_1', далее строим окружность ω' с центром в точке O_1' и радиусом, равным радиусу окружности ω;

2) точку R — точку пересечения окружности ω' с прямой a;

3) точку P — точку, в которую перейдет точка R при повороте вокруг центра O на 90° в противоположном направлении;

4) квадрат $OPQR$ — искомый квадрат;

5) квадрат $OP_1Q_1R_1$, который также является искомым.

3. *Доказательство* проведите самостоятельно.

4. *Исследование*. Если окружности ω' и ω'' имеют общие точки с прямой a, то задача имеет решения.

Если эти окружности с прямой a общих точек не имеют, то задача решения не имеет.

В зависимости от числа общих точек окружностей ω' и ω'' с прямой a задача может иметь одно, два, три или максимум — четыре решения.

§ 10. Метод гомотетии

10.1. Теория

Гомотетия является еще одним видом геометрического преобразования. Это преобразование является преобразованием подобия. Применение гомотетии при решении задач дает новый метод, который называется ***методом гомотетии***.

Гомотетия с центром O и коэффициентом $k = 3$ представлена на рисунке 88, *а*. На рисунке 88, *б* показана гомотетия с центром O и коэффициентом $k = -3$. Приведем определение гомотетии.

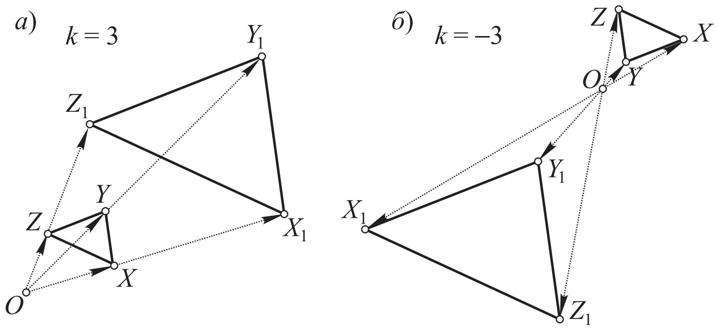

Рис. 88

Гомотетией с центром O ***и коэффициентом*** $k \neq 0$ называется преобразование, при котором каждая точка X переходит в точку X_1 такую, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$.

Если $k > 0$, то гомотетия называется *положительной* (см. рис. 88, *а*), если $k < 0$, то — *отрицательной* (см. рис. 88, *б*).

Теорема 7

Гомотетия является преобразованием подобия.

Доказательство. Пусть при гомотетии с центром O (рис. 89) и коэффициентом k точки A и B переходят соответственно в точки A_1 и B_1. Точки A и A_1, B и B_1 лежат на прямых, проходящих через центр гомотетии O (так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ — коллинеарные). Рассмотрим треугольники OAB и OA_1B_1. Так как у этих треугольников угол O общий, а стороны, заключающие этот угол, — пропорциональны: $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{OB_1}{OB} = |k|$, то $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$. Поэтому $\dfrac{A_1B_1}{AB} = |k|$. Значит, гомотетия является преобразованием подобия.

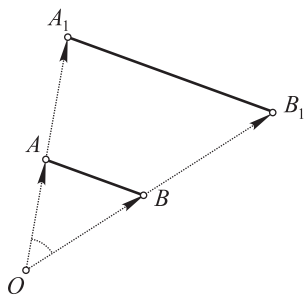

Рис. 89

Замечание. На основании доказанной теоремы можно утверждать, что гомотетия обладает всеми свойствами преобразования подобия (в частности, гомотетия сохраняет меру угла и отношение двух отрезков). У гомотетии имеются и такие свойства, которые нельзя отнести к общим свойствам преобразования подобия. Например, при преобразовании подобия прямая, вообще говоря, не переходит в параллельную прямую. При гомотетии, как это утверждается в приводимом ниже следствии, прямая всегда переходит в параллельную прямую.

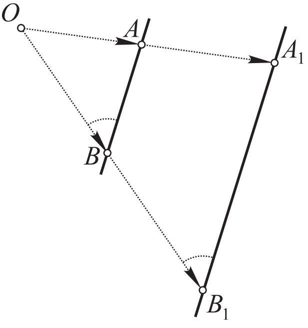

Рис. 90

Следствие. *При гомотетии прямая переходит в параллельную прямую.*

Доказательство. Так как $\Delta OAB \backsim \Delta OA_1B_1$ (рис. 90), то $\angle B = \angle B_1$. Отсюда нетрудно получить, что сумма односторонних углов при прямых AB и A_1B_1 и секущей OB_1 равна 180°. Значит, $A_1B_1 \parallel AB$.

10.2. Примеры решения задач методом подобия

Задача 1. Точки A и A_1 являются соответственными в гомотетии с центром O (рис. 91). Постройте точку B_1 — образ точки B в этой гомотетии ($B \notin AA_1$).

Построение. Строим:

1) OB;
2) $A_1K \parallel AB$;
3) $A_1K \cap OB = B_1$ — искомая точка.

Доказательство проведите самостоятельно.

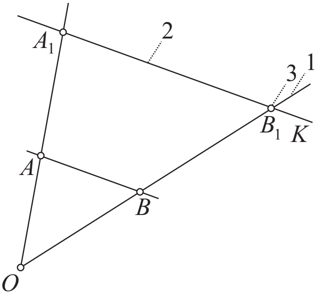

Рис. 91

Задача 2. Окружности с центрами C и C_1 касаются внешним образом в точке O (рис. 92). Через точку O проведены две произвольные секущие, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую — соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB}$.

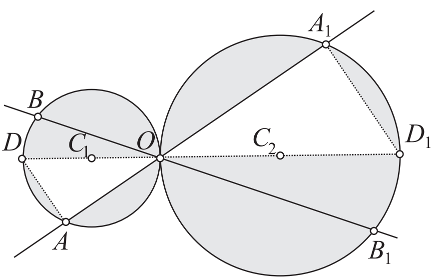

Рис. 92

Доказательство. Проведем диаметры OD и OD_1 данных окружностей. Треугольники OAD и OA_1D_1 — прямоугольные (углы A и A_1 — прямые как вписанные углы, опирающиеся на диаметр). Эти треугольники подобны по двум углам (у них еще $\angle AOD = \angle A_1OD_1$). На основании подобия:

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OD_1}{OD}, \qquad (1)$$

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{OD_1}{OD}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует искомая пропорция.

Задача 3. Докажите, что окружности, данные в предыдущей задаче, гомотетичны относительно точки O.

Доказательство. Это утверждение следует из предыдущей задачи.

Задача 4. В условиях задачи 2 докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

Доказательство. Так как данные окружности гомотетичны относительно точки O, то точки A и A_1, B и B_1 — гомотетичны в этой гомотетии. Поэтому $A_1B_1 \parallel AB$.

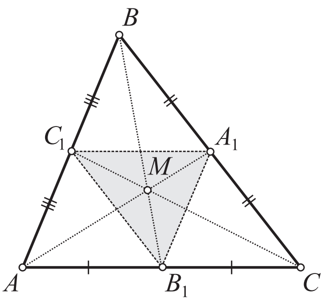

Рис. 93

Задача 5. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы ΔABC (рис. 93). Докажите, что $\Delta A_1B_1C_1$ гомотетичен ΔABC. Найдите центр и коэффициент гомотетии.

Доказательство. По свойству медиан треугольника $\overrightarrow{MA_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$. Поэтому $\Delta A_1B_1C_1$ гомотетичен ΔABC в гомотетии с центром M и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$.

Задача 6. В условиях предыдущей задачи докажите, что прямая, проходящая через вершину B и перпендикулярная к стороне AC, в гомотетии с центром M и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$ перейдет в серединный перпендикуляр к этой же стороне.

Доказательство. В данной гомотетии (см. рис. 93) сторона AC ΔABC переходит в сторону A_1C_1 $\Delta A_1B_1C_1$. Так как гомотетия сохраняет величину угла, то прямая, проходящая через вершину B и перпендикулярная к AC, перейдет в прямую, проходящую через вершину B_1 и перпендикулярную к стороне A_1C_1. Эта прямая будет перпендикулярна к AC ($AC \parallel A_1C_1$) и проходит через середину стороны AC.

Задача 7. Пусть M, O и H — соответственно центроид, центр описанной окружности и ортоцентр треугольника. Докажите, что точка M расположена между точками O и H и $MO = \frac{1}{2}MH$.

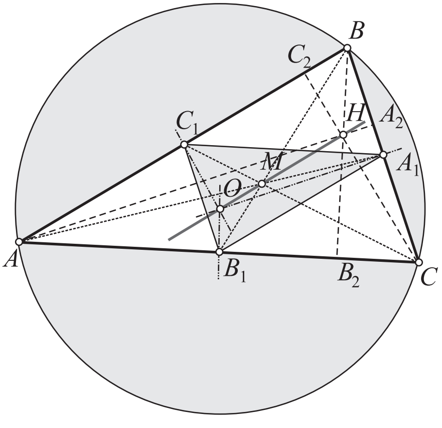

Рис. 94

Доказательство. Пусть в ΔABC (рис. 94) A_1, B_1, и C_1 — середины его сторон. Тогда

$$\overrightarrow{MA_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$$

(в силу теоремы о центроиде треугольника).

Поэтому гомотетия с центром M и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$ переводит точки A, B, C соответственно в точки A_1, B_1, и C_1, и, следовательно, эта гомотетия ΔABC переводит в $\Delta A_1B_1C_1$. Убедимся в том, что в этой гомотетии точка H переходит в точку O. Возьмем высоту AA_2. Выясним, в какую прямую перейдет прямая AA_2 в данной гомотетии. Эта прямая перейдет в прямую, проходящую через точку A_1 и перпендикулярную к B_1C_1. Но такая прямая перпендикулярна к BC (так как $BC \parallel B_1C_1$). Это значит, что прямая AA_2 в данной гомотетии переходит в серединный перпендикуляр к стороне BC. Аналогично: прямая BB_2 переходит в серединный перпендикуляр к стороне AC, прямая CC_2 — в серединный перпендикуляр к стороне AB. Приходим к требуемому выводу. Действительно, точка H в данной гомотетии переходит в точку O, которая является точкой пересечения указанных серединных перпендикуляров. Так как точка O гомотетична точке H в гомотетии с центром M и коэффициентом гомотетии $k=-\frac{1}{2}$, то $\overrightarrow{MO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$. Отсюда следует, что точка M лежит между точками O и H и $MO=\frac{1}{2}MH$.

Заметим, что рассмотренная задача содержит один из самых красивых фактов элементарной геометрии, обнаруженных в свое время знаменитым математиком Л. Эйлером.

Задача 8. Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Решение.

1. *Поиск решения.* Допустим, что ΔABC (рис. 95) удовлетворяет условию задачи: он имеет заданные углы A и C и медиану m_b. Выясним, какими свойствами обладают вершины этого треугольника. Замечаем, что нетрудно построить ΔBA_1C_1, который удовлетворяет только части условий задачи: в нем $\angle A_1=\angle A$, $\angle C_1=\angle C$. На нашем рисунке для этого достаточно провести $A_1C_1 \parallel AC$.

Нельзя ли теперь с помощью ΔBA_1C_1 построить ΔBAC? Наглядные соображения подсказывают, что эти треугольники имеют одинаковую форму и отличаются линейными размерами. Напрашивается применение гомотетии. Гомотетия позволяет сохранить величины углов и вместе с этим изменить линейные размеры, доводя их до требуемых значений. За центр гомотетии естественно принять точку B, а коэффициент гомотетии удобно задать не числом, а геометрически — в виде двух соответственных (гомотетичных) точек. Как это сделать? Для этого учтем, что гомотетия (как и вообще преобразование подобия) сохраняет отношение отрезков. Пусть B_1 — середина отрезка A_1C_1. Если мы сумеем с помощью гомотетии с центром B отрезок A_1C_1 перевести в отрезок AC, то середина B_1 отрезка A_1C_1 должна перейти в середину B_2 отрезка AC. Это означает, что в такой гомотетии ме-

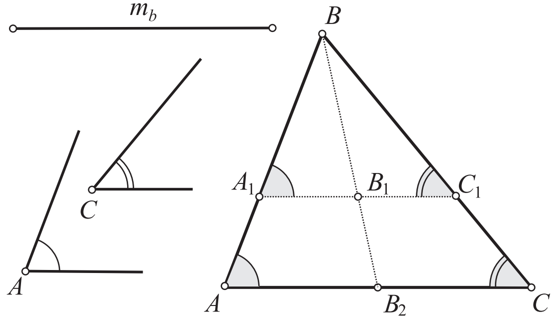

Рис. 95

диана BB_1 ΔBA_1C_1 переходит в медиану BB_2 ΔBAC. Если это так, то тогда две гомотетичные точки B_1 и B_2 нетрудно построить. Для этого в ΔBA_1C_1 стоим медиану BB_1 (получим точку B_1), затем на продолжении этой медианы отложим отрезок $BB_2 = m_b$ (получим точку B_2).

Выполнив теперь гомотетию, задаваемую центром B и парой гомотетичных точек B_1 и B_2, мы сможем ΔBA_1C_1 перевести в ΔBAC. Пользуясь тем, что при гомотетии прямая переходит в параллельную прямую, достаточно через полученную точку B_2 провести прямую, параллельную прямой A_1C_1. Эта прямая при пересечении с лучами BA_1 и BC_1 даст вершины A и C ΔBAC.

2. *Построение*. Строим (см. рис. 95):

1) ΔBA_1C_1 по двум углам: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$;

2) медиану BB_1 ΔBA_1C_1;

3) на продолжении медианы BB_1 отрезок $BB_2 = m_b$;

4) прямую a, проходящую через точку B_2 и параллельную A_1C_1;

5) точки пересечения прямой a с лучами BA_1 и BC_1, получаем точки A и C.

ΔABC — искомый.

3. *Доказательство* проведите самостоятельно.

4. *Исследование*. Задача имеет решение, если $\angle A + \angle C < 180°$. Если $\angle A + \angle C \geq 180°$, то задача не имеет решения, это решение единственное (с точностью до равенства треугольников).

§ 11. Метод геометрических преобразований

Геометрические преобразования дают эффективный метод решения задач. Применяются при этом *методы осевой и центральной симметрии*, *параллельного переноса и поворота*, *гомотетии* и др. Суть метода геометрических преобразований состоит в том, что данная фигура или ее элементы подвергаются некоторому преобразованию. Получаемая при этом фигура часто помогает упростить решение задачи. С некоторыми первыми задачами, решаемыми при помощи геометрических преобразований, мы познакомились выше. Рассмотрим новые задачи.

11.1. Задачи на применение методов осевой и центральной симметрий

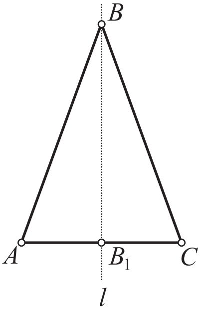

Рис. 96

■ **Задача 1.** С помощью осевой симметрии докажите, что биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является одновременно медианой и высотой (рис. 96).

Доказательство. 1) Пусть l — биссектриса угла B. Воспользуемся тем, что биссектриса угла является его осью симметрии. При симметрии с осью l луч BA переходит в луч BC;

2) так как $BA = BC$, то точка A луча BA перейдет в точку C луча BC;

3) значит, точки A и C — симметричны относительно оси l;

4) поэтому $l \perp AC$ и l проходит через середину отрезка AC;

5) это значит, что биссектриса BB_1 является и высотой, и медианой ΔABC.

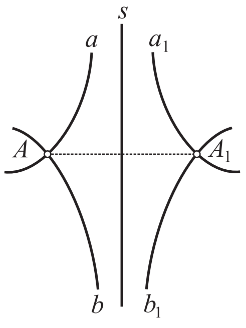

Рис. 97

■ **Задача 2.** Пусть произвольные линии a и a_1, b и b_1 (рис. 97) симметричны относительно оси s, $a \cap b = A$, $a_1 \cap b_1 = A_1$. Докажите, что точки A и A_1 симметричны относительно оси s.

Доказательство. 1) Пусть $A \in a$, тогда образ точки A — точка A_1 — должен принадлежать линии a_1;

2) аналогично, если $A \in b$, то образ точки A — точка A_1 — должен принадлежать линии b_1;

3) итак, $A_1 \in a_1$ и $A_1 \in b_1$. Поэтому A_1 — точка пересечения a_1 и b_1;

4) значит, точки A и A_1 симметричны относительно оси s.

■ **Задача 3.** В равнобедренный ΔABC вписана окружность, X и Y — точки касания боковых сторон AB и BC с этой окружностью. Докажите, что точки X и Y симметричны относительно биссектрисы угла B.

Доказательство. *1-й способ* (рис. 98). 1) Так как центр O вписанной окружности является точкой пресечения биссектрис, то точка O принадлежит биссектрисе l угла B;

2) тогда окружность симметрична относительно прямой l;

3) если угол ABC и данная окружность симметричны относительно прямой l, то их общие точки (точки X и Y) также симметричны относительно оси l.

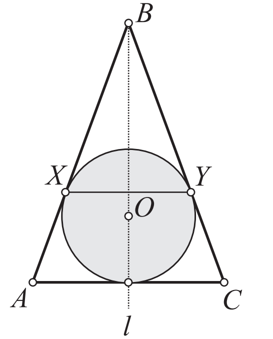

Рис. 98

2-й способ (см. рис. 98). 1) Так как l — ось симметрии угла ABC, то луч BA в этой симметрии перейдет в луч BC;

2) по свойству отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, $BX = BY$;

3) поэтому точка X луча BA перейдет именно в точку Y луча BC. Значит, точки X и Y симметричны относительно биссектрисы l.

Задание. Докажите, что отрезок XY (в условиях предыдущей задачи) перпендикулярен к биссектрисе l и делится этой биссектрисой пополам.

Задача 4. Пусть $AD \parallel BC$ — две хорды окружности. Докажите, что равны хорды (дуги) AB и CD (рис. 99).

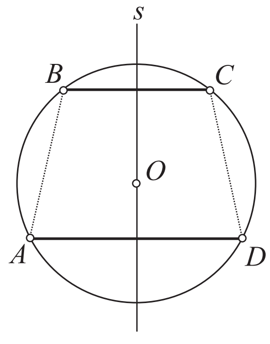

Рис. 99

Доказательство. 1) Проведем через центр O окружности прямую s, перпендикулярную к AD. Так как $AD \parallel BC$, то $s \perp BC$;

2) имеем: прямая AD симметрична относительно оси s и окружность симметрична относительно оси s. Значит, их точки пересечения — точки A и D — также симметричны относительно оси s;

3) аналогично получаем, что точки B и C также симметричны относительно оси s;

4) тогда отрезки AB и DC симметричны относительно оси s и $AB = DC$;

5) если хорды AB и DC равны, то и дуги, стягивающие их, также равны.

Задание. В условиях предыдущей задачи докажите, что диагонали AC и BD трапеции равны.

Задача 5. С помощью осевой симметрии докажите, что катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

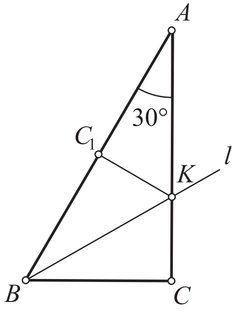

Рис. 100

Доказательство. *1-й способ* (рис. 100). 1) Воспользуемся тем, что биссектриса угла является его осью симметрии. Проведем биссектрису l угла B ($\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$). Пусть $l \cap AC = K$. Тогда $\angle ABK = \angle KBC = 30°$;

2) образом ΔBCK в симметрии с осью l будет ΔBC_1K, причем

$C_1 \in BA$ и $\angle BC_1K = \angle BCK = 90°$, $BC_1 = BC$;

3) так как ΔABK — равнобедренный ($\angle BAK = \angle ABK = 30°$) и KC_1 — высота этого треугольника, то CK_1 — медиана;

4) поэтому $BC_1 = C_1A$.

Итак, $BC = BC_1 = C_1A = \frac{1}{2}AB$.

2-й способ (рис. 101). 1) Пусть s — ось симметрии отрезка AB, $s \cap AC = T$;

2) при симметрии с осью s ΔAMT переходит в равный ΔBMT. Поэтому $AM = MB$ и $\angle TBM = \angle TAM = 30°$;

3) тогда $\angle TBC = \angle ABC - \angle TBM = 60° - 30° = 30°$;

4) поэтому $\Delta BMT = \Delta BCT$ по гипотенузе и острому углу и $BM = BC$;

5) имеем: $\frac{1}{2}AB = BM = BC$.

Задача 6. Внутри острого $\angle AOB$ дана точка M (рис. 102). На сторонах угла найдите точки X и Y такие, чтобы периметр ΔMXY оказался наименьшим.

Решение.

Пусть точка M_1 симметрична точке M относительно прямой OA, точка M_2 — симметрична точке M относительно прямой OB. Проведем отрезок M_1M_2. Точки пересечения его со сторонами угла обозначим через X и Y. Полученный ΔMXY — искомый. Действительно, $MX + XY + YM = M_1X + XY + YM_2 = M_1M_2$ — кратчайшему пути между фиксированными точками M_1 и M_2. (При других положениях точек X и Y периметр ΔMXY будет равен длине ломаной, соединяющей точки M_1 и M_2, и уже не будет наименьшим.)

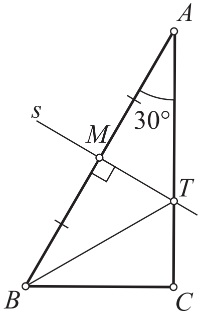

Рис. 101

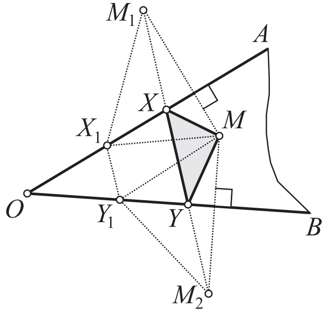

Рис. 102

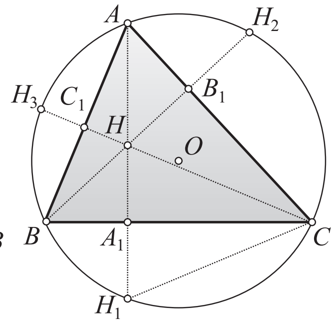

Рис. 103

Задача 7. Пусть H — ортоцентр остроугольного ΔABC (рис. 103), ABC — описанная окружность. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно прямых AB, BC и AC, лежат на окружности ABC.

Доказательство. *1-й способ.* 1) Продолжим высоту AA_1 до пересечения с окружностью в точке H_1. Докажем, что $HA_1 = A_1H_1$. Рассмотрим ΔHCH_1. Отрезок CA_1 для этого треугольника является высотой. Докажем, что одновременно он является и биссектрисой этого треугольника (тогда CA_1 окажется и медианой треугольника);

2) имеем: $\angle BAH_1 = \angle BCH_1$ как вписанные и опирающиеся на одну дугу;

3) кроме того, $H_3CA_1 = \angle BAH_1$ как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами;

4) поэтому $\angle HCA_1 = \angle A_1CH_1$;

5) итак, высота CA_1 ΔHCH_1 является биссектрисой этого треугольника. Значит, CA_1 — медиана ΔHCH_1 и $HA_1 = A_1H_1$;

6) отсюда точки H и H_1 симметричны относительно стороны BC, H и H_2 симметричны относительно стороны AC, H и H_3 симметричны относительно стороны AB.

2-й способ. 1) Пусть H_1 — точка, симметричная ортоцентру H относительно стороны BC. Докажем, что точка H_1 принадлежит окружности ABC (см. рис. 103). Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BHC = \angle C_1HB_1 = 180° - \alpha$;

2) так как треугольники BH_1C и BHC симметричны относительно прямой, то они равны и $\angle BH_1C = \angle BHC = 180° - \alpha$;

3) получаем, что сумма противоположных углов четырехугольника ABH_1C равна 180°: $\angle BAC + \angle BH_1C = \alpha + (180° - \alpha) = 180°$;

4) значит, четырехугольник ABH_1C — описанный и точка H_1 принадлежит окружности ABC.

Задание. В условиях предыдущей задачи докажите, что $\Delta H_1H_2H_3$ гомотетичен $\Delta A_1B_1C_1$ в гомотетии с центром H и коэффициентом $k = 2$. (Докажите самостоятельно.)

Задача 8. В условиях предыдущей задачи (см. рис. 103) докажите, что окружности BHC и ABC имеют одинаковый радиус.

Доказательство. *1-й способ.* 1) Так как треугольники BHC и BH_1C симметричны относительно стороны BC, то они равны;

2) поэтому описанные около них окружности BHC и BH_1C — окружности одинакового радиуса;

3) окружность BH_1C совпадает с окружностью ABC. Значит, окружности BHC и ABC имеют равные радиусы.

2-й способ. 1) Воспользуемся тем, что в треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Пусть R — радиус окружности ABC, R_1 — радиус окружности BHC. Для ΔABC и ΔBHC имеем соответственно:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{BC}{\sin\angle BHC} = \frac{BC}{\sin(180°-\alpha)} = 2R_1;$$

2) так как $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то $2R = 2R_1$. Отсюда $R = R_1$.

Задача 9. Пусть H — ортоцентр остроугольного ΔABC (рис. 104), M — середина стороны AC, H_1 — точка, симметричная ортоцентру относительно точки M. Докажите, что точка M_1 принадлежит окружности ABC.

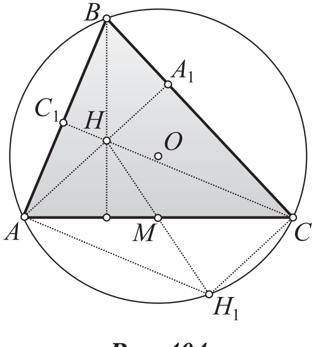

Рис. 104

Доказательство. 1) Положим, что $\angle B = \beta$. Тогда $\angle A_1HC_1 = 180° - \beta$. Поэтому $\angle AHC = 180° - \beta$ как вертикальные;

2) так как четырехугольник $AHCH_1$ — параллелограмм (почему?), то $\angle AH_1C = \angle AHC = 180° - \beta$;

3) поэтому в четырехугольнике $ABCH_1$ сумма противоположных углов равна 180°: $\angle B + \angle AH_1C = \beta + (180° - \beta) = 180°$;

4) отсюда следует, что четырехугольник $ABCH_1$ — описанный и точка H_1 принадлежит окружности ABC.

Задача 10. Через точку M, расположенную внутри угла (меньшего развернутого, рис. 105), проведите прямую, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится в этой точке пополам.

Решение.

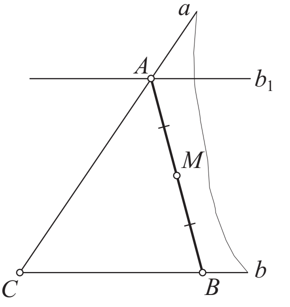

Рис. 105

Допустим, что прямая AB — искомая: она проведена через точку M и $AM = MB$. Какими свойствами обладает эта прямая? Одна точка искомой прямой дана — это точка M. Значит, достаточно построить еще одну ее точку, например точку A. Как построить точку A? Для этого выясним ее свойства. Во-первых, точка A лежит на стороне a данного угла. Во-вторых, точка A симметрична точке B относительно центра M. (Последнее обстоятельство требует отдельного рассмотрения.) Так как точка B принадлежит прямой b, то симметричная ей точка — точка A — обязательно принадлежит прямой b_1, симметричной прямой b. Следовательно, для решения задачи надо построить прямую b_1, симметричную b относительно центра M. Точка A строится как точка пересечения прямой b_1 со стороной a данного угла. Затем строится прямая AB.

11.2. Задачи на применение методов параллельного переноса и поворота

Задача 1. С помощью параллельного переноса докажите, что если одна из параллельных прямых перпендикулярна к некоторой прямой, то и другая прямая также перпендикулярна к этой прямой.

Доказательство. 1) Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$ (рис. 106). Докажем, что $b \perp c$. Пусть $a \cap c = A$, $b \cap c = B$. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. При любом параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую. Поэтому прямая a перейдет в прямую b, а прямая c сама в себя;

2) при любом движении мера угла сохраняется. Поэтому прямой угол между прямыми a и c перейдет в прямой угол между прямыми b и c;

3) значит, $b \perp c$.

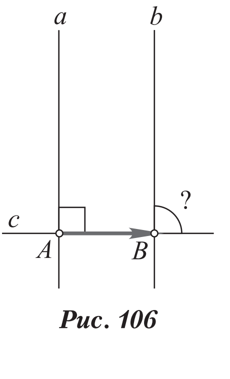

Рис. 106

Задача 2. С помощью параллельного переноса докажите, что если две прямые (см. рис. 106) перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны: $(a \perp c$ и $b \perp c) \Rightarrow a \parallel b$.

Доказательство. 1) Воспользуемся снова параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$. При этом движении прямая c переходит в себя;

2) так как прямой угол при движении переходит в прямой, то прямая a перейдет в прямую, проходящую через точку B, перпендикулярную к прямой c;

3) но такой прямой является прямая b. Значит, прямая b — образ прямой a в данном параллельном переносе;

4) поэтому $b \parallel a$.

Задача 3. Дан $\angle AOB$, некоторая прямая a и отрезок l (рис. 107). Постройте отрезок XY с концами, лежащими на сторонах угла, параллельный прямой a и имеющий длину, равную l.

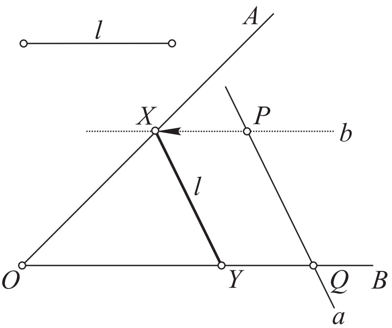

Рис. 107

Решение.

1) Построим отрезок PQ, удовлетворяющий части условий: он параллелен прямой a, равен l, один его конец (точка Q) лежит на стороне данного угла;

2) проведем $b \parallel OB$, получим точку $X = b \cap OA$;

3) выполнив параллельный перенос отрезка PQ на вектор $\overrightarrow{PX}$, получим искомый отрезок XY.

Задача 4. С помощью параллельного переноса найдите диагональ равнобедренной трапеции, если угол между диагоналями равен α, а основания трапеции равны a и b.

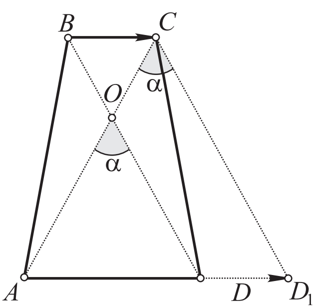

Рис. 108

Решение.

1) Положим, что $AC = BD = x$, $AD = a$, $BC = b$, $\angle AOD = \alpha$ (рис. 108). Выполнив параллельный перенос отрезка BD на вектор $\overrightarrow{BC}$, получим отрезок CD_1;

2) в ΔACD_1 имеем: $AC = CD_1 = x$, $\angle ACD_1 = \alpha$, $AD_1 = AD + DD_1 = AD + BC = a + b$. Тогда по теореме косинусов:

$$(a+b)^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos\alpha,\ x = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $AC = BD = \dfrac{\sqrt{2}(a+b)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 5. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и некоторая прямая a (рис. 109). Постройте прямую x так, чтобы она была параллельна прямой a и пересечение прямой с соответствующими кругами давало бы две равные хорды.

Анализ (*поиск решения*). 1) Допустим, что искомая прямая x построена: $x \parallel a$ и $A_1B_1 = A_2B_2$ (см. рис. 109);

2) так как отрезки A_1B_1 и A_2B_2 равны, то окружность ω_1 можно перевести параллельным переносом вдоль прямой x (все равно, что вдоль прямой a) в окружность ω_1', которая проходит через точки A_2 и B_2;

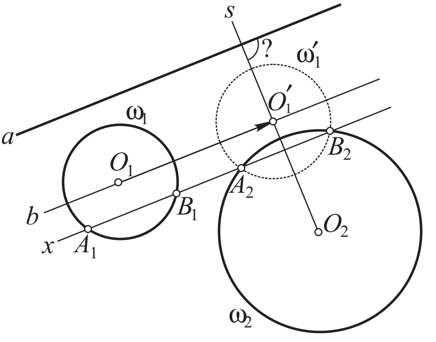

Рис. 109

3) это означает, что точки A_2 и B_2 можно построить при помощи окружности ω_1';

4) необходимо только уточнить, на какой вектор совершается параллельный перенос. Учтем, что серединный перпендикуляр s к хорде A_2B_2 пройдет через центры O_2 и O_1' окружностей ω_2 и ω_1' и этот серединный перпендикуляр будет перпендикулярен и к прямой a;

5) вектор $\overrightarrow{O_1O_1'}$, на который совершается параллельный перенос, определяется следующим образом: через центр O_2 проводим прямую $s \perp a$; через центр O_1 проводим прямую $b \parallel a$; точка O_1' получается как точка пересечения прямых s и b;

6) выполнив после этого параллельный перенос окружности ω_1 на вектор $\overrightarrow{O_1O_1'}$, получим окружность ω_1'; точки пересечения окружностей ω_2 и ω_1' дают точки A_2 и B_2. Тогда прямая $A_2B_2 = x$ — искомая прямая.

Построение и доказательство проведите самостоятельно.

Исследование. Окружность ω_1' может иметь с окружностью ω_2 одну точку или не иметь общих точек. В этих случаях задача решения не имеет. Если окружности ω_1' и ω_2 пересекаются, то задача имеет единственное решение.

Задача 6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ (рис. 110) во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Докажите, что ΔABQ переводится в ΔMBC с помощью поворота. Найдите центр и угол поворота.

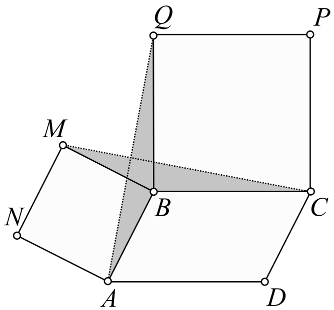

Рис. 110

Решение.

1) Найдем соответственные стороны этих треугольников. Для стороны AB ΔABQ соответственной естественно посчитать сторону MB ΔMBC, для стороны BQ ΔABQ — сторону BC ΔMBC;

2) замечаем, что при повороте вокруг точки B на $90°$ стороны AB и BQ первого треугольника переходят соответственно в стороны MB и BC второго треугольника. Поэтому при указанном повороте первый треугольник переводится во второй треугольник.

Задание. В условиях задачи 6 докажите (самостоятельно), что $AQ \perp MC$.

Задача 7. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ (рис. 111) во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABM и BCN. Докажите, что $MC = AN$. Найдите угол между прямыми MC и AN.

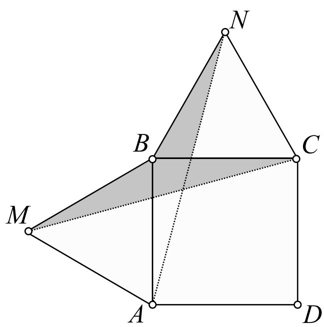

Рис. 111

Решение.

1) Как и при решении предыдущей задачи, устанавливаем, что поворот вокруг центра B на $60°$ против часовой стрелки совмещает отрезок MC с отрезком AN;

2) значит, $MC = AN$;

3) если угол поворота острый, то угол, образуемый прямой и ее образом, равен углу поворота. Поэтому прямые MC и AN пересекаются под углом в $60°$.

Задание. Хорды AB и CD окружности равны (рис. 112). Продолжения этих хорд пересекаются под углом, равным 80°. Каким поворотом можно совместить одну хорду с другой? Найдите центр и угол поворота. (Решите самостоятельно.)

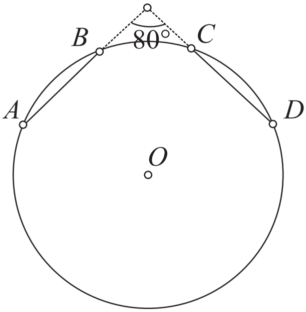

Рис. 112

Задача 8. Через точку пересечения диагоналей квадрата (рис. 113) проведены два перпендикулярных отрезка MN и PQ ($M \in AB$, $N \in CD$, $P \in BC$, $Q \in AD$). Докажите, что $MN = PQ$.

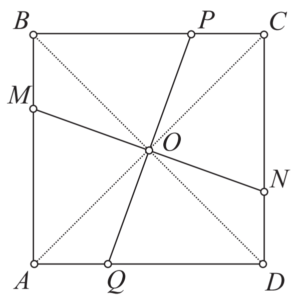

Рис. 113

Доказательство. 1) При повороте вокруг точки O на 90° по часовой стрелке сторона AB перейдет в сторону BC, прямая OM — в прямую OP;

2) поэтому точка M — точка пересечения AB и прямой OM — перейдет в точку пересечения BC и прямой OP, т. е. в точку P;

3) аналогично точка N в этом повороте переходит в точку Q;

4) в итоге отрезок MN переходит в отрезок PQ. Значит, $MN = PQ$.

Задача 9. Даны прямые a, b, точка O и угол α (рис. 114). Постройте равнобедренный ΔAOB ($AO = OB$) с углом AOB, равным α, вершины A и B которого лежат соответственно на прямых a и b.

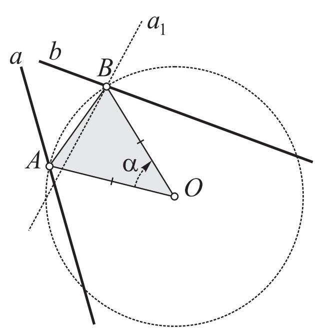

Рис. 114

1. *Анализ (поиск решения).* 1) Допустим, что ΔAOB искомый: $AO = OB$, $\angle AOB = \alpha$, $A \in a$, $B \in b$. При повороте вокруг точки O на угол α отрезок OA (точка A) перейдет в отрезок OB (точку B);

2) представим, что вместе с точкой A поворачивается прямая a, на которой лежит эта точка. Пусть прямая a переходит при этом движении в прямую a_1;

3) прямая a_1 обязана пройти через точку B. Итак, точка B определяется как точка пересечения прямых b и a_1;

4) построив точку B, нетрудно построить точку A. Для этого повернем отрезок OB на угол α в противоположном направлении. Точка B при этом перейдет в точку A. Получим искомый ΔAOB.

2—3. *Доказательство и построение* проведите самостоятельно.

4. *Исследование*. Если прямая a_1 не пересечет прямую b, то точка B существовать не будет и задача решения не имеет. Если прямая a_1 совпадет с прямой b, то в качестве точки B можно взять любую точку прямой b. Задача в этом случае имеет бесконечное множество решений. Если прямая a_1 пересекает прямую b, то точка B определяется единственным образом и задача имеет единственное решение.

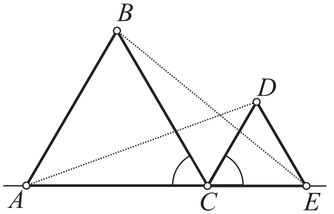

Рис. 115

Задача 10. Треугольники ABC и CDE (рис. 115) правильные. Докажите, что $AD = BE$.

Доказательство. 1) При повороте вокруг центра C на $60°$ по часовой стрелке точка A переходит в точку B, точка D — в точку E;

2) значит, отрезок AD переходит в отрезок BE. Поэтому $AD = BE$.

11.3. Задачи на применение метода гомотетии

Задача 1. Постройте ΔABC по углу B, отношению сторон AB и BC, равному отношению двух данных отрезков p и q и медиане m_a.

Решение.

1) Воспользуемся уже известным нам приемом. Построим вначале $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 116), который удовлетворяет части условий задачи: $\angle B_1$ в нем имеет заданную меру, $A_1B_1 = p$, $B_1C_1 = q$ (в итоге $A_1B_1 : B_1C_1 = p : q$). Проведем медиану A_1M_1 $\Delta A_1B_1C_1$;

2) искомый ΔABC имеет такой же $\angle B$, такое же отношение сторон AB и BC. Как видно, задача свелась к тому, чтобы суметь перейти от $\Delta A_1B_1C_1$ к ΔABC, сохранив при этом меру угла B_1 и отношение сторон;

3) это можно сделать с помощью гомотетии. Необходимо только правильно выбрать ее центр и коэффициент. За центр гомотетии естественно принять точку A_1;

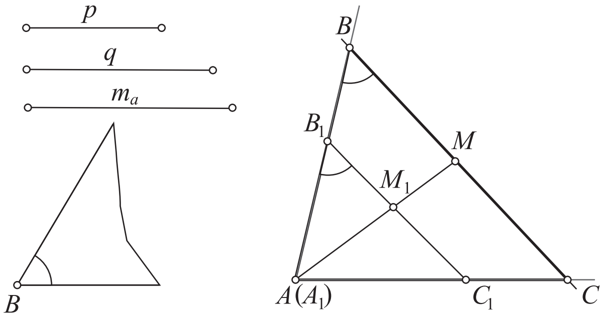

Рис. 116

4) выберем коэффициент гомотетии k. Зададим его в геометрической форме, удобной для построения, указав две гомотетичные точки M_1 и M. Для этого на продолжении медианы A_1M_1 отложим отрезок $A_1M = m_a$ (убедитесь в том, что точки M и M_1 лежат на одной прямой с центром гомотетии!);

5) через точку M проведем прямую $BC \parallel B_1C_1$;

6) ΔABC является искомым. В силу гомотетии он имеет заданные $\angle B$ и отношение сторон AB и BC. Кроме того, при гомотетии медиана переходит в медиану. Значит, AM — медиана ΔABC (имеющая заданное значение m_a).

Задача имеет единственное решение, если $\angle B < 180°$. В противном случае задача решения не имеет.

Задача 2. Постройте ΔABC по биссектрисе l_a и отношению трех его сторон, равному отношению трех данных отрезков p, q и s (рис. 117).

Решение.

1) Как и выше, построим вначале вспомогательный ΔAB_1C_1, в котором $AB_1 = p$, $B_1C_1 = q$, $AC_1 = s$. Этот треугольник имеет заданное отношение трех его сторон. Осталось суметь перевести его в треугольник с таким же отношением сторон и заданной биссектрисой l_a;

2) отношение сторон треугольника сохраняется при гомотетии. При гомотетии также биссектриса угла переходит в биссектрису угла. Эти соображения подсказывают, что необходимо воспользоваться гомотетией. Как задать эту гомотетию? В качестве центра гомотетии удобно выбрать точку A;

3) коэффициент гомотетии, как и выше, зададим геометрически — с помощью пары гомотетичных точек. Для этого построим биссектрису AL_1 ΔAB_1C_1, на ее продолжении отложим отрезок $AL = l_a$.

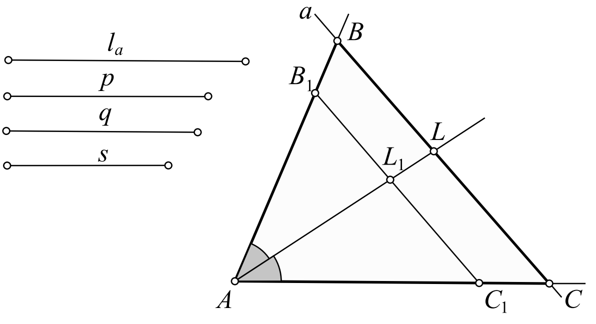

Рис. 117

В результате получим точку L. Рассмотрим гомотетию с центром A и парой гомотетичных точек L_1 и L ($L_1 \to L$);

4) построим точки B и C, гомотетичные соответственно точкам B_1 и C_1 в указанной гомотетии (для этого достаточно через точку L провести прямую $a \parallel B_1C_1$; прямая a, пересекаясь с лучами AB_1 и AC_1, даст точки B и C);

5) ΔABC — искомый. В самом деле, он имеет такое же отношение сторон, что и вспомогательный, а значит, — заданное отношение. Кроме того, $AL = l_a$ и AL является биссектрисой ΔABC, так как AL является отрезком, в который переходит в указанной гомотетии биссектриса ΔAB_1C_1.

Задача имеет решение, причем единственное, если выполняются неравенства треугольника: $p+q>s$, $p+s>q$, $q+s>p$.

В противном случае задача не имеет решения.

Задача 3. Дан остроугольный ΔABC (рис. 118). Требуется «вписать» в этот треугольник квадрат таким образом, чтобы две его вершины лежали бы на стороне AC, одна — на стороне AB и одна — на стороне BC.

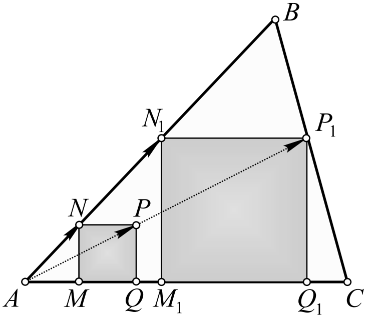

Рис. 118

Решение.

1) Построим вначале квадрат $MNPQ$, который частично удовлетворяет условию задачи: $M \in AC$, $Q \in AC$, $N \in AB$. Вершина P этого квадрата не лежит на стороне BC;

2) построим точку P_1 — точку пересечения луча AP со стороной BC.

Воспользуемся гомотетией, задаваемой центром A и парой гомотетичных точек P и P_1;

3) квадрат $MNPQ$ перейдет при этом в квадрат $M_1N_1P_1Q_1$, который полностью удовлетворяет условию задачи.

Задача 4. Докажите, что точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, точка пересечения ее диагоналей и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.

Доказательство. 1) Требуется доказать, что точки O, O_1, M_1 и M_2 лежат на одной прямой (рис. 119). Рассмотрим гомотетию, задаваемую центром O и парой гомотетичных точек A и B ($A \to B$). При этой гомотетии отрезок AD переходит в отрезок BC, а середина отрезка AD (точка M_1) — в середину отрезка BC (точку M_2). Поэтому точки M_1, M_2 и O лежат на одной прямой;

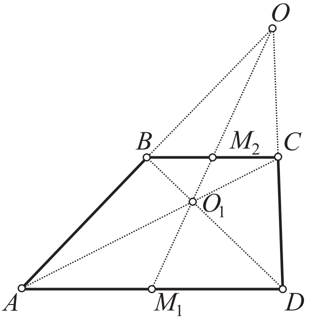

Рис. 119

2) воспользуемся теперь гомотетией, задаваемой центром O_1 и парой гомотетичных точек A и C ($A \to C$). При этой гомотетии отрезок AD переходит в отрезок CB, а середина отрезка AD (точка M_1) — в середину отрезка CB (точку M_2). Значит, точки O_1, M_1 и M_2 лежат на одной прямой;

3) итак, точки O и O_1 лежат на прямой M_1M_2, т. е. все данные четыре точки лежат на одной прямой.

§ 12. Равенство фигур

12.1. Теория

Равные фигуры показаны на рисунках 120, *а*, *б*. Приведем определение.

Две фигуры называются ***равными***, если существует движение, которое одну из них переводит в другую.

Обратим внимание на то, что для равенства отрезков, углов и треугольников мы имеем по два определения. Первые определения (без использования движения) приводились в курсе геометрии 7 класса. Только что было показано, как эти понятия определяются при помощи движения. Можно доказать, что «старые» и «новые»

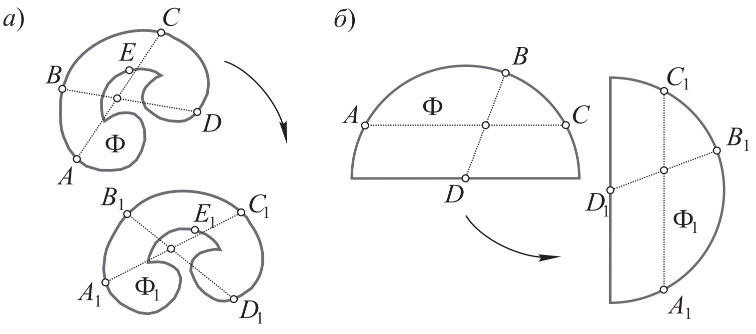

Рис. 120

определения эквивалентны. Центральным в решении этого вопроса является следующее.

Следствие. *Если треугольники равны по первому определению, то существует движение, которое совмещает один из них с другим (т. е. треугольники равны по второму определению).*

Доказательство. Пусть $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 121) в смысле первого определения. Переведем ΔBAC в $\Delta B_2A_1C_2$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AA_1}$. Далее выполним осевую симметрию относительно оси s_1 — серединного перпендикуляра к отрезку B_1B_2. Так как $AB = A_1B_1$ и $AB = A_1B_2$, то $A_1B_1 = A_1B_2$. Поэтому $A_1O \in s_1$. Значит, при осевой симметрии $\Delta A_1B_2C_2$ перейдет в $\Delta A_1B_1C_3$. Если $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_1B_1C_3$ оказались в одной полуплоскости от прямой A_1B_1, то они совпадут (в противном случае в этой полуплоскости оказались бы отложенными два различных, но равных между собой угла). Если

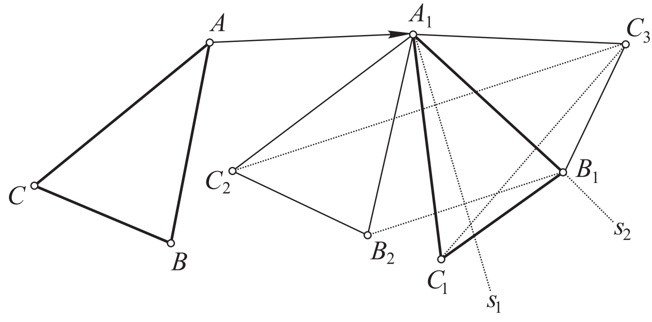

Рис. 121

вершины C_1 и C_3 лежат по разные стороны от прямой A_1B_1, то достаточно выполнить осевую симметрию с осью A_1B_1. В итоге ΔABC совместится с $\Delta A_1B_1C_1$.

12.2. Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что если две смежные стороны одного прямоугольника соответственно равны двум смежным сторонам другого, то такие прямоугольники равны.

Доказательство. Пусть $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ (рис. 122). Докажем равенство прямоугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Для этого проведем диагонали BD и B_1D_1. Так как $\Delta BAD = \Delta B_1A_1D_1$ (по двум катетам), то на основании доказанного выше следствия существует движение, которое совмещает эти треугольники. Докажем, что в этом движении вершина C совместится с вершиной C_1. В самом деле, так как движение параллельные прямые переводит в параллельные и точка C лежит на прямых CB и CD, соответственно параллельных прямым DA и BA, то точка C в указанном движении должна перейти в точку, лежащую на прямой, проходящей через точку B_1 и параллельной D_1A_1, и на прямой, проходящей через точку D_1 и параллельной B_1A_1. Но такой точкой является точка C_1. Значит, точка C переходит в точку C_1. Итак, мы указали движение, которое прямоугольник $ABCD$ переводит в прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$. Следовательно, эти прямоугольники равны.

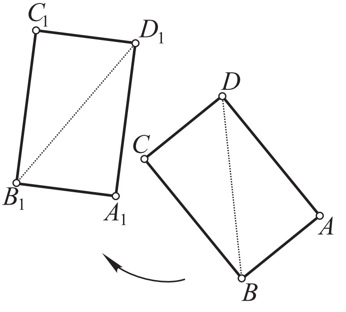

Рис. 122

Задача 2. Докажите равенство двух окружностей одинакового радиуса. (Докажите самостоятельно.)

§ 13. Подобие фигур

13.1. Теория

Две фигуры называются ***подобными***, если существует преобразование подобия, которое одну из них переводит в другую. Обозначение: $\Phi \backsim \Phi_1$ (Φ и Φ_1 — подобные фигуры).

Подобные фигуры имеют одинаковую форму. Такими являются, например, две карты одной и той же местности, выполненные в разных масштабах. Пример подобных фигур был приведен ранее (см. рис. 62, *г*).

Следующая теорема устанавливает связь между новым определением подобных треугольников и тем, которое было известно ранее.

Теорема 8 *(о признаках подобия треугольников)*

Два треугольника подобны (и в смысле нового определения!), **если:**

1) **два угла одного соответственно равны двум углам другого;**

2) **две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы между этими сторонами равны;**

3) **стороны одного пропорциональны сторонам другого.**

Доказательство. Подвергнем ΔABC преобразованию гомотетии с произвольным центром O и коэффициентом $k = \dfrac{A_1B_1}{AB}$. Получим $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 123).

В самом деле:

1) $\angle A_2 = \angle A = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle B = \angle B_1$ — на основании следствия 1 из § 7, утверждающего, что при преобразовании подобия угол переходит в равный угол; условия теоремы;

2) $A_2B_2 = kAB = \dfrac{A_1B_1}{AB} \cdot AB = A_1B_1$ — на основании определения гомотетии и выбора ее коэффициента k;

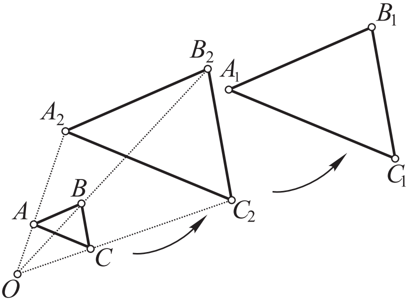

Рис. 123

3) п. 1)—2) $\Rightarrow \Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ — на основании признака равенства треугольников по стороне и двум прилежащим углам.

Аналогично доказываются два других признака.

Следствие. *Если* $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, *то:*

1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;

2) $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$.

Это следствие непосредственно следует из определения подобных фигур и свойств преобразования подобия.

13.2. Примеры решения задач с помощью методов равенства и подобия треугольников

Задача 1. Докажите равенство двух треугольников по двум сторонам и биссектрисе, выходящим из одной вершины (рис. 124).

Дано: $AB = A_1B_1 = c$,
$BC = B_1C_1 = a$,
$BL = B_1L_1 = l_b$ — биссектрисы.
Доказать:
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Замысел доказательства. Докажем, что $\angle B = \angle B_1$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ на основании 1-го признака равенства треугольников.

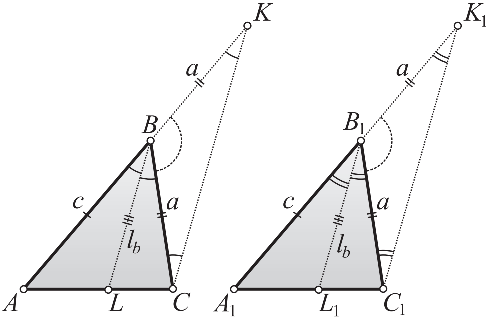

Рис. 124

Доказательство. 1) Гомотетия, задаваемая центром A и парой гомотетичных точек L и C ($L \to C$), отрезок BL переводит в отрезок KC ($KC \parallel BL$);

2) аналогично построим отрезок K_1C_1 для второго треугольника;

3) нетрудно установить, что $BC = BK = a$, $B_1C_1 = B_1K_1 = a$;

4) найдем третьи стороны треугольников BCK и $B_1C_1K_1$:

$$\frac{KC}{BL} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow KC = \frac{BL \cdot AK}{AB} = \frac{l_b(a+c)}{c};$$
$$\frac{K_1C_1}{B_1L_1} = \frac{A_1K_1}{A_1B_1} \Rightarrow K_1C_1 = \frac{B_1L_1 \cdot A_1K_1}{A_1B_1} = \frac{l_b(a+c)}{c};$$

5) значит, $\Delta BCK = \Delta B_1C_1K_1$ по трем сторонам;

6) отсюда $\angle CBK = \angle C_1B_1K_1$. Тогда смежные с ними углы также равны: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$;

7) вывод: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу, заключенному между ними ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$).

Задача 2. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам: $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

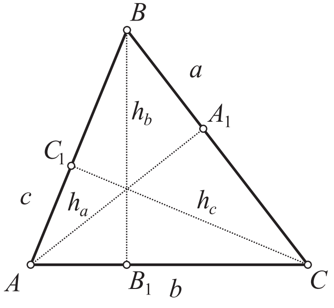

Рис. 125

Доказательство. Применяя первый признак подобия треугольников и предыдущее следствие, получим (рис. 125):

1) $\Delta BCB_1 \sim \Delta ACA_1 \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BB_1}{AA_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b};$$

2) $\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{h_c}{h_b} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c};$$

3) п. 1)—2) $\Rightarrow a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

Примечание. Эту задачу можно решить, также используя метод площадей.

Задача 3. Постройте треугольник по трем его высотам h_a, h_b и h_c.

Решение.

1. *Поиск решения.* 1) Попробуем воспользоваться утверждением предыдущей задачи. Пусть ΔABC — искомый, h_a, h_b и h_c (рис. 126) — его высоты;

2) построим $\Delta A'B'C'$ со сторонами, равными h_a, h_b и h_c;

3) проведем в этом треугольнике высоты h'_a, h'_b и h'_c. Тогда на основании задачи 1 стороны ΔABC обратно пропорциональны сто-

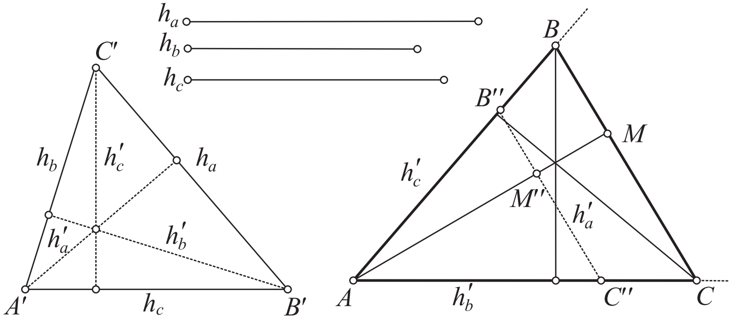

Рис. 126

ронам $\Delta A'B'C'$, которые обратно пропорциональны высотам h'_a, h'_b и h'_c. Это означает, что стороны ΔABC прямо пропорциональны высотам h'_a, h'_b и h'_c;

4) поэтому, если из высот h'_a, h'_b и h'_c построить $\Delta AB''C''$, то он будет (по третьему признаку) подобен ΔABC;

5) поэтому можно построить вначале $\Delta AB''C''$, затем с помощью гомотетии преобразовать его в искомый ΔABC.

2. *Построение.* Строим (см. рис. 126):

1) $\Delta A'B'C'$ по трем сторонам h_a, h_b и h_c;

2) высоты h'_a, h'_b и h'_c $\Delta A'B'C'$;

3) $\Delta AB''C''$ по трем сторонам h'_a, h'_b и h'_c;

4) AM'' — высоту $\Delta AB''C''$;

5) отрезок $AM = h_a$ (на продолжении отрезка AM'');

6) прямую, проходящую через точку M и параллельную $B''C''$; эта прямая при пересечении с лучами AB'' и AC'' даст точки B и C (выполнили гомотетию с центром A и парой гомотетичных точек M'' и M). ΔABC — искомый.

3. *Доказательство* проведите самостоятельно.

4. *Исследование.* Задача имеет решение, причем единственное, если для данных высот h_a, h_b и h_c выполняются неравенства треугольника.

§ 14. Дальнейшее развитие метода подобия: свойства подобных многоугольников, пропорциональные отрезки в окружности

14.1. Теория

Следствия.

1. *Отношение периметров (площадей) подобных многоугольников равно коэффициенту (квадрату коэффициента) подобия.*
2. *Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.*
3. *Если из точки, лежащей вне круга, проведены секущая и касательная, то произведение длин отрезков секущей от данной точки до точек пересечения ее с окружностью равно квадрату отрезка касательной.*

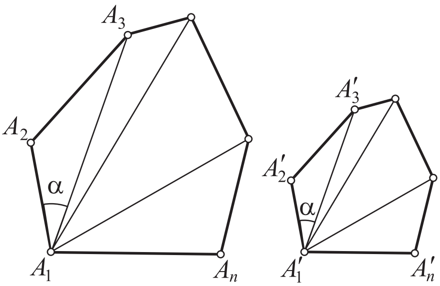

Рис. 127

Доказательства. **1.** Пусть даны два подобных многоугольника: $A_1A_2A_3 \ldots A_n \backsim A'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$ с периметрами P и P'. Докажем, что $\frac{P'}{P} = k$ — коэффициенту подобия (рис. 127). Так как многоугольники подобны, то $A'_1A'_2 = kA_1A_2$, $A'_2A'_3 = kA_2A_3, \ldots, A'_{n-1}A'_n = kA_{n-1}A_n$. Поэтому

$$\frac{P'}{P} = \frac{kA_1A_2 + kA_2A_3 + \ldots + kA_{n-1}A_n}{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n} = k.$$

Пусть S и S' — площади подобных многоугольников (см. рис. 127). Докажем, что $\frac{S'}{S} = k^2$. Проведем диагонали из вершин A_1 и A'_1 и разобьем многоугольники на одинаковое число соответственных треугольников. Установим, что $S_{A'_1A'_2A'_3} = k^2 S_{A_1A_2A_3}$. Имеем:

$$S_{A'_1A'_2A'_3} = \frac{1}{2}A'_1A'_2 \cdot A'_1A'_3 \sin\alpha = \frac{1}{2}kA_1A_2 \cdot kA_1A_3 \sin\alpha =$$

$$= k^2 \cdot \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cdot \sin\alpha = k^2 S_{A_1A_2A_3}.$$

Такие равенства справедливы и для других соответственных треугольников. Поэтому

$$\frac{S'}{S} = \frac{k^2 S_{A_1A_2A_3} + k^2 S_{A_1A_3A_4} + \ldots + k^2 S_{A_1A_{n-1}A_n}}{S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_3A_4} + \ldots + S_{A_1A_{n-1}A_n}} = k^2.$$

2. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке M (рис. 128). Докажем, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Проведем хорды AC и BD. Так как вписанные углы 1 и 2 опираются на $\cup BC$, то $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично $\angle 3 = \angle 4$ (они опираются на $\cup AD$). Тогда $\Delta AMC \backsim \Delta DMB$. В подобных треугольниках стороны, лежащие против равных углов, пропорциональны. Поэтому

$$\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

3. Пусть PM — секущая, PN — внешняя часть секущей, PT — касательная (рис. 129). Докажем, что $PM \cdot PN = PT^2$. Проведем хорды MT и NT. В ΔMTP и ΔTNP $\angle P$ — общий, $\angle 1 = \angle 2$ (так как каждый из них

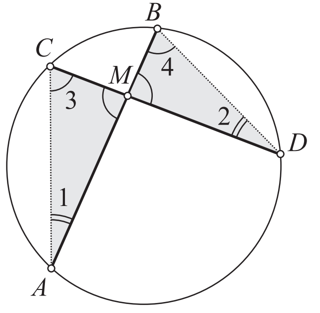

Рис. 128

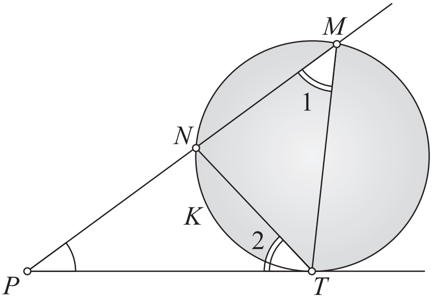

Рис. 129

измеряется $\frac{1}{2} \cup TKN$). Значит, $\Delta MTP \sim \Delta TNP$. В подобных треугольниках стороны, лежащие против равных углов, пропорциональны. Поэтому $\frac{PM}{PT} = \frac{PT}{PN} \Rightarrow PM \cdot PN = PT^2$.

14.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть S — площадь ΔABC, S_x — площадь треугольника, сторонами которого являются медианы данного. Докажите, что $S_x = \frac{3}{4} S$.

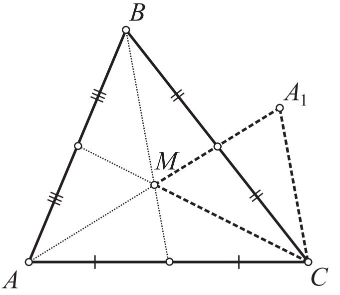

Рис. 130

Доказательство. 1) Рассмотрим «вспомогательный» ΔMCA_1 (рис. 130), где A_1 — точка, симметричная точке M относительно середины стороны BC; заметим, что площадь ΔMCA_1 достаточно просто выражается через S и S_x;

2) в треугольниках MCA_1 и MCA равны основания MA_1 и MA и высоты, проведенные к ним. Поэтому

$S_{MCA_1} = S_{MCA} = \frac{1}{3} S$;

3) далее заметим, что стороны ΔMCA_1 равны $\frac{2}{3}$ соответствующих медиан ΔABC и, значит, $\frac{2}{3}$ соответствующих сторон треугольника, сторонами которого являются медианы данного;

4) поэтому (см. следствие 1) $\dfrac{S_{MCA_1}}{S_x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S_x=\dfrac{9}{4}S_{MCA_1}$;

5) отсюда $S_x=\dfrac{9}{4}S_{MCA_1}=\dfrac{9}{4}\cdot\dfrac{1}{3}S=\dfrac{3}{4}S$.

Задача 2. Спутник находится на расстоянии 400 км над Землей. Найдите наибольшее видимое расстояние от спутника до точек поверхности Земли (радиус Земли равен примерно 6370 км).

Решение.

1) Пусть P (рис. 131, *а*, *б*) — местонахождение спутника, PT (отрезок касательной) — наибольшее видимое расстояние;

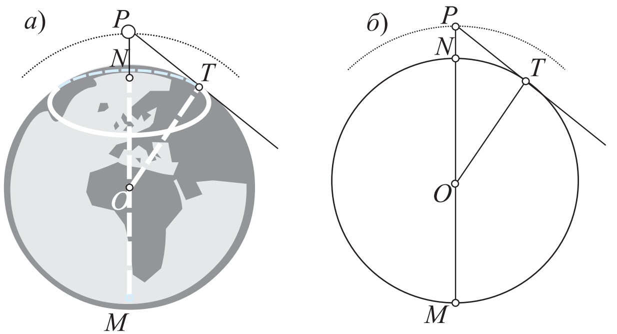

Рис. 131

2) тогда $PT=\sqrt{PM\cdot PN}\approx\sqrt{(6370\cdot 2+400)\cdot 400}\approx 2293$ (км).

Замечание. Разумеется, расстояние в 2293 км является видимым только с помощью приборов.

§ 15. Метод подобия

Задача 1. (*Обобщенная теорема Фалеса.*) Докажите, что если стороны угла ($\angle MON$, рис. 132) пересечь несколькими параллельными прямыми, то отношение любых двух отрезков, получившихся на одной стороне угла, равно отношению соответствующих отрезков на второй стороне.

Доказательство. 1) Пусть на одной стороне $\angle MON$ образовались отрезки OA, AB, BC, CD, ... ; на второй стороне — отрезки OA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, ... Докажем равенства

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1},\ \frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1},\ \frac{BC}{CD}=\frac{B_1C_1}{C_1D_1}\ \text{и т. д.;}$$

2) проведя вспомогательные прямые A_1B_2, B_1C_2, ... , параллельные OM, получим треугольники OA_1A, $A_1B_1B_2$, $B_1C_1C_2$, ... , которые подобны друг другу, так как их соответственные углы равны (в силу параллельности прямых);

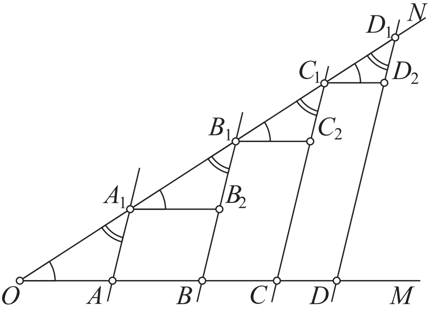

Рис. 132

3) из их подобия следует:

$$\frac{OA}{A_1B_2}=\frac{OA_1}{A_1B_1},\ \frac{A_1B_2}{B_1C_2}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1},\ \frac{B_1C_2}{C_1D_2}=\frac{B_1C_1}{C_1D_1};$$

4) заменив в этих равенствах отрезки A_1B_2, B_1C_2, ... равными отрезками AB, BC, ... (пользуемся равенством противоположных сторон параллелограмма), получим искомые равенства.

Задача 2. Постройте стороны (!) треугольника, если известны два его угла и периметр.

Решение.

1) По двум углам можно построить ΔABC, подобный треугольнику с искомыми сторонами (рис. 133);

2) далее отложим на продолжении стороны AB отрезки BD и DE, равные сторонам BC и AC; получим отрезок AE, равный периметру ΔABC. На луче AC отложим отрезок AK, равный данному периметру;

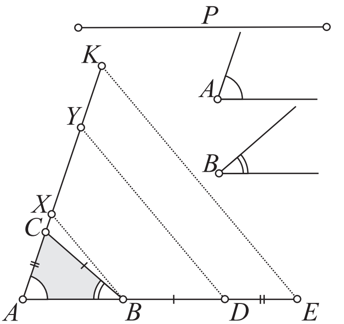

Рис. 133

3) осталось разбить отрезок AK на части, которые находятся в таких же отношениях, как и отрезки AB, BD и DE. Для этого через точки B и D проведем прямые, параллельные EK;

4) отрезки AX, XY и YK являются искомыми сторонами. Треугольник, построенный по этим сторонам, будет подобен вспомогательному ΔABC, а значит, иметь углы, соответственно равные углам A и B; кроме того, этот треугольник имеет заданный периметр.

Задача 3. (*Теорема Птолемея.*) Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ — вписанный, то произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Доказательство. 1) Построим $\angle ABP = \angle CBD$ (рис. 134). Тогда $\Delta ABP \sim \Delta DBC$, так как вписанные углы BAP и BDC опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны;

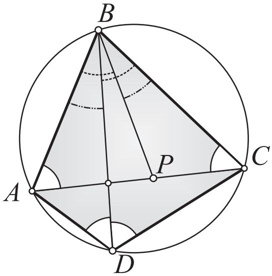

Рис. 134

2) поэтому

$$AB : DB = AP : DC \Rightarrow AB \cdot DC = AP \cdot DB;$$

3) с другой стороны, $\angle ADB = \angle PCB$ как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу, а $\angle ABD = \angle CBP$ как дополняющие один и тот же угол до равных углов;

4) тогда $\Delta ADB \sim \Delta PCB$. Поэтому

$$CB : DB = CP : DA \Rightarrow CB \cdot DA = CP \cdot DB;$$

5) сложив полученные равенства, придем к доказываемой теореме Птолемея:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AP \cdot BD + CP \cdot BD = AC \cdot BD.$$

Задача 4. Биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 135) ΔABC пересекаются в точке O, причем $AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1$. Докажите, что ΔABC — равносторонний.

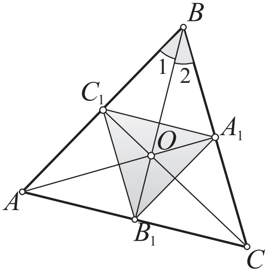

Рис. 135

Доказательство. Рассмотрим треугольники OAB и OA_1B_1:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle AOB = \angle A_1OB_1 \\ \text{(как вертикальные),} \\ AO : OA_1 = BO : OB_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta AOB \sim \Delta A_1OB_1$ (по второму признаку);

2) $\Delta AOB \sim \Delta A_1OB_1 \Rightarrow \angle B_1A_1O = \angle BAO$;

3) $\angle B_1A_1O = \angle BAO \Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$;

4) аналогично получаем, что $A_1C_1 \parallel AC$, $C_1B_1 \parallel CB$;

5) тогда четырехугольники $AC_1A_1B_1$ и $B_1C_1A_1C$ — параллелограммы. Поэтому $AB_1 = C_1A_1 = B_1C$. Отсюда $AB_1 = B_1C$;

6) это означает, что биссектриса BB_1 является медианой. Следовательно, ΔABC — равнобедренный: $AB = BC$;

7) аналогично доказывается, что $AB = AC$. Так как $AB = BC = AC$, то ΔABC — равносторонний.

Тема 3 ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 16. Определение правильного многоугольника. Сумма углов многоугольника

16.1. Теория

Многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону (рис. 136).

Выпуклый многоугольник называется ***правильным***, если у него все стороны и все углы равны.

На рисунке 137, например, изображен правильный пятиугольник.

Из теоремы о сумме углов треугольника можно получить ряд следствий.

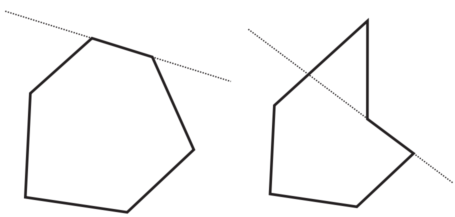

Рис. 136

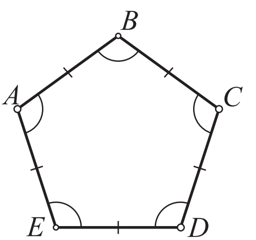

Рис. 137

Следствия.

1. *Сумма углов выпуклого многоугольника равна* $180°(n-2)$.

2. *Каждый угол правильного n-угольника равен* $\frac{180°(n-2)}{n}$.

Доказательства.

1. Разобьем многоугольник на треугольники так, как показано на рисунке 138. Первый и последний треугольники содержат по две стороны многоугольника, а вместе — четыре. Число оставшихся

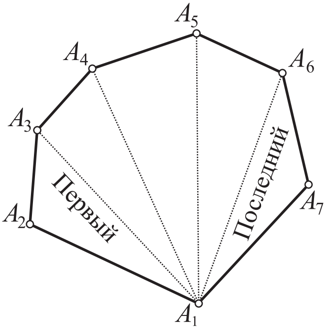

Рис. 138

сторон многоугольника равно $n - 4$. Каждой оставшейся стороне соответствует один треугольник. Значит, многоугольник разбит на $2 + (n - 4)$ треугольников, т. е. на $n - 2$ треугольников. Сумма углов треугольников дает сумму углов многоугольника. Обозначим ее через Q_n. Тогда

$$Q_n = 180°(n - 2).$$

2. Докажите это следствие самостоятельно.

Замечание. Если в формуле

$$Q_n = 180°(n - 2)$$

взять $n = 3$, то получим известный результат для суммы углов треугольника

$$Q_3 = 180°(3 - 2) = 180°.$$

Поэтому формула суммы углов выпуклого многоугольника есть обобщение теоремы о сумме углов треугольника

16.2. Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что число диагоналей в выпуклом n-угольнике равно

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Доказательство. Представим, что из вершины A (рис. 139) в каждую другую вершину проведен отрезок (считаем пока диагонали вместе со сторонами). Таких отрезков из вершины A будет проведено $n - 1$. От этого количества отнимем два отрезка, являющиеся сторонами, получим число диагоналей: $n - 3$. Если из каждой вершины выходят $n - 3$ диагонали, а всего вершин n, то таким способом насчитываем всего $n(n - 3)$ диагоналей. Но это еще не окончательный результат! Заметим, что при указанном подсчете каждая диагональ

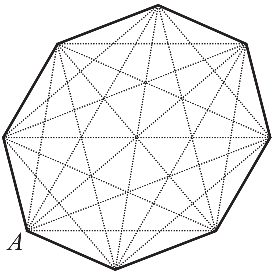

Рис. 139

оказывается сосчитанной дважды. Значит, искомое число диагоналей равно

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Задание. Проверьте справедливость выведенной выше формулы числа диагоналей для треугольника, четырехугольника, пятиугольника и шестиугольника.

Задача 2. В многоугольник с равными сторонами вписана окружность. Будет ли этот многоугольник правильным?

Решение.

Мы уже знаем, что в ромб можно вписать окружность. Получаем пример многоугольника с равными сторонами, в который вписана окружность. Ромб в общем случае правильным многоугольником не является. Поэтому на вопрос задачи надо дать отрицательный ответ: если в многоугольник с равными сторонами вписана окружность, то из этого не следует, что многоугольник является правильным.

Задача 3. В многоугольник с равными углами вписана окружность (рис. 140). Будет ли этот многоугольник правильным?

Решение.

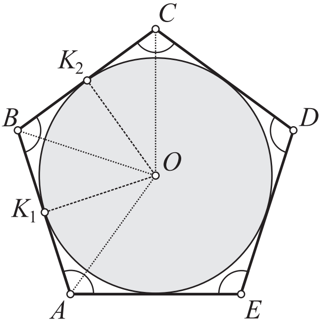

Рис. 140

1) Пусть $\angle A = \angle B = \angle C = ... = \alpha$ — углы многоугольника, O — центр вписанной окружности, $K_1, K_2, ...$ — точки касания вписанной окружности со сторонами многоугольника;

2) так как $OK_1 = OK_2$, то точка O равноудалена от сторон угла ABC. Поэтому точка O принадлежит биссектрисе угла B. Аналогично получаем, что точка O принадлежит биссектрисам остальных углов данного многоугольника;

3) поэтому $\angle OAK_1 = \angle OBK_1 = \angle OBK_2 = \angle OCK_2 = ... = \frac{\alpha}{2}$;

4) тогда прямоугольные треугольники $OAK_1, OBK_1, OBK_2, OCK_2, ...$ равны по катету и противолежащему острому углу;

5) из равенства треугольников следует, что

$$AK_1 = BK_1 = BK_2 = CK_2 = ... ;$$

6) тогда $AB = BC = ... ;$

7) так как в данном многоугольнике все стороны и углы равны, то по определению многоугольник является правильным. Итак, если в многоугольник с равными углами вписана окружность, то многоугольник является правильным.

Задача 4. В окружность вписан многоугольник с равными углами. Будет ли этот многоугольник правильным?

Решение.

Мы знаем, что в окружность можно вписать прямоугольник. Получаем пример многоугольника с равными углами, который вписан в окружность. Прямоугольник в общем случае правильным многоугольником не является. Поэтому на вопрос задачи надо дать отрицательный ответ: если в окружность вписан многоугольник с равными углами, то из этого не следует, что многоугольник является правильным.

Задача 5. В окружность вписан многоугольник с равными сторонами (рис. 141). Будет ли этот многоугольник правильным?

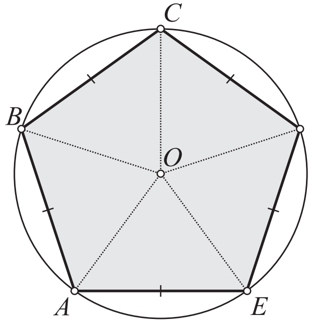

Рис. 141

Решение.

1) Так как треугольники OAB, OBC, OCD, ... — равнобедренные, то углы при их основаниях в каждом треугольнике равны;

2) кроме того, эти треугольники равны по трем сторонам. Поэтому все углы при основаниях треугольников равны между собой;

3) если положить, что $\angle OAB = \alpha$, то получаем:

$$\angle A = \angle B = \angle C = ... = 2\alpha;$$

4) так как в данном многоугольнике все стороны и углы равны, то по определению многоугольник является правильным. Итак, если в окружность вписан многоугольник с равными сторонами, то многоугольник является правильным.

Задача 6. На сторонах правильного шестиугольника $ABCDEF$ вне его построены квадраты, и их вершины соединены отрезками, как показано на рисунке 142. Докажите, что двенадцатиугольник $A_1A_2B_1B_2 ... F_1F_2$ — правильный.

Решение.

1) Так как в данном шестиугольнике все стороны равны, то квадраты, построенные на этих сторонах, имеют равные стороны. Поэтому $AA_1 = AA_2$, и ΔA_1AA_2 — равнобедренный;

2) $\angle A_1AA_2 = 360° - (\angle FAB + \angle FAA_1 + \angle BAA_2) = 360° - (120° + 90° + 90°) = 60°$;

3) поэтому ΔA_1AA_2 — равносторонний, и A_1A_2 оказывается равно стороне данного правильного шестиугольника. Значит, все стороны двенадцатиугольника равны между собой;

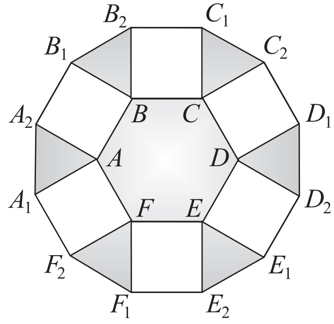

Рис. 142

4) очевидно, что все углы двенадцатиугольника равны между собой, так как каждый из них равен $60° + 90° = 150°$;

5) так как в двенадцатиугольнике все стороны и углы оказались равными, то он является правильным.

§ 17. Центр правильного многоугольника

Теоремы 9

1. **Около правильного многоугольника можно описать окружность.**
2. **В правильный многоугольник можно вписать окружность.**

Доказательства. **1.** Пусть O (рис. 143) — точка пересечения биссектрис углов A и B. Соединим точку O с вершинами многоугольника A, B, C, D ... . Докажем, что $OA = OB = OC = OD = ...$. Рассмотрим ΔAOB и ΔBOC.

Имеем: $\angle 1 = \angle 2$ как половины равных углов A и B, поэтому ΔOAB — равнобедренный и $OA = OB$. Далее. Так как $OA = OB$, $AB = BC$ и $\angle 1 = \angle 3$, то $\Delta OAB =$

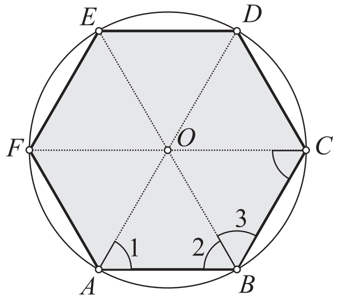

Рис. 143

$= \Delta OBC$. Значит, ΔOBC — тоже равнобедренный и $OB = OC$. Получаем, что $OA = OB = OC$. Аналогично доказываются остальные равенства: $OA = OB = OC = OD = ...$. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA пройдет через все вершины правильного многоугольника. Следовательно, точка O — центр описанной окружности.

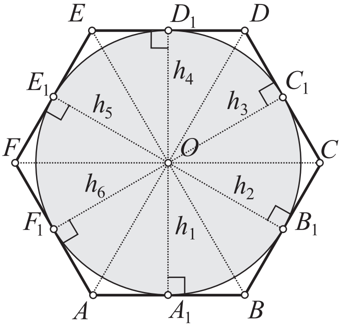

Рис. 144

2. Из точки O (рис. 144), полученной при доказательстве предыдущей теоремы, в треугольниках AOB, BOC, COD, ... проведем высоты h_1, h_2, h_3, ... Эти высоты равны, что следует из равенства прямоугольных треугольников AOA_1, BOB_1, COC_1, ... Проведем окружность с центром O и радиусом h_1. Сторона AB перпендикулярна к радиусу h_1 в конце его, лежащем на окружности. Поэтому сторона AB касается этой окружности. Аналогично получаем, что все стороны данного многоугольника касаются построенной окружности. Следовательно, точка O — центр вписанной окружности.

Следствие.

В правильном многоугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают и являются точкой пересечения биссектрис углов этого многоугольника.

В правильном многоугольнике точка O (см. рис. 144), являющаяся центром описанной и вписанной окружностей, называется *центром правильного многоугольника*.

Угол AOB (см. рис. 144) называется *центральным углом правильного многоугольника*. Перпендикуляры h_1, h_2, h_3, ... , проведенные из центра правильного многоугольника к его сторонам, называются *апофемами* правильного многоугольника.

Следствие.

Центральный угол правильного многоугольника равен $\dfrac{360°}{n}$.

Задача. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам правильного многоугольника пересекаются в его центре.

Доказательство. По установленному в теореме 9.1 $OA = OB = OC = ...$. Если точка O равноудалена от концов стороны AB (рис. 145), то она лежит на серединном перпендикуляре к этой стороне. Аналогично точка O лежит на серединном перпендикуляре к любой другой стороне данного многоугольника. Поэтому все серединные перпендикуляры к сторонам правильного многоугольника пересекаются в одной точке — центре этого многоугольника.

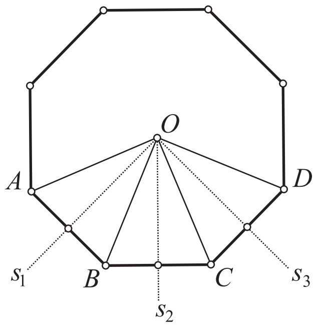

Рис. 145

§ 18. Построение некоторых правильных многоугольников, вписанных в окружность

Задача 1. Постройте правильный шестиугольник, вписанный в окружность.

Решение.

Как и при решении любой задачи на построение, предположим, что правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 146) построен. В ΔAOB все углы по 60° (почему?), значит, этот треугольник, равносторонний и сторона шестиугольника равна радиусу R. Поэтому чтобы построить правильный вписанный шестиугольник, нужно построить хорды $AB = BC = CD = DE = EF$, равные радиусу R; шестиугольник $ABCDEF$ — искомый.

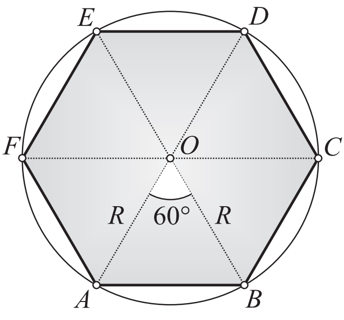

Рис. 146

Следствие.

Сторона правильного вписанного шестиугольника равна радиусу описанной окружности: $a_6 = R$.

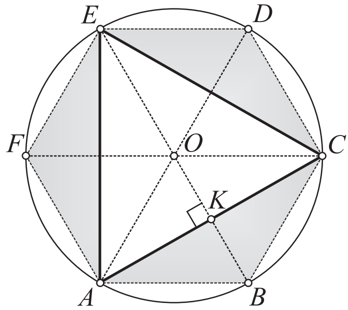

Рис. 147

Задача 2. Постройте правильный треугольник, вписанный в окружность.

Решение.

Впишем в данную окружность (рис. 147) правильный шестиугольник $ABCDEF$ и проведем хорды AC, CE и EA. Эти хорды равны (в силу равенства треугольников ABC, CDE, EFA). Следовательно, ΔAEC — правильный (искомый).

Следствие.

Сторона правильного треугольника выражается через радиус описанной окружности следующим образом: $a_3 = R\sqrt{3}$.

Доказательство. Четырехугольник $ABCO$ (см. рис. 147) — ромб (так как $AB = BC = CO = OA = R$), $AC \perp BO$ как диагонали ромба и $OK = KB$, $AK = KC$.

По теореме Пифагора $OA^2 = AK^2 + OK^2$ и, учитывая что $OK = \dfrac{OA}{2}$ (как катет, лежащий против угла в 30°), получим:

$$R^2 = AK^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow AK = \frac{R}{2}\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 2AK = R\sqrt{3}.$$

Задача 3. Постройте квадрат, вписанный в окружность, и выразите его сторону a_4 через радиус R описанной окружности. (Решите самостоятельно.)

Рассмотрим вопрос о построении правильного пятиугольника и десятиугольника, вписанных в окружность. На примере двух предыдущих задач можно заметить, что иногда проще построить многоугольник с удвоенным числом сторон. Поэтому начнем с правильного десятиугольника.

Задача 4. Постройте правильный вписанный десятиугольник и пятиугольник.

1. *Поиск решения.* Допустим, что хорда AB, равная стороне правильного десятиугольника, построена (рис. 148). Рассмотрим углы ΔAOB:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ, \quad \angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Если $\angle A$ разделить пополам, то получим угол в 36°; тогда ΔAZO оказывается равнобедренным... Эти соображения наводят на мысль о том, что, возможно, полезно построить биссектрису AZ угла A. Итак, построим эту биссектрису. Отметим также, что $AZ = OZ$.

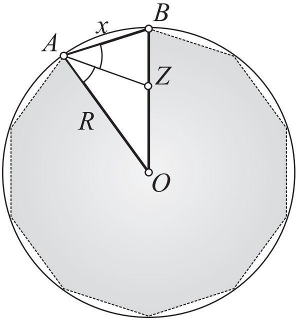

Рис. 148

Обратимся к ΔAZB. Два угла его известны (72° и 36°), находим третий угол: $180° - (72° + 36°) = 72°$. Это значит, что ΔAZB — равнобедренный и $AB = AZ$.

Приходим к выводу, что $AB = AZ = OZ$. Этот вывод представляет интерес, если учесть, что мы стремимся выразить сторону AB через радиус окружности.

«Зацепка» за биссектрису $\angle A$ оказалась полезной. Но все ли ее возможности были использованы? Что еще мы знаем о биссектрисе? Мы знаем, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Для записи пропорции введем обозначения: $OA = OB = R$, $AB = OZ = x$. Тогда $\frac{x}{R-x} = \frac{R}{x} \Rightarrow x^2 + Rx - R^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} - \frac{R}{2}$.

Поиск решения почти завершен. Остается выяснить, каким образом, считая данным отрезок R, построить отрезок x. Но сделать это уже несложно: выражение $\sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2}$ строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными $\frac{R}{2}$ и R; затем из построенной гипотенузы вычтем половину радиуса. Получен отрезок, равный стороне десятиугольника.

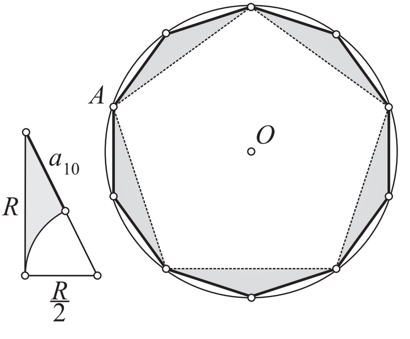

Рис. 149

2. *Построение*. Строим отрезок x указанным выше способом (рис. 149), затем последовательно строим десять хорд окружности, равных отрезку x, и получаем правильный десятиугольник.

Если вершины десятиугольника соединим отрезками через одну, то построим правильный пятиугольник.

3. *Доказательство* следует из предыдущих рассуждений.

4. *Исследование.* Так как уравнение $x^2 + Rx - R^2 = 0$ всегда имеет единственный положительный корень, то задача всегда имеет решение. Первую вершину A на окружности можно выбрать произвольно. Для каждого выбора точки A получится свой многоугольник. Поскольку эти многоугольники отличаются друг от друга только расположением их вершин на окружности (а сами они имеют одинаковые размеры), то все они считаются как одно решение. Итак, данная задача всегда имеет решение, причем единственное.

Следствие.

Стороны a_{10} и a_5 правильного десятиугольника и пятиугольника, вписанных в окружность радиуса R, выражаются следующим образом:

$$a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Первая из этих формул непосредственно следует из полученного выше выражения для отрезка x, вторая формула требует отдельных рассуждений.

§ 19. Выражение элементов правильного многоугольника через радиус описанной или вписанной окружности

1. Выразим сторону a_n правильного n-угольника через радиус R описанной окружности.

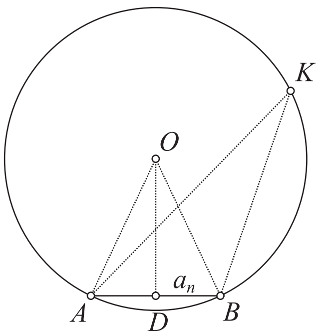

Рис. 150

Пусть $a_n = AB$ (рис. 150) — сторона правильного n-угольника, $\angle AOB$ — центральный угол, $\angle AKB$ — вписанный, $\angle AKB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180°}{n}$. По следствию из теоремы синусов

$$a_n = AB = 2R\sin\frac{180°}{n}. \qquad (1)$$

2. Тогда периметр

$$P_n = 2Rn\sin\frac{180°}{n}. \qquad (2)$$

3. Выразим площадь S_n правильного n-угольника. Имеем (см. рис. 150):

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$S_n = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n}. \qquad (3)$$

Задача. (*Решите самостоятельно.*) Пусть a'_n, P'_n и S'_n — соответственно сторона, периметр и площадь правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r. Докажите, что

$$a'_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \ P'_n = 2rn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \ S'_n = r^2 n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

§ 20. Определение длины окружности и площади круга

Длину окружности и площадь круга определим как числа, к которым стремятся члены определенных последовательностей. Только что упомянутые понятия «последовательность», «члены последовательностей стремятся к определенному числу» относятся к математическому анализу. Метод, основанный на этих понятиях, назовем условно ***методом математического анализа***. В школьной геометрии эти понятия полностью не формализуются по причине серьезных трудностей. Тем не менее интересно отметить присутствие этого метода, хотя и незначительное.

20.1. Какое число называется длиной окружности?

n	P_n	n	P_n
6	6,00000	192	6,28290
12	6,21166	384	6,28312
24	6,26526	768	6,28317
48	6,27870	1536	6,28318
96	6,28206	3072	6,28318
		...	...

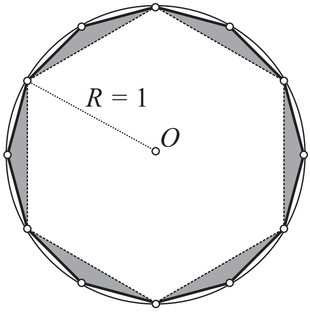

Рис. 151

Измерить длину окружности откладыванием на ней единичного отрезка нельзя (отрезок «не прикладывается» к окружности). Для измерения длины окружности необходим совсем иной способ. В чем же он заключается? На рисунке 151 нетрудно заметить, что при увеличении числа сторон многоугольника его ломаная все ближе «приближается» к окружности. Поэтому еще в древности возникла мысль о том, что охарактеризовать понятие длины окружности можно с помощью периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность. Для простоты рассмотрим окружность единичного радиуса. Итак, пусть $R = 1$. Пользуясь формулой (2) из предыдущего параграфа, найдем периметры некоторых правильных n-угольников, вписанных в окружность (рекомендуем воспользоваться программируемым микрокалькулятором).

Рассмотрим последовательность периметров P_6, P_{12}, P_{24}, ... Укажем некоторые ее свойства. Она является (см. табл. и рис. 151):

1) *бесконечной*;

2) *возрастающей*, т. е. при любом n $P_{2n} > P_n$;

3) *ограниченной*, т. е. при любом n периметр P_n меньше некоторого числа (например, периметра описанного многоугольника).

В таком случае (это устанавливается в вузовском курсе математического анализа) *существует единственное число C* такое, что модуль разности $|P_n - C|$ при неограниченном увеличении n может сделаться сколь угодно малым. Говорят, что *члены данной последовательности стремятся к числу C*.

Число C, к которому стремятся члены последовательности периметров правильных n-угольников, вписанных в окружность, при неограниченном увеличении n, называется ***длиной окружности***.

20.2. Какое число называется площадью круга?

n	S_n		n	S_n
6	2,59808		192	3,14103
12	3,00000		384	3,14145
24	3,10583		768	3,14156

n	S_n		n	S_n
48	3,13263		1536	3,14158
96	3,13935		3072	3,14159
			...	...

Площадь круга определяется с помощью последовательности площадей правильных n-угольников, вписанных в круг (при неограниченном увеличении числа сторон n). Как и выше, для простоты рассмотрим окружность единичного радиуса. Пусть $R = 1$ (рис. 152). Пользуясь формулой $S_n = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360°}{n}$, вычислим площади некоторых правильных n-угольников, вписанных в круг (рекомендуем воспользоваться программируемым микрокалькулятором).

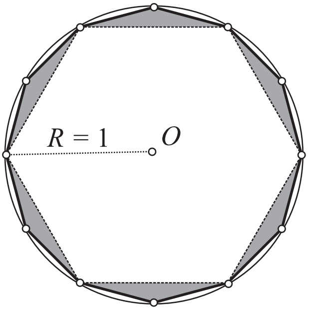

Рис. 152

Рассмотрим последовательность площадей $S_6, S_{12}, S_{24}, ..., S_n, ...$. Наглядно видно, что чем больше номер n, тем все большую часть круга будет покрывать многоугольник (см. рис. 152). Последовательность этих площадей обладает следующими тремя свойствами — она: 1) *бесконечная*; 2) *возрастающая* и 3) *ограниченная* (члены этой последовательности меньше площади многоугольника, описанного около окружности). Для такой последовательности, как отмечалось выше, существует единственное число S такое, что разность $|S_n - S|$ при неограниченном увеличении n может сделаться меньше любого сколь угодно малого положительного числа. Число S — это число, к которому *стремятся члены бесконечной последовательности площадей* правильных n-угольников, вписанных в круг. Это число и называют площадью круга.

Итак, ***площадь круга*** есть число, к которому стремятся члены последовательности площадей правильных n-угольников, вписанных в круг (при неограниченном увеличении числа сторон многоугольников).

Задача. Продолжите составление приведенных выше таблиц для P_n и S_n (для $n = 6144$). (Решите самостоятельно.)

§ 21. Длина окружности и ее дуг

21.1. Теория

Теоремы 10

1. **Отношение длины окружности к диаметру постоянно для всех окружностей.**

2. **Длина окружности** $C = 2\pi R$**.**

3. **Длина дуги окружности в** $n°$ **находится по формуле** $l = \dfrac{\pi R n}{180}$**.**

Доказательства. **1.** Воспользуемся методом подобия. Впишем в каждую окружность (рис. 153) по правильному n-угольнику со сторонами $a_n = AB$ и $a_n' = A'B'$. Отмеченные на рисунке центральные углы равны (каждый из них равен $\dfrac{360°}{n}$). Кроме того, стороны, заключающие эти углы, пропорциональны: $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{R'}{R}$. Следовательно, $\Delta AOB \backsim \Delta A'O'B'$. Из подобия этих треугольников следует, что $\dfrac{a_n'}{R'} = \dfrac{a_n}{R}$. Тогда

$$\frac{a_n'}{R'} = \frac{a_n}{R} \Rightarrow \frac{na_n'}{R'} = \frac{na_n}{R} \Rightarrow \frac{na_n'}{2R'} = \frac{na_n}{2R} \Rightarrow \frac{P_n'}{2R'} = \frac{P_n}{2R}.$$

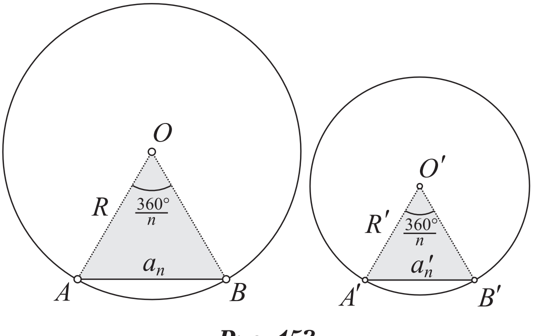

Рис. 153

Если в последнем равенстве вместо P_n' и P_n подставить C' и C — длины окружностей, к которым стремятся эти периметры, то равенство не нарушится. Поэтому $\frac{C'}{2R'} = \frac{C}{2R}$. Это и требовалось доказать.

Определение числа π.

Число π — это число, равное отношению длины окружности к ее диаметру: $\pi = \frac{C}{2R}$.

Это число не является рациональным. Оно представляет собой бесконечную десятичную непериодическую дробь (иррациональное число): π = 3,141 592 653 589 793... . Пять верных десятичных знаков приближенного значения числа π можно найти с помощью таблицы, приведенной в предыдущем параграфе. Для этого возьмем $P_n \approx 6{,}28318$ и разделим его на 2. Получим $\pi \approx 3{,}14159$.

2. Так как по определению $\frac{C}{2R} = \pi$, то отсюда приходим к искомой формуле: $C = 2\pi R$.

3. Длина дуги окружности в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$, а длина искомой дуги в n° равна: $l = \frac{\pi R n}{180}$.

21.2. Примеры решения задач

Задача 1. Диаметр полуокружности разделен на n равных отрезков, и на каждом отрезке как на диаметре построено по полуокружности (рис. 154). Докажите, что сумма длин построенных полуокружностей равна длине данной полуокружности.

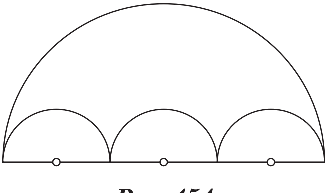

Рис. 154

Доказательство. 1) Радиус одной маленькой полуокружности равен $\frac{R}{n}$. Тогда длина такой полуокружности равна $\pi\frac{R}{n}$;

2) сумма длин n маленьких полуокружностей равна πR;

3) длина данной полуокружности также равна πR;

4) из п. 2)—3) следует искомый вывод.

Задача 2. В сегмент с дугой, равной 120°, вписана окружность (рис. 155). Докажите, что ее длина равна $\frac{3}{4}$ длины дуги сегмента.

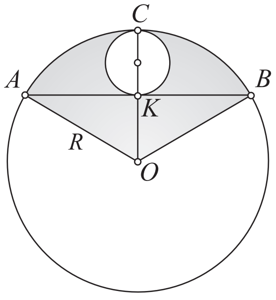

Рис. 155

Доказательство. 1) Пусть R — радиус дуги сегмента. Тогда длина дуги сегмента равна $\frac{2\pi R\cdot 120}{360}=\frac{2}{3}\pi R$;

2) пусть x — радиус вписанной окружности. Тогда

$$2x = OC - OK = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

(учли, что катет OK равен половине гипотенузы OB);

3) длина вписанной окружности равна $2\pi x=\frac{1}{2}\pi R$;

4) приходим к искомому отношению: $\frac{1}{2}\pi R:\frac{2}{3}\pi R=\frac{3}{4}$.

Задача 3. Пусть $\cup AB$ — четверть дуги окружности с центром O и радиусом R (рис. 156), s — серединный перпендикуляр к отрезку OB, $\cup A_1O$ симметрична $\cup AB$ относительно оси s, T — точка пересечения дуг AB и A_1O. Найдите периметр криволинейного «треугольника» AOT.

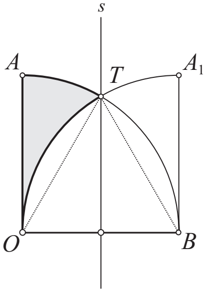

Рис. 156

Решение.

1) Так как $OB=OT=TB=R$, то ΔOTB — равносторонний. Поэтому $\angle TOB=60°$, $\angle AOT=30°$;

2) значит, $\cup TB=\frac{2}{3}\cup AB=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\pi R}{4}=\frac{1}{3}\pi R$, $\cup AT=$ $=\frac{1}{6}\pi R$;

3) на основании симметрии $\cup TO=\cup TB=$ $=\frac{1}{3}\pi R$;

4) находим периметр криволинейного «треугольника» ATO:

$$\cup AT+\cup TO+OA=\frac{1}{6}\pi R+\frac{1}{3}\pi R+R=R\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ: $R\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 4. (*С межпредметным содержанием.*) Окружность радиуса R касается сторон прямого угла, окружность меньшего радиуса также касается сторон этого угла и первой окружности (рис. 157). Аналогично строятся третья, четвертая и т. д. окружности. Представьте, что процесс построения таких окружностей является неограниченным. Найдите сумму длин всех таких окружностей.

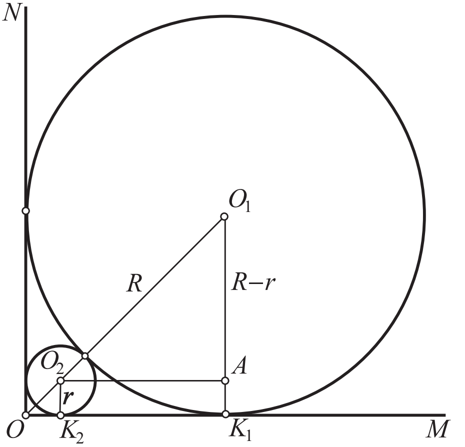

Рис. 157

Решение.

1) Длина первой окружности равна $2\pi R$;

2) пусть r — радиус второй окружности. Из прямоугольного ΔO_1O_2A находим:

$$\frac{R-r}{R+r}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{r}{R}=3-2\sqrt{2};$$

3) поэтому $r=R(3-2\sqrt{2})$;

4) так как радиусы «соседних» окружностей отличаются на один и тот множитель $3-2\sqrt{2}$, то получим бесконечную убывающую последовательность радиусов окружностей с знаменателем, равным $3-2\sqrt{2}$:

$$R,\ R(3-2\sqrt{2}),\ R(3-2\sqrt{2})^2,\ R(3-2\sqrt{2})^3,\ R(3-2\sqrt{2})^4,\ \ldots;$$

5) им соответствует бесконечно убывающая геометрическая последовательность длин окружностей с таким же знаменателем:

$$2\pi R,\ 2\pi R(3-2\sqrt{2}),\ 2\pi R(3-2\sqrt{2})^2,\ 2\pi R(3-2\sqrt{2})^3,\ 2\pi R(3-2\sqrt{2})^4,\ \ldots;$$

6) по формуле суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии находим сумму длин окружностей:

$$\frac{2\pi R}{1-(3-2\sqrt{2})}=(1+\sqrt{2})\pi R.$$

Ответ: $(1+\sqrt{2})\pi R$.

Задача 5. (*С межпредметным содержанием.*) Прямые $y = 2x + 4$ и $y = -\frac{1}{2}x + 4$ при пересечении друг с другом и осью абсцисс образуют треугольник (рис. 158). Найдите длины описанной и вписанной окружностей.

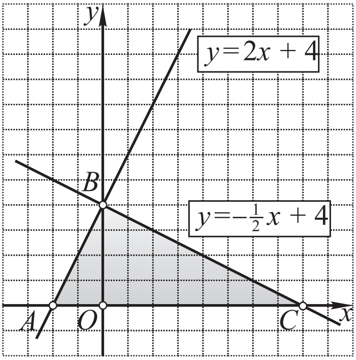

Рис. 158

Решение.

1) Построим ΔABC, данный в условии задачи. Так как произведение угловых коэффициентов прямых $y = 2x + 4$ и $y = -\frac{1}{2}x + 4$ равно -1, то эти прямые перпендикулярны и, значит, $\angle B = 90°$;

2) находим координаты точек пересечения данных прямых с осью абсцисс: $A(-2; 0)$, $C(8; 0)$. Тогда $AC = 10$;

3) по координатной формуле расстояния между двумя точками (или по теореме Пифагора) находим:

$$AB = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5},\ BC = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5};$$

4) зная гипотенузу треугольника, находим радиус описанной окружности и ее длину: $R = \frac{1}{2}AC = 5$, $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$;

5) находим радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и ее длину L:

$$r = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{6\sqrt{5} - 10}{2} = 3\sqrt{5} - 5,\ L = 2\pi(3\sqrt{5} - 5).$$

Ответ: 10π, $2\pi(3\sqrt{5} - 5)$.

Задача 6. (*С практическим содержанием.*) Докажите, что длина кабеля (каната), намотанного на барабан, вычисляется по формуле $L = \pi mn(D + nd)$, где L — длина кабеля, n — число слоев намотки, m — число витков, укладывающихся на длине барабана в один ряд, D — диаметр барабана, d — диаметр сечения кабеля (рис. 159).

Доказательство. 1) Найдем длину одного витка соответственно в 1-м, 2-м, ... , n-м слое (для записи последней воспользуемся формулой общего члена арифметической прогрессии):

$$\pi(D + d), \pi(D + 3d), \pi(D + 5d), \pi(D + 7d), \dots,$$
$$\pi(D + (2n - 1)d);$$

2) умножив на m каждую из этих величин, найдем длину кабеля отдельно в каждом слое:

$$m\pi(D+d),\ m\pi(D+3d),\ m\pi(D+5d),\ m\pi(D+7d),\ \ldots,\ m\pi(D+(2n-1)d);$$

3) сложив полученные величины, найдем L (учтем, что таких слагаемых n и воспользуемся также формулой суммы n членов арифметической прогрессии):

$$L = nm\pi D + m\pi\frac{d+(2n-1)d}{2}\cdot n = nm\pi D + m\pi n^2 d = \pi mn(D+nd).$$

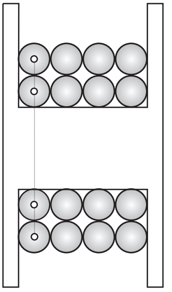

Рис. 159

§ 22. Площадь круга и его частей

22.1. Теория

Введем понятия сектора и сегмента круга (рис. 160).

Сектором называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности.

Сегментом называется часть круга, ограниченная хордой и дугой окружности.

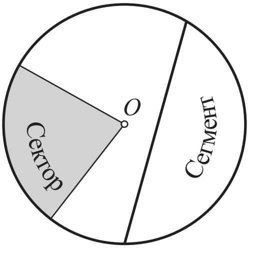

Рис. 160

Теоремы 11

1. **Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности** (рис. 161): $S_n = \frac{1}{2}P_n r_n$.

2. **Площадь круга** (рис. 162) $S = \pi R^2$.

3. **Площадь сектора в $n°$ находится по формулам** (рис. 163): $S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{1}{2}lR$**, где R — радиус, l — длина дуги.**

4. **Площадь сегмента** (рис. 164) $S = \frac{R(l-a)+ah}{2}$**, где l — дуга, a — хорда, h — высота сегмента.**

Доказательства. **1.** Многоугольник состоит из n треугольников, равных ΔAOB. Поэтому $S_{AOB}=\frac{1}{2}a_n r_n \Rightarrow S_n=\frac{1}{2}a_n n r_n=\frac{1}{2}P_n r_n$.

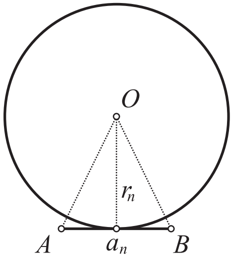

Рис. 161

2. При неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в данный круг, его периметр P_n стремится к длине окружности, равной $2\pi R$, r_n — к радиусу R круга, S_n — к площади круга S (см. рис. 162):

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot P_n\cdot r_n$$

$$S \quad 2\pi R \quad R$$

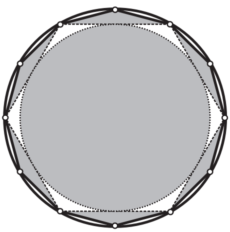

Рис. 162

Поэтому $S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R=\pi R^2$.

3. Площадь сектора, соответствующего $1°$, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь сектора, соответствующего $n°$, $S=\frac{\pi R^2 n}{360}$.

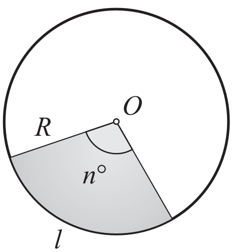

Рис. 163

Если учесть, что $\frac{\pi R n}{180}=l$ — есть длина дуги сектора, то предыдущую формулу можно записать так (см. рис. 163):

$$S=\frac{1}{2}lR.$$

4. Площадь сегмента находится как разность между площадью соответствующего сектора и площадью треугольника, ограниченного хордой и радиусами, проведенными к концам хорды (см. рис. 164):

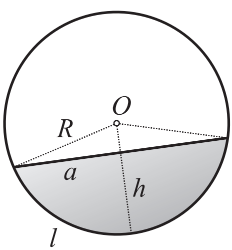

Рис. 164

$$S=\frac{1}{2}lR-\frac{1}{2}a(R-h)=$$

$$=\frac{lR-aR+ah}{2}=\frac{R(l-a)+ah}{2}.$$

22.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть AB – диаметр полукруга с центром O (рис. 165). Точки C и D делят полуокружность на три равные части: $\cup AC = \cup CD = \cup DB$. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной хордами AC и AD и дугой CD, равна $\frac{1}{3}$ площади полукруга.

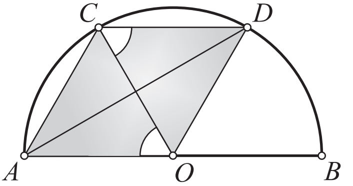

Рис. 165

Доказательство. 1) Треугольники OAC и OCD — равнобедренные (равны стороны, являющиеся радиусами полукруга) и имеют по углу, равному 60°. Поэтому они — равносторонние треугольники;

2) так как накрест лежащие углы AOC и OCD равны (каждый из них равен 60°), то $CD \parallel AO$;

3) тогда треугольники ACD и OCD — равновелики (у них одно и то же основание CD и равны высоты, проведенные к этому основанию);

4) значит, площадь фигуры, ограниченной хордами AC и AD и дугой CD, равна площади сектора COD;

5) площадь сектора COD равна $\frac{1}{3}$ площади полукруга.

Ответ: площадь фигуры, ограниченной хордами AC и AD и дугой CD, равна $\frac{1}{3}$ площади данного полукруга.

Задача 2. Прямоугольный треугольник повернут на 90° около вершины прямого угла. Докажите, что сумма площадей секторов, описанных катетами, равна площади круга, описанного около треугольника (рис. 166).

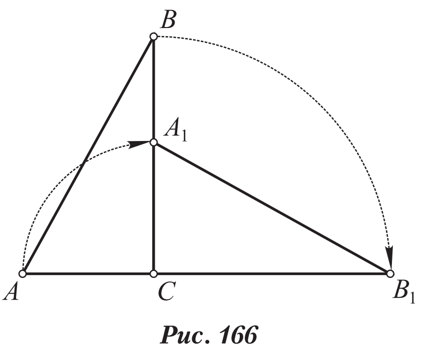

Рис. 166

Доказательство. 1) Пусть в ΔCAB угол C — прямой. Построим ΔCA_1B_1, в который перейдет ΔCAB в повороте около центра C на 90°;

2) катет CA при повороте опишет сектор ACA_1, а катет CB — сектор BCB_1;

3) площадь сектора ACA_1 равна $\frac{\pi \cdot CA^2}{4}$, площадь сектора BCB_1 равна $\frac{\pi \cdot CB^2}{4}$.

Сумма площадей секторов равна $\frac{\pi}{4}(CA^2 + CB^2) = \frac{\pi}{4} \cdot AB^2$;

4) правая часть полученного равенства есть площадь описанного круга. Поэтому утверждение задачи справедливо.

Задача 3. На диаметре полукруга радиуса R построен правильный треугольник, имеющий с полукругом общую часть. Найдите площадь части треугольника, расположенной вне полукруга.

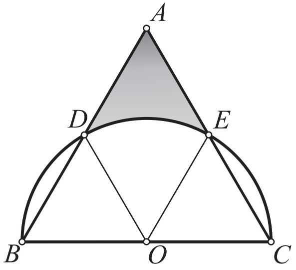

Рис. 167

Решение.

1) Так как вписанный угол ABC равен 60° (рис. 167), то дуга DEC, на которую он опирается, равна 120°. Поэтому дуга BD равна 60°;

2) так же находим, что и дуга CE равна 60°;

3) поэтому треугольники OBD и OCE — также правильные;

4) площадь каждого из них равна $\frac{1}{4}$ площади ΔABC;

5) значит, площадь четырехугольника $ADOE$ равна половине площади ΔABC;

6) если теперь из площади четырехугольника $ADOE$ вычесть площадь сектора DOE, то получим искомую площадь:

$$S_{ADE} = S_{ADOE} - S_{\text{сект. } DOE} = \frac{1}{2}R^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi R^2 = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Задача 4. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касающиеся друг друга и большего круга. Найдите их площадь.

Решение.

1) Пусть O — центр данного круга (рис. 168) A, B, C — центры вписанных кругов, P — точка касания кругов с центрами A и B, Q — точка касания кругов с центрами O и A;

2) в правильном ΔABC:

$$AB = AP + BP = x + x = 2x,$$

$$r = OA = OQ - AQ = R - x;$$

3) так как в правильном ΔABC сторона $AB = r\sqrt{3}$, то приходим к уравнению

$$2x = (R - x)\sqrt{3};$$

4) отсюда $x = R(2\sqrt{3} - 3)$.

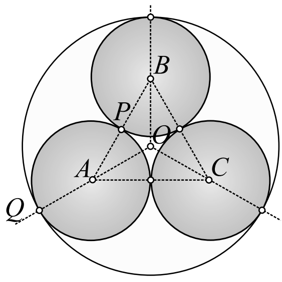

Рис. 168

Ответ: искомая площадь равна: $\pi x^2 = \pi R^2(2\sqrt{3} - 3)^2$.

Задача 5. Отрезок AB при повороте около центра O на угол α (рис. 169) описывает некоторую криволинейную фигуру. Найдите ее площадь, если $OA = R$, $OB = r$.

Решение.

1) Пусть данный поворот переводит отрезок AB в отрезок A_1B_1. Криволинейная фигура с искомой площадью ограничена отрезками AB и A_1B_1 и дугами AA_1 и BB_1;

2) пусть лучи OB и OB_1 пересекают большую окружность соответственно в точках P и P_1;

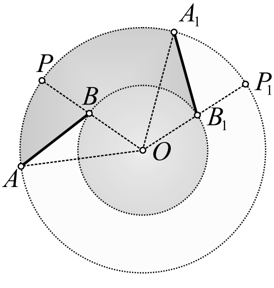

Рис. 169

3) при повороте фигура, ограниченная отрезками AB и BP и дугой AP, переходит в фигуру, ограниченную отрезками AA_1, B_1P_1 и дугой A_1P_1. Поэтому эти фигуры равны и, значит, они имеют равные площади (равновелики);

4) поэтому фигура с искомой площадью равновелика фигуре, ограниченной отрезками BP и B_1P_1 и дугами PP_1 и BB_1;

5) площадь последней найдем как разность площадей секторов POP_1 и BOB_1:

$$\frac{\pi R^2\alpha}{360} - \frac{\pi r^2\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha(R^2 - r^2)}{360}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\alpha(R^2 - r^2)}{360}$.

Задание. Установите, зависит ли ответ в предыдущей задаче от длины отрезка AB.

§ 23. Задачи на комбинацию круга и многоугольников

Задача 1. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найдите отношение площадей этих кругов.

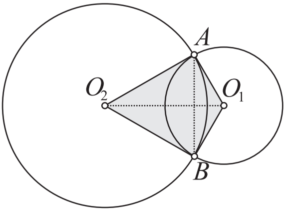

Рис. 170

Решение.

1) Так как центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается, то $\angle AO_1B = 120°$, $\angle AO_2B = 60°$ (рис. 170);

2) в четырехугольнике O_1AO_2B сумма двух противоположных углов O_1 и O_2 равна 180°, поэтому сумма его углов A и B также равна 180° (воспользовались тем, что сумма углов четырехугольника равна 360°);

3) кроме того, $\Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2$ (они симметричны относительно линии центров O_1O_2);

4) значит, $\angle A = \angle B = \dfrac{180°}{2} = 90°, \angle AO_2O_1 = 30°$;

5) воспользуемся свойством катета, лежащего против угла в 30°: если положить $O_1O_2 = 2a$, то $O_1A = a$, $O_2A^2 = 3a^2$;

6) получаем: $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{\pi \cdot 3a^2}{\pi \cdot a^2} = 3$.

Ответ: $\dfrac{S_2}{S_1} = 3$.

Задача 2. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу как 3 : 5. Найдите отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

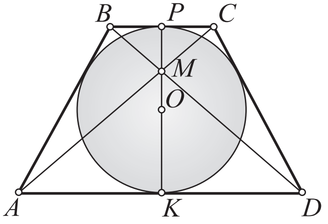

Рис. 171

Решение.

1) Проведем высоту трапеции, проходящую через точку пересечения диагоналей (рис. 171). Из соображений симметрии следует, что центр вписанной окружности находится на этой высоте;

2) обозначения: PK — высота трапеции, O — центр вписанной окружности, M — точка пересечения диагоналей, $OP = OK = 5x$, $OM = 3x$, $MP = 2x$;

3) ранее установлено, что диаметр вписанной в трапецию окружности есть средняя пропорциональная между ее основаниями a и b. Поэтому $(10x)^2 = ab$;

4) так как $\Delta BMC \sim \Delta AMD$ и высота $MP = 2x$ в четыре раза меньше высоты $MK = 8x$, то $a = 4b$;

5) тогда записанное выше равенство можно представить в таком виде:

$100x^2 = 4b \cdot b = 4b^2$, $b = 5x$;

6) поэтому $a = 4b = 20x$, $a + b = 25x$;

7) так как суммы противоположных сторон в описанном четырехугольнике равны, то периметр трапеции равен $50x$;

8) теперь можно вычислить искомое отношение периметра трапеции к длине окружности: $\frac{50x}{2\pi \cdot 5x} = \frac{5}{\pi}$.

Ответ: периметр трапеции относится к длине вписанной окружности как $5 : \pi$.

Задача 3. В трапеции $ABCD$ известны: основания $AD = 40$ см, $BC = 15$ см и боковые стороны $AB = 15$ см, $CD = 20$ см. Найдите длину окружности, которая проходит через вершины A и B и касается прямой CD.

Решение.

1) Достроим трапецию до ΔAPD (рис. 172).

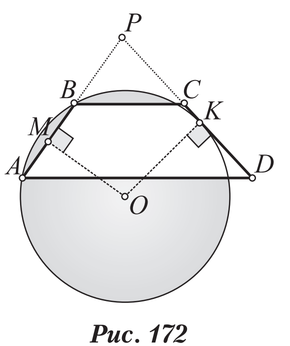

Рис. 172

Так как $\Delta BPC \sim \Delta APD$, то находим, что $BP = 9$ см, $CP = 12$ см;

2) замечаем, что $AP^2 + PD^2 = AD^2$. Поэтому на основании теоремы, обратной теореме Пифагора, $\angle P = 90°$;

3) пусть O — центр данной окружности и K — точка касания ее с прямой CD. Проведем перпендикуляр OM на PA. Тогда четырехугольник $OMPK$ — прямоугольник и $OK = PM$;

4) учитывая, что M — середина стороны AB, получим:

$$BM = 7{,}5 \text{ см}, PM = 9 + 7{,}5 = 16{,}5 \text{ см};$$

5) значит, радиус окружности $OK = 16{,}5$ см и длина окружности равна $2\pi \cdot OK = 2\pi \cdot 16{,}5 = 33\pi$.

Ответ: 33π.

Задача 4. (*С практическим содержанием.*) В подшипнике находится 20 стальных шариков (рис. 173), $OA = R_1$ и $OB = R_2$ — радиусы внешнего и внутреннего круга катания, r – радиус стального шарика. Найдите r и R_2, если $R_1 = 150$ мм (считать, что шарики лежат вплотную друг к другу).

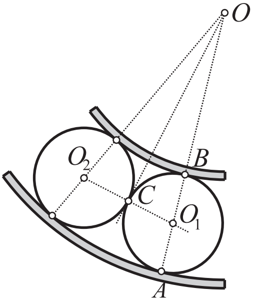

Рис. 173

Решение.

1) Так как точка касания окружностей лежит на линии их центров, то точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой и $O_1C = CO_2 = r$;

2) так как ΔO_1OO_2 — равнобедренный и OC — медиана, проведенная к основанию, то OC — высота этого треугольника и ΔOO_1C — прямоугольный;

3) имеем: $OO_1 = R_1 - r$, $\angle O_1OO_2 = \dfrac{360°}{20} = 18°$, $\angle O_1OC = 9°$;

4) тогда $\dfrac{O_1C}{OO_1} = \sin 9° \Rightarrow \dfrac{r}{150 - r} = \sin 9° \Rightarrow r = \dfrac{150\ \sin 9°}{1 + \sin 9°} \approx 20{,}3$ мм;

5) $R_2 = OB = OA - AB \approx 150 - 40{,}58 \approx 109{,}4$ мм.

Ответ: $r \approx 20{,}3$ мм, $R_2 \approx 109{,}4$ мм.

Задача 5. (*С межпредметным содержанием.*) Пусть равенство

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{ux+v}{x^2+1} + \frac{w}{x+1} \qquad (1)$$

выполняется при любых значениях $x \neq -1$. Докажите, что треугольник со сторонами u^2, v^2, w^2 — равносторонний. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей, а также площадь этого треугольника. Образуют ли значения радиуса описанной окружности, площади и радиуса вписанной окружности арифметическую прогрессию? Чему равна разность этой прогрессии?

Решение.

1) Сложив дроби, стоящие в правой части равенства (1), получим $\dfrac{ux+v}{x^2+1} + \dfrac{w}{x+1} = \dfrac{(ux+v)(x+1) + w(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}$, т. е.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}=\frac{(ux+v)(x+1)+w(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}=$$
$$=\frac{(u+w)x^2+(u+v)x+(v+w)}{(x^2+1)(x+1)}; \qquad (2)$$

2) равенство (2) справедливо при любых $x\neq-1$. В частности, оно справедливо при $x=0$, $x=1$ и $x=2$. Подставляя эти значения в равенство (2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} v+w=1, \\ 2u+2v+2w=1, \\ 6u+3v+5w=1. \end{cases}$$

Откуда $u=-\frac{1}{2}, v=\frac{1}{2}, w=\frac{1}{2}$;

3) итак, равенству (1) может удовлетворять только полученная тройка чисел $u=-\frac{1}{2}, v=\frac{1}{2}, w=\frac{1}{2}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта тройка чисел действительно удовлетворяет равенству (1);

4) так как $u^2=v^2=w^2=\frac{1}{4}$, то треугольник с указанными сторонами является равносторонним. Найдем радиусы его описанной и вписанной окружностей, а также площадь треугольника:

$$R=\frac{a_3\sqrt{3}}{3}=\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12},$$
$$r=\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{3}}{24},$$
$$S=\frac{a_3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16};$$

5) нетрудно видеть, что числа $\frac{\sqrt{3}}{12}$, $\frac{\sqrt{3}}{16}$, $\frac{\sqrt{3}}{24}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=-\frac{\sqrt{3}}{48}$.

Ответ: $R=\frac{\sqrt{3}}{12}, r=\frac{\sqrt{3}}{24}, S=\frac{\sqrt{3}}{16}, d=-\frac{\sqrt{3}}{48}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА. НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА: РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 1. Замечательные точки треугольника: разнообразие геометрических методов

1. В равнобедренном ΔABC ($AB = BC$) проведена медиана AA_1, M — центроид ΔABC. Докажите, что ΔAMC — равнобедренный. Найдите боковые стороны ΔAMC, если: 1) $AA_1 = 7$; 2) $AA_1 = m_a$.

2. В прямоугольном треугольнике катет, равный a, лежит на оси y, катет, равный b, — на оси x. Найдите координаты центроида треугольника. Сколько решений имеет задача?

3. Найдите стороны прямоугольного треугольника, если известны его медианы m_a и m_c, проведенные соответственно к катету и гипотенузе.

4. Пусть M — центроид ΔABC, m_a, m_b и m_c — медианы этого треугольника. Медиану AA_1 продолжили за точку A_1 и на продолжении отложили отрезок $A_1D = A_1M$. Найдите стороны ΔMBD.

5. Докажите, что для медиан m_a, m_b и m_c выполняются неравенства:

$$m_a + m_b > m_c,$$
$$m_a + m_c > m_b,$$
$$m_b + m_c > m_a.$$

6. В прямоугольном ΔABC гипотенуза и острый угол равны c и α. Найдите медианы треугольника.

7. Известны h_c и m_c — соответственно высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла треугольника. Найдите стороны треугольника.

8. В прямоугольном ΔABC известны медиана m_c, проведенная к гипотенузе, и медиана m_a, проведенная к катету. Найдите $\sin A$.

9. Через центроид треугольника проведены прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что каждая сторона треугольника делится этими прямыми на три равные части.

10. Дан равносторонний треугольник. Постройте описанную окружность. Можно ли (без задания длины стороны) найти угол между стороной и радиусом окружности, проведенным к вершине треугольника?

11. Можно ли найти длину перпендикуляра, проведенного из центра описанной окружности на сторону равностороннего треугольника, если радиус окружности равен: 1) 5 см; 2) R.

12. Можно ли найти сторону равностороннего треугольника, зная радиус R описанной окружности? (Полученную формулу полезно запомнить.)

13. Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, зная его: 1) высоту h; 2) сторону a.

14. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если известны оба катета: 1) 12 см и 16 см; 2) a и b.

15. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 25°. Найдите углы, под которыми видны катеты из центра описанной окружности. Нельзя ли воспользоваться свойством внешнего угла треугольника?

16. В равнобедренном ΔABC $(AB = BC)$ $\angle B = 100°$. Найдите углы, образуемые боковой стороной AB с радиусами OA и OB описанной окружности.

17. В ΔABC $AB = BC = 2$ см, $\angle B = 120°$. Найдите диаметр описанной окружности.

18. Постройте треугольник, зная радиус R описанной окружности и две его стороны, равные a и c.

19. Какую фигуру образуют центры окружностей, если эти окружности касаются данной прямой в данной на ней точке?

20. Постройте окружность с центром в данной точке и касающейся данной прямой.

21. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, равна 20 см, основание равно 30 см. Найдите радиус вписанной окружности.

22. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, равна 10 см, основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Можно ли по этим данным найти радиус вписанной окружности?

23. а) Докажите, что радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, находится по формуле $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

б) Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см, а радиус вписанной окружности равен 4 см.

в) Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

24. а) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Найдите радиус вписанной окружности. (Воспользуйтесь тригонометрией.)

б) Основание равнобедренного треугольника равно b, угол при основании равен α. Найдите радиус вписанной окружности.

25. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанной окружности в отношении 7 : 5 считая от вершины основания. Найдите отношение:

1) боковой стороны к основанию;

2) радиуса вписанной окружности к основанию;

3) радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности.

26. а) Углы треугольника относятся как 3 : 5 : 7. Под какими углами видны его стороны из центра вписанной окружности?

б) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, равна 16 см; боковая сторона относится к основанию как 4 : 3. Найдите расстояния от центра вписанной окружности до вершин треугольника.

27. а) В каком треугольнике пересекаются не сами высоты, а их продолжения?

б) Какова особенность расположения ортоцентра (относительно треугольника) в случае остроугольного и прямоугольного треугольника?

в) Докажите, что если ортоцентр лежит вне треугольника, то треугольник тупоугольный.

28. а) На рисунке сохранилась только сторона AB и ортоцентр H ΔABC. Восстановите стороны этого треугольника.

б) У пластинки, имеющей форму остроугольного треугольника, отломали кусок вместе с одной вершиной. Можно ли на пластинке начертить часть высоты, проведенной к стороне, противолежащей «отломанной» вершине?

§ 2. Вписанные и описанные четырехугольники

29. Докажите, что во вписанном четырехугольнике внешний угол равен противолежащему внутреннему. (Внешний угол многоугольника определяется так же, как и для треугольника.)

30. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность, на образовавшихся дугах взяты точки $M \in \cup AB$, $N \in \cup BC$, $P \in \cup CD$, $Q \in \cup AD$. Докажите, что сумма $\angle AMB + \angle BNC + \angle CPD + \angle DQA$ остается постоянной и равной $540°$.

31. Точка A делит $\cup BC$ окружности пополам. Из точки A проведены две хорды AD и AE, пересекающие BC соответственно в точках M и K. Докажите, что около четырехугольника $DEKM$ можно описать окружность.

32. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Докажите, что биссектриса угла A и биссектриса внешнего угла при вершине C пересекаются в точке X, лежащей на окружности.

33. К двум внешне касающимся окружностям проведены касательные AB и CD. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

34. Две окружности касаются внешне в точке A. Через точку A проведена их общая касательная, на которой взяты две точки, расположенные по разные стороны от точки A. Через полученные точки и проведены касательные к обеим окружностям. Докажите, что эти касательные, пересекаясь, образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность.

§ 3. Дальнейшее развитие тригонометрического метода: теоремы косинусов и синусов, формулы площади треугольника

35. Найдите неизвестную сторону ΔABC по следующим данным:

1) $a = 2$, $b = 3$, $\angle C = 45°$;

2) $a = 4{,}1$, $c = 5{,}2$, $\angle B = 120°$;

3) $b = 2\sqrt{2}$, $c = 3$, $\angle A = 135°$.

36. Стороны треугольника равны:

1) 10, 11 и 12;

2) 11, 12 и 13;

3) 12, 13 и 14.

Найдите косинусы углов треугольника и приближенные значения углов.

37. Стороны параллелограмма равны $\sqrt{2}$ см и 5 см, угол между ними равен $45°$. Найдите диагонали параллелограмма.

38. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на части, обратно пропорциональные синусам прилежащих углов.

39. Найдите неизвестные стороны и углы треугольника, если: $a \approx 370{,}0$, $\angle B \approx 86°30'$, $\angle C \approx 50°50'$.

40. (*Формула синуса двойного угла.*) Докажите, что

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \text{ где } 2\alpha \le 180°.$$

41. а) В треугольнике известны сторона a и два угла α и β. Найдите произведение его сторон.

б) В условиях предыдущей задачи найдите площадь треугольника.

42. а) Найдите площадь треугольника со сторонами: 1) 10, 12, 13; 2) 10, 17, 21.

б) Найдите меньшую (большую) высоту треугольника со сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 37, 13, 40.

в) Стороны треугольника равны a, b, c. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

43. а) В треугольнике известны сторона c и два угла α и β. Найдите радиус описанной окружности.

б) В условиях предыдущей задачи найдите неизвестные стороны треугольника.

в) Найдите площадь треугольника, данного в задаче а).

г) Найдите радиус вписанной окружности для треугольника из задачи а).

д) В треугольнике известны два угла α и β и сумма двух сторон: $a + b = n$. Найдите радиус описанной окружности.

е) В треугольнике известны две стороны a и b и угол γ. Найдите высоту, проведенную к третьей стороне.

44. а) Зная медианы m_a, m_b и m_c, найдите площадь треугольника.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6, высота, проведенная к основанию, равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

в) Известны две стороны a и b треугольника и площадь S. Найдите третью сторону.

§ 4. Тригонометрический метод решения произвольных треугольников

45. а) Найдите неизвестные стороны и углы треугольника, если: $a = 2$, $b = 1$, $\angle C = 60°$.

б) Стороны треугольника равны 5, 7 и 8. Найдите угол, лежащий против средней по величине стороны.

в) Найдите медиану m_a треугольника ABC, если $c = 2$, $b = 3\sqrt{2}$, $\angle A = 45°$.

г) Найдите сторону и синусы неизвестных углов треугольника ABC, если $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$, $\angle B = 135°$.

д) В условиях задачи а) найдите радиус описанной окружности.

46. Найдите медиану m_a, биссектрису l_a и высоту h_a треугольника, данного в задаче 45 б).

47. а) Диагональ параллелограмма равна d и образует с его сторонами углы α и β. Найдите стороны, углы и площадь параллелограмма ($d = 1$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$).

б) Диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2, φ — угол между ними. Найдите стороны, углы и площадь параллелограмма ($d_1 = 12$, $d_2 = 8$, $\varphi = 120°$).

в) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна a, d — диагональ трапеции, α — угол при нижнем основании. Найдите площадь трапеции ($a = 5$, $d = 8$, $\alpha = 60°$).

г) Найдите площадь параллелограмма по двум его диагоналям d_1 и d_2 и одной из сторон, равной a ($d_1 = 6$, $d_2 = 4$, $a = 4$).

д) В трапеции меньшее основание и боковые стороны равны a, α — острый угол трапеции. Найдите ее площадь и радиус описанной окружности ($a = 2$, $\alpha = 60°$).

48. а) Один из острых углов прямоугольного треугольника равен α, а высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна h_c. Найдите площадь треугольника ($\alpha = 30°$, $h_c = 5$).

б) Два угла треугольника равны соответственно α и β, R — радиус описанной окружности. Найдите площадь треугольника.

в) Приведите различные способы доказательства известного вам утверждения: биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

г) Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна d и наклонена к основанию под углом α.

д) Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, если его площадь равна квадрату основания.

49. а) Даны две параллельные прямые и точка A между ними, отстоящая от этих прямых на расстояния m и n. Рассмотрите прямоугольные треугольники с вершиной прямого угла в точке A, две другие вершины которых перемещаются произвольно по каждой из данных прямых. Как изменяется площадь этих треугольников? Найдите треугольник, имеющий наименьшую площадь.

б) На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами нового квадрата. Найдите его площадь, если стороны параллелограмма равны a и b и образуют угол, равный α. При каком условии эта площадь окажется наибольшей?

в) На сторонах равностороннего треугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов являются вершинами нового равностороннего треугольника. Найдите его площадь, если сторона данного треугольника равна a.

50. а) (*Задачи с астрономическим содержанием.*) Найдите:

1) радиус r небесного светила (рис. 174), зная радиус Земли R и углы p и ρ, полученные в результате измерений;

2) радиус Луны, если $\rho \approx 15'$, $p \approx 57'$, $R \approx 6370$ км;

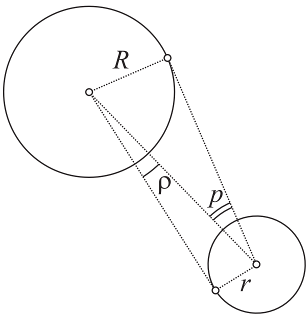

Рис. 174

3) расстояние от Земли до Луны;

4) расстояние от Земли до Солнца, если угол $p \approx 8{,}8''$;

б) (*Задачи с физическим содержанием.*) 1) Найдите длину равнодействующей двух данных сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$, образующих между собой угол α (величину сил считать известной). 2) Тяжелое тело весом $\vec{P}$ находится на плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен k. При каком значении угла α данное тело будет: двигаться вниз; находиться в равновесии?

51. Мы знаем, что около треугольника всегда можно описать окружность. Эта закономерность не распространяется уже на четырехугольники: существуют четырехугольники, около которых нельзя описать окружность. В этой связи полезно рассмотреть две задачи: а) около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°; б) в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.

Замечание. Задачи к § 5 см. в теоретическом материале.

Тема 2. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 6—7. Движение. Преобразование подобия. Свойства движений и преобразований подобия

52. а) Все точки плоскости сначала передвинули на 3 см вправо, затем на 2 см вниз. Является ли соответствие между данными и «преобразованными» точками геометрическим преобразованием плоскости?

б) Геометрическое преобразование плоскости квадрат со стороной a переводит в прямоугольник со сторонами a и $2a$. Является ли это преобразование движением?

в) Движение окружность переводит в окружность. Почему?

г) Геометрическое преобразование окружность радиуса R переводит в окружность радиуса $3R$. Является ли это преобразование движением?

д) Движение отрезок AB (рис. 175, *а*) переводит в отрезок A_1B_1. Дана некоторая точка C, принадлежащая отрезку AB. Постройте точку C_1, в которую переходит точка C.

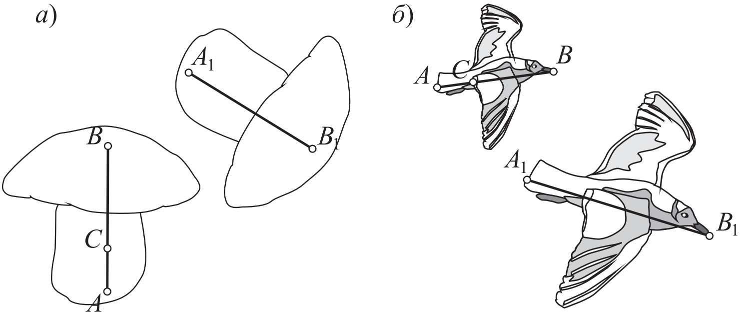

Рис. 175

е) Преобразование подобия отрезок $AB = a$ (рис. 175, *б*) переводит в отрезок $A_1B_1 = 2a$. Дана некоторая точка C, принадлежащая отрезку AB. Постройте точку C_1, в которую переходит точка C.

ж) Является ли геометрическое преобразование, указанное в задаче а), движением; преобразованием подобия?

53. а) Движение и преобразование подобия перпендикулярные прямые переводят в перпендикулярные прямые. Почему?

б) Верно ли, что движение и преобразование подобия квадрат (прямоугольник) переводят в квадрат (прямоугольник)?

в) Может ли движение или преобразование подобия перевести правильный треугольник в прямоугольный треугольник?

г) Преобразование подобия окружность переводит в окружность. Почему?

д) Движение ΔABC переводит в $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 176). Внутри ΔABC дана некоторая точ-

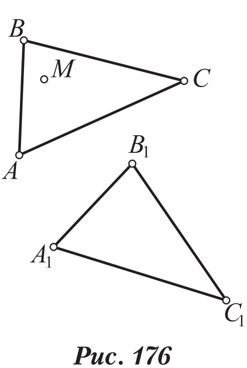

Рис. 176

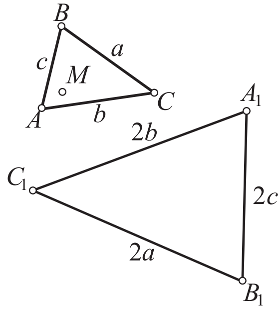

Рис. 177

ка M. Постройте точку M_1, в которую перейдет точка M в данном движении.

е) Преобразование подобия ΔABC (рис. 177) со сторонами, равными a, b и c, переводит в $\Delta A_1B_1C_1$ со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$. Внутри ΔABC дана некоторая точка M. Постройте точку M_1, в которую переходит точка M в этом преобразовании подобия.

ж) Выполните задания д)—е) при условии, что точка M является:

1) центроидом ΔABC;
2) ортоцентром ΔABC;
3) точкой переечения биссектрис ΔABC;
4) центром описанной окружности.

з) Все точки плоскости сдвинуты на 5 единиц вверх. В какие фигуры перейдут при этом:

1) точка; 2) прямая; 3) луч;
4) отрезок; 5) угол; 6) треугольник;
7) квадрат? (Выполните построения.)

и) К данному прямоугольному треугольнику последовательно применили два преобразования движения. Какая фигура получилась в результате?

54. а) Преобразование плоскости каждую точку M переводит в точку M_1 по следующему закону:

1) $M(x; y) \to M_1(2x; y)$;
2) $M(x; y) \to M_1(x + 5; y + 5)$;
3) $M(x; y) \to M_1(3x; 3y)$;
4) $M(x; y) \to M_1(x; -y)$;
5) $M(x; y) \to M_1(kx; ky)$.

Какие из этих преобразований являются движением (преобразованием подобия)?

б) В какую линию переведут прямую $y = x$ преобразования, указанные в предыдущем задании? Запишите уравнение этой линии.

55. а) Сколько осей симметрии имеет равносторонний треугольник?

б) Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось симметрии.

56. а) Через концы диаметра окружности проведены две параллельные хорды. Докажите, что они симметричны относительно центра окружности.

б) Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что эти точки симметричны относительно прямой, проходящей через центры окружностей.

57. а) В равнобедренной трапеции большее основание равно 20 см, один из углов 60°, боковая сторона 8 см. Найдите меньшее основание. Воспользуйтесь параллельным переносом одной из боковых сторон трапеции.

б) Поворот вокруг точки $M(2; 1)$ переводит точку $A(3; -1)$ в точку B. Найдите расстояние AB, если угол поворота равен 30°.

Замечание. Задачи к § 8—9 см. в теоретическом материале.

§ 10—11. Метод гомотетии. Метод геометрических преобразований

58. а) Даны три произвольные точки A, B и C, центр гомотетии O и коэффициент гомотетии k $(k = \frac{1}{4}; 2; -3)$. Постройте точки A_1, B_1 и C_1, гомотетичные соответственно точкам A, B и C.

б) Гомотетия задана центром O и парой гомотетичных точек A и A_1. Возьмите произвольную точку B и постройте точку B_1, гомотетичную этой точке. Рассмотрите два случая: 1) точка B не лежит на прямой AA_1; 2) точка B лежит на этой прямой.

59. а) В трапеции диагонали перпендикулярны и равны d_1 и d_2. Найдите сумму оснований.

б) Площадь данного треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, сторонами которого являются медианы данного.

в) Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. На этой прямой постройте точку P такую, чтобы сумма расстояний AP и PB оказалась наименьшей.

§ 12—14. Равенство и подобие фигур. Подобие треугольников. Свойства подобных многоугольников. Пропорциональные отрезки в окружности

60. а) Даны координаты вершин треугольников ABC и $A_1B_1C_1$: $A\ (-2; 1)$, $B\ (-4; 2)$, $C\ (-2; 5)$, $A_1\ (3; 2)$, $B_1\ (1; 3)$, $C_1\ (3; 6)$. Докажите, что эти треугольники могут быть совмещены параллельным переносом. Укажите вектор параллельного переноса.

б) Могут ли быть совмещены симметрией относительно какой-нибудь из координатных осей треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если $A\ (3; 2)$, $B\ (1; 3)$, $C\ (3; 6)$, $A_1\ (3; -2)$, $B_1\ (1; -3)$, $C_1\ (3; -6)$?

в) Стороны одного треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите стороны подобного треугольника, если большая из них равна 3 см.

г) Стороны одного треугольника равны 10 см, 9 см и 7,5 см. Большая сторона подобного треугольника равна 5 см. Найдите остальные стороны этого треугольника.

61. а) Стороны одного треугольника равны 0,8 см, 1,6 см и 2 см. Периметр подобного ему треугольника равен 5,5 см. Найдите стороны второго треугольника.

б) Наибольшие стороны двух подобных многоугольников равны 35 м и 14 м, а разность их периметров равна 60 м. Найдите периметры этих многоугольников.

в) Стороны двух правильных одноименных многоугольников соответственно равны a и b. Как относятся периметры и площади этих многоугольников?

г) Площадь плана земельного участка равна 100 см^2. Найдите площадь самого участка, если масштаб плана равен 1 : 10 000.

§ 15. Метод подобия

62. а) Из точки окружности проведен перпендикуляр к диаметру. Найдите его длину, если диаметр разделился на отрезки 12 см и 3 см.

б) Перпендикуляр, проведенный из точки окружности на радиус, равный 34 см, делит его в отношении 8 : 9 (начиная от центра). Найдите длину перпендикуляра.

в) Ширина кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна 8 дм; хорда большей окружности, касательная к меньшей, равна 4 м. Найдите радиусы окружностей.

г) Две хорды окружности пересекаются так, что отрезки одной хорды равны 24 см и 14 см; один из отрезков другой хорды равен 28 см. Найдите второй ее отрезок.

д) Из двух пересекающихся хорд окружности первая равна 32 см, а отрезки другой хорды равны 12 см и 16 см. Найдите отрезки первой хорды.

е) Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Найдите длину отрезка касательной, если внешний и внутренний отрезки секущей соответственно равны 4 см и 5 см.

63. а) Пусть AA_1 и BB_1 — высоты ΔABC. Докажите, что

$$\Delta A_1B_1C \backsim \Delta ABC.$$

Чему равен коэффициент подобия?

б) В параллелограмме $ABCD$ из вершины B проведена высота BB_1 к стороне AD и высота BB_2 к стороне CD. Докажите, что

$\Delta ABB_1 \backsim \Delta CBB_2$. Выразите коэффициент подобия через: 1) стороны параллелограмма; 2) высоты параллелограмма.

в) Из вершины C прямого угла ΔABC проведена высота CD. Найдите три пары подобных треугольников. Докажите, что

$$h_c^2 = AD \cdot DB.$$

г) Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания трапеции). Докажите, что $\Delta BOC \backsim \Delta DOA$.

д) Почему данный треугольник и треугольник, образованный его средними линиями, подобны? Чему равен коэффициент подобия?

е) Пусть BB_1 — биссектриса ΔABC. На продолжении стороны AB за точку B отложили отрезок BK, равный стороне BC. Докажите, что $\Delta ABB_1 \backsim \Delta AKC$.

64. а) Из вершины C остроугольного ΔABC проведена высота CC_1; из точки C_1 проведены перпендикуляры C_1M и C_1K соответственно к сторонам BC и AC. Докажите, что $\Delta MKC \backsim \Delta ABC$.

б) На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP : AD = 1 : n$; K — точка пересечения прямых AC и BP. Докажите, что $\Delta APK \backsim \Delta CBK$. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

в) Пусть BL — биссектриса внешнего угла ΔABC; из точек A и C проведены перпендикуляры AK и CM к прямой BL. Докажите, что $\Delta LCM \backsim \Delta LAK$ и $\Delta ABK \backsim \Delta CMB$. ($L$ — точка пересечения биссектрисы или ее продолжения с прямой AC.)

г) В трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность; K, T, H и M — соответственно точки касания со сторонами AB, BC, CD и DA; P — точка пересечения прямых AT и BM. Докажите, что $\Delta AMB \backsim \Delta KBP$.

д) В равнобедренный ΔABC ($AB = BC$) вписана окружность; M и K — точки касания этой окружности соответственно с основанием AC и боковой стороной BC, O — центр окружности. Докажите, что $\Delta BMC \backsim \Delta BKO$.

е) В параллелограмм вписан ромб, стороны которого параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите несколько пар подобных треугольников.

ж) (*Занимательная задача.*) Найдите длину солнечной тени, отбрасываемой в пространстве проволокой, диаметр которой равен 4 мм. (Диаметр Солнца 1 400 000 км, расстояние Земли от Солнца 150 000 000 км.)

65. а) Приведите новое доказательство формулы высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе: $h_c = \dfrac{ab}{c}$.

б) С помощью подобия треугольников докажите, что биссектриса треугольника делит сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Какое дополнительное построение необходимо выполнить?

в) Пусть BC и AD – основания трапеции $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей, $AO = 8$ см, $OC = 10$ см и $BD = 27$ см. Найдите OB и OD.

г) Около данного треугольника и треугольника, образованного его средними линиями, описаны окружности. Найдите отношение их радиусов.

66. а) В условиях задачи 64 б) найдите отношение $AK : AC$.

б) В условиях задачи 64 в) докажите, что $AL : CL = AB : BC$.

в) В условиях задачи 64 г) докажите, что $KP \parallel AD$.

г) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием, равным 6 см, и боковой стороной, равной 8 см.

67. а) В условиях задачи 64 е) найдите сторону ромба, если диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2.

б) На стороне BC правильного ΔABC как на диаметре во внешнюю сторону треугольника построена полуокружность. Дуга CK равна $\dfrac{1}{3}$ этой полуокружности. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $PC \cdot AP = PK \cdot BP$.

68. (*Задачи о геометрическом цветке.*) а) Через точку T, взятую произвольно внутри ΔABC, проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника: $EK \parallel AB$, $E \in AC$, $K \in BC$; $XY \parallel BC$, $X \in AB$, $Y \in AC$; $PM \parallel AC$, $P \in AB$, $M \in BC$ (рис. 178). При этом треугольник оказался разбитым на шесть частей, из которых три являются треугольниками. Объединение этих треугольников представляет собой красивый «геометрический цветок». Введем обозначения: S — площадь ΔABC, S_1 — площадь ΔTPX, S_2 — площадь ΔTEY, S_3 — площадь ΔTKM. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{AE}{AC}, \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{EY}{AC}, \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{YC}{AC}.$$

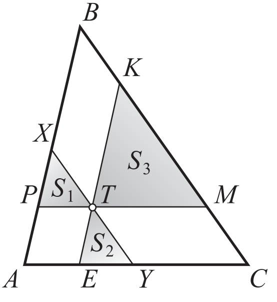

Рис. 178

б) В условиях предыдущей задачи (см. рис. 178) докажите, что

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}=1.$$

в) В условиях задачи 68 а) (см. рис. 178) докажите, что

$$S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2.$$

Тема 3. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 16. Определение правильного многоугольника. Сумма углов многоугольника

69. а) Сколько сторон в правильном многоугольнике, если его внутренний угол равен 144°?

б) Можно ли построить пятиугольник, углы которого были бы равны 110°, 110°, 103°, 116°, 100°?

в) Сколько сторон в правильном многоугольнике, если сумма его внутренних углов равна 1980°?

г) Верна ли теорема, обратная теореме о сумме углов треугольника?

Указание. Сформулируйте ее с помощью слова «многоугольник».

д) Почему нельзя построить многоугольник (за исключением треугольника), все углы которого были бы острыми?

е) Приведите примеры неправильных многоугольников, у которых: 1) все углы равны; 2) все стороны равны.

70. а) Пусть O — центр окружности, описанной около правильного ΔABC. Докажите, что эта окружность и окружность, описанная около ΔOAB, имеют одинаковый радиус.

б) Пусть ΔABC — правильный, даны три точки A_1, B_1 и C_1, принадлежащие соответственно сторонам BC, CA и AB, причем

$$BA_1 = CB_1 = AC_1 = \frac{1}{3}AB.$$

Найдите отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

в) На каждой стороне квадрата внутрь его построен прямоугольный треугольник с углом в 30°. Докажите, что получивший-

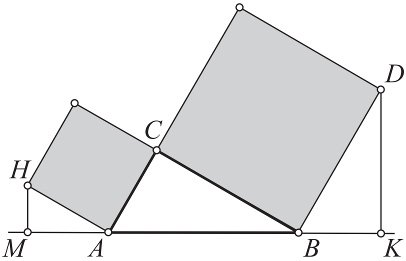

Рис. 179

ся при этом четырехугольник также является квадратом. Какую часть составляет площадь этого квадрата от площади данного?

г) На катетах прямоугольного ΔABC построены два квадрата (рис. 179). Из вершин D и H этих квадратов на продолжение гипотенузы проведены два перпендикуляра DK и HM. Докажите, что ΔABC можно составить из треугольников BDK и AHM.

§ 17—19. Центр правильного многоугольника. Построение некоторых правильных многоугольников, вписанных в окружность. Выражение элементов правильного многоугольника через радиус описанной или вписанной окружности

71. а) Докажите, что площади правильных одноименных многоугольников относятся как квадраты радиусов описанных окружностей или как квадраты радиусов вписанных окружностей.

б) Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой внутри правильного многоугольника, до прямых, содержащих его стороны, постоянна.

72. *Паркетом* будем называть такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек. Можно ли составить паркет из:

1) правильных треугольников;
2) квадратов;
3) правильных пятиугольников;
4) правильных восьмиугольников и квадратов;
5) правильных шестиугольников, квадратов и правильных треугольников;
6) квадратов и правильных треугольников;
7) правильных десятиугольников?

§ 20—23. Длина окружности и ее дуг. Площадь круга и его частей. Задачи на комбинацию круга и многоугольников

73. а) Найдите радиус окружности, если отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны a и образуют угол, равный 120°.

б) Найдите длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b. Чему равна площадь круга?

в) Найдите длину окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b. Чему равна площадь круга?

г) Около круга радиуса r описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Найдите отношение: 1) периметра треугольника к длине окружности; 2) площади треугольника к площади круга.

д) Дан ромб со стороной a и острым углом α. Найдите площадь вписанного круга. Чему равно отношение длины окружности к периметру ромба?

е) В правильный треугольник вписана окружность. Найдите отношение площади треугольника к площади круга.

ж) В окружность вписан правильный шестиугольник. Найдите отношение площади шестиугольника к площади круга.

74. а) Спутник вращается вокруг Земли со скоростью 7,9 км/с. За какое время спутник обернется вокруг Земли? (Землю считать шаром с радиусом в 6370 км, высоту орбиты положить равной 500 км.)

б) Период обращения Земли вокруг Солнца примерно равен 365 сут. Расстояние от Земли до Солнца равно примерно 150 млн км. Найдите скорость вращения Земли вокруг Солнца. Сравните ее со скоростью вращения точки поверхности Земли вокруг земной оси, которая приближенно равна 448 м/с.

в) Две трубы с диаметрами d_1 и d_2 требуется заменить одной трубой с той же пропускной способностью. Найдите диаметр этой трубы.

г) Радиус закругления полотна железной дороги равен 1000 м, дуга закругления содержит 20°. Найдите длину дуги.

д) По рисунку 180 рассчитайте площадь оцинкованного железа, необходимого на изготовление ведра, если $\angle AOB = 115°$, $OB = BC = 300$ мм, диаметр дна ведра равен 220 мм.

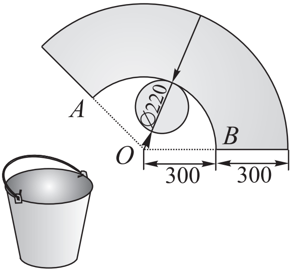

Рис. 180

е) 22 июня 1976 г. в СССР произведен запуск орбитальной научной станции «Салют-5». Ее максимальное удаление от поверхности Земли (в апогее) — 260 км, минимальное (в перигее) — 219 км. Найдите угол, под которым наблюдается Земля со станции в тот момент, когда она находится в апогее. Какова длина дуги земной поверхности (в плоскости орбиты станции), наблюдаемой из этой же точки?

ж) Радиус Земли равен примерно 6370 км. Чему равна длина экватора Земли?

з) Найдите длину параллели Земли на широте, равной 40°. (Широта отсчитывается от экватора.)

75. (*Занимательная задача.*) Вообразим, что Земля обтянута по экватору обручем и что подобным образом обтянут и футбольный мяч. Допустим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 м. Тогда обручи отстанут от поверхности тел, которые они стягивали, и образуется некоторый зазор. В каком случае этот зазор больше — для Земли или для мяча?

Интуиция, скорее всего, говорит о том, что увеличение обруча на 1 м для маленького мяча даст большее увеличение радиуса, а для огромной Земли увеличение экватора на 1 м существенно не скажется на длине его радиуса.

Однако проведем следующее рассуждение. Пусть R — радиус произвольного шара. Длина его экватора $C = 2\pi R$. Увеличим ее на 1 м, получим окружность длины $2\pi R + 1$. Радиус новой окружности равен $\frac{2\pi R+1}{2\pi}$. Найдем величину, на которую увеличился первоначальный радиус шара: $\frac{2\pi R+1}{2\pi} - R = \frac{2\pi R+1-2\pi R}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$. Если в этих рассуждениях нет ошибки, то придется сделать вывод о том, что для маленького мяча и для огромной Земли зазор оказывается одинаковым и равным $\frac{1}{2\pi} \approx 16$ см. Выясните, правильны ли эти рассуждения и какой окончательный ответ надо дать на вопрос задачи.

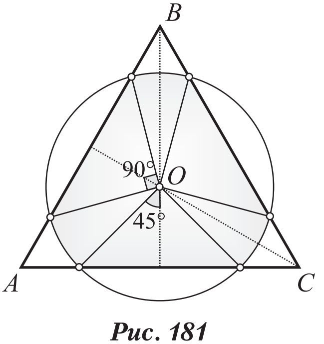

Рис. 181

76. а) Полуокружность радиуса R разделена на три равные части, точки деления соединены отрезками с одним концом диаметра. Найдите площадь средней части полукруга.

б) Дан правильный треугольник. Построена окружность с центром, совпадающим с центром треугольника. Эта окружность пересекает стороны треугольника так, что внешние дуги содержат по 90° (рис. 181). Найдите площадь фигуры, ограниченной внутренними дугами и средними отрезками сторон, если сторона треугольника равна a.

в) Дан квадрат со стороной a. Построен круг с центром в вершине квадрата и радиусом a. Найдите площадь части квадрата, находящейся вне круга.

г) Два угла треугольника равны 45° и 60°, площадь этого треугольника равна S. Найдите длину описанной окружности.

д) В условиях предыдущей задачи найдите площадь вписанного круга.

е) Две стороны треугольника и угол между ними соответственно равны a, b и γ. Найдите площадь описанного круга.

ж) В условиях предыдущей задачи найдите длину вписанной окружности.

з) Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите длину описанной окружности.

и) В условиях предыдущей задачи найдите площадь вписанного круга.

77. а) Сторона правильного многоугольника равна a, радиус вписанного в него круга равен r. Найдите площадь описанного круга.

б) Каждая сторона правильного треугольника, равная a, разделена на три равные части. Первые точки деления (считая в одном направлении) соединены отрезками. Получили новый треугольник. Найдите площадь круга, вписанного в этот треугольник.

в) Касательная и секущая, проведенные к окружности из одной точки, соответственно равны 20 см и 40 см. Секущая удалена от центра на 8 см. Найдите площадь круга.

г) Из одной точки к окружности проведены касательная и наибольшая секущая, которые соответственно равны 2 см и 5 см. Найдите площадь круга.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЯМ ЗАДАЧ

1. 1) $\frac{14}{3}$; 2) $\frac{2}{3}m_a$. **2.** Если треугольник лежит в первой или второй четверти, то соответственно $M\left(\frac{b}{3};\frac{a}{3}\right)$ или $M\left(-\frac{b}{3};\frac{a}{3}\right)$. Найдите координаты точки M в остальных двух случаях. **3.** Сразу можно найти гипотенузу: $AB = 2m_c$. Далее естественно воспользоваться теоремой Пифагора. Однако, зная гипотенузу и медиану, проведенную к катету, сразу найти какой-либо катет не удается. Возникает предположение о необходимости введения вспомогательной величины. Например, положим, что $CA_1 = x$. **4.** Поиск решения подсказывается рисунком. Замечаем, что стороны ΔMBD сравнительно несложно выразить через медианы данного ΔABC. Вначале находим BM, затем замечаем, что $MD = AM$ и $BD = MC$. **5.** Решение подсказывается предыдущей задачей. Для ΔMBD (как для каждого треугольника) неравенства треугольника выполняются: $BM + BD > MD$, $BM + BD > MD$, $BM + BD > MD$. Осталось выразить стороны этого треугольника через медианы данного (что сделано при решении предыдущей задачи). **6.** Без использования тригонометрии сразу можно найти медиану m_c (она равна половине данной гипотенузы). Остальные медианы будем искать с помощью тригонометрии. **7.** $AB = 2m_c$, $AC = \sqrt{2m_c \cdot \left(m_c + \sqrt{m_c^2 - h_c^2}\right)}$, $BC = \sqrt{2m_c \cdot \left(m_c - \sqrt{m_c^2 - h_c^2}\right)}$. **8.** Для нахождения $\sin A$ достаточно знать противолежащий катет и гипотенузу. Не встречалась ли вам задача с таким же условием? Встречалась, это задача 3 а). При решении этой задачи были получены такие ответы: $2m_c$, $2\sqrt{\frac{m_a^2 - m_c^2}{3}}$, $2\sqrt{\frac{4m_c^2 - m_a^2}{3}}$. Дальнейшее решение становится очевидным. **9.** Обозначим основание данного треугольника через a. С помощью подобия треугольников устанавливаем, что центроид делит отрезок, параллельный основанию, на части, равные $\frac{a}{3}$. После этого нетрудно завершить решение задачи. **10.** $30°$. **11.** $\frac{1}{2}R$. **12.** $R\sqrt{3}$. **13.** 1) $R = \frac{2h}{3}$. **14.** 1) 10 см. **15.** $130°, 50°$. **16.** $\angle OAB = \angle ABO = 50°$. **17.** 4 см.

18. Допустим, что ΔABC удовлетворяет условию задачи. В нем: $BC = a$, $AB = c$, $OA = OB = OC = R$. Выясним, какими свойствами обладают вершины A, B, C. Все три вершины лежат на окружности данного радиуса, причем одну из них, например вершину B, можно взять на этой окружности произвольно. Для построения вершин A и C учтем, что они удалены от вершины B соответственно на расстояния c и a, т. е. вершина A лежит на окружности (B, c), а вершина C — на окружности (B, a). Это означает, что вершина A — точка пересечения окружностей (O, R) и (B, c), а точка C — точка пересечения окружностей (O, R) и (B, a). **19.** Центры этих окружностей образуют фигуру, которой является прямая b с удаленной из нее точкой A. **21.** $\frac{15}{2}$. **22.** 4. **23. а)** Воспользуйтесь свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. **б)** Если находить отдельно a и b, то задача окажется довольно сложной. Оказывается, проще найти $a + b$. **в)** $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

24. а) $\frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = a(1-\cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha$. **б)** $\frac{b\sin 2\alpha}{4\cos\alpha(1+\cos\alpha)}$. **25. 1)** $\frac{6}{5}$.

28. а) Сделаем чертеж-набросок, считая, что на нем по данным AB и H построен ΔABC. Решение задач сводится к построению вершины C. Выясняем, какими свойствами обладает эта вершина. Замечаем, что сразу можно построить прямые AH и BH. Далее вершина C лежит на прямой $b \perp BH$ и на прямой $a \perp AH$. Следовательно, вершина C определяется как точка пересечения прямых a и b. После этого строится ΔABC. **б)** *1-й случай*: ортоцентр H находится на оставшейся части пластины. *2-й случай*: ортоцентр H находится на отломанной части, причем на оставшейся части пластины имеются углы A и C. *3-й случай*: ортоцентр H находится на отломанной части, причем на отломанной части находится и сторона BC (на оставшейся части сохранилась лишь точка C). Восстановить «копию» ΔABC по стороне AC и одному только углу A нельзя. **35. 1)—3)** $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$; $\sqrt{65{,}17}$; 0,9. **36.** $\cos\alpha = \frac{165}{264} \approx 0{,}625$, откуда $\alpha \approx 51{,}3°$; $\cos\beta = \frac{123}{240} \approx$ $\approx 0{,}5125$, откуда $\beta \approx 59{,}2°$; $\cos\gamma = \frac{77}{220} \approx 0{,}35$, откуда $\gamma \approx 69{,}5°$.

37. $\sqrt{17}$ см, $\sqrt{37}$ см. **39.** $42{,}7°$; $544{,}5$; $422{,}8$. **40.** Воспользуемся методом площадей. Пусть в ΔAOB $OA = OB = 1$ и $\angle O = 2\alpha$, OC — высота этого треугольника. Запишем равенство $S_{AOB} = S_{AOC} + S_{BOC}$ с помощью тригонометрических функций. **42. а)** $\frac{15}{4}\sqrt{231}$. **б)** $h_a = 12\frac{12}{13}$.

44. а) $S_{ABC}=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}$.
б) 4,5. **в)** $\sqrt{a^2+b^2\mp 2\left(\sqrt{a^2b^2-4S^2}\right)}$. **46.** Для решения задачи можно воспользоваться формулами для произвольного треугольника. Для вычисления медиан — формулой $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. Для вычисления биссектрис — формулой $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$. Для нахождения высот можно воспользоваться площадью треугольника и с ее помощью найти высоту: $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, $h_a=\frac{2S}{a}$. Однако необходимо учесть, что данный треугольник является прямоугольным и все вычисления можно провести по более простым формулам. **47. а)** $\angle B=\angle D=$ $=\alpha+\beta$, $\angle A=\angle C=180°-(\alpha+\beta)$; $b=\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $a=\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
в) $a\sin\alpha\sqrt{d^2-a^2\sin\alpha}$. **48. а)** $\frac{h_c^2}{\sin 2\alpha}$. **б)** $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$.
в) $\left.\begin{array}{l}\frac{\sin\beta}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AB}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\\ \frac{\sin\beta}{DC}=\frac{\sin(180°-\alpha)}{BC}\Rightarrow\frac{DC}{BC}=\ldots\end{array}\right\}\Rightarrow\ldots$. **г)** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **49. а)** $\frac{mn}{\sin 2\alpha}$.
в) $\frac{a^2(2\sqrt{3}+3)}{8}$. **50. а)** Обозначим расстояние между центрами небесных тел через x. Тогда $\frac{r}{x}=\sin\rho$, $\frac{R}{x}=\sin p$, $\frac{r}{R}=\frac{\sin\rho}{\sin p}$. Находим радиус Луны: $r=\frac{\sin\rho}{\sin p}R=\frac{\sin 15'}{\sin 57'}\cdot 6370\approx\frac{0{,}0044}{0{,}0166}\cdot 6370\approx 1680$ (км). Расстояние x между центрами Земли и Луны найдем из равенства $\frac{R}{x}=\sin p$: $x=\frac{R}{\sin p}\approx\frac{6370}{\sin 57'}\approx\frac{6370}{0{,}0166}\approx 380000$ (км). Для нахождения расстояния от Земли до Солнца учтем, что для углов, выраженных в секундах, в астрономии часто применяют следующее приближенное равенство: $\sin p''\approx p''\sin 1''\approx\frac{p''}{206265}$. С помощью этого равенства найдем расстояние l от Земли до Солнца: $l=\frac{R}{\sin p''}\approx\frac{R\cdot 206265}{8{,}8}\approx$

$\approx \dfrac{6370 \cdot 206265}{8,8} \approx 15 \cdot 10^6$ (км). **52. а)** При решении данной и ряда следующих задач можно в целях экономии времени обойтись без их краткой записи. При решении данной задачи выполняем рисунок, соответствующий условию задачи, и записываем: $A \to A_1 \to A_2$, $B \to B_1 \to B_2$, $C \to C_1 \to C_2 \ldots$. Делаем вывод: получили соответствие между точками плоскости, при котором каждой точке плоскости соответствует единственная точка этой плоскости ($A \to A_2$, $B \to B_2$, $C \to C_2 \ldots$), и наоборот, каждая точка (A_2, B_2, C_2, ...) оказывается соответствующей только одной точке плоскости. Значит, это соответствие является геометрическим преобразованием плоскости. **б)** Одна сторона квадрата, равная a, переходит в сторону прямоугольника, равную $2a$: $a \neq 2a$. Если преобразование изменяет длину хотя бы одного отрезка, то оно не является движением. **г)** При решении предыдущей задачи установлено, что при движении окружность переходит в окружность равного радиуса. Поэтому, если геометрическое преобразование переводит окружность радиуса R в окружность радиуса $3R$, то это преобразование не является движением. **д)** На отрезке A_1B_1 нужно отложить отрезок $A_1C_1 = AC$. **е)** Коэффициент преобразования подобия $k = 2$. Поэтому должно выполняться равенство $A_1C_1 = 2AC$. Отсюда построение: на отрезке A_1B_1 от точки A_1 последовательно откладываем два раза отрезок AC, получаем искомую точку C_1. **53. в)** Для этого необходимо, чтобы угол в 60° переходил в угол, равный 90°, чего при движении и преобразовании подобия быть не может. Следовательно, в указанных преобразованиях правильный треугольник не может перейти в прямоугольный треугольник. **д)** Проведите $MK \perp AB$, $K \in AB$. Пусть $K \to K_1$, $M \to M_1$. Постройте вначале точку K_1, а затем точку M_1. Желательно все построения выполнить непосредственно, начиная с построения треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. **з)** С помощью свойств параллелограмма устанавливаем, что данное преобразование является движением. После этого, на основании свойств движений, даем ответы. В данном движении: а) точка переходит в точку; б) прямая — в прямую; в) луч — в луч; г) отрезок — в отрезок; д) угол — в угол; е) треугольник — в треугольник. **54. а)** Возьмем две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Пусть при указанном преобразовании эти точки переходят соответственно в точки A_1 и B_1. Запишем координаты точек A_1 и B_1, найдем и сравним расстояния AB и A_1B_1 (или квадраты этих расстояний). Квадрат расстояния AB можно записать сразу: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. **55. а)** Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии. Докажем это. Пусть s_1 — ось симметрии отрезка AC: $s_1(A) = C$. Тогда s_1— серединный перпендикуляр отрезка AC. Так как $BA = BC$ (в силу условия), то $B \in s_1$. Поэтому $s_1(AB) = CB$, $s_1(CB) = AB$, $s_1(AC) = CA$. Следовательно, s_1 — ось симметрии равностороннего треугольника. Аналогично серединные перпендикуляры s_2 и s_3 соответственно сторон AB и BC также являются осями симметрии равностороннего треугольника. **б)** Докажите вначале, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он равносторонний. **56. а)** Задача сводится к установлению симметричности точек C и D относительно центра O. Для этого рассмотрим точку C как точку пересечения прямой a и окружности. Тогда точка, симметричная точке C относительно центра O, должна лежать на фигурах, симметричных указанным. **б)** Учесть, что если точка A — точка пересечения двух линий l и m, а точка B — точка пересечения линий l_1 и m_1, симметричных соответственно l и m относительно оси s, то точки A и B симметричны относительно оси s. **57. а)** 12. **б)** $\sqrt{10-5\sqrt{3}}$. **58. а)** Воспользуемся равенствами: $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$. **59. а)** Построение трапеции $ABCD$ лучше начать с диагонали CA, затем проводим боковую сторону AB, диагональ BD (перпендикулярно AC) и, наконец, основания AD и BC. **б)** $\frac{3}{4}S$. Пусть ΔABC — данный треугольник, AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы. Построим ΔBB_1C_2, составленный из медиан данного треугольника. Как построить этот треугольник? Выполним параллельный перенос медианы CC_1 на вектор $\overrightarrow{C_1B}$. Медиана CC_1 перейдет в некоторый отрезок C_2B. Осталось выяснить, не окажется ли сторона B_1C_2 треугольника BB_1C_2 равной медиане AA_1. Из построений следует, что четырехугольник C_1BC_2C — параллелограмм. Точка A_1 — середина диагонали BC — является точкой пересечения диагоналей параллелограмма. Поэтому вторая диагональ C_1C_2 проходит через точку A_1. Отсюда следует: $A_1C_2 = A_1C_1 = AB_1$ и $A_1C_2 \parallel A_1C_1 \parallel AB_1$. Поэтому четырехугольник $AA_1C_2B_1$ — параллелограмм и $B_1C_2 = AA_1$. Итак, ΔBB_1C_2 составлен из медиан ΔABC. **в)** Воспользуемся методом симметрии-спрямления. Сумма отрезков AP и PB оказывается наименьшей (почему?), если точка P строится как точка пересечения отрезка AB_1 и прямой a, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно прямой a. **60. а)** Для доказательства возможности совмещения ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ параллельным переносом сравним векторы $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$. Для этого найдем координаты этих векторов. **б)** Установим, что: 1) точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 симметричны относительно оси x; 2) ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ симметричны относительно оси x; 3) ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ могут быть совмещены симметрией относительно оси x. **в)** $A_1C_1 =$ 1,5 см, $C_1B_1 =$ 2,25 см. **г)** $A_1B_1 =$ 4,5 см, $B_1C_1 =$ 3,75 см. **61. а)** $A_1B_1 =$ 1 см, $B_1C_1 =$ 2 см, $A_1C_1 =$ 2,5 см. **б)** $P_{ABCD\ldots} = 100$ м, $P_{A_1B_1C_1D_1\ldots} = 40$ м. **в)** Воспользуемся подобием двух правильных одноименных многоугольников. Для нахождения отношения периметров и площадей подобных многоугольников достаточно знать коэффициент подобия и применить формулы: $\dfrac{P_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{P_{ABCD\ldots}} = k$, $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{S_{ABCD\ldots}} = k^2$. **г)** $S_{\text{уч}} = 10^{10}$ см$^2 = 1$ км^2. **63. в)** Выясняем, подобны или нет пары треугольников: 1) ΔABC и ΔACD; 2) ΔABC и ΔCBD; 3) ΔACD и ΔCBD. **69. а)** $n = \dfrac{180°(n-2)}{\alpha_n}$, где α_n — внутренний угол правильного n-угольника. **г)** Обратная теорема: «Если сумма углов выпуклого многоугольника равна 180°, то этот многоугольник является треугольником». Для доказательства воспользуемся формулой для числа n из задачи 69 а). **71. а)** Воспользуемся формулами $S_n = \dfrac{1}{2}R^2 n \sin\dfrac{360°}{n}$ и $S'_n = r^2 n \operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}$. **72.** Предположим, что мы начали «замащивать» плоскость в одной какой-либо точке. Необходимо, чтобы сумма углов всех многоугольников при выбранной вершине была равна 360°. Проверьте выполнимость этого условия для различных комбинаций правильных многоугольников. **73. д)** Площадь вписанного круга $S = \dfrac{1}{4}a^2\pi\sin^2\alpha$; отношение длины окружности к периметру ромба равно $\dfrac{\pi\sin\alpha}{4}$. Решение задачи сводится к нахождению радиуса OE вписанной окружности: 1) В какой треугольник входит OE? (В ΔOBE.) 2) Что в этом треугольнике известно? ($\angle OBE = \dfrac{\alpha}{2}$.) 3) Нельзя ли найти OB? Какой треугольник для этого необходимо рассмотреть? (ΔBOC.) 4) Что в этом треугольнике известно? (Гипотенуза $BC = a$ и $\angle OBE = \dfrac{\alpha}{2}$.) 5) Можно ли по этим данным найти OB? (Можно.) В итоге составляется план решения задачи. Находим: 1) OB из ΔBOC; 2) OE из ΔOBE; 3) отвечаем на вопросы задачи. **ж)** $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}8$. **74. а)** $\frac{2\pi 6870}{7{,}9} \approx 5463{,}9$ (с) $\approx 1{,}5$ (ч). **б)** Скорость вращения Земли вокруг Солнца находится по формуле $v = \frac{C}{T}$, где C — длина окружности, по которой Земля движется вокруг Солнца, а T — время совершения одного оборота. Найдем длину окружности $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 150 \cdot 10^6 \Rightarrow v = \frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{365 \cdot 24} \approx 108000$ км/ч $\approx$ ≈ 29886 м/с. Сравним скорости: 29886 : 448 $\approx$ 67. Это означает, что скорость движения Земли вокруг Солнца в 67 раз больше скорости вращения точки поверхности Земли вокруг земной оси. **г)** ≈ 349 м. **д)** 27,13 дм^2. **е)** $l \approx 3579{,}9$ км. **з)** $l \approx 30660$ км.

СОДЕРЖАНИЕ