Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия
8 класс
Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся
общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

Минск • «Аверсэв» • 2011

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721
Р59

Серия основана в 2010 году

Рогановский, Н. М.

Р59 Геометрия. 8 класс. Многообразие идей и методов : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 138 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-529-662-2.

Пособие составлено в соответствии с программой факультативного курса. В издании содержится теоретический и практический материал, приводятся различные методы решения геометрических задач.

Предназначено учащимся 8 классов для использования на факультативных занятиях по геометрии.

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-529-662-2

Метод — это ключ к вратам науки.
От авторов

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие ребята!

Надеемся, что вы обратили внимание на приведенное выше высказывание. Без преувеличения можно сказать, что геометрия обладает громадным потенциалом для развития мышления человека.

В этом году вы познакомитесь с новыми темами: многоугольники, координаты и векторы, элементы тригонометрии.

Тема «Многоугольники» — первая тема курса геометрии 8 класса. Она тесно связана с материалом предыдущего класса, основное ее содержание посвящено различным четырехугольникам, изучению их свойств и формул площадей. Отметим, что тема о многоугольниках хотя и является традиционной, тем не менее располагает исключительными возможностями для углубления знаний и развития геометрического мышления.

Координаты и векторы — напротив, получили «прописку» в школьном курсе совсем недавно. Эти темы для школьной геометрии обладают большой новизной. Главным образом это замечание относится к теме «Векторы». В ней вы впервые и только в факультативном курсе встретитесь с такими понятиями, как «коллинеарные векторы», «скалярное произведение двух векторов» и др. Необходимо иметь в виду, что «векторы» — это не только новая тема, это и новый математический метод, и новый способ мышления. Наиболее широко этот метод используется в курсе физики.

Новые темы дают уникальную возможность познакомиться с современной геометрической наукой, ее идеями и методами, расширить свой кругозор и представления о современном школьном курсе математики.

Особый вклад в развитие элементарной геометрии внесли ученые Древней Греции. Общепризнанным символом Древней Греции является Парфенон. Бесспорно, это здание свидетельствует о выдающихся достижениях античных ученых в области математики и ее применений в архитектуре и строительстве. Все выступающие части фасада этого здания подчинены определенной пропорции, известной в математике под названием «золотое сечение». Именно благодаря золотому сечению это здание даже в полуразрушенном виде до сих пор поражает красотой своих форм.

Надеемся, что вы узнаете в этом году много полезного и интересного.

Геометрия ждет вас!

Желаем вам успехов!

Тема 1 МНОГОУГОЛЬНИКИ: СОДРУЖЕСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ. НАЧАЛА МЕТОДА ПОДОБИЯ

В предыдущем классе мы знакомились с различными многоугольниками: треугольником (частный случай многоугольника), параллелограммом, прямоугольником и квадратом. Продолжим изучение четырехугольников.

Убедимся, что при изучении данной темы широко используются ранее изученные методы — метод равных треугольников, теорема Пифагора, метод площадей, начала которого вам уже известны, метод от противного.

В 8 классе мы познакомимся с новыми математическими методами: методом подобия, методом координат и векторов, тригонометрическим методом.

§ 1. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И РАССТОЯНИЯ

1.1. Какие расстояния существуют?

До сих пор мы имели дело в основном только с расстоянием между двумя точками и расстоянием между точкой и прямой. В данном параграфе мы напомним известные расстояния и познакомимся с некоторыми другими расстояниями.

Понятие расстояния широко используется в житейской практике. При передвижении на местности часто приходится выбирать самый короткий путь от того места, в котором находится человек, до расположенной поблизости прямолинейной дороги. Во всех этих случаях мы пользуемся математическим понятием «расстояние от точки до прямой».

Расстояния существуют между разными объектами, но все они связаны одной общей идеей. Итак, идея расстояния — в чем она состоит?

> ***Расстоянием от точки** O **до прямой** a* (рис. 1) называется наименьшее из всех расстояний от точки O до точек этой прямой.

> ***Расстоянием от точки** O **до луча** AB* (рис. 2) называется наименьшее из всех расстояний от точки O до точек этого луча.

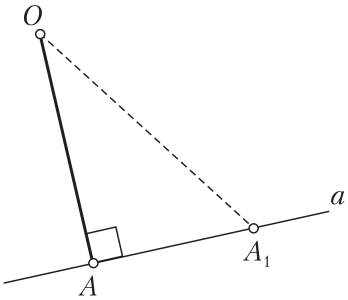


Рис. 1

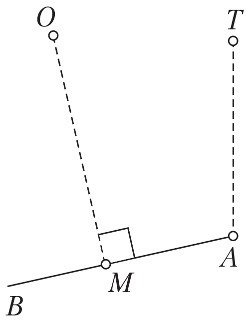


Рис. 2

Расстоянием от точки** O **до фигуры Ф (рис. 3) называется наименьшее из всех расстояний от точки O до точек этой фигуры.

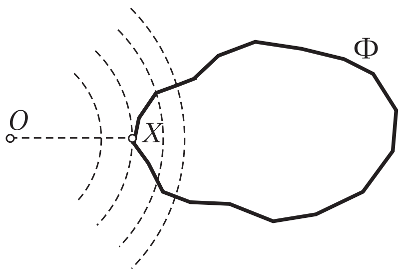


Рис. 3

Расстоянием между двумя прямыми называется наименьшее из всех расстояний между точками A и B, где точка A принадлежит одной прямой, а точка B — другой.

Как найти расстояние от точки до прямой? Другими словами: как найти наименьшее из всех расстояний от данной точки O до точек данной прямой a? Естественно предположить, что если расстояние от точки до прямой сводится к расстоянию между точками, то оно может быть охарактеризовано длиной некоторого отрезка. Какого? Ответ на эти вопросы дают следующие теоремы.

Теоремы 1

1. **Длина перпендикуляра** OA (см. рис. 1)**, проведенного из точки** O **к прямой** a**, есть расстояние от точки** O **до прямой** a**.**

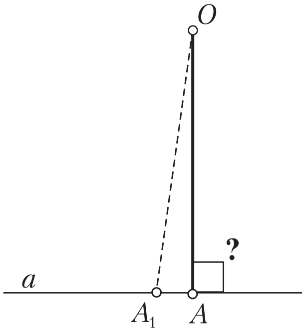


Рис. 4

2. **Если длина отрезка** OA ($O \notin a$, $A \in a$, рис. 4) **есть расстояние от точки** O **до прямой** a**, то** $OA \perp a$**.**

Следствие. *Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине общего перпендикуляра к этим прямым, концы которого лежат на данных прямых.*

1.2. Примеры решения задач на вычисление расстояний

Прежде всего необходимо научиться сводить понятие расстояния к ранее известным понятиям. Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Точка O удалена от точек A и B (рис. 5) на расстояние, равное 2. На какое расстояние точка O удалена от прямой AB, если $AB = 1$?

Решение.

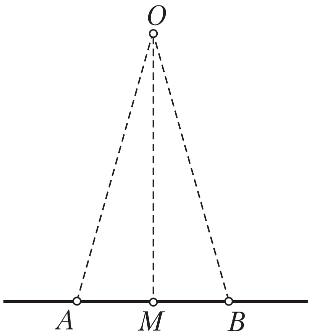


Рис. 5

Пусть $OA = OB = 2$, $AB = 1$. Расстояние от точки O до прямой AB есть длина высоты OM равнобедренного треугольника OAB. Имеем:

1) высота OM равнобедренного треугольника OAB является его медианой, поэтому $AM = MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;

2) по теореме Пифагора

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} \approx 1{,}9.$$

Ответ: $OM = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Задача 2. Хорды AB и CD окружности параллельны и равны соответственно 6 см и 8 см (рис. 6). Найдите расстояние между этими хордами, если радиус окружности равен 5 см.

Замысел решения. При нахождении расстояния между хордами необходимо руководствоваться общим определением расстояния между двумя фигурами. В данном случае расстояние между параллельными отрезками окажется равным расстоянию между соответствующими параллельными прямыми.

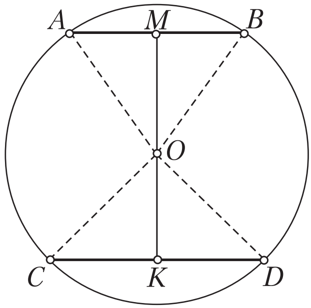


Рис. 6

Решение.

1-й случай (см. рис. 6): точка O — центр окружности — лежит между прямыми AB и CD. Через точку O проведем общий перпендикуляр MK к прямым AB и CD. Применим теорему Пифагора. Из прямоугольного треугольника OAM (он египетский) находим $OM = 4$ см. Аналогично из прямоугольного треугольника OCK находим, что $OK = 3$ см. Тогда $MK = OM + OK = 4 + 3 = 7$ см.

2-й случай (рис. 7): точка O не лежит между прямыми AB и CD. Как и выше, находим $OM = 4$ см, $OK = 3$ см. Тогда $MK = 4 - 3 = 1$ см.

Ответ: 1) 7 см; 2) 1 см.

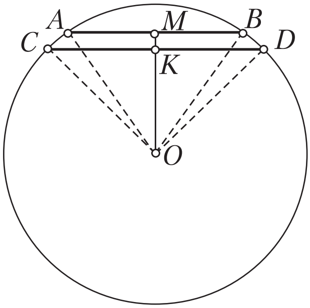


Рис. 7

§ 2. СВОЙСТВА БИССЕКТРИСЫ УГЛА. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

2.1. Теоретические сведения

Теоремы 2 *(о биссектрисе угла)*

1. **Если точка принадлежит биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.**

2. **Если внутренняя точка угла равноудалена от его сторон, то она принадлежит биссектрисе этого угла.**

Доказательства при необходимости могут быть воспроизведены по основному учебнику.

Обратимся еще к одному важному понятию — понятию касательной к окружности. Пусть данная точка O не принадлежит прямой a. Из точки O проведем перпендикуляр OA к прямой a. Проведем окружность с центром O и радиусом OA (рис. 8). Выясним, сколько общих точек имеют эта окружность и прямая a. Ясно, что точка A является их общей точкой. Имеются ли другие общие точки? Может ли, например, некоторая точка B прямой a, отличная от точки A, принадлежать окружности? В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. Поэтому $OB > OA$. Если же $OB \neq OA$, то точка B не лежит на окружности. Итак, прямая a и окружность имеют единственную общую точку A.

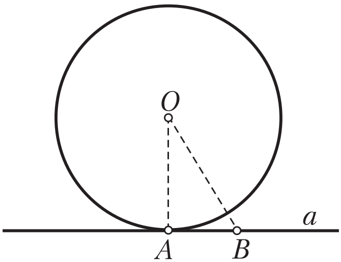


Рис. 8

Касательной к окружности называется прямая, которая с окружностью имеют единственную общую точку. В этом случае говорят также, что окружность *касается* прямой. Общая точка называется *точкой касания*.

Из предыдущих рассуждений следует, что *прямая, перпендикулярная к радиусу в конце его, лежащем на окружности, является касательной к этой окружности*.

Справедливо и обратное утверждение. В итоге приходим к следующим следствиям.

Следствия.

1. *Если прямая перпендикулярна к радиусу в конце его, лежащем на окружности, то прямая касается окружности, и обратно,*

2. *Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

2.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть две биссектрисы треугольника пересекаются в точке O. Докажите, что точка O равноудалена от всех сторон треугольника (рис. 9).

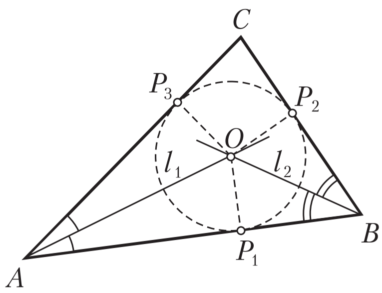


Рис. 9

Доказательство.

1) Пусть биссектрисы l_1 и l_2 треугольника ABC пересекаются в точке O. Из точки O проведем перпендикуляры OP_1, OP_2 и OP_3 на стороны треугольника. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} O \in l_1 \Rightarrow OP_1 = OP_3, \\ O \in l_2 \Rightarrow OP_1 = OP_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow OP_3 = OP_2;$$

2) отсюда $OP_1 = OP_2 = OP_3$.

Задача 2. Докажите, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство.

1) Пусть O — точка пересечения биссектрис l_1 и l_2 треугольника ABC (см. рис. 9), OP_1, OP_2 и OP_3 — перпендикуляры, проведенные из точки O к сторонам треугольника. В задаче 1 доказано, что $OP_1 = OP_2 = OP_3$;

2) если $OP_2 = OP_3$, то точка O принадлежит биссектрисе угла C (по теореме 2.2). Поэтому CO — биссектриса угла C;

3) следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в одной точке — точке O.

Задача 3. Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC (см. рис. 9), OP_1, OP_2 и OP_3 — перпендикуляры, проведенные из точки O к сторонам треугольника. Постройте окружность с центром O и радиусом OP_1. Докажите, что эта окружность касается всех сторон треугольника (в этом случае окружность называется *вписанной* в треугольник).

Доказательство.

1) Так как $OP_1 = OP_2 = OP_3$ (см. задачу 1), то окружность с центром O и радиусом OP_1 пройдет через точки P_1, P_2 и P_3;

2) далее: так как сторона AB перпендикулярна к радиусу OP_1 в конце его P_1, лежащем на окружности, то сторона AB касается окружности;

3) аналогично получаем, что стороны BC и AC касаются окружности;

4) итак, построенная окружность касается всех трех сторон треугольника (является вписанной в треугольник).

§ 3. ВИДЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

3.1. Виды четырехугольников

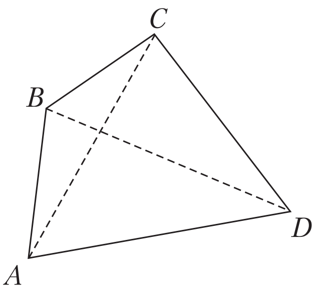


Рис. 10

Четырехугольник называется *выпуклым* (рис. 10), если он расположен в одной полуплоскости относительно каждой прямой, содержащей его сторону. Несоседние стороны четырехугольника называются *противоположными*.

Рассмотрим различные виды четырехугольников, представленные на рисунке 11.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Высотой параллелограмма (рис. 12) называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одной стороны параллелограмма на прямую, содержащую противоположную сторону.

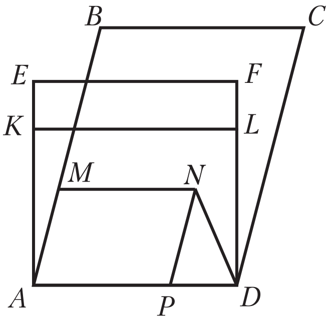


Рис. 11

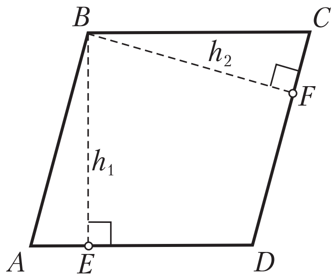


Рис. 12

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. Параллельные стороны — *основания* трапеции, две другие — *боковые стороны*.

Высотой трапеции (рис. 13) называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания трапеции на прямую, содержащую другое основание.

Иначе: *высота параллелограмма* (*трапеции*) — это отрезок: 1) с концами на прямых, содержащих параллельные стороны четырехугольника, и 2) перпендикулярный к ним.

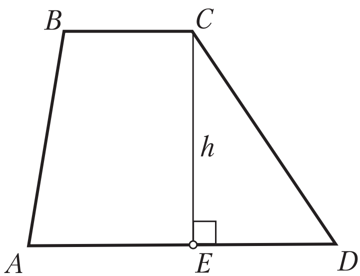


Рис. 13

Обратим внимание на то, что длина высоты параллелограмма и трапеции равна расстоянию между прямыми, содержащими параллельные стороны четырехугольника.

Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые (или прямоугольником называется параллелограмм, имеющий прямой угол).

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (или квадратом называется ромб, у которого все углы прямые).

Задача 1. В прямоугольнике $ABCD$ известны стороны (рис. 14): $AB = 3$, $BC = 4$. Найдите расстояние от вершины B до диагонали AC.

Решение.

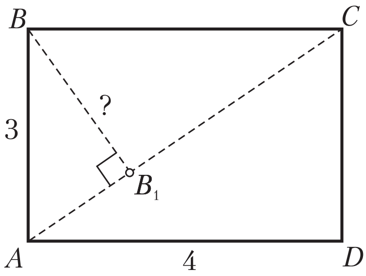


Рис. 14

Пусть BB_1 — перпендикуляр, проведенный из вершины B к диагонали AC. Требуется найти BB_1.

1) Так как BB_1 — высота прямоугольного треугольника ABC, то по формуле, известной из предыдущего класса, $BB_1 = \frac{AB \cdot BC}{AC}$;

2) применим теорему Пифагора: треугольник ABC — египетский, поэтому $AC = 5$;

3) тогда $BB_1 = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

Ответ: $BB_1 = 2{,}4$.

Задача 2. Докажите, что в параллелограмме $ABCD$ (рис. 15) вершины B и D равноудалены от диагонали AC.

Замысел решения. Проведем перпендикуляры BB_1 и DD_1 к прямой AC. Докажем, что $BB_1 = DD_1$. Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники ABB_1 и CDD_1.

Решение.

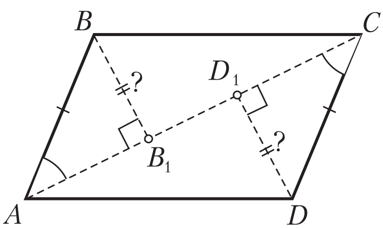


Рис. 15

Применим метод равных треугольников:

1) $\angle BAB_1 = \angle DCD_1$ как накрест лежащие углы при параллельных AB и CD и секущей AC;

2) $\Delta ABB_1 = \Delta CDD_1$ по гипотенузе ($AB = CD$) и острому углу;

3) из равенства этих треугольников следует, что $BB_1 = DD_1$.

Задача 3. Докажите, что если в параллелограмме равны высоты, проведенные из одной вершины к двум его сторонам (рис. 16), то этот параллелограмм является ромбом.

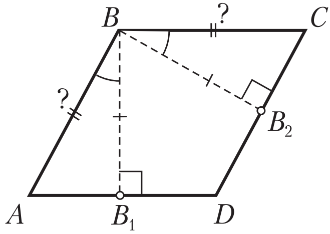


Рис. 16

Решение.

Пусть дан параллелограмм $ABCD$, $BB_1 = BB_2$ — его высоты. Докажем, что параллелограмм $ABCD$ является ромбом. Применим метод равных треугольников:

1) $\angle ABB_1 = \angle CBB_2$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами ($AB \perp BB_2$, $BB_1 \perp BC$);

2) $\Delta ABB_1 = \Delta CBB_2$ по катету и прилежащему острому углу;

3) $\Delta ABB_1 = \Delta CBB_2 \Rightarrow AB = BC$;

4) значит, в параллелограмме $ABCD$ все стороны равны, и поэтому он является ромбом.

3.2. Свойства и признаки параллелограмма

Теоремы 3 *(свойства параллелограмма)*

В параллелограмме:

1) **противоположные стороны и углы равны;**

2) **диагонали в точке пересечения делятся пополам.**

Теоремы 4 *(признаки параллелограмма)*

Четырехугольник является параллелограммом, если в нем:

1) **противоположные стороны равны,** *или*

2) **две противоположные стороны равны и параллельны,** *или*

3) **диагонали в точке пересечения делятся пополам.**

3.3. Примеры решения задач

Задача 1. На сторонах параллелограмма $ABCD$ взяты точки $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$, $C_1 \in CD$, $D_1 \in AD$, причем (рис. 17) $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A}$.

Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

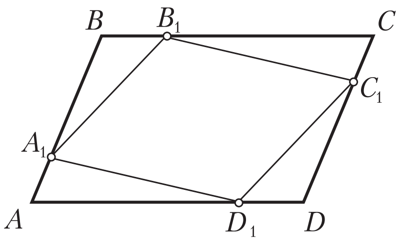


Рис. 17

Решение.

1) Имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AA_1}{A_1B} = \dfrac{CC_1}{C_1D},\\ AB = CD\end{array}\right\} \Rightarrow A_1B = C_1D;$$

2) аналогично: $BB_1 = DD_1$;

3) $\angle B = \angle D$ (по свойству противолежащих углов параллелограмма);

4) $\Delta A_1BB_1 = \Delta C_1DD_1$ (по 1-му признаку);

5) поэтому $A_1B_1 = C_1D_1$;

6) аналогично: $A_1D_1 = B_1C_1$;

7) из п. 5, 6 (по признаку параллелограмма) следует, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом.

Задача 2. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 18). На диагонали AC от вершин A и C отложены равные отрезки AM и CK. Докажите, что четырехугольник $MBKD$ — параллелограмм.

Решение.

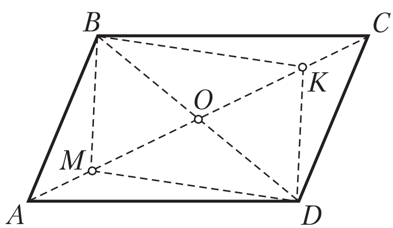


Рис. 18

Пусть O — точка пересечения диагоналей.

1) По свойству параллелограмма $AO = OC$, и так как $AM = CK$, то $OM = OK$;

2) так как $OM = OK$ (по доказанному в п. 1) и $OB = OD$ (по свойству параллелограмма), то в четырехугольнике $MBKD$ диагонали в точке пересечения O делятся пополам;

3) из п. 2 на основании признака параллелограмма следует, что четырехугольник $MBKD$ — параллелограмм.

Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 19) $AB = a$, $AD = 2a$ и угол между ними равен 60°. Найдите: 1) две высоты параллелограмма; 2) площадь параллелограмма.

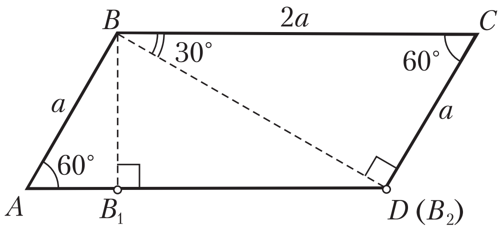


Рис. 19

Решение.

1) Проведем высоту BB_1 к стороне AD. Имеем:
$\angle ABB_1 = 90° - 60° = 30°$;

2) $AB_1 = \frac{a}{2}$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°);

3) $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (по теореме Пифагора);

4) проведем теперь высоту BB_2. Для треугольника CBB_2 имеем:
$\angle CBB_2 = 90° - \angle C = 90° - 60° = 30°$;

5) тогда катет $CB_2 = \frac{BC}{2} = \frac{2a}{2} = a$;

6) поэтому $CB_2 = CD$ и, значит, точка B_2 совпадает с точкой D;

7) значит, высота BB_2 совпадает с диагональю BD;

8) $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$;

9) $S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$;

10) $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$.

Ответ: $BB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $BB_2 = BD = a\sqrt{3}$; $S_{ABCD} = a^2\sqrt{3}$.

§ 4. ПРЯМОУГОЛЬНИК. РОМБ. КВАДРАТ

4.1. Теоретические сведения

Теоремы 5 *(о свойствах прямоугольника, ромба и квадрата)*

1. **Диагонали прямоугольника равны.**
2. **Диагонали ромба перпендикулярны и лежат на биссектрисах его углов.**
3. **Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба.**

Теоремы 6 *(признаки прямоугольника и ромба)*

Если в параллелограмме:

1) **диагонали равны, то он является прямоугольником;**

2) **диагональ лежит на биссектрисе его угла, то он является ромбом;**

3) **диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.**

4.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, треугольник ABO — равносторонний (рис. 20). Найдите сторону BC, если $AB = a$.

Решение.

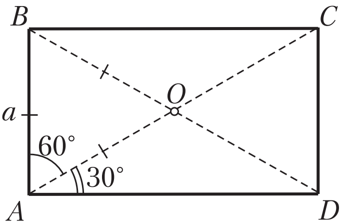


Рис. 20

1) Искомый отрезок BC рассмотрим как сторону прямоугольного треугольника ABC, в котором один угол равен 60°, а другой, значит, равен 30°;

2) поэтому можно применить свойство катета, лежащего против угла в 30°. На основании этого свойства $AC = 2a$;

3) тогда BC можно найти по теореме Пифагора из треугольника ABC:

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Ответ: $BC = a\sqrt{3}$.

Задача 2. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от всех его сторон (рис. 21).

Решение.

1) Пусть O — точка пересечения диагоналей ромба $ABCD$ (см. рис. 21), OM_1, OM_2, OM_3 и OM_4 — перпендикуляры, проведенные к его сторонам. Докажем, что $OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4$. Так как $O \in AC$ и AC — биссектриса $\angle A$, то $OM_1 = OM_2$;

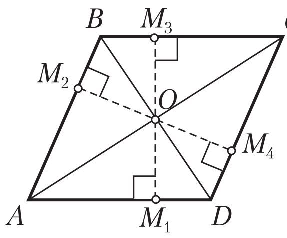


Рис. 21

2) так как $O \in BD$ и BD является биссектрисой $\angle B$, то $OM_2 = OM_3$;

3) аналогично: $OM_3 = OM_4$;

4) итак, $OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4$.

Задача 3. Докажите, что если в параллелограмме точка пересечения диагоналей равноудалена от всех его сторон, то такой параллелограмм является ромбом (см. рис. 21).

Решение.

1) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4$ — перпендикуляры, проведенные к его сторонам. Докажем, что $ABCD$ — ромб.

Так как $OM_1 = OM_2$, то точка O принадлежит биссектрисе угла A;

2) поэтому AC — биссектриса угла A;

3) если в параллелограмме диагональ является биссектрисой его угла, то такой параллелограмм является ромбом.

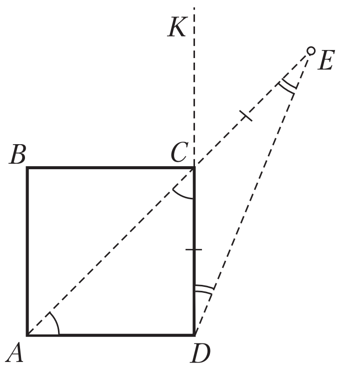


Рис. 22

Задача 4. Постройте квадрат по сумме стороны и диагонали.

1. *Поиск решения.* Допустим, что искомый квадрат $ABCD$ построен (рис. 22). В нем $AC + CD = s$ — данному отрезку. Попытаемся включить отрезок s в некоторый треугольник, связанный с квадратом. Продолжим диагональ AC и на продолжении отложим отрезок $CE = CD$, получим отрезок $AE = AC + CD$ (пусть он равен s).

Построим отрезок DE. Получим треугольник ADE. В этом треугольнике: $AE = s$, $\angle EAD = 45°$, $\angle AED = \dfrac{1}{2}\angle ACD = \dfrac{45°}{2}$. Поэтому его можно построить (по стороне и двум прилежащим углам). Построив сторону AD квадрата, построим квадрат $ABCD$.

2. *Построение*. Строим (см. рис. 22):

1) $AE = s$;
2) $\angle EAD = 45°$;
3) $\angle AED = 45° : 2$;
4) ΔAED;
5) $DK \perp AD$;
6) $C = DK \cap AE$;
7) прямоугольник $ABCD$ — искомый квадрат.

3. *Доказательство*. Так как $\angle EAD = 45°$ и $CD \perp AD$, то $\angle ACD = 45°$, поэтому $AD = DC$ и прямоугольник $ABCD$ — квадрат.

Так как $\angle ACD = 45°$ и $\angle AED = 45° : 2$, то $\angle CDE = 45° : 2$. Тогда $\angle CED = \angle CDE$ и треугольник CDE — равнобедренный: $CD = CE$.

Поэтому $s = AE = AC + CE = AC + CD$.

Тем самым доказано, что в квадрате $ABCD$ сумма диагонали и стороны равна данному отрезку s.

4. *Исследование*. Построения 1—7 выполнимы всегда, поэтому задача всегда имеет решение.

Это решение единственное, так как условие $d + a = s$ однозначно задает сторону квадрата (d — диагональ, a — сторона квадрата):

$$d + a = s \Rightarrow a\sqrt{2} + a = s \Rightarrow a = \frac{s}{1+\sqrt{2}}.$$

§ 5. ТРАПЕЦИЯ

5.1. Теоретические сведения

> ***Средней линией трапеции*** называется отрезок (MK, рис. 23), соединяющий середины боковых ее сторон.

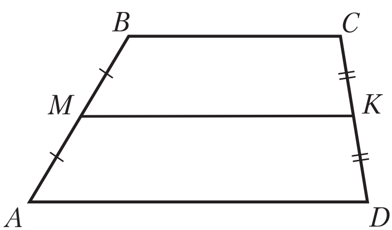


Рис. 23

Равнобедренной трапецией называется трапеция, у которой боковые стороны равны (рис. 24).

Прямоугольной трапецией называется трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна к основаниям (рис. 25).

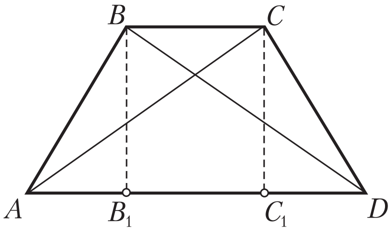


Рис. 24

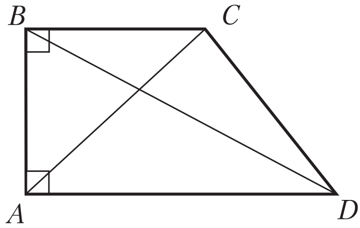


Рис. 25

Теорема 7 *(о свойствах средней линии трапеции)*

Средняя линия трапеции (рис. 26) **параллельна основаниям и равна их полусумме:**

$$MK \parallel BC, \quad MK \parallel AD \quad \text{и} \quad MK = \frac{BC + AD}{2}.$$

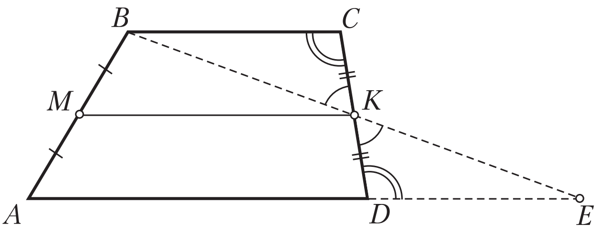


Рис. 26

Следствия.

1. *Прямая, проведенная через середину боковой стороны трапеции параллельно основаниям, делит вторую боковую сторону пополам.*

2. *В равнобедренной трапеции углы при основании и диагонали равны.*

3. *Если в трапеции углы при основании или диагонали равны, то она является равнобедренной.*

5.2. Примеры решения задач

Задача 1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB разделена точками M_1, M_2 и M_3 на четыре равные части (рис. 27). Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции и пересекающие другую боковую сторону соответственно в точках K_1, K_2 и K_3. Найдите отрезки M_1K_1, M_2K_2 и M_3K_3, если $AD = a$, $BC = b$.

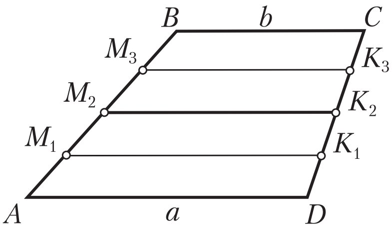


Рис. 27

Решение.

1) Так как M_2K_2 — средняя линия трапеции $ABCD$, то

$$M_2K_2 = \frac{AD + BC}{2} = \frac{a+b}{2};$$

2) так как M_1K_1 — средняя линия трапеции AM_2K_2D, то

$$M_1K_1 = \frac{AD + M_2K_2}{2} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4};$$

3) так как M_3K_3 — средняя линия трапеции M_2BCK_2, то

$$M_3K_3 = \frac{M_2K_2 + BC}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} = \frac{a+3b}{4}.$$

Ответ: $M_1K_1 = \frac{3a+b}{4}$, $M_2K_2 = \frac{a+b}{2}$, $M_3K_3 = \frac{a+3b}{4}$.

Задача 2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 28) M и N — середины соответственно оснований AD и BC. Докажите, что отрезок MN является высотой трапеции.

Решение.

Проведем $NA_1 \parallel AB$, $ND_1 \parallel CD$. Имеем:

1) так как $ABNA_1$ и $NCDD_1$ — параллелограммы, то $A_1N = AB$ и $D_1N = DC$;

2) по условию $AB = DC$, поэтому $A_1N = D_1N$ и, значит, ΔA_1ND_1 — равнобедренный;

3) так как $AM = MD$ (по условию) и $AA_1 = BN = NC = DD_1$, то $A_1M = MD_1$;

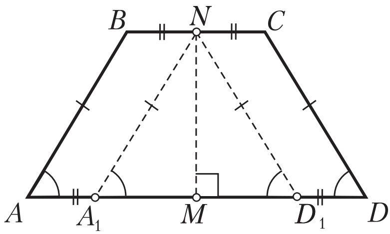


Рис. 28

4) поэтому NM — медиана равнобедренного ΔA_1ND_1;

5) по свойству медианы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, $NM \perp A_1D_1$;

6) следовательно, $NM \perp AD$ и $NM \perp BC$, т. е. NM — высота трапеции $ABCD$.

Задача 3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 29) точки M и N — середины соответственно оснований AD и BC, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что отрезок MN проходит через точку O.

Решение.

1) Применим метод равных треугольников: $\Delta CAD = \Delta BDA$ по трем сторонам;

2) из равенства этих треугольников следует, что $\angle CAD = \angle BDA$;

3) аналогично получаем, что $\angle CBD = \angle BCA$;

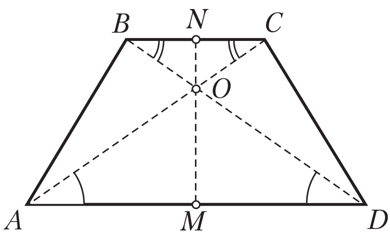


Рис. 29

4) тогда треугольники AOD и BOC — равнобедренные;

5) проведем через точку O биссектрисы вертикальных углов AOD и BOC и учтем, что они лежат на одной прямой (проверьте это);

6) эти биссектрисы для равнобедренных треугольников AOD и BOC является медианами, т. е. их вторые концы совпадут соответственно с точками M и N;

7) отсюда следует, что точки O, M и N лежат на одной прямой и отрезок MN проходит через точку O.

Задача 4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны (рис. 30). Найдите высоту трапеции, если

$AD = a$, $BC = b$. Выразите высоту через среднюю линию данной трапеции.

Решение.

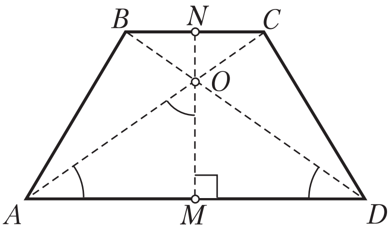


Рис. 30

1) Проведем высоту MN через точку O — точку пересечения диагоналей трапеции. В равнобедренном треугольнике AOD высота OM является биссектрисой, поэтому $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$;

2) тогда $\angle OAM = 90^\circ - \angle AOM = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$;

3) из предыдущего пункта следует, что треугольник AMO — равнобедренный;

4) значит, $OM = AM = \frac{a}{2}$;

5) аналогично: $ON = BN = \frac{b}{2}$;

6) итак, высота $MN = OM + ON = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$;

7) из предыдущего пункта следует, что высота MN равна средней линии данной трапеции.

Ответ: $MN = \frac{a+b}{2}$; высота трапеции равна средней линии.

Задача 5. Докажите, что если в равнобедренной трапеции высота равна средней линии, то диагонали трапеции перпендикулярны. (Сравните эту задачу с предложенной выше задачей 4.) Решите самостоятельно.

§ 6. НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПЛОЩАДЕЙ: ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ

6.1. Теоретические сведения

Из предыдущего класса нам известны формулы площади прямоугольника и прямоугольного треугольника. Познакомимся с новыми сведениями о площадях многоугольников.

Равновеликими фигурами называются две фигуры, которые имеют равные площади.

Теоремы 8

1. **Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, проведенную к этому основанию.**

2. **Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.**

3. **Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.**

4. **Площадь трапеции равна половине произведения высоты на сумму оснований.**

6.2. Примеры решения задач на нахождение площадей фигур

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника проведены перпендикуляры на две другие стороны (рис. 31). Найдите площадь Q ограниченного ими шестиугольника, если площадь треугольника равна S.

Решение.

1) Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC, O — точка, в которой пересекаются серединные перпендикуляры к сторонам (тот факт, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, известен из предыдущего класса). Требуется выразить площадь Q шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ через площадь S треугольника AQC;

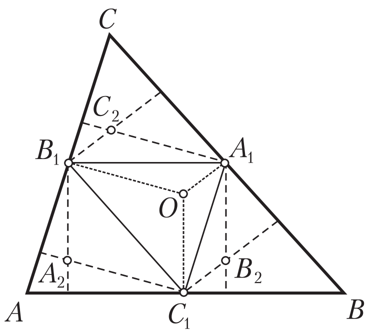


Рис. 31

2) заметим, что отрезки, соединяющие точку O с серединами его сторон, разбивают данный шестиугольник на три параллелограмма: $OA_1C_2B_1, OB_1A_2C_1, OC_1B_2A_1$ (противоположные стороны этих четырехугольников параллельны, так как они перпендикулярны к некоторой стороне данного треугольника);

3) поэтому: $\Delta OA_1C_1 = \Delta B_2C_1A_1$, $\Delta OB_1C_1 = \Delta A_2C_1B_1$, $\Delta OA_1B_1 = \Delta C_2B_1A$;

4) отсюда следует, что площадь шестиугольника вдвое больше площади треугольника $A_1B_1C_1$. Последняя же равна четверти S (в треугольнике $A_1B_1C_1$ сторона A_1B_1 равна половине стороны AB, а высота, проведенная к A_1B_1, равна половине высоты данного треугольника);

5) тогда искомая площадь $Q = 2 \cdot S_{A_1B_1C_1} = 2 \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{2} S$.

Ответ: $Q = \frac{1}{2} S$.

Задача 2. Диагональ прямоугольной трапеции равна ее боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 4, а боковая сторона 5.

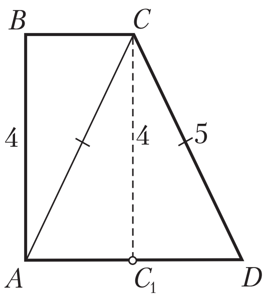


Рис. 32

Решение.

1) Пусть $ABCD$ — прямоугольная трапеция, $AC = CD$, $AB = 4$, $CD = 5$ (рис. 32);

2) проведем высоту CC_1 данной трапеции. Эта высота является и высотой равнобедренного ΔACD;

3) тогда CC_1 — медиана этого треугольника и $AC_1 = DC_1$;

4) так как треугольник CC_1D — египетский ($CC_1 = 4$, $CD = 5$), то $C_1D = 3$;

5) тогда $AD = 6$, $BC = 3$;

6) находим искомую площадь:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot AB = \frac{1}{2}(3 + 6) \cdot 4 = 18.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 18$.

Задача 3. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 4 и 6.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($AB = CD$), $AC \perp BD$, $BC = 4$, $AD = 6$ (рис. 33). Найдем площадь этой трапеции;

2) проведем высоту трапеции через точку пересечения ее диагоналей;

3) а теперь без всяких вычислений можно догадаться, что высота равна 5 (убедитесь в этом!);

4) тогда искомая площадь

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CC_1 =$$

$$= \frac{1}{2}(6+4) \cdot 5 = 25.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 25$.

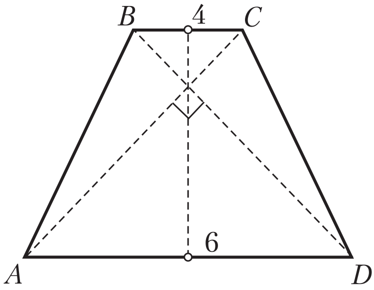


Рис. 33

Задача 4. Пусть a, b и c — соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника, h — высота, проведенная к гипотенузе. Существует ли треугольник со сторонами h, $c + h$ и $a + b$? Если — да, то установите вид этого треугольника и найдите его площадь.

Решение.

1) Воспользуемся формулой высоты прямоугольного треугольника, известной из предыдущего класса: $h = \dfrac{ab}{c}$;

2) тогда $(a+b)^2 + h^2 = (c+h)^2$ (убедитесь в этом!);

3) поэтому треугольник со сторонами h, $c+h$ и $a+b$ является прямоугольным (попутно решен вопрос и о существовании этого треугольника);

4) в этом треугольнике стороны, равные $a + b$ и h, являются катетами. Тогда $S = \dfrac{1}{2}(a+b)\,h.$

Ответ: треугольник с указанными сторонами существует, он является прямоугольным; $S = \dfrac{1}{2}(a+b)\,h.$

Задача 5. Найдите площадь квадрата $ABCD$, вершины A и D которого лежат на оси абсцисс, а две другие — соответственно на прямых $y = x + 1$ и $y = -2x + 3$ (рис. 34).

Решение.

Выделение случаев. Пусть вершины A и D искомого квадрата лежат на оси x (см. рис. 34). Возможны два случая:

1) вершина B лежит на прямой $y = x + 1$;

2) вершина B лежит на прямой $y = -2x + 3$.

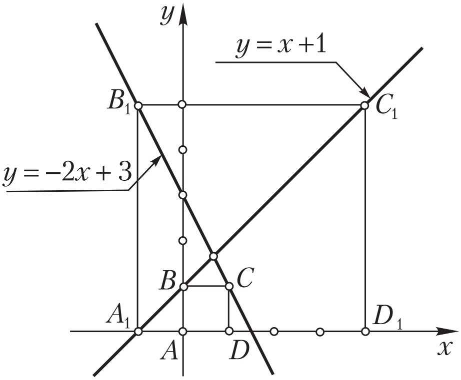


Рис. 34

Пусть сторона квадрата равна a. Задача сводится к нахождению a.

1-й случай. 1) Так как $AB = a$, то по значению ординаты точки B найдем абсциссу этой точки: $x + 1 = a$, $x = a - 1$. Тогда $A(a - 1; 0)$, $B(a - 1; a)$;

2) обратимся теперь к вершине C. Ее ордината тоже равна a. Найдем абсциссу этой точки, приняв во внимание, что точка лежит на прямой $y = -2x + 3$:

$-2x + 3 = a \Rightarrow x = \dfrac{3-a}{2}$;

3) тогда $C\left(\dfrac{3-a}{2};\ a\right)$, $D\left(\dfrac{3-a}{2};\ 0\right)$;

4) найдем сторону AD: $\dfrac{3-a}{2} - (a-1) = a \Rightarrow AD = a = 1$;

5) итак, четырехугольник $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 1. Его площадь равна 1.

2-й случай. 1) Пусть вершина B_1 лежит на прямой $y = -2x + 3$. Как и выше, находим:

$A_1\left(\dfrac{3-a}{2};\ 0\right)$, $B_1\left(\dfrac{3-a}{2};\ a\right)$, $C_1(a-1;\ a)$, $D_1(a-1;\ 0)$;

2) в этом случае четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является квадратом со стороной, равной 5. Его площадь равна 25.

Ответ: 1; 25.

6.3. Метод площадей

При решении различных задач часто полезно использовать площадь фигуры — ***метод площадей***. При этом стремятся выразить площадь одной и той же фигуры различными способами. Записав равенство полученных выражений, приходим к различным соотношениям между элементами фигуры. Иногда полезно отношение длин отрезков заменить отношением площадей треугольников. Заметим, что с этим методом мы уже встречались. Например, при доказательстве теоремы Пифагора.

Обратимся к разъяснению сути метода площадей на конкретных примерах.

Задача 1. Мы знаем, что в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c высота h, проведенная к гипотенузе, находится по формуле $h = \frac{ab}{c}$. Докажите эту формулу методом площадей.

Решение.

Выразим дважды площадь прямоугольного треугольника:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab, \\ S &= \frac{1}{2}ch \end{aligned}\right\} \Rightarrow ab = ch \Rightarrow h = \frac{ab}{c}.$$

Задача 2. Дан остроугольный треугольник с основанием b и высотой h, проведенной к этому основанию. В этот треугольник вписан квадрат, две вершины которого лежат на основании, а две другие — на оставшихся сторонах. Найдите сторону квадрата.

Решение.

1) Обозначим искомую сторону квадрата через x (рис. 35). Дважды выразим площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$. С одной стороны, она равна x^2, с другой стороны — ее можно получить, отняв от площади треугольника ABC площади треугольников AB_1A_1, B_1BC_1 и C_1D_1C;

2) имеем: $\frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}(b-x)x - \frac{1}{2}x(h-x) = x^2$, $x = \frac{bh}{b+h}$.

Ответ: $\frac{bh}{b+h}$.

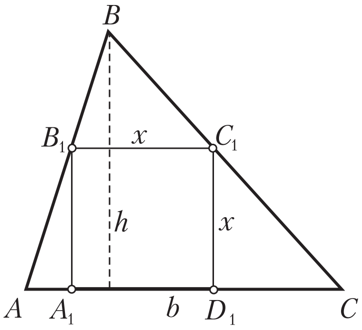


Рис. 35

Задача 3. Существует ли треугольник с высотами, равными 2, 3 и 4?

Решение.

1) Обозначим стороны, соответственные данным высотам, через a, b и c. Тогда

$$\frac{1}{2}a\cdot 2=\frac{1}{2}b\cdot 3=\frac{1}{2}c\cdot 4,\quad a=\frac{3}{2}b=2c,\quad b=\frac{2a}{3},\quad c=\frac{a}{2};$$

2) итак, предполагаемый треугольник должен иметь стороны a, $\frac{2a}{3}$ и $\frac{a}{2}$. Возможно ли это? Сравним сумму двух меньших сторон с наибольшей стороной:

$$\frac{2a}{3}+\frac{a}{2}=\frac{7}{6}a>a,$$

т. е. сумма двух меньших сторон больше третьей стороны;

3) в таком случае, сумма любых двух сторон больше третьей стороны. Так как неравенства треугольника выполняются, то такой треугольник существует.

Ответ: треугольник с высотами 2, 3 и 4 существует.

Задача 4. Найдите площадь четырехугольника с взаимно перпендикулярными диагоналями, равными d_1 и d_2.

Решение.

1) Пусть четырехугольник $ABCD$ удовлетворяет условию задачи (рис. 36). Опишем около него четырехугольник, стороны которого были бы параллельны диагоналям данного;

2) выразим площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Этот четырехугольник является прямоугольником со сторонами, равными d_1 и d_2 (так как его стороны параллельны диагоналям данного четырехугольника). Его площадь $S = d_1 d_2$;

3) нетрудно заметить также, что $S = 2S_{ABCD}$. Тогда $2S_{ABCD} = d_1 d_2$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Ответ: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

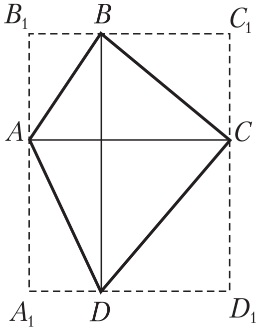


Рис. 36

Задача 5. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные его прилежащим сторонам.

Замысел доказательства. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC (рис. 37). Докажем, что $\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$. Воспользуемся методом площадей.

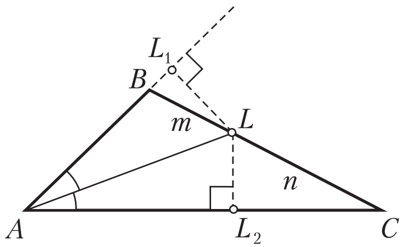


Рис. 37

Доказательство.

1) Применяя формулу площади треугольника, можно записать:

$$\left.\begin{aligned} S_{ABL} &= \frac{1}{2} BL \cdot h_a, \\ S_{ACL} &= \frac{1}{2} CL \cdot h_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{BL}{CL} = \frac{S_{ABL}}{S_{ACL}};$$

2) пусть LL_1 и LL_2 — высоты треугольников ABL и ACL. По свойству точек биссектрисы угла $LL_1 = LL_2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} S_{ABL} &= \frac{1}{2} AB \cdot LL_1, \\ S_{ACL} &= \frac{1}{2} AC \cdot LL_2 = \frac{1}{2} AC \cdot LL_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{S_{ABL}}{S_{ACL}};$$

3) из п. 1 и 2 следует доказываемое равенство.

Задача 6. Докажите, что сумма расстояний от каждой точки основания равнобедренного треугольника до прямых, содержащих его боковые стороны, равна высоте, проведенной к боковой стороне.

Доказательство.

1) Пусть треугольник ABC (рис. 38) — равнобедренный и точка M принадлежит основанию BC; MP и MK — перпендикуляры, проведенные из точки M к прямым AB и AC; BB_1 — высота, проведенная к боковой стороне. Требуется доказать, что $MP + MK = BB_1$;

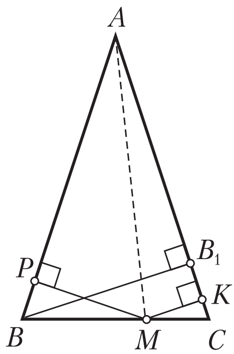


Рис. 38

2) имеем:

$$S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot MP + \frac{1}{2} AC \cdot MK = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1;$$

3) сокращая на $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$, получим:

$$MP + MK = BB_1.$$

§ 7. ПАРАД МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ: ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ФАЛЕСА И НОВЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД — МЕТОД ПОДОБИЯ

Подобные треугольники находят большие применения в элементарной геометрии. Как и метод равных треугольников, ***метод подобных треугольников*** позволяет проще и рациональнее решить многие геометрические задачи.

7.1. Обобщенная теорема Фалеса и подобие треугольников

Два треугольника называются ***подобными***, если у них соответственные углы равны и соответственные стороны пропорциональны (рис. 39).

Обозначение: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Символическая запись определения:

$$\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1, \\ \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = k. \end{cases}$$

Число k называется *коэффициентом подобия треугольников.*

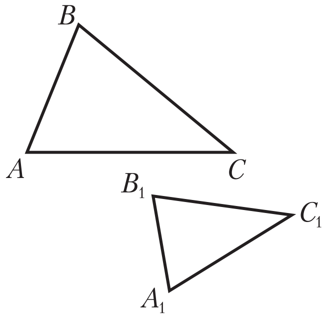


Рис. 39

Теоремы 9 *(обобщенная теорема Фалеса и обратная теорема)*

Обобщенная теорема Фалеса

1. **Если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отношение двух отрезков, лежащих на одной стороне, равно отношению соответственных отрезков, лежащих на другой стороне.**

Обратная теорема

2. **Если отношение любых двух отрезков, лежащих на одной стороне угла, равно отношению соответственных отрезков, лежащих на другой его стороне, то прямые, проведенные через соответственные концы отрезков, параллельны.**

Краткая запись обобщенной теоремы Фалеса.

Дано: $AA_1 \parallel BB_1$ (рис. 40).

Доказать: 1) $\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1}$; 2) $\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}$; 3) $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

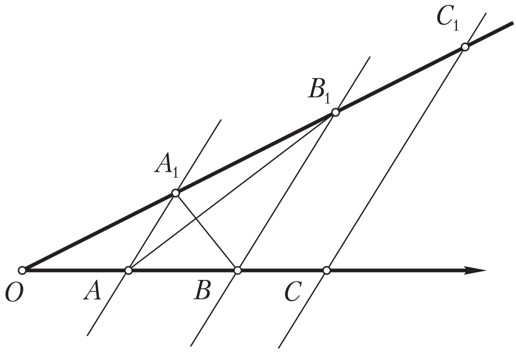


Рис. 40

Замысел доказательства обобщенной теоремы Фалеса. Воспользуемся методом площадей. В частности тем, что отношение площадей треугольников, имеющих равные высоты, равно отношению сторон, к которым эти высоты проведены.

Доказательства:

1. Доказательство обобщенной теоремы Фалеса.

1) Воспользуемся методом площадей: учтем, что $S_{OBA_1} = S_{OB_1A}$.

Тогда $\frac{OA}{OB} = \frac{S_{OAA_1}}{S_{OBA_1}} = \frac{S_{OAA_1}}{S_{OB_1A}} = \frac{OA_1}{OB_1}$;

2)—3) доказательство равенства 2) может быть проведено аналогичным образом с помощью метода площадей. Доказательство равенства 3) может быть сведено к равенству 1), если через точку A_1 провести прямую, параллельную OA.

Возможно чисто алгебраическое доказательство равенств 2) и 3), сводя их к равенству 1) путем преобразования пропорций.

2. Обратная теорема доказывается методом от противного.

Следствия.

1. *Прямая, параллельная некоторой стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.*

2. *Если один треугольник подобен второму, а второй равен третьему треугольнику, то первый треугольник подобен третьему.*

7.2. Признаки подобия треугольников

Теоремы 10

1-й признак подобия треугольников

1. **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между ними равны, то треугольники подобны.**

2-й признак подобия треугольников

2. **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

3-й признак подобия треугольников

3. **Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого, то треугольники подобны.**

Доказательства.

1. *Краткая запись теоремы* (рис. 41):

$$\left(\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}=k, \angle A=\angle A_1\right)\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

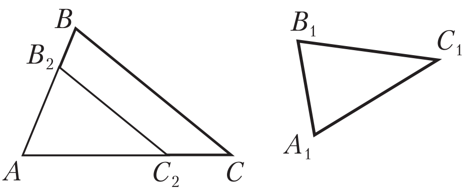


Рис. 41

1) Отложим на сторонах AB и AC (или на их продолжениях) отрезки AB_2 и AC_2, соответственно равные сторонам A_1B_1 и A_1C_1. Получим третий треугольник — ΔAB_2C_2. Нетрудно видеть, что $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$;

2) $\left(\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC},\ AB_2=A_1B_1,\ AC_2=A_1C_1\right)\Rightarrow \frac{AB_2}{AB}=\frac{AC_2}{AC}$;

3) тогда по теореме, обратной обобщенной теореме Фалеса, $BC \parallel B_2C_2$;

4) по следствию 1 из предыдущего пункта $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$;

5) по следствию 2 из предыдущего пункта ($\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$ и $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2—3. Доказываются аналогично.

7.3. Применение метода подобия при решении задач

Метод подобия состоит в том, что часто в фигуре можно найти или построить треугольники, подобие которых можно доказать, пользуясь условием задачи. Затем из подобия треугольников можно вывести равенство углов, пропорциональность отрезков и получить тем самым некоторые новые свойства рассматриваемой фигуры. Обратите внимание на то, что метод подобия аналогичен методу равных треугольников!

Задача 1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике $h_c = \dfrac{ab}{c}$.

Доказательство.

1) Эта формула ранее выводилась с помощью теоремы Пифагора и метода площадей. Докажем ее *методом подобия* — при помощи подобия треугольников (рис. 42): $\Delta ACC_1 \sim \Delta ABC$ ($\angle A$ — общий, $\angle ACC_1 = \angle ABC$);

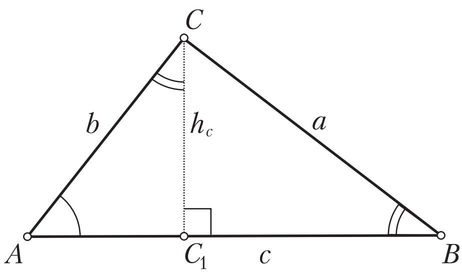


Рис. 42

2) из подобия треугольников получаем:
$$\frac{h_c}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow h_c = \frac{ab}{c}.$$

Задача 2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, проведенной к гипотенузе, равен произведению отрезков, на которые гипотенуза делится высотой.

Доказательство.

1) Применим метод подобия. $\Delta ACC_1 \sim \Delta CBC_1$ (см. рис. 42) по двум углам;

2) из подобия треугольников получаем:
$\dfrac{CC_1}{BC_1} = \dfrac{AC_1}{CC_1} \Rightarrow CC_1^2 = AC_1 \cdot BC_1$.

Задача 3. Стороны параллелограмма равны a и b. Из одной его вершины проведены две высоты. Найдите одну из них, если вторая равна H.

Решение.

1) Применим метод подобия.
$\Delta ABB_1 \sim \Delta CBB_2$ (рис. 43) по двум углам:
$\angle A = \angle C$, $\angle ABB_1 = \angle CBB_2$;

2) из подобия этих треугольников получаем:

$$\frac{x}{H} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{aH}{b}.$$

Ответ: $x = \dfrac{aH}{b}$.

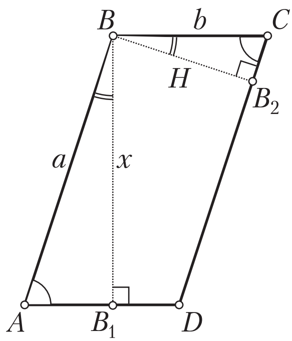


Рис. 43

Тема 2 КООРДИНАТНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ МЕТОДЫ — ОКНО В МИР СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. ПЕРВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА: ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КООРДИНАТНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Формула расстояния

Координатная геометрия — та же самая элементарная геометрия, только она строится с помощью координат. Координаты дают новый метод, который в современной геометрии является одним из ведущих.

Теорема 11

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ **и** $B(x_2; y_2)$ (рис. 44) **находится по формуле** $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. (1)

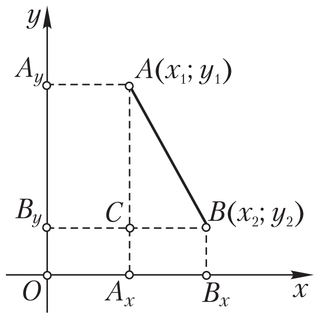


Рис. 44

Доказательство.

1-й случай: $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ (геометрически это означает, что отрезок AB не параллелен ни одной из координатных осей).

1) Пусть C — точка пересечения перпендикуляров AA_x и BB_y. Применим к треугольнику ABC теорему Пифагора, учтя, что $CB = A_xB_x = |x_2 - x_1|; CA = B_yA_y = |y_2 - y_1|$;

2) имеем: $AB^2 = CB^2 + CA^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$;

3) так как $\left|x_2 - x_1\right|^2 = (x_2 - x_1)^2$ и $\left|y_2 - y_1\right|^2 = (y_2 - y_1)^2$, то $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

2-й случай: $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Возможны подслучаи:

$x_1 = x_2,\;\; y_1 \neq y_2;\;\; x_1 \neq x_2,\;\; y_1 = y_2;\;\; x_1 = x_2,\;\; y_1 = y_2.$

(Геометрически это означает, что отрезок AB параллелен оси абсцисс, или параллелен оси ординат, или точки A и B совпадают.)

1) Имеем соответственно: $AB^2 = (y_2 - y_1)^2$, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2$, $AB^2 = 0$;

2) такие же результаты дает и формула (1), что свидетельствует о ее справедливости в этих случаях.

Пример. Даны точки $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 2)$. Найдите расстояние AB (рис. 45).

Решение.

Подставим координаты точек A и B в формулу (1):

$AB^2 = \left(2-(-1)\right)^2 + \left(2-(-2)\right)^2 = (2+1)^2 + (2+2)^2 =$

$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$

Отсюда получаем, что $AB = 5$.

Формулу (1) обычно называют ***формулой расстояния***. Она наряду с теоремой Пифагора является одной из центральных формул элементарной геометрии. По существу, формула расстояния является не чем иным, как теоремой Пифагора, выраженной в координатной форме. Эту формулу можно записать и таким образом:

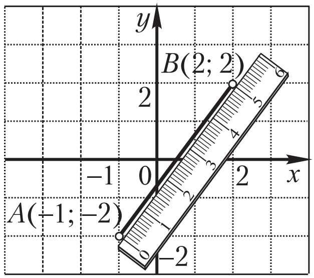


Рис. 45

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Если отрезок AB параллелен оси абсцисс, то: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \left|x_2 - x_1\right|$. Если отрезок AB параллелен оси ординат, то:

$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = \left|y_2 - y_1\right|$.

1.2. Координаты середины отрезка

Следствие. *Пусть $C(x; y)$ — середина отрезка AB, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Тогда* $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Доказательство.

1-й случай: $AB \nparallel y$. 1) Проведем через точки A, B и C прямые, параллельные оси ординат (рис. 46). Пусть они пересекут ось абсцисс в точках A_1, B_1 и C_1: $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$, $C_1(x; 0)$;

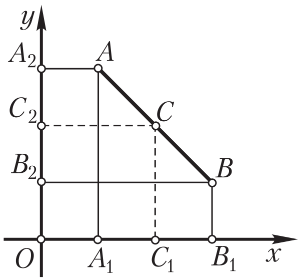


Рис. 46

2) так как C — середина отрезка, то по теореме Фалеса C_1 — середина отрезка A_1B_1;

3) поэтому $|x - x_1| = |x - x_2|$;

4) отсюда или $x - x_1 = x - x_2$, или $x - x_1 = -(x - x_2)$;

5) первое равенство не может иметь места, так как в данном случае $x_1 \neq x_2$;

6) значит, выполняется второе равенство, из которого получаем, что $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

2-й случай: $AB \parallel y$. Здесь $x_1 = x_2$. Более того, все три точки A_1, B_1 и C_1 имеют одну и ту же абсциссу. Формула остается правильной и в этом случае:

$$x = x_1 = \frac{x_1 + x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Аналогичные случаи рассматриваются и при выводе формулы для ординаты y.

1.3. Координатный метод и его первые применения

Система координат помогает перевести геометрические задачи на язык алгебры, свести их к решению различных уравнений. Кратко суть координатного метода состоит в том, что вначале условие задачи переводится на координатный язык, затем, применяя те или иные формулы координатной геометрии, получают некоторые новые свойства изучаемой фигуры. Такой метод решения задач называется ***координатным методом***. При решении задач этим методом часто полезной оказывается следующая схема:

1) строится чертеж;

2) выбирается удобное расположение осей системы координат;

3) записываются координаты данных точек (уравнения прямых, окружностей и других линий);

4) записываются условие и заключение задачи на координатном языке;

5) делается переход от условия задачи к заключению.

С помощью формул расстояния и координат середины отрезка можно решить многие задачи. Приведем некоторые из них.

Задача 1. Координаты точки B противоположны одноименным координатам точки A. Докажите, что начало координат является серединой отрезка AB.

Решение.

1) Пусть a и b — произвольные координаты точки A. Тогда по условию координаты точки B равны $-a$ и $-b$. Итак, $A(a; b)$, $B(-a; -b)$;

2) найдем координаты середины отрезка AB:

$$x = \frac{a+(-a)}{2} = 0, \quad y = \frac{b+(-b)}{2} = 0;$$

3) это означает, что серединой отрезка AB является точка с координатами 0 и 0, т. е. начало координат.

Задача 2. Даны точки $A(1; 5)$ и $B(6; 1)$. На координатных осях найдите точки, равноудаленные от точек A и B.

Решение.

1) Применим метод координат. Пусть точка X лежит на оси абсцисс и равноудалена от точек A и B (рис. 47). Точка X имеет координаты вида $(a; 0)$. Требуется найти координату a;

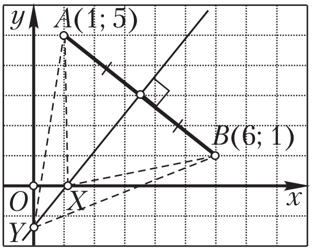


Рис. 47

2) по условию $XA = XB$. Запишем это равенство в координатах (точнее равенство $XA^2 = XB^2$):

$XA^2 = (a-1)^2 + (0-5)^2 = a^2 - 2a + 26,$

$XB^2 = (a-6)^2 + (0-1)^2 = a^2 - 12a + 37,$

$a^2 - 2a + 26 = a^2 - 12a + 37, \quad 10a = 11, \quad a = 1{,}1;$

3) в итоге нашли координаты точки X: $X(1{,}1; 0)$;

4) аналогично находим координаты точки $Y(0; b)$, равноудаленной от точек A и B и лежащей на оси ординат:

$YA^2=(0-1)^2+(b-5)^2=b^2-10b+26,$
$YB^2=\left(0-6\right)^2+\left(b-1\right)^2=b^2-2b+37,$
$b^2-10b+26=b^2-2b+37, \quad 8b=-11, \quad b=-\frac{11}{8}=-1\frac{3}{8};$

5) итак, точка Y имеет координаты 0 и $-1\frac{3}{8}$.

Ответ: $X(1{,}1;\ 0), Y\left(0;\ -1\frac{3}{8}\right)$.

Задача 3. Даны точки $A(1;\ 5)$ и $B(6;\ 1)$. На оси абсцисс найдите точку X, такую, что $XA=2XB$ (рис. 48).

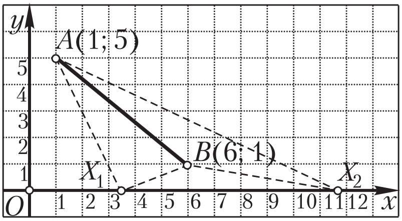


Рис. 48

Решение.

1) Применим метод координат. Положим, что $X(a;\ 0)$. Как и в предыдущей задаче,

$XA^2=a^2-2a+26, \quad XB^2=a^2-12a+37;$

2) ясно, что $XA^2=4XB^2$. Поэтому

$a^2-2a+26=4(a^2-12a+37)\Rightarrow 3a^2-46a+122=0,$

$$a_{1,2}=\frac{46\pm\sqrt{2116-1464}}{6}=\frac{46\pm\sqrt{652}}{6}=\frac{46\pm2\sqrt{163}}{6}=\frac{23\pm\sqrt{163}}{3}.$$

Ответ: $X_1\left(\frac{23-\sqrt{163}}{3};\ 0\right), X_2\left(\frac{23+\sqrt{163}}{3};\ 0\right)$.

Задача 4. На параболе $y=x^2$ найдите точку, равноудаленную от точек $A(3;\ 1)$ и $B(5;\ 4)$.

Решение.

1) Применим метод координат. Если точка M (рис. 49) лежит на параболе $y=x^2$, то координаты этой точки имеют вид a и a^2. Итак, пусть $M(a;\ a^2)$;

2) должно выполняться равенство $AM = BM$ или равенство $AM^2 = BM^2$;

3) имеем:

$AM^2 = (a-3)^2 + (a^2-1)^2$

$BM^2 = (a-5)^2 + (a^2-4)^2$,

$(a-3)^2 + (a^2-1)^2 = (a-5)^2 + (a^2-4)^2$,

$6a^2 + 4a - 31 = 0$,

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{190}}{6}, \quad a_1 \approx -2{,}6; \quad a_2 \approx 2{,}0,$$

$$a_1^2 = \left(\frac{-2-\sqrt{190}}{6}\right)^2 = \frac{97+2\sqrt{190}}{18} \approx 7,$$

$$a_2^2 = \left(\frac{-2+\sqrt{190}}{6}\right)^2 = \frac{97-2\sqrt{190}}{18} \approx 4.$$

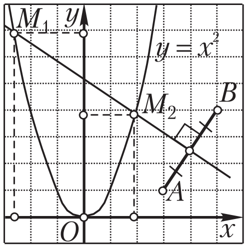


Рис. 49

Ответ: $M_1\left(\frac{-2-\sqrt{190}}{6}; \frac{97+2\sqrt{190}}{18}\right)$, $M\left(\frac{-2+\sqrt{190}}{6}; \frac{97-2\sqrt{190}}{18}\right)$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

2.1. Теоретические сведения

Уравнение прямой. Пусть даны система координат xOy (рис. 50), некоторая прямая a и произвольная точка $M(x; y)$ этой прямой. Представим, что точка M движется и описывает прямую a. При перемещении точки M ее координаты, естественно, изменяются, но, как выяснится, они будут связаны одним и тем же равенством. Это равенство и назовем ***уравнением прямой***.

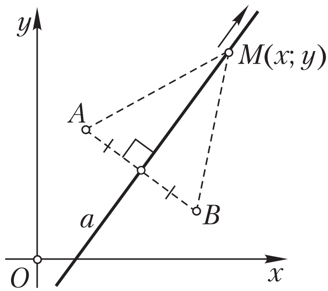


Рис. 50

Общее уравнение прямой. 1) Возьмем точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ так, чтобы прямая a оказалась серединным перпендикуляром к отрезку AB. Тогда $AM = MB$. Запишем это равенство в координатах: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$;

2) этому равенству удовлетворяют только координаты точек прямой a: если точка $M \notin a$, то указанное равенство выполняться не будет, так как в этом случае $MA \neq MB$;

3) выполним преобразования:

$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$;

4) положив $2(x_2 - x_1) = A$, $2(y_2 - y_1) = B$, $(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = C$, придем к уравнению

$$Ax + By + C = 0 \ (A \neq 0 \text{ или } B \neq 0), \qquad (*)$$

которое называется ***общим уравнением прямой***.

Замечание. Условие $A \neq 0$ или $B \neq 0$, приведенное в определении общего уравнения, является существенным. Нетрудно убедиться, что при $A = 0$ и $B = 0$ уравнение вообще не определяет какую-либо линию. В самом деле, если $C = 0$, то уравнению будут удовлетворять координаты любой точки плоскости. Если $C \neq 0$, то не существует хотя бы одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению.

Частные случаи общего уравнения прямой. Отметим два частных случая общего уравнения прямой. Если в уравнении (*) $A = 0$ $(B \neq 0)$, то оно принимает вид $y = n$ и представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс; если $B = 0$ $(A \neq 0)$, то приходим к уравнению $x = m$, представляющему прямую, параллельную оси ординат.

Если $B \neq 0$, то уравнение (*) можно привести к виду

$$y = kx + b, \qquad (**)$$

и это уравнение называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом*** k.

Геометрический смысл углового коэффициента k будет выяснен позже. Заметим также, что с выводом уравнения (**) становится доказанным утверждение из курса алгебры о том, что графиком линейной функции является прямая. Нетрудно доказать, что если угловые коэффициенты двух прямых равны, то прямые параллельны. Справедливо также и обратное предложение.

Полученные результаты сформулируем в виде следующих утверждений.

1. *Общее уравнение прямой имеет вид* (*).

2. *Если* $A = 0$ $(B \neq 0)$, *то общее уравнение прямой имеет вид* $y = n$ *и представляет прямую, параллельную оси абсцисс; если* $B = 0$ $(A \neq 0)$, *то общее уравнение прямой имеет вид* $x = m$ *и представляет прямую, параллельную оси ординат.*

3. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид* (**). *Угловые коэффициенты прямых равны тогда и только тогда, когда прямые параллельны.*

Пример. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 3)$ и $B(1; -5)$.

Замысел решения. Воспользуемся тем, что если прямая проходит через некоторую точку, то координаты точки удовлетворяют уравнению этой прямой (обращают уравнение прямой в верное числовое равенство).

Решение.

1) Так как прямая проходит через точки A и B, то $A(-2) + B \cdot 3 + C = 0$, $A \cdot 1 + B(-5) + C = 0$;

2) из первого равенства выразим A: $A = \frac{3}{2}B + \frac{1}{2}C$ и, подставив во второе равенство, найдем $B = \frac{3}{7}C$;

3) выразим также через C коэффициент A: $A = \frac{8}{7}C$;

4) полученные выражения для A и B подставим в общее уравнение прямой: $\frac{8}{7}Cx + \frac{3}{7}Cy + C = 0 \Rightarrow 8x + 3y + 7 = 0$ — искомое уравнение прямой AB.

Уравнение окружности. *Проблема.* Пусть точка $A(x_1; y_1)$ — центр окружности, $M(x; y)$ — произвольная точка этой окружности (рис. 51). Представим, что точка M описывает окружность. Координаты точки M будут изменяться, но будут связаны некоторым равенством, называемым ***уравнением окружности***. Найдем равенство, связывающее координаты x и y точки M.

Решение проблемы. Пусть R — радиус окружности. Тогда $AM = R$. Запишем это равенство в координатах, пользуясь формулой расстояния между двумя точками: $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=AM^2=R^2$. Получим уравнение $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$, которому удовлетворяют координаты только точек данной окружности. Это уравнение и является *уравнением окружности*.

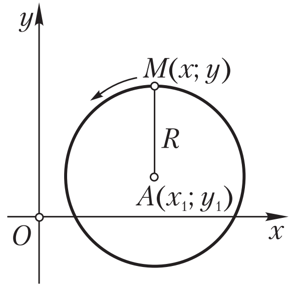


Рис. 51

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат (в этом случае $x_1 = y_1 = 0$), то уравнение окружности имеет более простой вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 1. Какую линию задает уравнение $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$? Постройте эту линию на координатной плоскости.

Решение.

Данное уравнение является уравнением окружности с центром $A(3; -2)$ и радиусом $R = 2$. По этим данным можно построить окружность на координатной плоскости (постройте ее самостоятельно).

Пример 2. Какую линию задает уравнение $x^2 - 6x + y^2 = 0$? Постройте эту линию на координатной плоскости.

Решение.

Выполним следующие преобразования:

$x^2 - 6x + y^2 = x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 = 0.$

Отсюда $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

Получили уравнение окружности с центром $A(3; 0)$ и радиусом $R = 3$. (Постройте эту окружность.)

Пример 3. Запишите уравнение окружности с центром $A(4; 3)$, которая проходит через начало координат.

Решение.

Пусть O — начало координат, тогда AO — радиус окружности. Имеем: $AO^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Получаем искомое уравнение:

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25.$

2.2. Новые применения координатного метода при решении задач

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Докажите, что окружность $x^2 + y^2 = 9$ и прямая $y = \frac{1}{2}x + 1$ пересекаются (рис. 52).

Решение.

1) Применим метод координат. Найдем координаты общих точек окружности $x^2 + y^2 = 9$ и прямой $y = \frac{1}{2}x + 1$. Пусть точка $M(m; n)$ является общей точкой данных окружности и прямой;

2) тогда справедливы равенства
$m^2+n^2=9$ и $n=\frac{1}{2}m+1$;

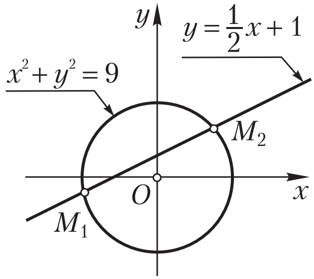


Рис. 52

3) подставим значение n из второго равенства в первое:

$$m^2+\left(\frac{1}{2}m+1\right)^2=9,\quad 5m^2+4m-32=0,$$

$$m_1=\frac{-2-2\sqrt{41}}{5}\approx-2{,}96,$$

$$m_2=\frac{-2+2\sqrt{41}}{5}\approx2{,}16;$$

4) тогда

$$n_1=\frac{1}{2}\left(\frac{-2-2\sqrt{41}}{5}\right)+1=\frac{4-\sqrt{41}}{5}\approx-0{,}48,$$

$$n_2=\frac{1}{2}\left(\frac{-2+2\sqrt{41}}{5}\right)+1=\frac{4+\sqrt{41}}{5}\approx2{,}08.$$

Ответ: $M_1\left(\frac{-2-2\sqrt{41}}{5};\ \frac{4-\sqrt{41}}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{-2+2\sqrt{41}}{5};\ \frac{4+\sqrt{41}}{5}\right)$.

Задача 2. Катеты a и b прямоугольного треугольника лежат соответственно на осях x и y (рис. 53). Запишите уравнение окружности, описанной около этого треугольника (эта окружность проходит через все вершины треугольника).

Решение.

Мы знаем, что медиана CM прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Поэтому $MA=MB=MC$ и точка M является центром искомой окружности. Так как $M\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$ и $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, то получаем следующее уравнение описанной окружности:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2).$$

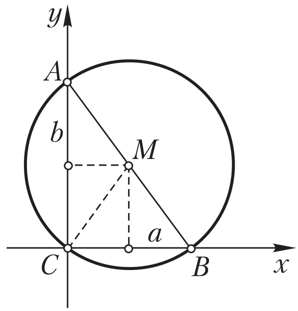


Рис. 53

Задача 3. Равносторонний треугольник со стороной, равной a, расположен относительно системы координат так, как показано на рисунке 54. Запишите уравнение окружности, описанной около треугольника.

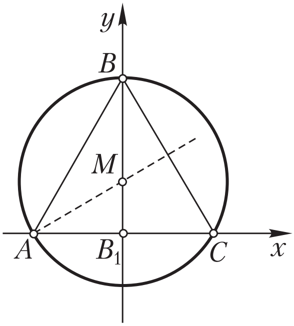


Рис. 54

Решение.

1) Центр описанной окружности (точка M, равноудаленная от всех вершин треугольника) находится как точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Для равностороннего треугольника эта точка совпадает с точкой пересечения биссектрис (медиан, высот);

2) поэтому $\angle MAB_1 = 30°$ и $MB_1 = \frac{1}{2}AM$;

3) по теореме Пифагора

$$AM^2 - \left(\frac{1}{2}AM\right)^2 = AB_1^2 \Rightarrow AM^2 - \frac{AM^2}{4} = \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{3AM^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow AM^2 = \frac{a^2}{3}, \quad AM = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow MB_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

4) в итоге найдены координаты центра M и радиус окружности:

$$M\left(0;\ \frac{a}{2\sqrt{3}}\right), \quad R^2 = AM^2 = \frac{a^2}{3};$$

5) получаем следующее уравнение описанной окружности:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Приведем еще некоторые характерные примеры применения метода координат.

Задача 4. На плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек M, удаленных от A на расстояние, вдвое большее, чем от B.

Решение.

1) Применим метод координат. Выберем систему координат так, как показано на рисунке 55. За единицу масштаба выберем отрезок AB. Запишем координаты точек: $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $M(x; y)$. Задача

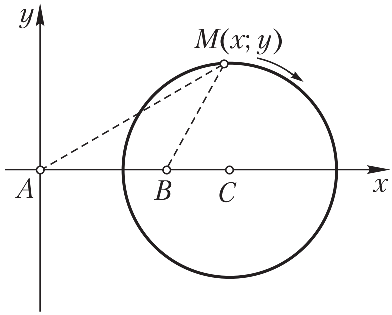


Рис. 55

состоит в том, чтобы выяснить, каким равенством связаны координаты x и y точки M;

2) условие $AM = 2BM$ переведем на координатный язык:
$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$;

3) возведем обе части равенства в квадрат и, выполнив упрощения, получим:

$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0, \quad x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = \frac{4}{9},$

$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2;$

4) получили уравнение окружности с центром $C\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$ и радиусом $R = \frac{2}{3}$;

5) итак, искомое геометрическое место точки M есть указанная окружность.

Задача 5. Докажите, что сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

Решение.

1) Применим метод координат. Выберем систему координат (рис. 56) и запишем координаты точек. Пусть $A(0;\ 0)$, $B(b_1;\ b_2)$, $D(d;\ 0)$. Тогда $C(b_1 + d;\ b_2)$;

2) найдем квадраты сторон и диагоналей:
$AB^2 = b_1^2 + b_2^2 = CD^2; \quad AD^2 = d^2 = BC^2;$

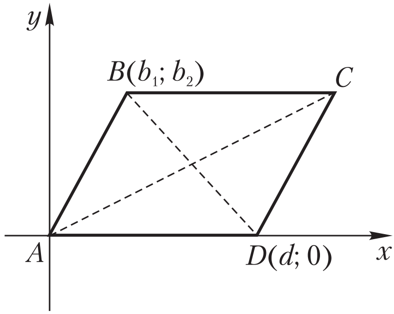


Рис. 56

$AC^2 = (b_1 + d)^2 + b_2^2$; $BD^2 = (d - b_1)^2 + b_2^2$;
3) тогда
$AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2 = 2(b_1^2 + b_2^2) + 2d^2$,
$AC^2 + BD^2 = (b_1 + d)^2 + b_2^2 + (d - b_1)^2 + b_2^2$;
4) сравнив правые части этих равенств, приходим к выводу:
$AC^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$.

Задача 6. Дана окружность $x^2 + y^2 = 4$ и точка $A(-6; 0)$. Запишите уравнение касательной к окружности, проходящей через точку A.

Решение.

1) Имеем: $AB = 6$, $BC = 2$ (рис. 57). Положим, что $BD = y$. Тогда $AD = \sqrt{36 + y^2}$;

2) воспользуемся формулой высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе:

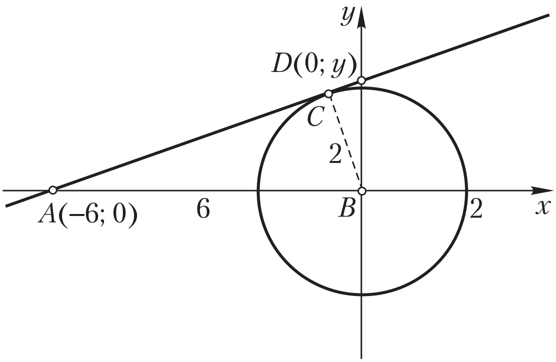


Рис. 57

$$BC=\frac{AB\cdot BD}{AD}\Rightarrow 2=\frac{6\cdot y}{\sqrt{36+y^2}}\Rightarrow\frac{9y^2}{36+y^2}=1\Rightarrow y=\frac{3}{\sqrt{2}};$$

3) в уравнении прямой $y=kx+b$ теперь известно b:

$$b=BD=\frac{3}{\sqrt{2}};$$

4) осталось найти k. Подставим в уравнение прямой координаты точки A:

$$0=-6k+\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow k=\frac{1}{2\sqrt{2}};$$

5) получаем следующее уравнение касательной:

$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Задание. Через точку A к данной окружности можно провести еще одну касательную. Запишите ее уравнение самостоятельно.

§ 3. ЗНАКОМИМСЯ С НОВЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ: ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА, РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

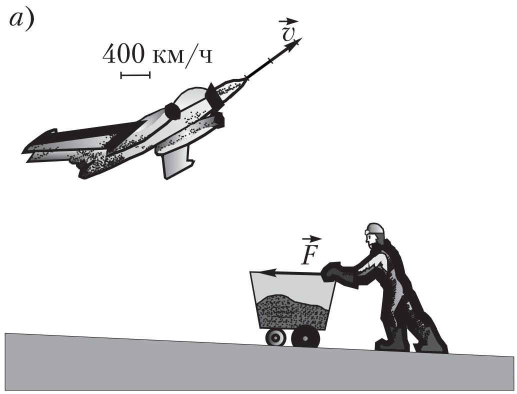
3.1. Определения

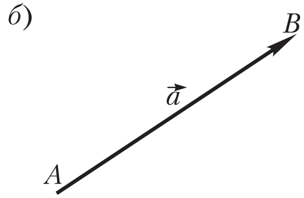
Изучение векторов дает новый геометрический метод — ***векторный метод***, который широко применяется в математике, физике, химии, астрономии, технических расчетах для изучения величин, которые характеризуются одновременно *числовым значением* и *направлением*. Примерами таких величин, известных вам из курса физики, являются *скорость движения* и *сила* (рис. 58, *а*). Начнем с определений.

Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, или ***вектором*** $\overrightarrow{AB}$, называется отрезок AB (рис. 58, *б*), для которого конец A считается первым, а конец B — вторым. Точка A называется *началом вектора*, точка B — его *концом*.

Длиной (модулем, абсолютной величиной) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.





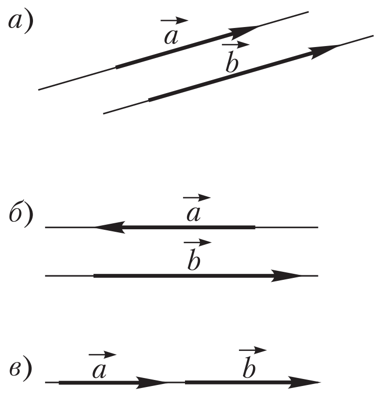
Обозначения:

$\overrightarrow{AB}$ — вектор AB,
$\vec{a}$ — вектор a,
$|\overrightarrow{AB}|$ — длина вектора AB,
$\overrightarrow{AA}$, $\vec{0}$ — нулевой вектор

Рис. 58

Коллинеарными (параллельными) векторами называются два вектора, которые лежат на параллельных прямых (в частном случае эти прямые могут совпадать).

Коллинеарные векторы могут иметь разные длины и направления (рис. 59).



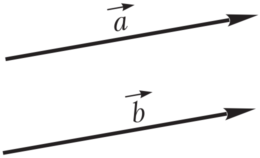
Обозначение:

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ — векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные

Рис. 59

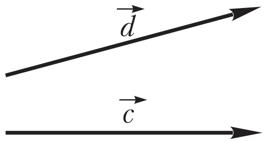
Равными векторами называются два вектора, которые коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными.

На рисунке 60 $\vec{a} = \vec{b}$, а на рисунке 61 $\vec{c} \neq \vec{d}$.



$\vec{a} = \vec{b}$

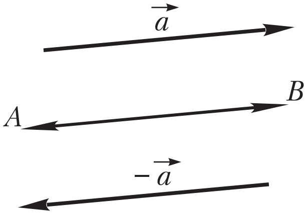
Рис. 60



$\vec{c} \neq \vec{d}$

Рис. 61

Противоположными векторами называются два вектора $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, если один из них равен вектору $\overrightarrow{AB}$, а другой — вектору $\overrightarrow{BA}$ (рис. 62).



$\vec{a}$ и $-\vec{a}$ — противоположные векторы

Рис. 62

Положение точки на координатной плоскости можно задать с помощью координат этой точки. Аналогичной цели служат координаты вектора. Что такое координаты вектора?

Если начало A имеет координаты x_1 и y_1, а конец B — координаты x_2 и y_2, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ называются ***координатами вектора*** $\overrightarrow{AB}$.

Записывают: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ — вектор AB с координатами $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$.

На рисунке 63 имеем: $A(1;\ 5)$, $B(5;\ 2)$. По определению координат вектора: $\overrightarrow{AB}(5-1; 2-5)$, т. е. $\overrightarrow{AB}(4;\ -3)$.

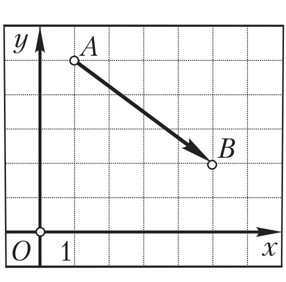


Рис. 63

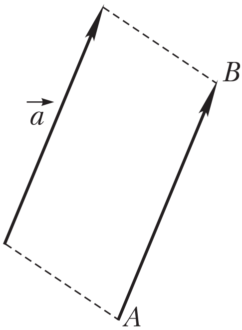


Рис. 64

Пусть дан вектор $\vec{a}$ и некоторая точка A. Построим вектор $\overrightarrow{AB}$ так, чтобы он был равен вектору $\vec{a}$ (как выполнить эти построения?). В этом случае говорят, что ***вектор $\vec{a}$ отложили от точки*** A (рис. 64).

Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC. Если векторы имеют разные начала, то для построения угла между ними их нужно отложить от одной точки.

3.2. Свойства и признаки равенства векторов

Теоремы 12

Об откладывании вектора

1. **Для любого вектора $\vec{a}$ и точки A существует, и притом единственный, вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$.**

1-е свойство равных векторов

2. **Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то четырехугольник $ACDB$ — параллелограмм.**

Признак равенства двух векторов

3. **Если четырехугольник $ACDB$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.**

2-е свойство равных векторов

4. **Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то эти векторы имеют равные одноименные координаты.**

Координатный признак равенства двух векторов

5. **Если одноименные координаты у двух векторов равны, то эти векторы равны.**

О длине вектора

6. **Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ с координатами x и y находится по формуле $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x^2+y^2}$.**

Доказательства теорем 1–3.

1. 1) Пусть $\vec{a}$ и A (см. рис. 64) — данные вектор и точка. Чтобы отложить вектор $\vec{a}$ от точки A, через точку A проведем прямую b, параллельную прямой, на которой лежит вектор $\vec{a}$;

2) на прямой b существует единственная точка B такая, что отрезок AB имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, и направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$;

3) тем самым доказаны существование и единственность вектора $\overrightarrow{AB}$, удовлетворяющего условию теоремы.

2. Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на одной прямой и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажем, что $ACDB$ — параллелограмм (рис. 65, *а*).

По определению равенства двух векторов стороны AB и CD четырехугольника параллельны, равны и направлены в одну сторону.

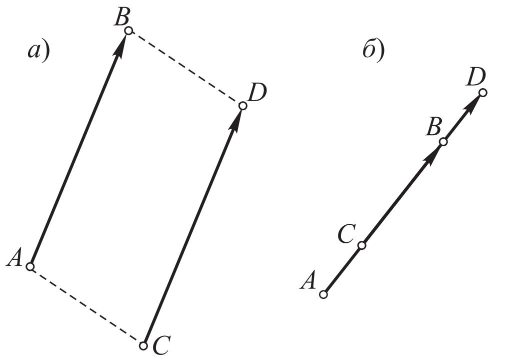
Поэтому $ACDB$ — параллелограмм.

Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной прямой и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $ACDB$ также считается параллелограммом (вырожденным, рис. 65, *б*).

3. Пусть $ACDB$ — параллелограмм. Докажем, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (см. рис. 65, *а*).

Отрезки AB и CD равны и параллельны. На отрезке AB зададим направление от A к B, на отрезке CD — от C к D.

В итоге все требования определения равенства двух векторов выполняются.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ACDB$ — параллелограмм

Рис. 65

Поэтому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

(Это рассуждение остается в силе и для вырожденного параллелограмма.)

Задача 1. Дано: $\overrightarrow{AB}$ $(3;\ y)$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$. Найдите y.

Решение.

1) Должно выполняться равенство $\sqrt{3^2 + y^2} = 5$;

2) отсюда $9 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 16$, $y = \pm 4$;

3) условию задачи удовлетворяют два значения координаты y. Соответственно получаем два вектора: $\overrightarrow{AB_1}$ $(3;4)$, $\overrightarrow{AB_2}$ $(3;-4)$.

Ответ: $\overrightarrow{AB_1}$ $(3;\ 4)$, $\overrightarrow{AB_2}$ $(3;\ -4)$.

Задача 2. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны 2, угол между этими векторами равен 60°. Найдите длину вектора $\overrightarrow{BC}$. Какой угол образует вектор $\overrightarrow{BC}$ с вектором $\overrightarrow{AC}$?

Задача 3. Какое наименьшее и наибольшее значение может принимать угол между двумя векторами?

Задача 4. Дан параллелограмм $ABCD$. Какой угол образуют векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

Задачи 2—4 решите самостоятельно.

§ 4. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

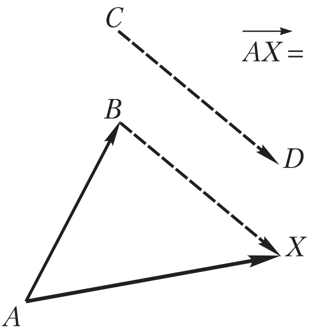
4.1. Сумма двух векторов

Оказывается, что действия можно выполнять не только над числами, но и над векторами. Убедимся в этом. Приведем определение суммы двух векторов (с помощью построений) и рассмотрим ее свойства.

Даны два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (рис. 66). От конца вектора $\overrightarrow{AB}$ отложим вектор $\overrightarrow{BX}$, равный вектору $\overrightarrow{CD}$. Построим вектор $\overrightarrow{AX}$. Вектор $\overrightarrow{AX}$ называется ***суммой векторов*** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

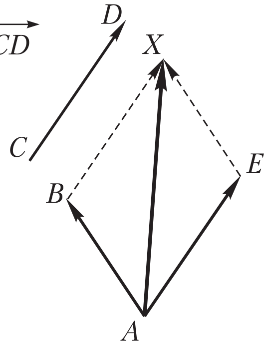
Записывают: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AX}$.

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$



Сложение двух векторов по правилу треугольника

Рис. 66



Сложение двух векторов по правилу параллелограмма

Рис. 67

Как видно из этого определения, сложение двух векторов свелось к построению треугольника ABX. Поэтому сложение двух векторов таким способом называют *правилом треугольника*.

Сложение векторов обладает многими свойствами, аналогичными свойствам сложения чисел.

Теоремы 13

Сложение векторов по правилу параллелограмма

1. **Для построения суммы** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ (рис. 67) **от точки** A **отложим вектор** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$. **Построим четвертую вершину** X **параллелограмма** $ABXE$. **Диагональ** $\overrightarrow{AX}$ **этого параллелограмма является суммой векторов** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AX}$.

2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

3. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

4. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}$.

5. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

6. **При сложении двух векторов их одноименные координаты складываются.**

Обратная предыдущей

7. Если координаты вектора $\vec{c}$ получаются как суммы одноименных координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Доказательства теорем 1–2.

1. По теореме 12.3, если $AEXB$ — параллелограмм (см. рис. 67), то $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$.

По определению суммы двух векторов: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{AX}$.

2. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от некоторой точки O (рис. 68). Обозначим буквами A и B концы векторов $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Рассмотрим параллелограмм $OBCA$. По признаку равенства двух векторов $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. По определению суммы двух векторов (по правилу треугольника):

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}\\ \vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

4.2. Разность двух векторов

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 69) называется вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$. Обозначение: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{x}$.

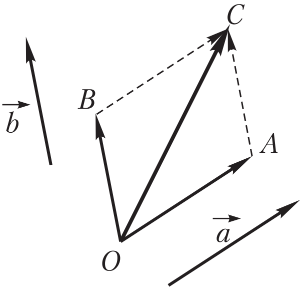


Рис. 68

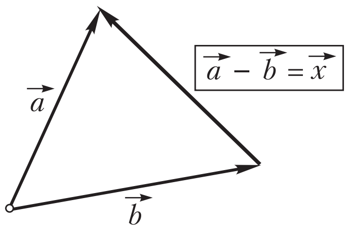


Рис. 69

Замечание. Обратите внимание, что вектор-разность «направлен» к тому вектору, из которого вычитают.

Следствия.

1. $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MK}$ (рис. 70).

2. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

3. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ *тогда и только тогда, когда координаты вектора* $\vec{c}$ *получаются вычитанием из координат вектора* $\vec{a}$ *одноименных координат вектора* $\vec{b}$.

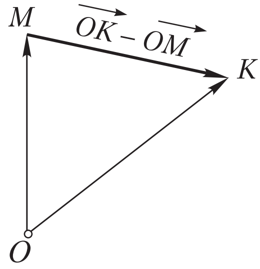


Рис. 70

Доказательства.

1. Имеем: $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK}$ (см. рис. 70). Поэтому $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MK}$.

2. Имеем (рис. 71): $(\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + ((-\vec{b}) + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Отсюда на основании определения разности двух векторов следует, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

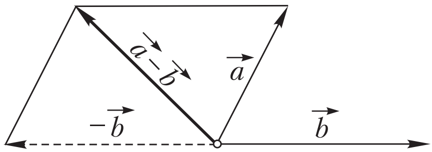


Рис. 71

4.3. Сумма любого числа векторов

Пусть требуется сложить векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$ (рис. 72). Нахождение суммы любого числа векторов сводится к нахождению суммы двух векторов. При этом под ***суммой трех векторов*** $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ по-

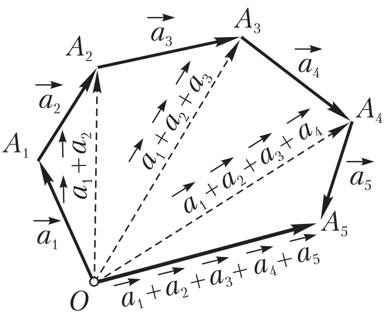


Рис. 72

нимают сумму $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3$. Под *суммой четырех векторов* $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$ понимают сумму $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) + \vec{a}_4$ и т. д.

4.4. Примеры решения задач

Задача 1. Постройте сумму двух коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющих: а) одинаковые направления; б) противоположные направления.

Решение.

а) Пусть коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковые направления (рис. 73). Для построения суммы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ воспользуемся правилом треугольника (определением суммы двух векторов): от конца B первого вектора отложим вектор $\overrightarrow{CD}$, получим вектор $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CD}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AK}$ — искомая сумма двух данных векторов: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AK}$.

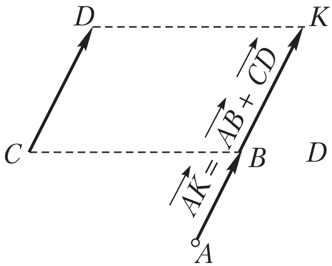


Рис. 73

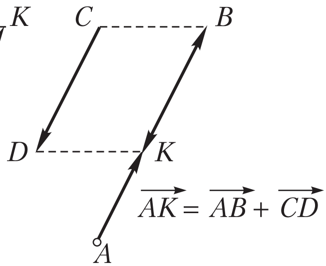


Рис. 74

б) Пусть коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположные направления (рис. 74). Выполнив аналогичные построения, получим: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AK}$.

Задача 2. Постройте разность двух коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющих: а) одинаковые направления; б) противоположные направления.

Решение.

а) Пусть $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и эти векторы имеют одинаковые направления (рис. 75).

Воспользуемся следствием 1 (равенством $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MK}$). Отложим данные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ от одной точки (для простоты отложим их от точки A). Для этого достаточно отложить от точки A вектор $\overrightarrow{CD}$ (вектор $\overrightarrow{AB}$ уже отложен!). При откладывании вектора $\overrightarrow{CD}$ получим вектор $\overrightarrow{AK}$. По следствию 1 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.

б) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположные направления, то разность этих векторов строится аналогично (рис. 76):
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.

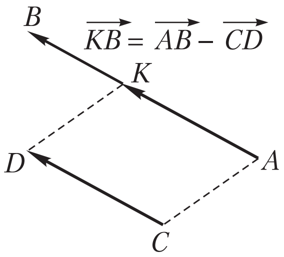


Рис. 75

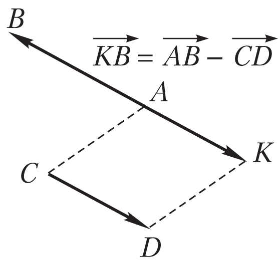


Рис. 76

Задача 3. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Постройте векторы:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Решение.

а) Сумму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ строим по правилу параллелограмма (рис. 77):
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

б) Разность $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ строим, пользуясь следствием 1 (см. рис. 77): $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Задача 4. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.
Докажите самостоятельно.

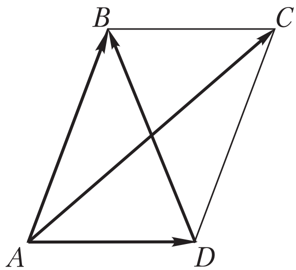


Рис. 77

Задача 5. Убедитесь в том, что вектор $\overrightarrow{AB}$ можно представить в виде суммы двух векторов, причем не единственным образом.

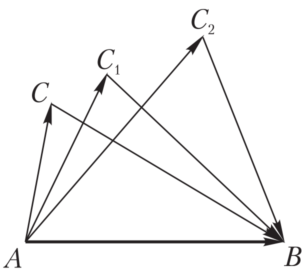


Рис. 78

Решение.

В самом деле (рис. 78), по правилу треугольника:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B}=$$
$$=\overrightarrow{AC_2}+\overrightarrow{C_2B}=\ldots$$

Задача 6. Убедитесь в том, что вектор $\overrightarrow{AB}$ можно представить в виде суммы n векторов, причем не единственным образом.

Задача 7. Постройте два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, сумма которых равна $\vec{0}$.

Задача 8. Постройте два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, разность которых равна $\vec{0}$.

Задачи 6—8 решите самостоятельно.

§ 5. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

5.1. Теоретические сведения

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $k\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$;

2) $k\vec{a}\parallel\vec{a}$;

3) если $k>0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены (рис. 79); если $k<0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены (рис. 80);

4) если $\vec{a}=\vec{0}$ или $k=0$, то $k\vec{a}=\vec{0}$.

На рисунке 79 показано, как вектор $\vec{a}$ умножить на число 3, а на рисунке 80 вектор $\vec{a}$ умножается на число -4.

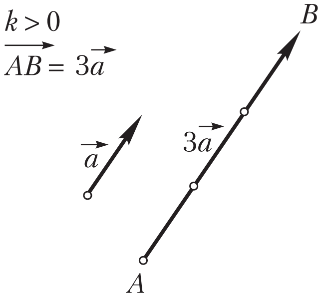


Рис. 79

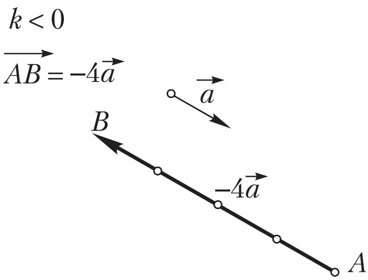


Рис. 80

Теоремы 14

Об умножении вектора на число в координатах

1. **Если x_1 и y_1 — координаты вектора $\vec{a}$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты kx_1 и ky_1: $\vec{a}(x_1; y_1) \Rightarrow k\vec{a}(kx_1; ky_1)$.**

2. а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; б) $(-k)\vec{a} = -(k\vec{a})$.

3. $k(p\vec{a}) = (kp)\vec{a}$.

4. $(k + p)\vec{a} = k\vec{a} + p\vec{a}$.

5. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Доказательство теоремы 1.

1-й случай: $k > 0$.

Замысел доказательства. Искомые координаты вектора $\overrightarrow{OB} = k\vec{a}$ (рис. 81) обозначим через x' и y'. Воспользуемся обобщенной теоремой Фалеса.

1) Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = k\vec{a}$. По условию вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1 и y_1. Для определенности будем считать x_1 и y_1 положительными;

2) искомые координаты вектора $\overrightarrow{OB} = k\vec{a}$ обозначим через x' и y';

3) перпендикуляры из точек A и B на ось Ox обозначим как AA_1 и BB_1. Тогда $OA_1 = x_1, OB_1 = x'$;

4) по обобщенной теореме Фалеса, в силу параллельности AA_1 и BB_1, получим: $\dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB}{OA}$;

5) поскольку $\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB}{OA} = \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|} = k$, то $\frac{x'}{x_1} = k$ и $x' = kx_1$. Аналогично $y' = ky_1$.

2-й случай: $k < 0$ (рис. 82). В этом случае кроме вектора $\overrightarrow{OB}$ рассмотрим еще вектор $\overrightarrow{OC}$, противоположный вектору $\overrightarrow{OB}$. Очевидно, что $\overrightarrow{OC}\left(|x'|; |y'|\right)$. На основании первого случая имеем: $|x'| = |k| \cdot |x_1| \Rightarrow$ $\Rightarrow -x' = (-k)x_1 \Rightarrow x' = kx_1$. Аналогично: $y' = ky_1$.

3-й случай: $k = 0$. Справедливость равенств $x' = kx_1$ и $y' = ky_1$ проверяется непосредственно.

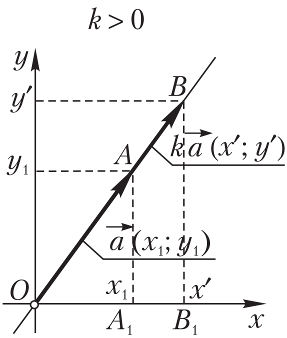


Рис. 81

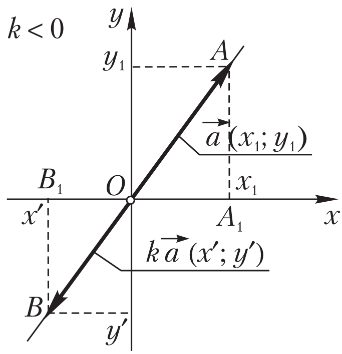


Рис. 82

5.2. Примеры решения задач

Задача 1. а) Постройте вектор $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, где $\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$;

б) докажите, что вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, равен $(-1)\vec{a}$: $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

Решение.

а) Вначале строим (по правилу параллелограмма) вектор $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (рис. 83). Затем строим середину M диагонали OC полученного параллелограмма (точка M строится как точка пересечения диагоналей параллелограмма). Вектор $\overrightarrow{OM}$ — искомый.

б) 1) По определению противоположного вектора если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, то $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Итак, левая часть доказываемого равенства есть вектор $\overrightarrow{BA}$. Если докажем, что вектор $(-1)\vec{a}$, стоящий в правой части равенства, также равен вектору $\overrightarrow{BA}$, то равенство будет доказано;

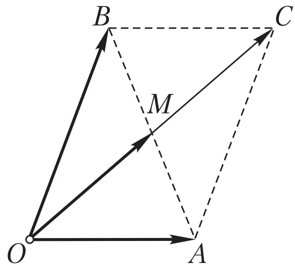


Рис. 83

2) сравним длины векторов $(-1)\vec{a}$ и $\overrightarrow{BA}$:

$|(-1)\vec{a}| = |-1||\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$;

3) установим теперь, что векторы $(-1)\vec{a}$ и $\overrightarrow{BA}$ имеют одно и то же направление: вектор $\vec{a}$ имеет такое же направление, что и вектор $\overrightarrow{AB}$, вектор $(-1)\vec{a}$ — направление, противоположное направлению вектора $\vec{a}$, и значит, противоположное направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. Поэтому векторы $(-1)\vec{a}$ и $\overrightarrow{BA}$ имеют одно и то же направление;

4) если векторы $(-1)\vec{a}$ и $\overrightarrow{BA}$ имеют одинаковые длины и направления, то они равны;

5) окончательный вывод:

$$\left.\begin{aligned} -\vec{a} &= \overrightarrow{BA}, \\ (-1)\vec{a} &= \overrightarrow{BA} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

■ **Задача 2.** Докажите, что векторы $2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны.

Решение.

1) Выполним следующие преобразования:

$2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \vec{0} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AC} = -(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$;

2) последнее равенство означает, что данные векторы коллинеарны.

Задача 3. Упростите выражение $2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}+3\vec{b}$.

Решение.

Имеем: $2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}+3\vec{b}=2\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{a}+3\vec{b}=(2\vec{a}-2\vec{a})+(2\vec{b}+3\vec{b})=$ $=\vec{0}+5\vec{b}=5\vec{b}$.

Задача 4. Найдите координаты вектора $2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}+3\vec{b}$, если $\vec{b}(-2;4)$.

Решение.

1) После упрощений (см. предыдущую задачу) получаем, что $2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}+3\vec{b}=5\vec{b}$;

2) тогда координаты данного вектора равны одноименным координатам вектора $5\vec{b}$: $\vec{b}(-2;4)\Rightarrow 5\vec{b}(-10;20)$.

Ответ: -10 и 20 — координаты данного вектора.

Задача 5. Найдите длину вектора $2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}+3\vec{b}$, если $\vec{b}(-2;4)$.

Решение.

1) После упрощений (см. задачу 3) получаем, что $2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}+$ $+3\vec{b}=5\vec{b}$;

2) тогда $5\vec{b}(-10;20)$, $|5\vec{b}|=\sqrt{(-10)^2+20^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$.

Ответ: $|2(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{a}+3\vec{b}|=10\sqrt{5}$.

§ 6. ПРИЗНАК КОЛЛИНЕАРНОСТИ ДВУХ ВЕКТОРОВ. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ ВЕКТОРАМ

6.1. Теоретические сведения

Рассмотрим еще ряд важных вопросов векторной алгебры, связанных с произведением вектора на число.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна 1.

Координатными векторами, или ***ортами***, называются единичные векторы, имеющие направления положительных координатных полуосей (рис. 84).

Обозначение: $\vec{i}$ — координатный вектор оси Ox, $\vec{j}$ — координатный вектор оси Oy.

Координаты этих векторов: $\vec{i}(1; 0)$, $\vec{j}(0; 1)$.

Если вектор $\vec{m}$ может быть представлен в виде

$$\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \qquad (1)$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, α и β — некоторые числа, то говорят, что ***вектор $\vec{m}$ разложили по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.*** Равенство (1) называется ***разложением вектора $\vec{m}$ по неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.***

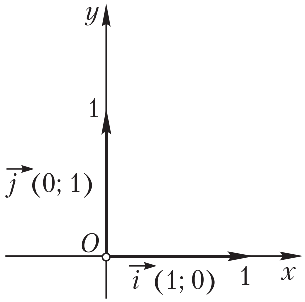


Рис. 84

Теоремы 15

1. **Для того чтобы ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало число k, удовлетворяющее равенству $\vec{a} = k\vec{b}$:**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} \neq \vec{0},\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \parallel \vec{b}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}.$$

О разложении вектора по неколлинеарным векторам

2. **Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы, то любой вектор $\vec{m}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем разложение (1) единственно.**

3. **Если xOy — прямоугольная декартова система координат, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы и $\overrightarrow{OM}(x; y)$ — произвольный вектор, то $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.**

Доказательства.

1. *Достаточность.* По условию $\vec{a} = k\vec{b}$. Отсюда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные (по определению произведения вектора на число).

Необходимость. Докажем обратное предложение. Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. При этом возможны два случая: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — одинаково направленные; $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположно направленные.

1-й случай. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направленные, то справедливо равенство $\vec{a} = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$.

Действительно, векторы $\vec{a}$ и $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$ равны, так как они имеют равные длины: $\left| \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} \right| = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \left| \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right|$ и одинаковое направление (оба они одинаково направлены с вектором $\vec{b}$).

Итак, в этом случае $\vec{a} = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}, \quad k = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

2-й случай. Аналогично проводятся рассуждения, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположно направленные векторы.

Найденное число k является единственным. В самом деле, если допустить, что для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ возможны два равенства $\vec{a} = k\vec{b}$ и $\vec{a} = k_1\vec{b}$, то $(\vec{a} = k\vec{b}$ и $\vec{a} = k_1\vec{b}) \Rightarrow k\vec{b} = k_1\vec{b} \Rightarrow (k - k_1)\vec{b} = \vec{0}$.

Так как $\vec{b} \neq \vec{0}$, то последнее равенство возможно лишь при $k - k_1 = 0$. Отсюда следует, что $k = k_1$ — искомая единственность.

2. 1) Отложим векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{m}$ от точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OM} = \vec{m}$ (рис. 85). Через точку M проведем прямые, параллельные прямым OA и OB. При этом образуется параллелограмм OM_2MM_1. По правилу параллелограмма: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$;

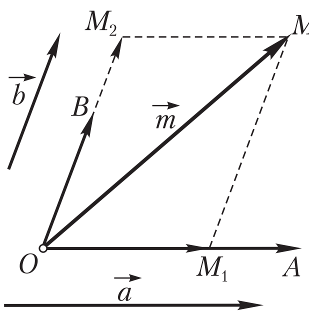


Рис. 85

2) по условию коллинеарности двух векторов существуют такие числа α и β, что $\overrightarrow{OM}_1 = \alpha\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}_2 = \beta\overrightarrow{OB}$;

3) поэтому $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, или, переходя к равным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим искомое равенство (1):

$\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$;

4) докажем единственность разложения (1). Если допустить, что возможно еще хотя бы одно разложение: $\vec{m} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$, то будем иметь:

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} \Rightarrow (\alpha - \alpha_1)\vec{a} = (\beta_1 - \beta)\vec{b}.$

В силу того, что разложения отличаются друг от друга, то либо $\alpha - \alpha_1 \neq 0$, либо $\beta_1 - \beta \neq 0$. Пусть $\alpha - \alpha_1 \neq 0$. Тогда последнее равенство можно преобразовать так: $\vec{a} = \dfrac{\beta_1 - \beta}{\alpha - \alpha_1}\vec{b}.$

Отсюда $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Получили противоречие с условием. Это означает, что разложение (1) единственно.

3. Проведем из точки M перпендикуляры на координатные оси (рис. 86). При этом образуется прямоугольник OM_2MM_1. По правилу параллелограмма (рассуждаем, как и при доказательстве предыдущей теоремы) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$. По условию коллинеарности векторов $\overrightarrow{OM}_1 = \pm|\overrightarrow{OM}_1|\vec{i} = x\vec{i}$,

$\overrightarrow{OM}_2 = \pm|\overrightarrow{OM}_2|\vec{j} = y\vec{j}$.

Тогда $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

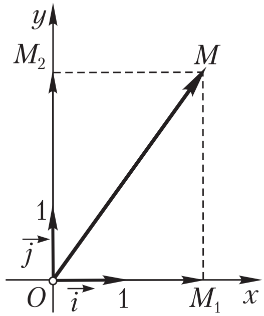


Рис. 86

6.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть M — середина отрезка AB (рис. 87), O — произвольная точка плоскости. Разложите вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

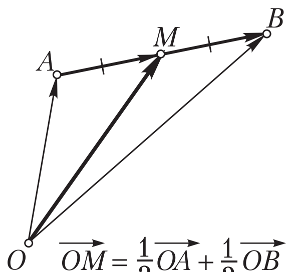
Решение.

1) Так как M — середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

2) векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ выразим через векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OB}$:

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{OM} =$$

$$= -\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} =$$



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Рис. 87

$= \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ — искомое разложение вектора $\overrightarrow{OM}$.

Задача 2. Дан параллелограмм $ABCD$, точка K делит строну BC в отношении 2 : 1 считая от вершины B (рис. 88). Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

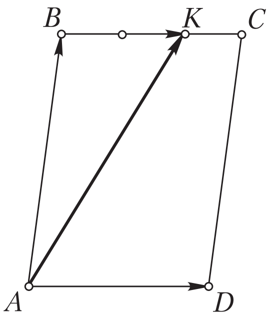


Рис. 88

Решение.

1) Воспользуемся равенством: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$;

2) заменим в нем вектор $\overrightarrow{BK}$: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$;

3) итак, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ — искомое разложение вектора $\overrightarrow{AK}$.

Задача 3. Дан треугольник ABC, точка K — середина стороны BC, BM — медиана треугольника. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BK}$ (рис. 89).

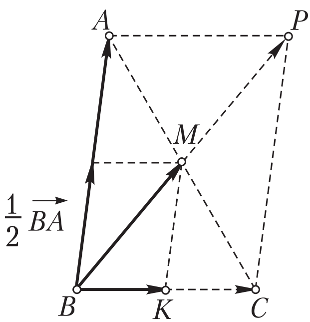


Рис. 89

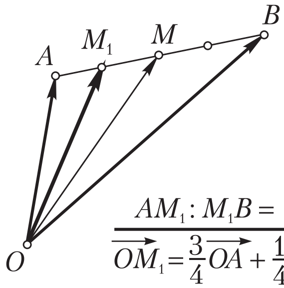
Решение.

1) Достроим треугольник ABC до параллелограмма $BAPC$. Тогда $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BK}$;

2) отсюда $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BK}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}$;

3) итак, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BK}$ — искомое разложение вектора $\overrightarrow{BM}$.

Задача 4. Точка M_1 делит отрезок AB в отношении 1 : 3 считая от точки A, точка O — произвольная точка плоскости. Разложите вектор $\overrightarrow{OM_1}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.



$$AM_1 : M_1B = 1 : 3$$
$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

Рис. 90

Решение.

Пусть M — середина отрезка AB. Тогда (рис. 90):

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}.$$

Итак, $\overrightarrow{OM_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$ — искомое разложение вектора $\overrightarrow{OM_1}$.

§ 7. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

7.1. Теоретические сведения

Мы уже знаем, что векторы можно складывать и вычитать, вектор можно умножать на число и получать новый вектор. Оказывается, вектор можно умножать на вектор и получать при этом число (скаляр)!

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1 и y_1, вектор $\vec{b}$ — координаты x_2 и y_2. ***Скалярным произведением векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Таким образом, по определению $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Пример. На рисунке 91 имеем: $\overrightarrow{AB}(5;\ 1)$, $\overrightarrow{AC}(2;\ 3)$. Поэтому $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 13$.

Следствие. *Скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора системы координат.*

Пример. На рисунке 92 для векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе координат x_1Oy_1 имеем: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 11$. В системе координат x_2Oy_2:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-5) \cdot (-1) + 1 \cdot 6 = 11$. Как видно, при переходе от одной системы координат к другой координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ изменились, а скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ осталось без изменения!

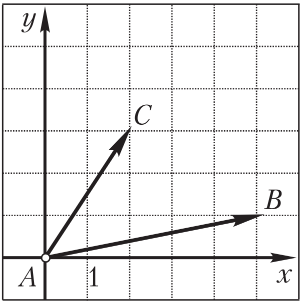


Рис. 91

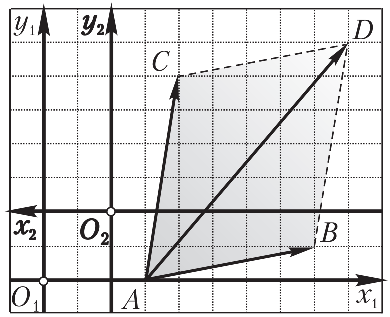


Рис. 92

Теоремы 16 *(векторный признак перпендикулярности прямых и обратная теорема)*

> 1. **Если векторы** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{AC}$ **ненулевые и** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, **то** $AB \perp AC$.
>
> 2. **Если** $AB \perp AC$, **то** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Доказательства.

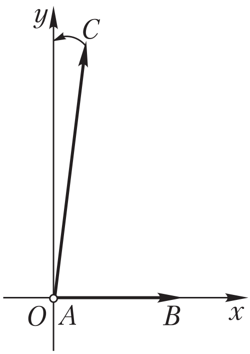


Рис. 93

1. 1) Пусть $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Докажем, что $AB \perp AC$ (рис. 93). Расположим систему координат xOy так, как показано на рисунке. В этой системе координат $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$;

2) запишем это равенство в координатах, учитывая, что $\overrightarrow{AB}(b;\, 0)$, $\overrightarrow{AB}(c_1;\, c_2)$:

$bc_1 + 0c_2 = 0$;

3) отсюда $bc_1 = 0$, так как $b \neq 0$, то $c_1 = 0$;

4) это значит, что $C \in Oy$ и прямые AC и Oy совпадают;

5) если прямая AB совпадает с осью абсцисс, а прямая AC — с осью ординат, то $AB \perp AC$. (Какой интересный способ доказательства перпендикулярности прямых! Не правда ли?)

2. Расположим оси координат так, чтобы ось абсцисс совпала с прямой AB, а ось ординат — с прямой AC. (Выполните рисунок самостоятельно.) Тогда координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют вид $\overrightarrow{AB}(x; 0)$, $\overrightarrow{AC}(0; y)$. Поэтому $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x \cdot 0 + 0 \cdot y = 0$.

Приведем еще некоторые свойства скалярного произведения двух векторов.

Следствия *(продолжение). Свойства скалярного произведения двух векторов:*

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.
3. $\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$.
4. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

7.2. Примеры решения задач

Задача 1. Докажите равенства: а) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$;
б) $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$; в) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Доказательство.

а) Воспользуемся свойствами скалярного произведения двух векторов: $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b})\vec{a} + (\vec{a}+\vec{b})\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 =$
$= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$.

б)—в) Докажите самостоятельно.

Задача 2. Докажите равенство $\vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) + \vec{b}(\vec{c}-\vec{a}) + \vec{c}(\vec{a}-\vec{b}) = 0$.

Доказательство.

Раскроем скобки: $\vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) + \vec{b}(\vec{c}-\vec{a}) + \vec{c}(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} - \vec{b}\vec{a} +$
$+ \vec{c}\vec{a} - \vec{c}\vec{b} = (\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}) + (-\vec{a}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}) + (\vec{b}\vec{c} - \vec{c}\vec{b}) = 0 + 0 + 0 = 0$.

Задача 3. Докажите, что если $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = 0$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Доказательство.

Имеем:

1) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$;

2) $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$;

3) $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Задача 4. Пусть $\vec{a}(3;\ 1), \vec{b}(x;\ 6), \vec{a}\vec{b} = 3$. Найдите x.

Решение.

Имеем:

1) $\vec{a}\vec{b} = 3x + 6$;

2) $3x + 6 = 3 \Rightarrow x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Задача 5. Докажите, что $\vec{a}^{\,2} = (-\vec{a})^2$.

Решение.

Имеем: $(-\vec{a})^2 = (-\vec{a})(-\vec{a}) = (-1\vec{a})(-1\vec{a}) = (-1)(-1)\vec{a}\vec{a} = 1 \cdot \vec{a}^2 = \vec{a}^2$.

Задача 6. Докажите, что если прямая, проходящая через середины оснований трапеции, перпендикулярна к основаниям, то трапеция равнобедренная.

Решение.

1) Применим векторный метод. Рассмотрим скалярные квадраты векторов (рис. 94).

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}$:

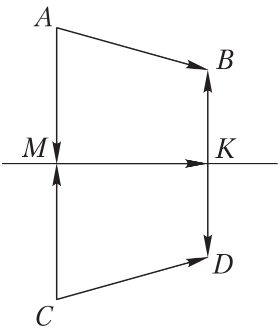


Рис. 94

$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{MK}^2 + \overrightarrow{KB}^2 + 2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{CM}^2 + \overrightarrow{MK}^2 + \overrightarrow{KD}^2 + 2\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KD}$;

2) так как $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{CM}^2$, $\overrightarrow{KB}^2 = \overrightarrow{KD}^2$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MK} = 0$, $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KB} = 0$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MK} = 0$, $\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KD} = 0$, то $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CD}^2$;

3) отсюда $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CD}|^2$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$;

4) это означает, что $AB = CD$ и трапеция $ABDC$ является равнобедренной.

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНОГО И КООРДИНАТНОГО МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Суть ***векторного метода*** решения геометрических задач состоит в том, что вначале эти задачи переводятся на векторный язык, затем проводятся алгебраические вычисления с векторами, наконец полученное векторное решение переводится на геометрический язык.

Пример. Если в задаче сказано, что точка C делит отрезок AB так, что $AC : CB = k$, то это условие с помощью определения произведения вектора на число запишется так: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$.

Если при решении задачи векторный и координатный методы применяются совместно, то такое их сочетание называется ***координатно-векторным методом***.

Обратимся к следующим задачам.

Задача 1. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 95) M и N — середины сторон AB и CD, P, T, K — середины отрезков BC, AD и MN. Докажите, что точки P, T и K лежат на одной прямой.

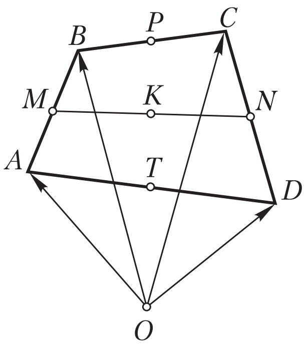


Рис. 95

Доказательство.

1) Применим векторный метод. Возьмем произвольную точку O и рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Воспользуемся векторным равенством для середины отрезка:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}),$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}), \quad \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}), \quad \overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d}).$$

В результате условие задачи переведено на векторный язык;

2) далее выполним алгебраические вычисления с векторами:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d})\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OT});$$

3) полученное векторное равенство переведем на геометрический язык: так как $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT})$, то точка K является серединой отрезка PT, поэтому точки P, K и T лежат на одной прямой.

Задача 2. Пусть $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x; y)$ и точка C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = m : n = k$. Докажите, что координаты точки C могут быть найдены по формулам

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k} \qquad (1)$$

или по формулам

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}. \qquad (2)$$

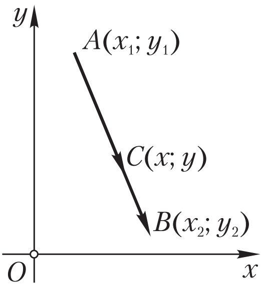


Рис. 96

Доказательство.

Воспользуемся векторным равенством $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$ (рис. 96) и представим его в координатах:

$\overrightarrow{AC}(x - x_1; y - y_1)$, $\overrightarrow{CB}(x_2 - x; y_2 - y)$,

$k\overrightarrow{CB}\ (k(x_2 - x); k(y_2 - y))$,

$$\left.\begin{aligned} k(x_2 - x) &= x - x_1, \\ k(y_2 - y) &= y - y_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1) \Rightarrow (2).$$

Задача 3. С помощью координат и векторов докажите, что средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

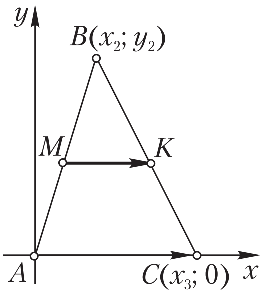


Рис. 97

Доказательство.

1) Применим координатно-векторный метод. Расположим оси системы координат так, как показано на рисунке 97. Пусть $A(0; 0)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; 0)$. Тогда середины сторон AB и BC имеют координаты:

$$M\left(\frac{x_2}{2}; \frac{y_2}{2}\right); \quad K\left(\frac{x_2 + x_3}{2}; \frac{y_2}{2}\right);$$

2) поэтому вектор $\overrightarrow{MK}$ имеет координаты $\left(\dfrac{x_3}{2}; 0\right)$;

3) сравнив координаты векторов $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{AC}$, заметим, что $\overrightarrow{MK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

4) отсюда $MK \parallel AC$ и $|\overrightarrow{MK}| = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$.

Задача 4. Докажите, что в параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

Доказательство.

1) Применим координатно-векторный метод. Расположим оси системы координат и зададим координаты вершин A, B и D так, как показано на рисунке 98;

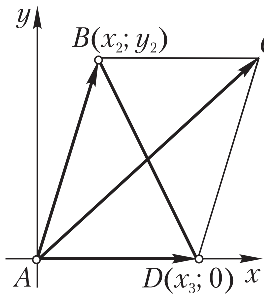


Рис. 98

2) так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, то точка C имеет координаты $(x_2 + x_3;\ y_2)$;

3) найдем теперь квадраты расстояний, о которых идет речь в задаче:

$$\left.\begin{aligned} AC^2 &= (x_2 + x_3)^2 + y_2^2, \\ BD^2 &= (x_3 - x_2)^2 + y_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC^2 + BD^2 =$$

$$= (x_2 + x_3)^2 + y_2^2 + (x_3 - x_2)^2 + y_2^2 = 2(x_2^2 + y_2^2) + 2x_3^2; \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} AB^2 &= x_2^2 + y_2^2, \\ BC^2 &= x_3^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(x_2^2 + y_2^2) + 2x_3^2; \qquad (2)$$

4) из равенств (1) и (2) следует:

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$.

Тема 3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД: РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Известно, что применение различных формул часто облегчает решение геометрических задач. Элементы тригонометрии, к изучению которых мы приступаем, также способствуют этому. Само слово «*тригонометрия*» в переводе с греческого означает «треугольникоизмерение» — косвенное измерение на основе свойств треугольника. Под косвенным измерением понимается не измерение с помощью измерительных инструментов, а вычисление элементов треугольника по формулам. Поэтому основное содержание данной темы составляют *тригонометрические формулы*, связывающие между собой углы и стороны треугольника. Применение этих формул при решении задач составляет суть ***тригонометрического метода***.

§ 1. КООРДИНАТЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть градусная мера угла α изменяется от $0°$ до $180°$. Каждому значению α с помощью системы координат и полуокружности единичного радиуса (рис. 99) поставим в соответствие некоторые числа. Сделаем это следующим образом.

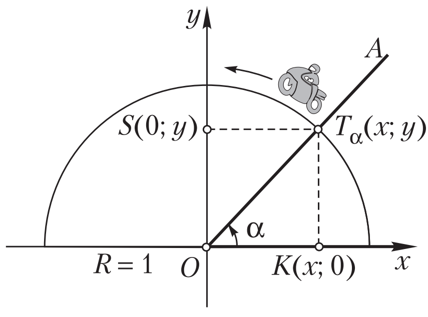


Рис. 99

Пусть xOy — прямоугольная система координат. От положительной полуоси абсцисс в полуплоскость, содержащую положительную полуось оси ординат, отложим $\angle AOx = \alpha$. В этой же полуплоскости построим полуокружность с центром O и радиусом, равным 1. Пусть $T_\alpha(x; y)$ — точка пересечения стороны OA с этой полуокружностью. При изменении α от $0°$ до $180°$ точка T_α опишет единичную полуокружность. При этом, что особенно важно, значения координат x и y точки T_α будут также изменяться. Имеем дело сразу с *четырьмя тригонометрическими функциями*:

$\alpha \to x$ (углу α соответствует абсцисса x);

$\alpha \to y$ (углу α соответствует ордината y);

$\alpha \to \frac{y}{x}$ (углу α соответствует отношение ординаты точки T_α к ее абсциссе);

$\alpha \to \frac{x}{y}$ (углу α соответствует отношение абсциссы точки T_α к ее ординате).

Первая из этих функций называется косинусом угла α, вторая — синусом угла α, третья — тангенсом угла α, четвертая — котангенсом угла α.

Косинусом угла α называется абсцисса точки T_α.

Синусом угла α называется ордината точки T_α.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки T_α к ее абсциссе.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки T_α к ее ординате.

Обозначения: $\cos\alpha$ — косинус угла α; $\sin\alpha$ — синус угла α; $\operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла α; $\operatorname{ctg}\alpha$ — котангенс угла α.

Тогда определения запишутся таким образом:

$\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, где x и y — координаты точки T_α.

Следствия.

1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

2. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

3. *Тригонометрические функции* $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ *не зависят от выбора системы координат.*

Замечание. Заметим, что $\cos\alpha = x$ и $\sin\alpha = y$ существуют всегда, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ существует при лишь при $x \neq 0$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ существует при $y \neq 0$.

§ 2. ГЛАВНОЕ В ДАННОЙ ТЕМЕ — ФОРМУЛЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ СТОРОНЫ И УГЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

2.1. Основные формулы

Решение прямоугольных треугольников основывается на теореме 17 (рис. 100).

Теоремы 17

Основная теорема

1. **В прямоугольном треугольнике:**

а) **косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе;**

б) **синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе;**

в) **тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему;**

г) **котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему.**

2. **Тригонометрические функции принимают следующие значения:**

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\cos\alpha$	$1°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\alpha$	$0°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$0°$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—

Замысел доказательства теоремы 1. Воспользуйтесь следствием: прямая, пересекающая две стороны треугольника и параллельная третьей стороне, отсекает треугольник, подобный данному треугольнику (рис. 101).

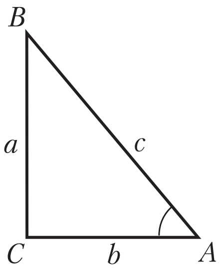


Рис. 100

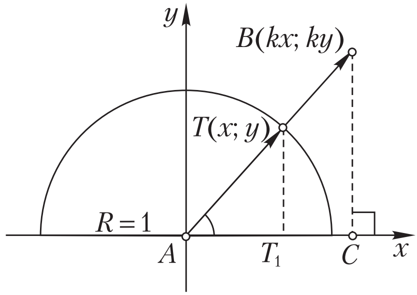


Рис. 101

Доказательство.

1) $\Delta ABC \backsim \Delta ATT_1$ на основании указанного следствия;

2) тогда $\frac{b}{c} = \frac{AC}{AB} = \frac{AT_1}{AT} = AT_1 = \cos\alpha$, $\frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{TT_1}{AT} = TT_1 = \sin\alpha$;

3) $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}$.

2.2. Первые примеры применения тригонометрического метода

Задача 1. Найдите углы прямоугольного треугольника, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (α — один из острых углов этого треугольника).

Дано: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найти: углы прямоугольного треугольника.

Замысел решения задачи. Воспользуйтесь таблицей значений тригонометрических функций для нахождения градусной меры угла α и свойством углов треугольника (сумма углов треугольника равна $180°$).

Решение.

По таблице значений тригонометрических функций находим, что $\alpha = 30°$. Тогда второй острый угол $\beta = 90° - 30° = 60°$.

Ответ: $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

Задача 2. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите косинусы, синусы, тангенсы и котангенсы его острых углов.

Дано: $AC = 3$, $BC = 4$.

Найти: $\cos A$, $\sin A$, $\text{tg}A$, $\text{ctg}A$, $\cos B$, $\sin B$, $\text{tg}B$, $\text{ctg}B$.

Замысел решения задачи. Воспользуйтесь теоремой: $\cos A = \frac{b}{c}$; $\sin A = \frac{a}{c}$; $\text{tg}A = \frac{a}{b}$; $\text{ctg}A = \frac{b}{a}$.

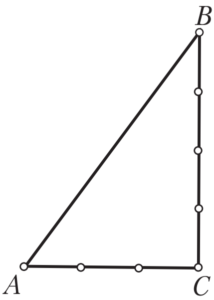


Рис. 102

Решение.

Данный треугольник является египетским: $AB = 5$. Имеем (рис. 102):

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$; $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$; $\text{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$; $\text{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$;

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$; $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$; $\text{tg}B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$; $\text{ctg}B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 3$, $\text{tg}\, A = 4$ (рис. 103). Найдите неизвестные стороны и значения тригонометрических функций угла A.

Дано: $AC = 3$, $\text{tg}\, A = 4$.

Найти: BC, AB, $\cos A$, $\sin A$, $\text{ctg}A$.

Замысел решения задачи. Воспользуйтесь теоремой 17.1:

$\cos A = \frac{b}{c}$; $\sin A = \frac{a}{c}$; $\text{tg}A = \frac{a}{b}$; $\text{ctg}A = \frac{b}{a}$.

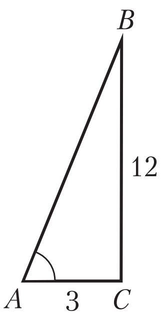


Рис. 103

Решение.

Имеем:

1) $\frac{BC}{AC} = \text{tg}A \Rightarrow \frac{BC}{3} = 4 \Rightarrow BC = 12$;

2) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} \Rightarrow AB = \sqrt{9 + 144} = 3\sqrt{17}$;

3) $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{3\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$;
$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Ответ: 1) $BC = 12$; 2) $AB = 3\sqrt{17}$; 3) $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin A = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{1}{4}$.

Задача 4. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите приближенно острые углы этого треугольника.

Дано: $AC = 5$, $BC = 12$.

Найти: $\angle A$, $\angle B$.

Замысел решения задачи. С помощью теоремы 17.1 найдите значение косинуса острого угла данного прямоугольного треугольника. С помощью микрокалькулятора (если это необходимо) найдите градусную меру этого острого угла, затем, применив свойство углов треугольника, найдите градусную меру другого требуемого угла.

Решение.

Применим тригонометрический метод. Имеем (рис. 104):

1) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$;

2) $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$;

3) $\angle A \approx 67{,}4^\circ$ (находим с помощью микрокалькулятора или по таблицам);

4) $\angle B = 90^\circ - \angle A \approx 90^\circ - 67{,}4^\circ = 22{,}6^\circ$.

Проверка: $\angle A + \angle B \approx 67{,}4^\circ + 22{,}6^\circ = 90^\circ$.

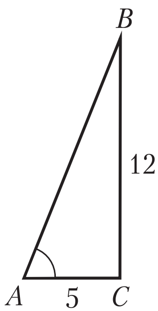


Рис. 104

Ответ: $\angle A \approx 67{,}4^\circ$, $\angle B \approx 22{,}6^\circ$.

Задача 5. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 5 и 12, CD — высота, проведенная к гипотенузе AB. Найдите значения косинуса углов, на которые эта высота разбивает прямой угол C.

Дано: $AC = 5$, $BC = 12$.

Найти: $\cos\angle ACD$, $\cos\angle DCB$.

Замысел решения задачи. Найдите искомые значения косинусов, воспользовавшись теоремой 17.1.

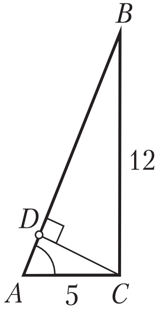


Рис. 105

Решение.

Применим тригонометрический метод. Найдем CD, затем косинус $\angle ACD$ (рис. 105):

1) $CD = \dfrac{AC \cdot CB}{AB} = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13}$;

2) $\cos \angle ACD = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{60}{13} : 5 = \dfrac{60}{13} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{12}{13}$;

3) $\cos \angle BCD = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{60}{13} : 12 = \dfrac{60}{13} \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{5}{13}$.

Задача 6. В ромбе $ABCD$ известны диагонали: $AC = 10$, $BD = 24$. Установите, что $\angle A > 120°$ (рис. 106).

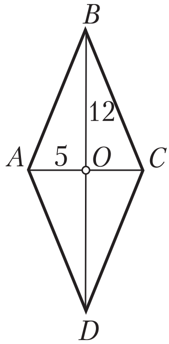


Рис. 106

Дано: $AC = 10$, $BD = 24$.

Установить: $\angle A > 120°$.

Замысел решения задачи. Необходимо воспользоваться свойством диагоналей ромба (они пересекаются под прямым углом и точкой пересечения делятся пополам), найти значение косинуса угла BAO и сравнить его с $\cos 60°$.

Решение.

1) Вначале найдем стороны прямоугольного треугольника AOB: $AO = 5$, $BO = 12$, $AB = 13$ (см. таблицу «Пифагоровы тройки чисел»);

2) тогда $\cos \angle BAO = \dfrac{5}{13}$;

3) неравенство $\angle A > 120°$ будет выполняться, если $\angle BAO > 60°$;

4) в этом случае должно быть $\cos \angle BAO < \cos 60° = \dfrac{1}{2}$;

5) в самом деле: $\dfrac{5}{13} = \dfrac{10}{26} < \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{26}$;

6) значит, $\angle BAO > 60°$ и $\angle A > 120°$.

Ответ: $\angle A > 120°$.

Задача 7. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 8$, $AD = 15$. Найдите произведение тангенсов углов, образуемых диагональю AC со сторонами прямоугольника (рис. 107).

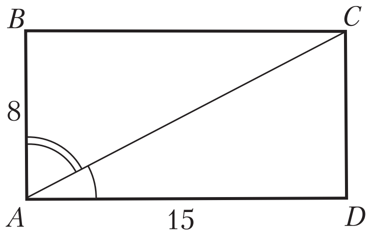


Рис. 107

Дано: $AB = 8$, $AD = 15$.

Найти: $\operatorname{tg}\angle CAD \cdot \operatorname{tg}\angle CAB$.

Решение.

Находим тангенсы $\angle CAD$ и $\angle CAB$:

1) $\operatorname{tg}\angle CAD = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{8}{15}$;

2) $\operatorname{tg}\angle CAB = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{15}{8}$;

3) $\operatorname{tg}\angle CAD \cdot \operatorname{tg}\angle CAB = \dfrac{8}{15} \cdot \dfrac{15}{8} = 1$.

Задача 8. Дана окружность с центром O (рис. 108). Из точки A проведена касательная AK к этой окружности (K — точка касания). Найдите косинус $\angle OAK$ и приближенное значение этого угла, если $AO = 25$, $AK = 24$.

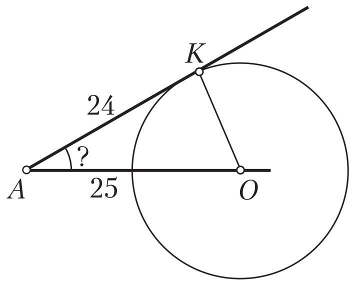


Рис. 108

Дано: $AO = 25$, $AK = 24$.

Найти: $\cos\angle A$, $\angle A$.

Замысел решения задачи. Вспомните свойство: *касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.* Рассмотрите получившийся прямоугольный треугольник и примените теорему 17.1.

Решение.

1) Так как касательная перпендикулярна к радиусу в конце его, лежащем на окружности, то треугольник OAK — прямоугольный с прямым углом K (см. рис. 108);

2) тогда $\cos\angle A = \dfrac{AK}{AO} = \dfrac{24}{25}$, $\angle A \approx 16{,}3°$.

Задача 9. Найдите тангенс угла наклона прямой $y = 2x + 3$ к оси абсцисс.

Дано: $y = 2x + 3$.

Найти: $\mathrm{tg}A$.

Замысел решения задачи. Найдите координаты точек пересечения данной прямой с осями координат. Затем рассмотрите прямоугольный треугольник, образованный осями координат и искомой прямой и, воспользовавшись теоремой 17.1, найдите значение тангенса угла наклона.

Решение.

1) Найдем координаты точек, в которых прямая $y = 2x + 3$ пересекает оси координат (рис. 109). При $x = 0$ имеем, что $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$, поэтому данная прямая пересекает ось y в точке $B(0; 3)$;

2) при $y = 0$ имеем, что $0 = 2x + 3$, $x = -1{,}5$, значит, данная прямая пересекает ось x в точке $A(-1{,}5; 0)$;

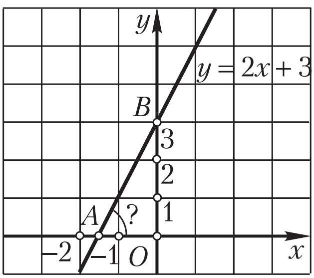


Рис. 109

3) находим катеты прямоугольного треугольника AOB: $OA = 1{,}5$; $OB = 3$. Тогда $\operatorname{tg} A = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{1{,}5} = 2$.

Заметьте, что $\operatorname{tg} A = 2$ — угловому коэффициенту прямой $y = 2x + 3$.

Ответ: $\operatorname{tg} A = 2$.

§ 3. РАЗВИТИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА ТРЕБУЕТ НОВЫХ ФОРМУЛ: ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО, ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

3.1. Теоретические сведения

Теорема 18

Основное тригонометрическое тождество

1. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

Формулы приведения

2. $\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$ при $0° \le \alpha \le 90°$, (1)

$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$ при $0° \le \alpha \le 90°$, (2)

$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$ при $0° \le \alpha \le 180°$, (3)

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$ при $0° \le \alpha \le 180°$. (4)

Доказательства.

1. Для точки $T(x; y)$ единичной полуокружности (рис. 110) выполняется равенство $x^2 + y^2 = 1$ (на основании уравнения окружности, или формулы расстояния, или формулы длины вектора).

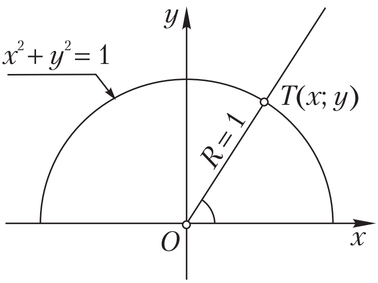


Рис. 110

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1,\\ \cos\alpha&=x,\\ \sin\alpha&=y \end{aligned}\right\}\Rightarrow \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

2. *Замысел доказательства формул (1) и (2).* Рассмотрите прямоугольный треугольник ABC и примените теорему 17.1 (основную теорему).

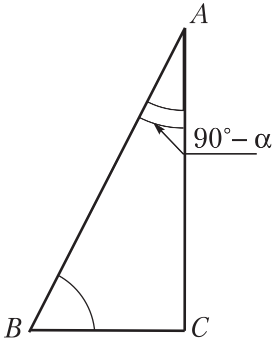


Рис. 111

Из прямоугольного треугольника ABC по теореме 17.1 имеем (рис. 111):

$\cos(90°-\alpha)=\dfrac{BC}{AB}=\sin\alpha;\quad \sin(90°-\alpha)=$ $=\dfrac{AC}{AB}=\cos\alpha.$

Замысел доказательства формул (3) и (4). Рассмотрите $\angle BOA=\alpha$, $\angle B_1OA_1=\alpha$ и $\angle BOA_1=$ $=180°-\alpha$.

Возьмем систему координат xOy (рис. 112), отложим $\angle BOA=\alpha$, $\angle B_1OA_1=\alpha$. Тогда $\angle BOA_1 = 180°-\alpha$. Имеем: $\cos(180°-\alpha)=$ $=-OB_1=-OB=-\cos\alpha$, $\sin(180°-\alpha)=A_1B_1=AB=\sin\alpha$.

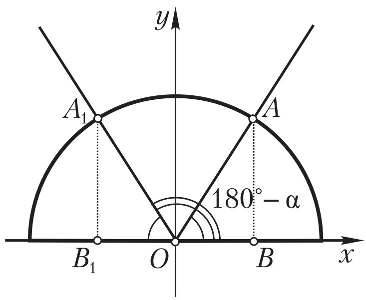


Рис. 112

Замечание. Доказательство формул (3) и (4) проведено для $0°<\alpha<90°$. Если $90°<\alpha<180°$, то рассуждение проводится с помощью системы координат. Для «крайних» значений 0°, 90°, 180° справедливость формул (1)–(4) проверяется непосредственной подстановкой.

3.2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть α и β — острые углы прямоугольного треугольника. Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

Доказательство.

Так как $\beta = 90° - \alpha$,
то $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 (90° - \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Задача 2. Пусть α и β — смежные углы. Докажите, что $\sin \alpha = \sin \beta$.

Доказательство.

Если углы α и β — смежные, то $\beta = 180° - \alpha$. Поэтому $\sin \beta =$ $= \sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$.

Задача 3. Пусть α и β — смежные углы. Докажите, что $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Доказательство.

Имеем: $-\cos \beta = -\cos(180° - \alpha) = -(-\cos \alpha) = \cos \alpha$.

Задача 4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (α — один из острых углов треугольника).

Решение.

По таблице значений тригонометрических функций находим, что $\alpha = 30°$. Тогда второй острый угол $\beta = 90° - 30° = 60°$.

Задача 5. Известно, что $\cos \alpha = \dfrac{5}{6}$. Найдите значения $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Решение.

На основании основного тригонометрического тождества:

1) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{25}{36}} = \sqrt{\dfrac{11}{36}} = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$;

2) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\sqrt{11}}{6} : \dfrac{5}{6} = \dfrac{\sqrt{11}}{6} \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{\sqrt{11}}{5}$;

3) $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \dfrac{5}{\sqrt{11}}$.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (ОСНОВНЫЕ СЛУЧАИ)

4.1. Теоретические сведения

Теорема 17.1 дает возможность *решать* прямоугольные треугольники, т. е. *по некоторым данным их элементам находить другие*.

Эти задачи могут решаться в общем виде (величины заданы буквами) или в конкретной числовой форме (даны числовые значения величин). В последнем случае необходимо пользоваться таблицами или микрокалькулятором.

Заметим, что задачи на решение прямоугольного треугольника являются самыми первыми геометрическими задачами, решаемыми тригонометрическим методом.

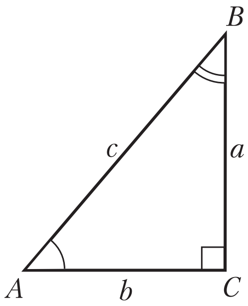


Рис. 113

1. **Дана гипотенуза** c (рис. 113) **и один из острых углов** α**. Найдите второй острый угол и катеты.**

Решение.

1) Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle B = 90° - \angle A = 90° - \alpha$;

2) применим тригонометрический метод: так как $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, то $a = c\sin\alpha$;

3) второй катет можно вычислить различными способами:

а) так как $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c\cos\alpha$;

б) по теореме Пифагора: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

2. **Даны катет** a (см. рис. 113) **и один из острых углов** α**. Найдите второй острый угол, гипотенузу и второй катет.**

Решение.

1) Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда (как и выше) $\angle B = 90° - \alpha$;

2) применим тригонометрический метод: так как $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, то $c = \frac{a}{\sin\alpha}$;

3) так как $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, то $b = \frac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$.

3. **Даны два катета** a **и** b (см. рис. 113)**. Найдите гипотенузу и острые углы.**

Решение.

1) По теореме Пифагора $c=\sqrt{a^2+b^2}$;

2) применим тригонометрический метод: зная катеты, найдем $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$ (а по таблице или с помощью микрокалькулятора, когда даны числовые значения величин, найдем $\angle A$);

3) после этого $\angle B=90°-\angle A$.

4.2. Примеры решения задач с помощью тригонометрического метода

Задача 1. Найдите неизвестные стороны и углы прямоугольного ΔABC, зная его площадь S и острый угол α.

Решение.

1) $\angle B=90°-\angle A=90°-\alpha$;

2) применим тригонометрический метод: выразим катет b через катет a и тангенс угла A:

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}\Rightarrow b=\frac{a}{\operatorname{tg} A}=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha};$$

3) найдем a, учитывая, что $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, приходим к уравнению $\frac{a^2}{2\operatorname{tg}\alpha}=S\Rightarrow a^2=2S\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow a=\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}$;

4) найдем b и c: $\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha\Rightarrow b=a\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}$,

$$\frac{a}{c}=\sin\alpha\Rightarrow c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $\angle B=90°-\alpha$, $a=\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}$, $b=\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}$, $c=\frac{\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}}{\sin\alpha}$.

Задача 2. В прямоугольном ΔABC $BC=10$, $\angle A=\alpha$ (рис. 114). Найдите высоту h_C.

Замысел решения. Обратимся к треугольнику с катетом h_C и гипотенузой, равной 10. Что в нем известно? (Гипотенуза a. Угол B неизвестен, но его легко найти: $\angle B=90°-\alpha$.) После этого можно находить искомую высоту.

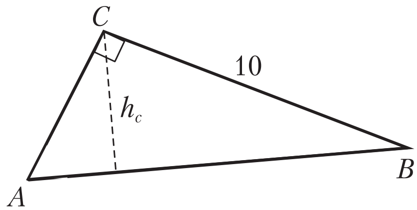


Рис. 114

Решение.

Применим тригонометрический метод:

$$\frac{h_C}{a} = \sin B \Rightarrow h_C = a\sin(90° - \alpha) = 10\cos\alpha.$$

Задача 3. В прямоугольном ΔABC проведена биссектриса CL из вершины прямого угла, $\angle A = 30°$, катет $AC = 15$. Найдите отрезок AL.

Решение.

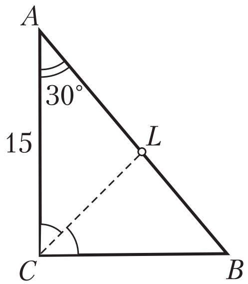


Рис. 115

Найдем катет a и гипотенузу c, затем воспользуемся свойством биссектрисы треугольника (рис. 115). Применим тригонометрический метод:

1) $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}A \Rightarrow a = b\,\mathrm{tg}A = 15 \cdot \mathrm{tg}30° = 5\sqrt{3};$

2) $c = 2a = 10\sqrt{3};$

3) по свойству биссектрисы треугольника:

$$\frac{AL}{LB} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{AL}{LB} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

4) полученное равенство перепишется таким образом:

$$\frac{AL}{LB} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{AL}{AB - AL} = \sqrt{3} \Rightarrow AL = AB\sqrt{3} - AL\sqrt{3} \Rightarrow AL(1+\sqrt{3}) =$$
$$= AB\sqrt{3};$$

5) отсюда $AL = \frac{AB\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{30}{1+\sqrt{3}}.$

Задача 4. На рисунке 116 дано поперечное сечение канала, имеющее форму равнобедренной трапеции. Найдите угол наклона боковой стороны к отрезку, изображающему поверхность воды.

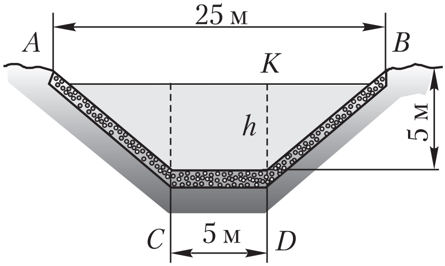


Рис. 116

Решение.

1) Пусть $h = 5$ — высота трапеции. Требуется найти $\angle KBD$;

2) рассмотрим ΔKBD. В нем $KD = h = 5$;

3) найдем BK:

$$BK = \frac{AB - CD}{2} = \frac{25 - 5}{2} = 10 \text{ м};$$

4) применим тригонометрический метод:

$$\operatorname{tg}\angle KBD = \frac{KD}{KB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad \angle KBD = 30°.$$

Ответ: $\angle KBD = 30°$.

Задача 5. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите тангенс угла B_1DB и приближенное значение этого угла.

Решение.

1) Положим, что ребро куба равно a (рис. 117). Тогда из прямоугольного ΔABD получаем:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2};$$

2) применим тригонометрический метод:

$$\operatorname{tg}\angle B_1DB = \frac{BB_1}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\angle B_1DB \approx 35{,}3°$.

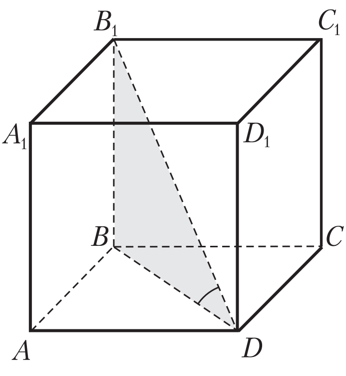


Рис. 117

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

Использование тригонометрических функций при решении задач представляет собой весьма сильный математический метод, который называется ***тригонометрическим***.

Тригонометрия помогает находить не только неизвестные стороны и углы прямоугольного треугольника, но и его высоты, медианы, биссектрисы, радиусы описанной и вписанной окружностей, площадь и т. д. С помощью тригонометрии могут также решаться задачи на доказательство. Приведем примеры таких задач.

Задача 1. Даны гипотенуза c и один из острых углов α. Найдите высоты данного треугольника.

Решение.

1) Пусть $\angle A = \alpha$ (рис. 118). Применим тригонометрический метод:

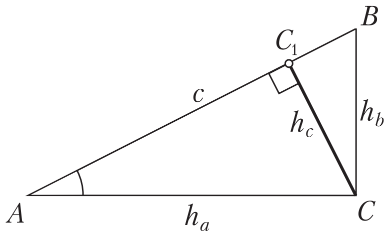


Рис. 118

$h_a = AC = b = c\cos\alpha, \quad h_b = BC = a = c\sin\alpha;$

2) найдем теперь h_c:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\sin\alpha = c\cos\alpha\sin\alpha.$$

Ответ: $h_a = c\cos\alpha$, $h_b = c\sin\alpha$, $h_c = c\cos\alpha\sin\alpha$.

Замечание. С помощью формулы синуса двойного аргумента высоту можно представить в таком виде:

$$h_c = \frac{1}{2}c\sin 2\alpha.$$

Задача 2. Даны гипотенуза c и один из острых углов α. Из вершины прямого угла C проведена высота CC_1. Найдите длины отрезков AC_1 и BC_1. Сделайте проверку правильности решения задачи.

Решение.

Применим тригонометрический метод (см. рис. 118):

1) $\left(AC = c\cos\alpha,\ \dfrac{AC_1}{AC} = \cos\alpha\right) \Rightarrow AC_1 = AC\cos\alpha = c\cos^2\alpha;$

2) $C_1B = c\cos^2 B = c\cos^2(90° - \alpha) = c\sin^2\alpha.$

Проверка. Если задача решена правильно, то сумма $AC_1 + BC_1$ должна равняться c. В самом деле:

$AC_1 + C_1B = c\cos^2\alpha + c\sin^2\alpha = c(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = c.$

Задача 3. В прямоугольном ΔABC высота h_c, проведеная из вершины прямого угла на гипотенузу, является средним пропорциональным между отрезками AC_1 и C_1B гипотенузы, т. е. $\dfrac{AC_1}{h_c} = \dfrac{h_c}{C_1B}$, или $h_c^2 = AC_1 \cdot C_1B.$

Решение.

Применим тригонометрический метод. При решении двух предыдущих задач было установлено, что (см. рис. 118) $h_c = c\cos\alpha\sin\alpha$, $AC_1 = c\cos^2\alpha$, $C_1B = c\sin^2\alpha$. Поэтому

$AC_1 \cdot C_1B = c\cos^2\alpha \cdot c\sin^2\alpha = c^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha;$

$h_c^2 = (c\cos\alpha\sin\alpha)^2 = c^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$

Отсюда $h_c^2 = AC_1 \cdot C_1B$.

С помощью доказанного в задаче 3 утверждения получаем следующее.

Следствие. *Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки окружности на диаметр, является средним пропорциональным между отрезками диаметра.*

Приведем пример *геодезической* задачи (задачи, связанной с измерениями на местности).

Задача 4. Найдите расстояние между пунктами A и B, разделенными препятствием.

Решение.

1) Строим на местности прямой $\angle BAC$ (рис. 119);

2) на луче AC отметим произвольную точку D;

3) измерим $\angle ADB$. Пусть $\angle ADB \approx 44°$. Измерим расстояние AD. Пусть $AD \approx 120$ м;

4) применим тригонометрический метод:

$\mathrm{tg}\,44° \approx \dfrac{AB}{120} \Rightarrow AB \approx 120\,\mathrm{tg}\,44° \approx 120 \cdot 0{,}9657 \approx 116$ м.

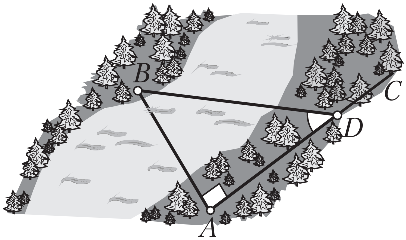


Рис. 119

Задача 5. В равнобедренном ΔABC точка O — центр описанной окружности, $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности.

Решение.

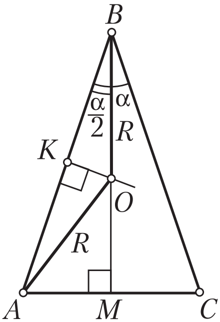


Рис. 120

1) Пусть O — центр описанной окружности (рис. 120). Мы знаем, что точка O находится как точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

2) рассмотрим прямоугольный ΔBKO. В нем $BK = \frac{a}{2}$, $\angle KBO = \frac{\alpha}{2}$;

3) применим тригонометрический метод:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{BK}{BO} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R\cos\frac{\alpha}{2} = a \Rightarrow R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ

6.1. Теоретические сведения

Ранее скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\ (x_1; y_1)$ и $\vec{b}\ (x_2; y_2)$ определялось при помощи координат: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. Скалярное произведение векторов можно выразить геометрически — через длины векторов и угол между ними. Предварительно рассмотрим следующее определения.

Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$ (рис. 121) называется $\angle BAC$, образованный лучами AB и AC. *Углом между произвольными векто-*

рами $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 122) называется угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ такими, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

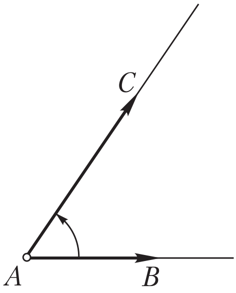


Рис. 121

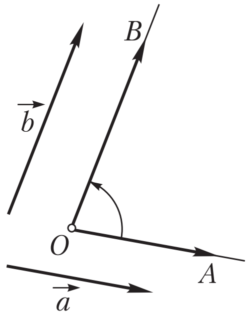


Рис. 122

Задача. Дана прямоугольная система координат xOy и вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\angle AOx=\alpha$. Выразите координаты вектора $\vec{a}$ $(x; y)$ через его длину $|\vec{a}|$ и тригонометрические функции угла α.

Ответ: $x=|\vec{a}|\cos\alpha$, $y=|\vec{a}|\sin\alpha$.

Теорема 19 *(о геометрическом смысле скалярного произведения двух векторов)*

Скалярное произведение двух векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha.$$

Доказательство.

1) Мы уже знаем, что значение скалярного произведения двух векторов не зависит от выбора системы координат, т. е. остается постоянным (для данных двух векторов) в любой системе;

2) поэтому расположим оси системы координат (рис. 123) таким образом, чтобы можно было проще найти координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а значит, само скалярное произведение этих векторов;

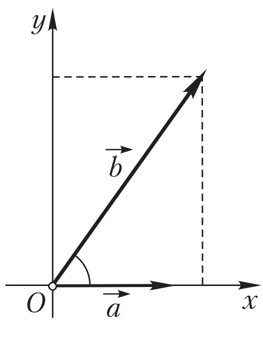


Рис. 123

3) имеем: $\vec{a}\ (|\vec{a}|; 0), \vec{b}\ (|\vec{b}| \cos\alpha; |\vec{b}| \sin\alpha)$;

4) тогда $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha + 0 \cdot |\vec{b}| \sin\alpha = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$.

Следствие. *Угол между векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ находится по одной из следующих формул:*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

6.2. Примеры решения задач с помощью скалярного произведения векторов

Задача 1. Найдите угол между векторами $\vec{a}(1; -2)$ и $\vec{b}(-3; 1)$.

Решение.

Найдем косинус искомого угла по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{1\cdot(-3) + (-2)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда $\alpha = 135°$.

Задача 2. Дан квадрат $ABCD$ (рис. 124), точка K — середина стороны AD, точка M делит сторону CD в отношении 1 : 2 считая от вершины C. Найдите: а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$; б) приближенное значение этого угла.

Решение.

1) Воспользуемся системой координат. Положим, что сторона квадрата равна a. Запишем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AM}\left(a;\ \frac{2}{3}a\right),\quad \overrightarrow{BK}\left(\frac{a}{2};\ -a\right);$$

2) найдем длины этих векторов:

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3};$$

$$|\overrightarrow{BK}| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

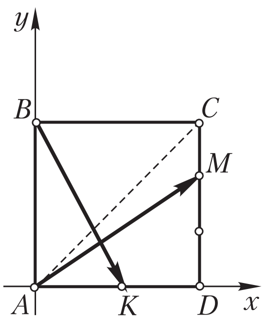


Рис. 124

3) тогда $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BK}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{BK}|} = \dfrac{a\cdot\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{3}a\cdot a}{\dfrac{a\sqrt{13}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{65}}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{65}}$, $\alpha \approx 97°$.

Задача 3. В условиях предыдущей задачи найдите приближенно угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AC}$ (см. рис. 124).

Решение.

1) $|\overrightarrow{AM}| = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}, |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$;

2) $\overrightarrow{AM}\left(a;\ \dfrac{2}{3}a\right), \overrightarrow{AC}(a;a)$;

3) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = a^2 + \dfrac{2}{3}a^2 = \dfrac{5}{3}a^2$;

4) $\cos\alpha = \dfrac{\dfrac{5}{3}a^2}{\dfrac{a\sqrt{13}}{3}\cdot a\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

Ответ: $\alpha \approx 11{,}3°$.

Задача 4. На рисунке 125 показаны точки пересечения прямых $y = 2x+3$ и $y = -x+3$ друг с другом и с осями координат. Найдите:

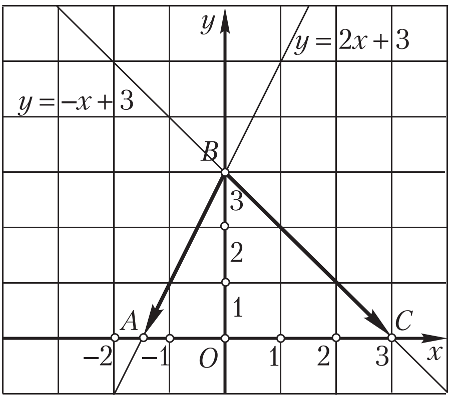


Рис. 125

а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) приближенное значение этого угла.

Решение.

Имеем:

1) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{11{,}25}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$;

2) $\overrightarrow{BA}\,(-1{,}5;\ -3)$, $\overrightarrow{BC}(3;\ -3)$;

3) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1{,}5) \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) = -4{,}5 + 9 = 4{,}5$;

4) $\cos\alpha = \dfrac{4{,}5}{\sqrt{11{,}25} \cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{4{,}5}{3\sqrt{22{,}5}} = \dfrac{1{,}5}{\sqrt{22{,}5}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}31623.$

Ответ: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\alpha \approx 71{,}6°$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

МНОГОУГОЛЬНИКИ: СОДРУЖЕСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ. НАЧАЛА МЕТОДА ПОДОБИЯ

§ 1. Теорема Пифагора и расстояния

1. а) Хорда равна радиусу R окружности. На каком расстоянии хорда находится от центра?

б) Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите расстояние от вершины прямого угла до гипотенузы.

в) В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна a, основание равно b. Найдите расстояния от каждой из вершин треугольника до прямой, на которой лежит противоположная сторона.

г) В прямоугольном треугольнике катет равен a. Найдите расстояние от центра описанной окружности до неизвестного катета. (*Описанная окружность* — окружность, которая проходит через все вершины треугольника.)

2. а) Концы отрезка расположены по разные стороны от прямой a и удалены от нее на 5 см и 7 см. На какое расстояние удалена от этой прямой середина отрезка?

б) Решите предыдущую задачу в предположении, что концы отрезка расположены по одну сторону от прямой a.

3. Докажите, что сумма расстояний от точки, взятой на основании равнобедренного треугольника, до прямых, содержащих его боковые стороны, равна длине высоты, проведенной к боковой стороне.

§ 2. Свойства биссектрисы угла. Касательная к окружности

4. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны. Докажите это.

5. К окружности проведены четыре касательные, которые, пересекаясь, образуют четырехугольник $ABCD$. Докажите, что суммы противоположных сторон этого четырехугольника равны.

6. Пусть AB — диаметр окружности. Через точки A и B проведены касательные a и b к окружности. Докажите, что $a \parallel b$.

7. От одной точки окружности с центром O проведены две равные хорды. Пользуясь одной только линейкой, можно построить биссектрису угла, образованного этими хордами. Как это сделать?

8. В окружности с центром O проведена хорда AB, образующая с радиусом AO угол в 72°. Проведена биссектриса AX ΔOAB. Докажите, что $OX = AB$.

9. Из вершины B равнобедренного ΔABC параллельно основанию AC проведен луч. Докажите, что этот луч является биссектрисой внешнего угла при вершине B.

10. Из точки A к окружности с центром O проведена касательная, K_1 — точка касания. Затем построили окружность $(A; AK_1)$. Эта окружность пересекает данную в точках K_1 и K_2. Докажите, что прямая AK_2 также является касательной.

11. Стороны ΔABC касаются некоторой окружности в точках $K_1 \in BC$, $K_2 \in AC$ и $K_3 \in AB$. Известно, что $BK_1 = CK_2 = AK_3$. Докажите, что ΔABC — равносторонний (рис. 126).

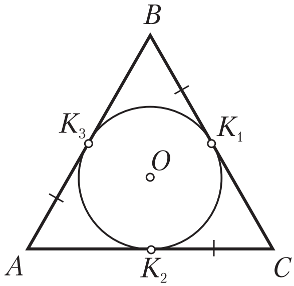


Рис. 126

12. (*Формула радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.*) Стороны прямоугольного ΔABC касаются некоторой окружности. Докажите, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза, а r — радиус окружности.

§ 3. Виды четырехугольников. Параллелограмм

13. Постройте параллелограмм по стороне a, разности диагоналей d и углу α между диагоналями.

14. Биссектриса $\angle A$ параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в ее середине. Сравните стороны.

15. Найдите неизвестные углы параллелограмма, если: 1) один из его углов равен 50°; 2) угол при верхнем основании равен 140°; 3) диагональ параллелограмма образует со сторонами углы в 60° и 40°; 4) углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма, равны α и $\alpha + 90°$; 5) сумма двух противоположных углов равна 120°.

16. Докажите, что биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к одной из его сторон, перпендикулярны.

17. Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма параллельны.

18. Какого вида выпуклый четырехугольник, если в нем противолежащие углы равны?

19. Стороны параллелограмма равны 3 см и 7 см; биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащие к большей стороне, делят противолежащую сторону на три части. Найдите каждую из них.

§ 4. Прямоугольник. Ромб. Квадрат

20. Докажите, что если вершины параллелограмма лежат на окружности, то он является прямоугольником.

21. Докажите, что если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то параллелограмм является ромбом.

22. Докажите, что если стороны параллелограмма касаются некоторой окружности, то параллелограмм является ромбом.

23. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки M до вершин прямоугольника $ABCD$ в два раза больше суммы квадратов расстояний от точки M до прямых AB, BC, CD и AD.

§ 5. Трапеция

24. Средняя линия трапеции делится двумя ее диагоналями на три равные части. Найдите отношение оснований трапеции.

25. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и B прямые, $AB = 2$, $BC = 1$, $AD = 4$. Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

26. В равнобедренной трапеции острый угол равен 45°, высота равна h, средняя линия равна m. Найдите основания трапеции.

27. Прямоугольная трапеция делится диагональю на два треугольника: равносторонний со стороной a и прямоугольный. Найдите среднюю линию трапеции.

28. Вершины трапеции лежат на окружности. Докажите, что эта трапеция равнобедренная.

§ 6. Основные формулы площади

29. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$), O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что треугольники ABO и CDO — равновеликие.

30. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD. Докажите, что $S_{ABO} = S_{CDO}$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

31. Найдите площадь четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны и равны 6 см и 8 см. *Указание.* Рассмотрите данный четырехугольник как четырехугольник, состоящий из двух треугольников.

32. Решите задачу 31, рассмотрев данный четырехугольник как четырехугольник, состоящий из четырех прямоугольных треугольников.

33. Решите задачу 31 иначе: замените данный четырехугольник равновеликим прямоугольником. Рассмотрите различные варианты такой замены.

34. Решите задачу 31 иначе: нельзя ли воспользоваться прямоугольником, стороны которого параллельны диагоналям данного четырехугольника?

35. Решите задачу 31 иначе: нельзя ли данный четырехугольник заменить равновеликим треугольником? Рассмотрите различные варианты такой замены.

§ 7. Обобщенная теорема Фалеса и новый геометрический метод — метод подобия

36. В равнобедренном ΔABC $AB = BC = a$, $AC = b$. Высота, проведенная к основанию, равна h_b. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

37. В ΔABC $AB = c$, $BC = a$, $DE \parallel AC$, $BD = EC$ (рис. 127). Найдите BD.

38. В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC — основания, O — точка пересечения диагоналей, $AO = \sqrt{3}$, $OC = \sqrt{2}$, $BD = 2$. Найдите OD.

39. а) В ΔABC (рис. 128) помещен ромб $AMNP$, $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$. Найдите сторону ромба, если $AB = c$, $AC = b$.

40. а) В ΔABC (рис. 129) помещен квадрат $MNPQ$, $M \in AC$, $N \in AB$, $P \in BC$, $Q \in AC$. Найдите сторону квадрата, если сторона $AC = b$ и высота $BB_1 = h_b$.

б) Как связаны друг с другом синусы двух смежных углов?

в) Как связаны друг с другом косинусы двух смежных углов?

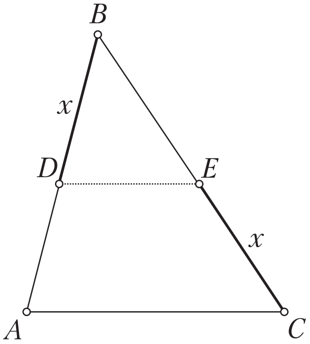


Рис. 127

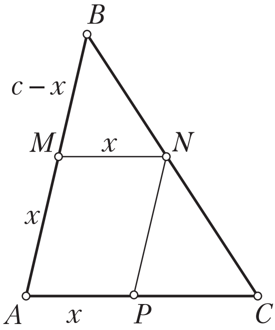


Рис. 128

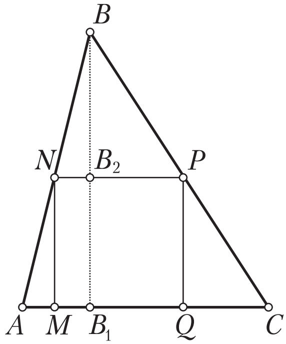


Рис. 129

г) Как связаны друг с другом синусы двух острых углов прямоугольного треугольника?

д) Как связаны друг с другом косинусы двух острых углов прямоугольного треугольника?

41. Постройте ΔABC, зная углы A и C и высоту h_b.

42. В равнобедренном треугольнике проведена высота к боковой стороне. Из точки, лежащей на его основании, также проведены перпендикуляры к прямым, содержащим боковые стороны. Найдите подобные треугольники и докажите, что сумма длин этих перпендикуляров равна длине данной высоты.

КООРДИНАТНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ МЕТОДЫ — ОКНО В МИР СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. Основные формулы координатной геометрии

43. Дан прямоугольник $ABCD$ и произвольная точка M. Докажите, что $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

44. Пусть дан отрезок с концами $A(1; 1)$, $B(5; 7)$ и точка $T(x; y)$, делящая этот отрезок в отношении $1 : 2$ считая от конца A. Найдите x и y.

45. Точка B удалена от начала O координат на такое же расстояние, что и точка A. Найдите OB, если $A(3; 4)$. Можно ли найти координаты точки B?

46. С помощью координат докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

47. Найдите координаты точки C, если известно, что она лежит на оси абсцисс и равноудалена от точек $A(1; 5)$ и $B(6; 1)$.

48. Найдите координаты точки B, если известно, что она лежит на оси ординат и удалена от точки $A(3; 0)$ на расстояние, равное 5.

49. Дан четырехугольник $ABCD$, E — середина AC, M — середина BD. Докажите равенство $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EM^2$.

§ 2. Уравнения прямой и окружности

50. а) Запишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если: 1) $A(1; 2)$, $B(2; 0)$; 2) $A(-2; 4)$, $B(0; 0)$.

б) Запишите уравнение прямой, проходящей через точки: 1) $A(1; 2)$, $B(5; 4)$; 2) $A(2; 4)$, $B(10; 8)$.

51. а) Даны уравнения прямых: 1) $2x - y + 5 = 0$; 2) $-2x + y + 5 = 0$. Найдите координаты точек пересечения этих прямых с осями координат.

б) Даны уравнения двух прямых. Требуется установить, пересекаются эти прямые или они параллельны. В случае пересечения найдите координаты их общей точки: 1) $5x + 4y + 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$; 2) $2x - 4y + 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

в) Найдите координаты точки T, если она равноудалена от точек $A(1; 0)$, $B(3; 7)$ и лежит на прямой $x - y - 9 = 0$.

52. а) Запишите уравнение окружности с центром A и радиусом R, если 1) $A(1; 5)$, $R = 3$; 2) $A(-3; 4)$, $R = 2$.

б) Найдите координаты центра окружности и ее радиус, если известно уравнение окружности: 1) $x^2+(y-6)^2=36$; 2) $(x-4)^2+y^2=7$.

в) Какие из следующих уравнений являются уравнениями окружности: 1) $x^2+y^2=-4$; 2) $x^2+y^2=4$; 3) $(x+4)^2+(y+4)^2=4$; 4) $x+y=2$; 5) $x^2+y^2-2(x+y)+1=0$; 6) $(x+1)^2+y=49$?

53. а) Окружность проходит через точку $A(-1; -1)$, точка $C(-4; 3)$ — центр этой окружности. Выясните, пройдет ли данная окружность через начало координат.

б) Окружность проходит через точки $A(2; 0)$ и $B(-2; 6)$, которые в этой окружности являются диаметрально противоположными. Запишите уравнение этой окружности и найдите координаты точек пересечения ее с осями координат.

54. Окружность проходит через начало координат O и точки $A(2; 0)$ и $B(2; 5)$. Запишите уравнение этой окружности и докажите, что OB является ее диаметром.

55. а) Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований.

б) Докажите, что сумма квадратов расстояний от фиксированной точки T до концов произвольного диаметра данной окружности $(O;\ R)$ есть величина постоянная, равная $2(TO^2+R^2)$.

в) Докажите, что если середина данного отрезка является центром окружности, то сумма квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до концов отрезка постоянна.

г) Пусть в параллелограмме $ABCD$ на его меньшей диагонали BD как на диаметре построена окружность, пересекающая диагональ AC в точке K. Докажите, что $KA^2+KC^2=AB^2+AD^2$.

д) Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд постоянна.

§ 3. Понятие вектора. Равенство векторов

56. а) Для учета направления ветра в метеорологических наблюдениях иногда составляют специальную диаграмму «розу ветров» (рис. 130). На этой диаграмме видно, например, что северный ветер повторялся четыре раза. Расшифруйте остальную информацию, заключенную в данной диаграмме.

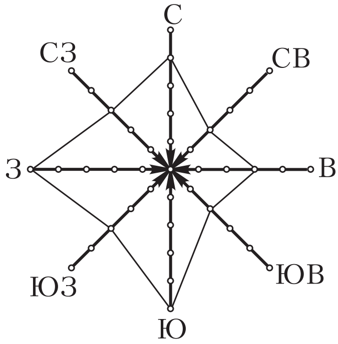


Рис. 130

б) Укажите на рисунке 131 равные, одинаково направленные, противоположно направленные векторы.

в) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, M и K — соответственно середины сторон BC и AD. Докажите, что $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{KC}$.

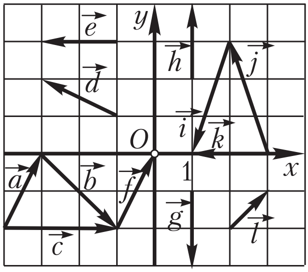


Рис. 131

57. а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: 1) $A(2; 5)$, $B(4; 3)$; 2) $A(2; 5)$, $B(2; 5)$.

б) Найдите длины векторов, указанных в предыдущем задании.

в) Найдите координаты конца вектора, если координаты вектора и его начала соответственно равны: 1) $\overrightarrow{AB}$ (2; –2), A (2; 5); 2) $\overrightarrow{AB}$ (0; 0), A (2; 5).

г) Найдите координаты начала вектора, если координаты вектора и его конца соответственно равны: 1) $\overrightarrow{AB}$ (2; –2), B (4; 3); 2) $\overrightarrow{AB}$ (0; 0), B (2; 5).

д) Векторы $\vec{a}\,(x; y)$ и $\vec{b}\,(-x; -y)$ имеют противоположные координаты. Сравните длины этих векторов.

58. а) Пусть $ABCD$ — параллелограмм; $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $D(5; 0)$. Найдите координаты вершины C.

б) В условиях предыдущей задачи найдите координаты точки O — точки пересечения диагоналей параллелограмма.

в) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, Q — точка пересечения его диагоналей; $A(0; 0)$, $B(1; 4)$, $Q(3; 2)$. Найдите координаты вершин C и D.

59. Известно, что $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $A(4; 0)$, луч AB образует с положительной полуосью оси x угол в $45°$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Сколько решений имеет задача?

§ 4. Сложение и вычитание векторов

60. а) Постройте равнодействующую двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенных к телу (рис. 132).

б) Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$. Постройте вектор $\vec{b}$.

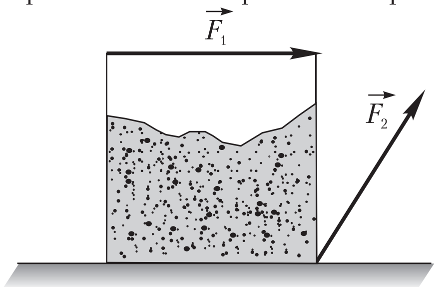


Рис. 132

61. а) С какой силой тело давит на подставку, если подставка с телом свободно падают?

б) Если на движущемся по круговой орбите спутнике Земли в сосуд с водой опустить железную гайку, то утонет ли она?

62. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Верны ли равенства: 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$; 4) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; 6) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$?

63. а) Начертите произвольным образом векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}+\vec{a}$; 4) $\vec{b}-\vec{a}$.

б) Пусть $\vec{v}_1$ — скорость самолета в безветренную погоду (рис. 133), $\vec{v}_2$ — скорость самолета относительно Земли. Разностью каких скоростей является скорость ветра? Постройте соответствующий вектор.

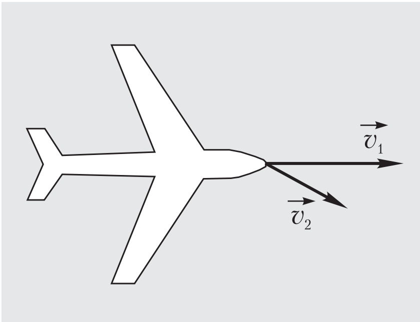


Рис. 133

64. а) Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$, если: 1) $\vec{a}(1; 2), \vec{b}(3; 4)$; 2) $\vec{a}(1; 2), \vec{b}(-1; -2)$; 3) $\vec{a}(1; 2), \vec{b}(0; -2)$.

б) Найдите $|\vec{a}-\vec{b}|$, если: 1) $\vec{a}(8; 3), \vec{b}(-1; 0)$; 2) $\vec{a}(1; 0), \vec{b}(4; -1)$; 3) $\vec{a}(-3; -5), \vec{b}(0; -2)$; 4) $\vec{a}(0; 0), \vec{b}(3; 4)$.

65. а) (*Занимательная задача.*) В XVII в. в одной из книг была напечатана такая задача. Вокруг Земли по экватору построили мост, совершенно одинаковый по материалу на всем протяжении, равный по весу в любой его равной части и имеющий в точности форму окружности. Затем из-под моста одновременно удалили все опоры. Что произойдет при этом? Обрушится ли мост? Можно ли им будет пользоваться для практических целей?

б) (*Физическая задача.*) Несмотря на то, что яичная скорлупа очень хрупкая, чтобы раздавить яйцо, сжимая в руке, требуется определенное усилие. Почему?

66. Летательный аппарат движется под углом 30° к горизонту со скоростью 60 км/ч (набирая высоту). На какой высоте он окажется через 12 мин?

67. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами, равными 3 и 4. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$ и $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$.

68. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны 2, угол между ними равен 60°. Найдите длину вектора-суммы данных векторов. Какой угол образует вектор-сумма с вектором $\overrightarrow{BC}$?

§ 5. Умножение вектора на число

69. а) В игре по перетягиванию каната участвуют четыре человека. Два из них тянут канат в одну сторону с силой $\vec{F}_1$ величиной 8 ед., два — в противоположную сторону с силой $\vec{F}_2$ величиной 4 ед. Выразите: 1) силу $\vec{F}_1$ через силу $\vec{F}_2$; 2) силу $\vec{F}_2$ через силу $\vec{F}_1$.

б) В физике известен закон Гука, утверждающий, что в пределах упругости величина деформации $\vec{x}$ данного тела (рис. 134) прямо пропорциональна величине деформирующей силы $\vec{F}$. Правильны ли следующие равенства: 1) $\vec{x} = k|\vec{F}|$; 2) $|\vec{x}| = k\vec{F}$; 3) $\vec{x} = k\vec{F}$?

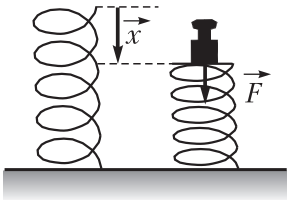


Рис. 134

в) Чтобы сдвинуть тело некоторой силой $\vec{F}$ (рис. 135), необходимо преодолеть максимальную силу трения покоя $\vec{F}_{\text{тр. max}}$. В физике известно, что величина силы трения прямо пропорциональна величине силы нормального давления $\vec{N}$. Правильны ли следующие равенства: 1) $|\vec{F}_{\text{тр. max}}| = k|\vec{N}|$; 2) $\vec{F}_{\text{тр. max}} = k\vec{N}$?

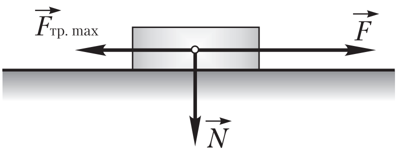


Рис. 135

70. а) Пусть дан параллелограмм $ABCD$, O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

б) Пусть M — середина отрезка AB и O — некоторая точка. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

в) Дан ΔABC, M — середина AB, K — середина BC. Докажите, что $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

71. а) Пусть AM — медиана ΔABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

б) Пусть $ABCD$ — произвольный параллелограмм (или трапеция), M и K — середины соответственно сторон AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

72. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, M, K, H и P — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DA. Докажите, что $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH}$.

§ 6. Признак коллинеарности двух векторов. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

73. На координатной плоскости постройте векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, если известны их разложения по координатным векторам: $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$.

74. Вектор можно разложить по любым двум неколлинеарным векторам. Этим часто пользуются, например, в физике. С целью предупреждения возможных физических ошибок приведем следующую задачу-софизм. Рассмотрим тяжелый шар (рис. 136), лежащий на

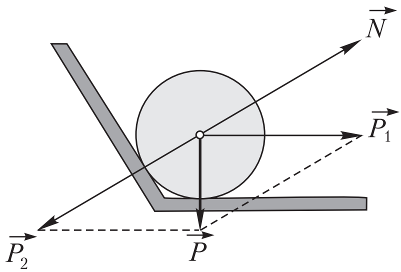


Рис. 136

горизонтальной плоскости и касающийся наклонной. Разложим вес $\vec{P}$ шара по двум направлениям. Одно выберем параллельно горизонтальной плоскости, другое — перпендикулярно к наклонной. Получим две силы: $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$. Сила $\vec{P}_2$ — сила давления шара на наклонную плоскость. По третьему закону Ньютона она уравновешивается силой $\vec{N}$ — силой реакции плоскости. Остается сила $\vec{P}_1$, которая «не уравновешивается» какой-либо силой. Поэтому под действием силы $\vec{P}_1$ шар будет катиться вправо. Таким образом, стоит только положить шар в любой угол, как он выкатывается оттуда, причем более тяжелый шар будет выкатываться с большей силой! Получили своего рода «перпетуум-мобиле»! Физический парадокс налицо. Значит, в рассуждениях совершена ошибка. Где именно?

75. Каким образом следует крепить нижнюю и верхнюю части стрелы подъемного крана — «на упор» или «на разрыв» (рис. 137)?

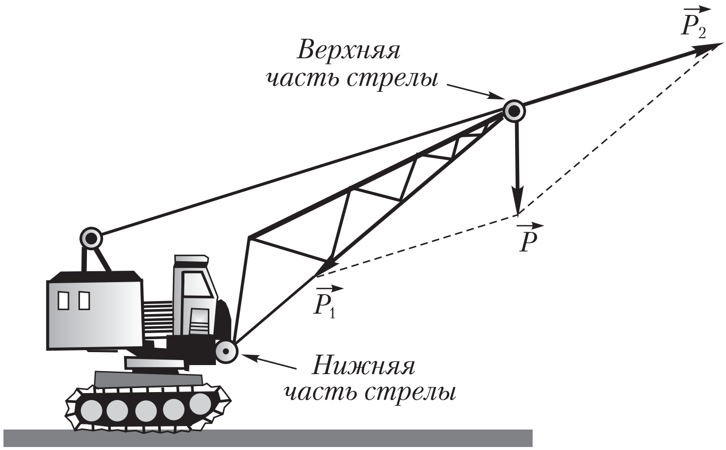


Рис. 137

76. Точка K делит отрезок AB в отношении $1 : 2$ считая от точки A, O — произвольная точка плоскости. Разложите вектор $\overrightarrow{OK}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

77. Ранее было установлено, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

78. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

79. (*Новое доказательство обобщенной теоремы Фалеса*, рис. 138.) Если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отношение любых двух отрезков, лежащих на одной стороне, равно отношению соответственных отрезков, лежащих на другой стороне.

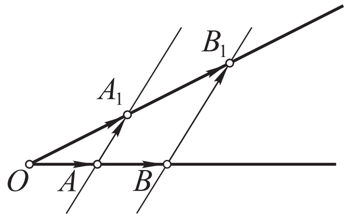


Рис. 138

80. Пусть AB и CD — две перпендикулярные хорды окружности, O — центр окружности, T — точка пересечения хорд. Выразите вектор $\overrightarrow{OT}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ (рис. 139).

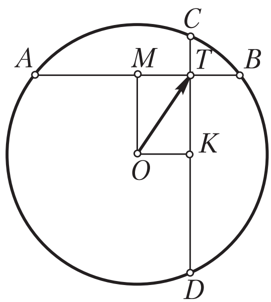


Рис. 139

81. В ΔABC $AB = 2$, $AC = 3$, AL — биссектриса. Разложите вектор $\overrightarrow{AL}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

82. а) Пусть $\vec{a}\left(-\sqrt{3}\,;\,2\right), \vec{b}\left(2\sqrt{3}\,;\,-1\right)$. Найдите $\vec{a}\vec{b}$.

б) Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известны разложения этих векторов по координатным векторам: 1) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}, \vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}$; 2) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}, \vec{b}=-2\vec{i}-3\vec{j}$.

в) Найдите $\vec{a}^2$, если $\vec{a}=-5\vec{i}+6\vec{j}$.

83. Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник. Проведем следующие рассуждения: 1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2$; 4) так как $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ и $\overrightarrow{AC}^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2$; 5) аналогично получаем, что $\overrightarrow{DB}^2=\left|\overrightarrow{DB}\right|^2=$ $=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2$; 6) отсюда $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|$. Правильны ли эти рассуждения и какой вывод можно сделать с их помощью?

84. а) Докажите, что квадрат высоты, проведенной из вершины прямого угла треугольника, равен произведению отрезков, на которые высота делит гипотенузу.

б) В ΔABC угол C прямой, CH — высота, P — середина CH, M — середина HB. Докажите, что $AP\perp CM$.

в) В квадрате $ABCD$ M — середина стороны BC, K делит диагональ BD в отношении 3 : 1 считая от вершины B. Докажите, что $AK\perp KM$.

г) В квадрате $ABCD$ M и K — середины сторон CD и AD соответственно. Докажите, что $AM\perp BK$.

д) Пусть $AD=a$ и $BC=b$ — основания трапеции $ABCD$ $(a>b)$, M, N, X и Y — середины сторон AB, CD, BC и AD соответственно. Трапеция расположена на координатной плоскости так, что $A(0;\,0)$, $B(x;y)$, $C(x+b;y)$, $D(a;0)$. Докажите, что $MN\perp XY$ тогда и только тогда, когда $x=\dfrac{a-b}{2}$. Установите, какой вид имеет трапеция в этом случае.

е) Пусть $ABCD$ — четырехугольник, у которого диагонали $AC=d_1$, $BD=d_2$ перпендикулярны. Найдите расстояние MK, где M и K — середины сторон AB и CD соответственно.

85. Перпендикулярны ли ненулевые векторы $\vec{a}(x; y)$ и $\vec{b}(-y; x)$?

86. Дана парабола $y = x^2$, O — начало координат, $A(1; 1)$. На параболе найдите точку B такую, чтобы $\angle BAO = 90°$.

87. Докажите, что в треугольнике ABC, стороны которого $AB = 4$, $BC = 3$ и $\angle AC = \sqrt{5}$, медианы AA_1 и CC_1 перпендикулярны.

§ 8. Применение векторов и координат при решении задач

88. В квадрате $ABCD$ точки M и K — середины сторон CD и AD соответственно. Докажите, что $AM \perp BK$.

89. В треугольнике ABC угол C — прямой, CH — высота, P — середина CH, M — середина HB. Докажите, что $AP \perp CM$.

90. В ΔABC проведены высоты AP и BQ. Точка O — точка пересечения. Докажите, что отрезок $CO \perp AB$.

91. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 1$, $AD = 4$, точка M делит диагональ BD в отношении $1 : 3$ от вершины B. Найдите AM, если $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6}$.

92. Пусть AC — диаметр окружности, B — произвольная ее точка. Докажите, что $\angle ABC = 90°$.

93. Прямые AB и CD имеют соответственно уравнения $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Докажите: а) если $k_1 = k_2$, то $AB \| CD$; б) если $k_1k_2 = -1$, то $AB \perp CD$.

94. а) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$ — перпендикулярны, точки M и K — середины соответственно сторон AB и CD. Найдите расстояние MK. (Решите задачу различными способами.)

б) Докажите, что скалярное произведение двух векторов-сторон параллелограмма с общей вершиной равно четверти разности квадратов диагоналей.

в) В параллелограмме $ABCD$ $AC = 3$, $BD = 2$. Найдите $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД: РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§ 1. Координаты и тригонометрические функции

95. а) С помощью рисунка 140 найдите косинус, синус, тангенс и котангенс угла, равного 15°, 75°, 105°, 120°, 135°. Какие закономерности в изменении значений тригонометрических функций можно заметить?

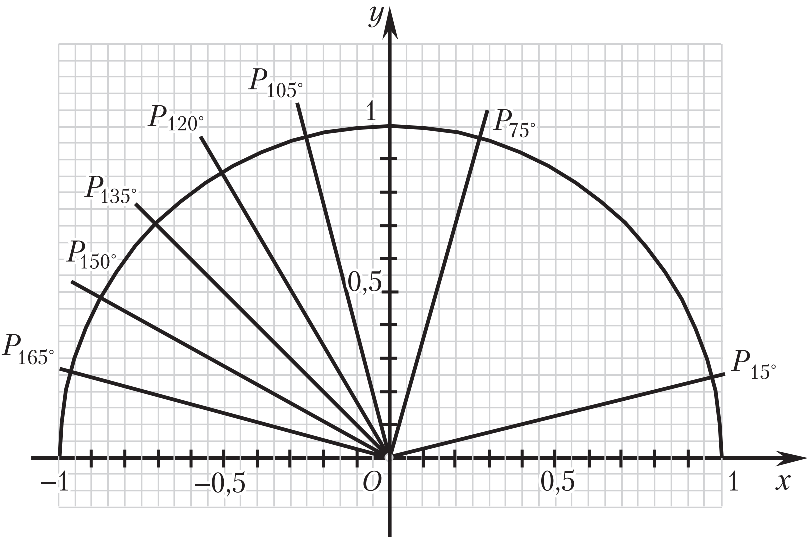


Рис. 140

б) Может ли точка T_α иметь координаты $\frac{8}{17}$ и $\frac{15}{17}$? Найдите значение тригонометрических функций угла α.

в) Может ли точка T_α иметь координаты $\frac{7}{8}$ и $\frac{24}{25}$?

г) Пусть точка T_α имеет абсциссу, равную $\frac{7}{25}$. Найдите значения тригонометрических функций угла α.

д) Пусть $0° < \alpha < 90°$ и ордината точки T_α равна $\frac{21}{29}$. Найдите значения тригонометрических функций угла α.

96. а) Может ли быть $\cos\alpha > 1$, $\sin\alpha > 1$, $\operatorname{tg}\alpha > 1$, $\operatorname{ctg}\alpha > 1$?

б) При каком α $\sin\alpha = 1$?

в) При каком α $\cos\alpha = 1$?

г) При каком α $\operatorname{tg}\alpha = 1$?

д) При каком α $\operatorname{ctg}\alpha = 1$?

е) Угол α изменяется от $0°$ до $180°$. Может ли $\sin\alpha$ быть отрицательным?

ж) Для каких углов α $\cos\alpha > 0$?

з) Для каких углов α $\cos\alpha < 0$?

и) Почему не существует $\operatorname{tg}90°$, $\operatorname{ctg}0°$, $\operatorname{ctg}180°$?

§ 2. Главное в данной теме — формулы, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника

97. Верно ли равенство:

$$\cos 0° + \cos 30° + \cos 45° + \cos 60° + \cos 90° + \cos 180° = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\ ?$$

98. а) Найдите углы A и B прямоугольного треугольника, зная катет a и гипотенузу c: 1) $a = \sqrt{3}$, $c = 2$; 2) $a = \sqrt{2}$, $c = 2$.

б) Докажите, что для острых углов прямоугольного треугольника выполняются равенства $\sin A = \cos B$ и $\cos A = \sin B$.

в) Пусть в прямоугольном треугольнике $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите отношение $b : c$.

г) Найдите углы равнобедренного ΔABC $(AB = BC)$, если $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$.

д) Стороны треугольника известны: $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Найдите его углы.

99. а) Найдите тангенсы острых углов прямоугольного треугольника, если высота, проведенная к гипотенузе, делит ее на части, равные 4 и 9 см.

б) Найдите синус острого угла ромба, если его диагонали равны 6 и 8 см.

в) Найдите углы ромба, если его сторона и радиус вписанной окружности соответственно равны 5 и 2 см.

100. а) Докажите, что площадь произвольного треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

б) Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух смежных его сторон на синус угла между ними.

§ 3. Развитие тригонометрического метода требует новых формул: основное тригонометрическое тождество, формулы приведения

101. Пользуясь формулами приведения, найдите точные значения тригонометрических функций для угла, равного 120°, 135°, 150°.

102. а) Для параллелограмма $ABCD$ $\cos A = 0{,}1$. Найдите косинусы остальных углов этого параллелограмма.

б) Для параллелограмма $ABCD$ $\cos A = 0{,}2$. Найдите синусы его углов.

в) В прямоугольной трапеции угол при основании равен 30°. Найдите косинусы и синусы углов этой трапеции.

103. а) Известно, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $\alpha > 90°$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

б) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -5$. Найдите $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

в) Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

г) Известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. Найдите $\sin(90° - \alpha)$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha)$.

д) Известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. Найдите $\sin(180° - \alpha)$, $\cos(180° - \alpha)$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, $\operatorname{ctg}(180° - \alpha)$.

§ 4–5. Применение тригонометрического метода при решении прямоугольных треугольников (основные случаи и решение более сложных задач)

104. а) В прямоугольном треугольнике один из катетов равен a, а противолежащий угол равен α. Докажите, что площадь этого треугольника может быть найдена по формуле $S = \frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

б) Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один из катетов равен a, гипотенуза равна c и угол между ними равен β, то площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} ac \sin\beta$.

в) Пусть катет и противолежащий ему угол соответственно равны a и α. Найдите радиус окружности, описанной около данного прямоугольного треугольника.

г) R — радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, a — один из катетов. Найдите углы этого треугольника.

д) r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, a — один из катетов. Найдите углы этого треугольника.

е) S — площадь прямоугольного треугольника, a — один из катетов. Найдите углы этого треугольника.

105. В прямоугольном треугольнике гипотенуза и один из острых углов соответственно равны c и α. Какие элементы этого треугольника можно найти?

106. Тригонометрический метод может быть использован не только при решении геометрических задач на вычисление, но и при доказательстве теорем. Докажите, например, теорему: в прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, на которые она разбивается высотой, т. е. $h_c^2 = AD \cdot DB$.

107. а) Около окружности описана равнобедренная трапеция с периметром $2p$ и острым углом α. Найдите площадь этой трапеции.

б) Около окружности описан ромб с острым углом α. Найдите площадь ромба, если его большая диагональ равна d.

в) Диагональ прямоугольника равна d, а острый угол между диагоналями равен α. Найдите площадь прямоугольника.

г) Пусть m_a, m_b, m_c и c — соответственно медианы и гипотенуза прямоугольного треугольника. Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{2} c^2$.

д) Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проведены медиана и высота, соответственно равные 5 см и 4 см. Найдите стороны и углы этого треугольника.

108. а) В равнобедренном ΔABC основание $AC = b$, $\angle A = \alpha$. Найдите радиус вписанной окружности.

б) Диагональ прямоугольника наклонена к стороне, равной a, под углом α. Найдите площадь прямоугольника.

в) В равнобедренной трапеции меньшее основание равно a, боковая сторона равна b, угол при большем основании равен α. Найдите площадь трапеции.

г) В прямоугольной трапеции основания равны a и b ($a > b$). Острый угол при большем основании равен α. Найдите площадь трапеции.

д) Около прямоугольника $ABCD$ описана окружность с центром O и радиусом R. Диагональ прямоугольника образует со стороной угол, равный α. Найдите площадь прямоугольника.

§ 6. Геометрический смысл скалярного произведения двух векторов

109. а) Докажите, что разность квадратов диагоналей параллелограмма равна учетверенному произведению его смежных сторон на косинус угла между ними.

б) Установите вид ΔABC, если $BC\cdot\overrightarrow{MA}+AC\cdot\overrightarrow{MB}+AB\cdot\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, где M — точка пересечения медиан треугольника.

в) Докажите, что если $AB = CD$, то $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})^2$, где O — произвольная точка.

г) Докажите, что если $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=0$, то ΔABC — прямоугольный ($\angle A=90°$).

д) Докажите, что ΔABC — равнобедренный ($AC = BC$), если: 1) $\overrightarrow{AB}^2=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; 2) $(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=0$.

е) Докажите, что ΔABC — остроугольный, если одновременно выполняются неравенства $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$.

УКАЗАНИЯ. ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ

Тема 1

1. а) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **в)** $BB_1 = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$, $AA_1 = CC_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$. **г)** $\frac{1}{2}a$.

2. а) 1 см. **б)** 6 см.

3. Пусть $AB = BC$ (рис. 141), $M \in AC$, $MM_1 \perp BC$, $MM_2 \perp AB$, AA_1 — высота ΔABC, проведенная к боковой стороне. Требуется доказать, что $MM_1 + MM_2 = AA_1$. Для доказательства проведем $AK \parallel BC$, продолжим отрезок MM_1 до пересечения с AK в точке M_3. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\angle A = \angle C, \\ &\angle C = \angle MAM_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle MAM_3; \quad \left.\begin{aligned} &AK \parallel BC, \\ &MM_3 \perp BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow MM_3 \perp AK;$$

$\Delta MM_2A = \Delta MM_3A$ по гипотенузе и острому углу. Поэтому $MM_2 = MM_3$ и $MM_1 + MM_2 = MM_1 + MM_3 = M_3M_1 = AA_1$.

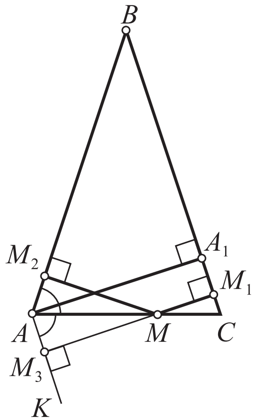


Рис. 141

4. 1) Пусть через точку C проведены две касательные a и b к данной окружности, A и B — точки касания, отрезки CA и CB — отрезки касательных, о которых говорится в задаче. Требуется доказать, что $CA = CB$; 2) проведем отрезок CO. По свойству касательных $OA \perp AC$ и $OB \perp BC$; 3) тогда треугольники OAC и OBC — прямоугольные. Применим метод равных треугольников: эти треугольники равны по гипотенузе и катету (OC — общая, $OA = OB$); 4) из их равенства следует, что $CA = CB$.

5. 1) Требуется доказать, что $AB + CD = AD + BC$. Пусть K_1, K_2, K_3 и K_4 — точки касания. По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки, имеем: $AK_1 = AK_4$, $BK_1 = BK_2$, $CK_2 = CK_3$ и $DK_3 = DK_4$; 2) поэтому $AB + CD = \underset{-----}{AK_1} + \underline{\underline{BK_1}} + \underset{*****}{CK_3} + \underline{DK_3}$, $AD + BC = \underset{-----}{AK_4} + \underline{DK_4} + \underline{\underline{BK_2}} + \underset{*****}{CK_2}$; 3) правые части этих равенств состоят из равных слагаемых. Поэтому они равны; 4) значит, равны и левые части равенств: $AB + CD = AD + BC$.

6. Так как $OA \perp a$ и $OB \perp b$ (см. следствие 2), то $a \perp AB$ и $b \perp AB$. Тогда по теореме, известной из предыдущего класса, $a \parallel b$.

7. Воспользуйтесь центром окружности.

8. Рассмотрите равнобедренные треугольники OXA и XAB.

11. Примените свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки.

12. См. указание к предыдущей задаче.

13. 1. *Поиск решения.* Допустим, что параллелограмм, удовлетворяющий условию задачи, построен (рис. 142). В нем $\angle AOB = \alpha$, $AB = a$, $AC - BD = d$. Заметим сразу, что разность половин диагоналей равна $\frac{1}{2}d$: $\frac{1}{2}d = \frac{d_1 - d_2}{2} = \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}$. Введем на чертеже отрезок $AE = \frac{1}{2}d$. В треугольнике ABE известны две стороны: $AB = a$, $AE = \frac{1}{2}d$. Найдем углы этого треугольника. Так как $OB = OE$, то $\angle OEB = \angle OBE = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle AEB = \alpha + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) =$

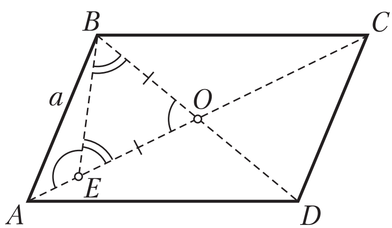


Рис. 142

$= 90° + \frac{\alpha}{2}$. Итак, в треугольнике ABE известны две стороны AB и AE и $\angle AEB$. По этим данным можно построить треугольник ABE. Если теперь построим точку O, то параллелограмм $ABCD$ легко можно построить. Точку O можно построить, учитывая, что $\angle OBE = 90° - \frac{\alpha}{2}$. 2. *Построение*. Строим: 1) ΔABE ($AB = a$, $AE = \frac{d}{2}$, $\angle AEB = 90° + \frac{\alpha}{2}$); 2) $\angle OBE = 90° - \frac{\alpha}{2}$; 3) $O = AE \cap BO$; 4) параллелограмм $ABCD$. Задача имеет решение при условии $a > \frac{d}{2}$. Нетрудно видеть, что это решение — единственное.

20. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, вершины которого лежат на окружности с центром O (рис. 143). Проведем $MK \perp AD$. Так как $BC \parallel AD$, то $MK \perp BC$. Перпендикуляр, проведенный из центра окружности к хорде, делит хорду пополам. Поэтому $AM = MD$, $BK = KC$. Так как $AD = BC$, то $AM = BK$. Имеем: $\left.\begin{matrix} BK \parallel AM, \\ BK = AM \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABKM$ — параллелограмм. Учитывая, что в нем $\angle K = \angle M = 90°$, приходим к выводу: $ABKM$ — прямоугольник, поэтому $\angle A = \angle B = 90°$. Тогда параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

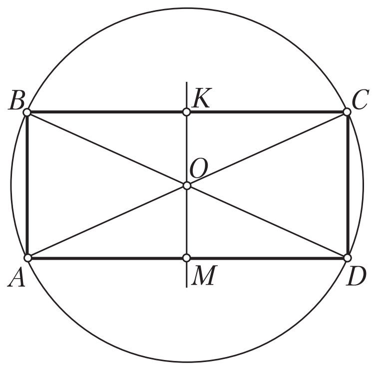


Рис. 143

21—22. Докажите равенство двух смежных сторон параллелограмма.

24. 1 : 2.

25. Постройте параллелограмм $DBCD_1$, рассмотрите ΔACD_1, воспользуйтесь теоремой, обратной теореме Пифагора.

26. $m - h$, $m + h$.

27. $\frac{3a}{4}$.

28. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, O — центр описанной окружности. Проведем диаметр, перпендикулярный к основаниям. Этот перпендикуляр поделит каждое основание пополам. Проведите высоты BB_1 и CC_1. Рассмотрите треугольники ABB_1 и DCC_1.

31. Обозначьте части диагоналей через x и y.

36. 1) $\Delta ACA_1 \sim \Delta BCB_1$ по двум углам ($\angle C$ — общий, $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$); 2) из подобия треугольников получаем: $\frac{AA_1}{h_b} = \frac{b}{a} \Rightarrow$ $\Rightarrow AA_1 = \frac{bh_b}{a}$.

37. 1) Пусть $BD = EC = x$, тогда $AD = c - x$, $BE = a - x$; 2) на основании предыдущей задачи: $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{c-x} = \frac{a-x}{x}$,

$x^2 = ac - ax - cx + x^2$, $x(a+c) = ac$, $x = \frac{ac}{a+c}$.

38. 1) $\Delta OAD \sim \Delta OCB$ по двум углам: $\angle OAD = \angle BCO$, $\angle ODA = \angle CBO$; 2) из подобия треугольников следует: $\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{BO} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2-x}$, $2\sqrt{3} - x\sqrt{3} = x\sqrt{2}$, $x\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$,

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{-1} = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 2\left(3-\sqrt{6}\right).$$

39. 1) $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ по двум углам; 2) обозначим сторону ромба через x. Из подобия треугольников следует: $\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{c-x}{c}$,

$xc = bc - bx \Rightarrow x(b+c) = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{b+c}$.

40. а) 1) Обозначим сторону квадрата через x; 2) воспользуемся тем, что $\Delta BNP \sim \Delta BAC$ и $\Delta BNB_2 \sim \Delta BAB_1$ (почему?): $\frac{NP}{AC} = \frac{NB}{AB} = \frac{BB_2}{BB_1}$, $\frac{x}{b} = \frac{h_b - x}{h_b}$, $xh_b = bh_b - xb$, $x(b+h_b) = bh_b$, $x = \frac{bh_b}{b+h_b}$.

41. *Анализ.* Вначале нетрудно построить некоторый ΔA_1BC_1, у которого $\angle A_1 = \angle A, \angle C_1 = \angle C$. Этот треугольник будет подобен ΔABC. Проведем высоту BK_1 ΔA_1BC_1. С помощью ΔA_1BC_1 можно теперь построить ΔABC. Наглядно ясно, что ΔA_1BC_1 надо «уменьшить» так, чтобы получился ΔABC с заданной высотой $BK = h_b$. Для этого на луче BK_1 отложим отрезок $BK = h_b$ и через точку K проведем $AC \parallel A_1C_1$. Убедитесь в том, что ΔABC удовлетворяет условию задачи.

Тема 2

43. Пусть $A(0;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $C(a;\ b)$, $D(a;\ 0)$, $M(m;\ n)$. Тогда $AM^2 = m^2 + n^2$, $CM^2 = (m-a)^2 + (n-b)^2$, $BM^2 = m^2 + (n-b)^2$, $DM^2 = (m-a)^2 + n^2$. Из полученных равенств (скобки раскрывать не нужно) следует, что $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

44. 1) Если точка M — середина отрезка AB, а точка K — середина отрезка AT, то точка T — середина отрезка KM (убедитесь в этом); 2) выразим координаты точки T через координаты K и M: $M(3;\ 4), K\left(\frac{1+x}{2}; \frac{1+y}{2}\right)$, $x = \frac{\frac{1+x}{2}+3}{2}$, $y = \frac{\frac{1+y}{2}+4}{2}$; 3) приходим к уравнениям: $x = \frac{7+x}{4} \Rightarrow 3x = 7$, $x = \frac{7}{3}$; $y = \frac{9+y}{4} \Rightarrow 3y = 9$, $y = 3$.

53. а) Не пройдет. **б)** (2; 0), (–2; 0), $(0;\ 3+\sqrt{13})$, $(0;\ 3-\sqrt{13})$.

54. $(x-1)^2 + (y-2{,}5)^2 = \frac{29}{4}$.

55. а) За начало координат выберите середину нижнего основания трапеции. **д)** Центр окружности поместите в начало координат. Пусть AB — хорда, параллельная диаметру. Запишите координаты точек K, A, B. Учтите, что точка K считается фиксированной и, значит, ее координаты являются постоянными.

56. б) равные векторы: $\vec{a}$ и $\vec{f}$, $\vec{e}$ и $\vec{k}$; одинаково направленные векторы: $\vec{a}$ и $\vec{f}$, $\vec{e}$ и $\vec{k}$; противоположно направленные векторы: $\vec{c}$ и $\vec{e}$, $\vec{c}$ и $\vec{k}$, $\vec{g}$ и $\vec{h}$.

57. а) 1) $\overrightarrow{AB}(2;\ -2)$. **б)** 1) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
в) 1) Обозначим координаты конца B вектора через x и y. Тогда

$$\left.\begin{matrix} A(2;5), \\ B(x;y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x-2;\ y-5),$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB}(x-2;\ y-5), \\ \overrightarrow{AB}(2;\ -2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-2=2, y-5=-2) \Rightarrow (x=4, y=3).$$

Итак, $B(4;\ 3)$. **г)** 1) пусть $A(x;\ y)$. Тогда

$$\left.\begin{matrix} A(x;\ y), \\ B(4;\ 3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(4-x;\ 3-y),$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB}(4-x;\ 3-y), \\ \overrightarrow{AB}(2;\ -2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (4-x=2,\ 3-y=-2).$$

Отсюда $x = 2$, $y = 5$.

58. а) Обозначим координаты точки C через x и y. Имеем: $\overrightarrow{AD}(5;\ 0)$, $\overrightarrow{BC}(x-1;\ y-3)$. Так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, то $5 = x-1$, $0 = y-3$. Отсюда $x = 6$, $y = 3$.

59. $\overrightarrow{AB}\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}};\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$ или $\overrightarrow{AB}\left(\dfrac{5}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$.

62. Если $ABCD$ — параллелограмм, то равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ является верным.

64. а) 1) $(\vec{a}+\vec{b})(4;\ 6) \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

65. а) На диаметрально противоположные точки моста действуют противоположные силы, сумма которых равна нулевому вектору. Поэтому сумма всех сил равна нулевому вектору. Теоретически после одновременного удаления всех опор мост не разрушится. Практически создать такой мост, обладающий указанными «идеальными» свойствами невозможно.

66. 1) Пусть $V = 60$ км/ч (рис. 144) — скорость летательного аппарата. Представим вектор $\vec{V}$ в виде суммы двух векторов, имеющих вертикальное и горизонтальное направления: $\vec{V} = \vec{V}_в + \vec{V}_г$; 2) $\vec{V}_в$ — скорость, с которой летательный аппарат поднимается вверх. Найдем эту скорость и умножим ее на время подъема: $|\vec{V}_в| = |\overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{OC}| = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$ (км/ч); $30 \cdot \frac{1}{5} = 6$ (км). Летательный аппарат за 12 мин поднимется на 6 км.

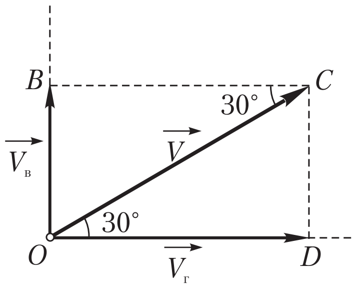


Рис. 144

67. 1) По правилу параллелограмма: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Поэтому $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$. Найдем диагональ AC по теореме Пифагора: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Итак, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 5$; 2) по следствию 1 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Поэтому $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}|$. Так как в прямоугольнике диагонали равны, то $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = AC = 5$.

70. а) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

76. Вектор $\overrightarrow{OK}$ выразим следующим образом: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$. Итак, $\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

77. Учтем, что $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Тогда: $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Итак, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

78. Имеем: $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

79. *Дано:* $\angle O$, $AA_1 \parallel BB_1$. *Доказать:* $\frac{OB}{OA} = \frac{OB_1}{OA_1}$. Раньше обобщенная теорема Фалеса была методом площадей. Докажем теперь ее с помощью векторов. Воспользуемся единственностью разложения вектора по двум неколлинеарным векторам. На основании правила треугольника и признака коллинеарности векторов:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1},\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA_1}, \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{OB} = k_1\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{BB_1} = k_2\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{OB_1} = k_3\overrightarrow{OA_1}, \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow k_3\overrightarrow{OA_1} = k_1\overrightarrow{OA} + k_2\overrightarrow{AA_1} \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = \frac{k_1}{k_3}\overrightarrow{OA} + \frac{k_2}{k_3}\overrightarrow{AA_1}. \qquad (3)$$

$(1,3) \Rightarrow \left(\frac{k_1}{k_3} = 1, \frac{k_2}{k_3} = 1\right) \Rightarrow k_1 = k_3 = k_2$ — в силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам. (4)

$(2 \text{ и } 4) \Rightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{BB_1}{AA_1}$.

80. Проведем перпендикуляры OM и OK соответственно к хордам AB и CD. Ранее установилось, что M и K — середины этих хорд. Учтем, что четырехугольник $OMTK$ — параллелограмм. Тогда $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ — искомое представление вектора $\overrightarrow{OT}$.

81. Воспользуемся свойствами биссектрисы треугольника: $\frac{BL}{LC}=\frac{2}{3}, \frac{BL}{BC}=\frac{2}{5}$. Тогда вектор $\overrightarrow{BL}$ представим следующим образом: $\overrightarrow{BL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AL}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

82. б) Воспользуйтесь тем, что $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$. **в)** Так как $\vec{a}(-5; 6)$, то $\vec{a}^{\,2}=-5\,(-5)+6\cdot 6=25+36=61.$

84. а) Пусть $\angle C=90°$. Разместите систему координат так, чтобы $C(0; h)$, $A(-a; 0)$, $B(b; 0)$, где h — высота, a и b — отрезки, на которые высота делит гипотенузу. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и скалярное произведение этих векторов. **е)** $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}$.

85. 1) Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a}\vec{b}=$ $=x\cdot(-y)+y\cdot x=0$; 2) так как $\vec{a}\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

86. 1) Пусть x — абсцисса искомой точки B, тогда x^2 — ордината этой точки. Поэтому точка B имеет координаты x и x^2. Требуется найти эти координаты; 2) запишем координаты векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AB}$ и скалярное произведение этих векторов: $\overrightarrow{AO}\,(-1; -1)$, $\overrightarrow{AB}\,(x-1; x^2-1)$; $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(-1)(x-1)+(-1)(x^2-1)=-x+1-x^2+1$; 3) по условию $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=-x^2-x+2=0$; 4) отсюда $x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}$, $x_1=-2$, $x_2=1$; 5) значение $x_2=1$ не удовлетворяет условию задачи. В этом случае точка B имеет координаты 1 и 1, т. е. совпадает с точкой A. Этого быть не может. Ответ: $B(-2; 4)$.

87. 1) Расположим оси системы координат так, чтобы: $A(0; 0)$, $C(\sqrt{5}; 0)$. Найдем координаты вершины $B(x; y)$; 2) их можно найти с помощью формулы расстояния:
$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=16, \\ \left(x-\sqrt{5}\right)^2+y^2=9 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(x=\frac{6}{\sqrt{5}},\ y=2\sqrt{\frac{11}{5}}\right)$; 3) после этого нетрудно найти координаты точек A_1 и C_1 и векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$:

$A_1\left(\dfrac{11}{2\sqrt{5}};\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right)$, $C_1\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}};\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right)$; $\overrightarrow{AA_1}\left(\dfrac{11}{2\sqrt{5}};\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right)$; $\overrightarrow{CC_1}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right)$;

4) найдем теперь скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$:

$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=\dfrac{11}{2\sqrt{5}}\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)+\dfrac{11}{5}=0$; 5) поэтому $AA_1 \perp CC_1$.

88. 1) Пусть сторона квадрата равна a. Расположим систему координат так, чтобы: $M\left(a;\dfrac{a}{2}\right)$, $K\left(\dfrac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AM}\left(a;\dfrac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{BK}\left(\dfrac{a}{2};-a\right)$,

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BK}=a\cdot\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cdot(-a)=0$; 3) поэтому $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BK}$ и, значит, $AM\perp BK$.

89. 1) Пусть $AH=b_1$, $HB=a_1$, $CH=h$; 2) запишем координаты векторов $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{CM}$: $\overrightarrow{AP}\left(b_1;\dfrac{h}{2}\right)$; $\overrightarrow{CM}\left(\dfrac{a_1}{2};-h\right)$; 3) найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{CM}$: $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CM}=\dfrac{a_1b_1}{2}-\dfrac{h^2}{2}=0$; 4) поэтому $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{CM}$ и $AP\perp CM$.

90. 1) Пусть $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Имеем: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$; 2) так как $AP\perp BC$ и $OB\perp CA$, то $\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=0$ и $\vec{b}(\vec{a}-\vec{c})=0$;

$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\vec{c}=\vec{a}\vec{b},\\ \vec{b}\vec{a}=\vec{b}\vec{c}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{a}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\Rightarrow\vec{c}(\vec{a}-\vec{b})=0$; 3) это означает, что $\vec{a}\perp\overrightarrow{BA}$. Поэтому $CO\perp AB$.

91. 1) Разложим вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ и найдем скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2+$ $+2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2$; 2) учитывая, что $\overrightarrow{AB}^2=AB^2=1$, $\overrightarrow{AD}^2=AD^2=$ $=16$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{6}$, будем иметь: $\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{4}{9}\cdot1+2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}\cdot16=\dfrac{62}{27}$.

$AM=\sqrt{\dfrac{62}{27}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{62}{3}}$.

92. 1) Расположим оси координат так, как чтобы $A(-R;\ 0)$, $C(R;\ 0)$; 2) так как точка B лежит на окружности, то ее координаты имеют вид: $B(x;\ \pm\sqrt{R^2-x^2})$; 3) тогда для точки B, расположенной в верхней полуплоскости:

$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{AB}\left(x+R;\ \sqrt{R^2-x^2}\right),\\ &\overrightarrow{BC}\left(R-x;\ -\sqrt{R^2-x^2}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(x+R)(R-x)-(R^2-x^2)=0;$$

4) поэтому $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ и $\angle ABC = 90°$; 5) к аналогичному выводу приходим, если точка B лежит в нижней полуплоскости от оси абсцисс.

93. Пусть $A(x_1;\ k_1x_1+b_1)$, $B(x_2;\ k_1x_2+b_1)$, $C(x_1;\ k_2x_1+b_2)$, $D(x_2;\ k_2x_2+ +b_2)$. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют координаты: $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\ k_1(x_2-x_1))$, $\overrightarrow{CD}(x_2-x_1;\ k_2(x_2-x_1))$. а) Если $k_1=k_2$, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковые одноименные координаты. Следовательно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}\,||\,\overrightarrow{CD}$ и $AB\,||\,CD$; б) если $k_1k_2=-1$, то $\overrightarrow{CD}(x_2-x_1;\ -\frac{1}{k_1}(x_2-x_1))$. Тогда

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(x_2-x_1)^2-(x_2-x_1)^2=0$. Поэтому $AB\perp CD$.

94. а) *1-й способ* (использование свойств четырехугольников). Пусть M_1 и K_1 — середины сторон BC и AD. Тогда: 1) четырехугольник MM_1KK_1 — параллелограмм, так как оба эти отрезка параллельны AC; $MM_1=KK_1=\frac{1}{2}AC$ (по свойству средней линии треугольника); 2) параллелограмм MM_1KK_1 является прямоугольником, так как $MM_1\,||\,AC$, $M_1K\,||\,BD$, $AC\,||\,BD$; 3) тогда по теореме Пифагора:

$$\left.\begin{aligned}&MK^2=MM_1^2+M_1K^2,\\ &MM_1=\frac{1}{2}d_1,\\ &M_1K=\frac{1}{2}d_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow MK^2=\frac{1}{4}d_1^2+\frac{1}{4}d_2^2;$$

4) поэтому $MK=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}$.

2-й способ (координатный). 1) Пусть $T = AC \cap BD$, $TC = x, BT = y$. Тогда $AT = d_1 - x, TD = d_2 - y$; 2) запишем координаты точек: $B(d_1 - x; y)$, $C(d_1; 0), D(d_1 - x; y - d_2)$; 3) тогда $M\left(\frac{d_1 - x}{2}; \frac{y}{2}\right)$, $K\left(\frac{2d_1 - x}{2}; \frac{y - d_2}{2}\right)$; 4) $MK^2 = \left(\frac{2d_1 - x}{2} - \frac{d_1 - x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y - d_2}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 = $ $= \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-d_2}{2}\right)^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{4}$; 5) $MK = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$.

3-й способ (векторный). 1) Ранее было установлено, что $\overrightarrow{MK} =$ $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$; 2) тогда $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) =$ $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$; 3) поэтому $\overrightarrow{MK}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2) =$ $= \frac{1}{4}(d_1^2 + 0 + d_2^2) = \frac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2)$; 4) отсюда находим MK.

Тема 3

95. б) Нужно убедиться, лежит ли точка $T_\alpha\left(\frac{8}{17}; \frac{15}{17}\right)$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Эта точка лежит на данной окружности, так как $\left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64 + 225}{289} = \frac{289}{289} = 1$. **г)** Найдем ординату точки T_α: $\left(\frac{7}{25}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{24}{25}$. Для точек верхней полуокружности $y > 0$, поэтому $y = \frac{24}{25}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$.

98. б) $\left(\sin A = \frac{a}{c} \text{ и } \cos B = \frac{a}{c}\right) \Rightarrow \sin A = \cos B$. **в)** *1-й способ.* Пусть $BC = 4x$, $AB = 5x$. Тогда $AC = 3x$ и $\frac{b}{c} = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$. *2-й способ.* $\frac{b}{c} = \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

100. а) Пусть в ΔABC $\angle A=\alpha$, BB_1 — высота. Тогда $BB_1=c\sin\alpha$ и $S_{ABC}=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Аналогично получаются другие две формулы. **б)** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

103. а) 1) На основании основного тригонометрического тождества $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{11}{36}}=\pm\sqrt{\frac{25}{36}}=\pm\frac{5}{6}$; 2) так как угол α находится во II четверти, то $\cos\alpha<0$. Поэтому $\cos\alpha=-\frac{5}{6}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{11}}{6}:\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\frac{6}{5}=-\frac{\sqrt{11}}{5}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{5}{\sqrt{11}}$.

б) 1) Так как $\operatorname{tg}\alpha<0$, то угол α находится во II четверти. Учтем это: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-5 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=-5$, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-5\cos\alpha \;\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\cos^2\alpha=25\cos^2\alpha$, $26\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{26}$, $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{26}}$. Во II четверти $\cos\alpha<0$. Поэтому $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{26}}$;

2) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{26}}=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$.

в) 1) Так как $\operatorname{tg}\alpha>0$, то угол α находится в I четверти. Тогда: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=3$, $1-\cos^2\alpha=9\cos^2\alpha \;\Rightarrow\; 10\cos^2\alpha=1$, $\cos^2\alpha=\frac{1}{10}$, $\cos\alpha=\pm\sqrt{0{,}1}$. В I четверти $\cos\alpha>0$. Поэтому $\cos\alpha=$ $=\sqrt{0{,}1}$; 2) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}1}=\sqrt{0{,}9}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{3}$.

г) Имеем: 1) $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha=-\frac{3}{4}$;

2) $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$;

3) $\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\frac{\sin(90°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}=-\frac{3}{4}:\frac{\sqrt{7}}{4}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}=-\frac{3}{\sqrt{7}}$;

4) $\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

д) Имеем: 1) $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$;

2) $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha=-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$;

3) $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\cos(180°-\alpha)}=\frac{\sqrt{7}}{4}:\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}}{3}$;

4) $\operatorname{ctg}(180°-\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}(180°-\alpha)}=\frac{3}{\sqrt{7}}$.

104. в) $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$. **г)** $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$, $\cos\beta=\frac{a}{2R}$.

105. Без применения тригонометрии можно найти второй острый угол. Если $\angle A=\alpha$, то $\angle B=90°-\alpha$. Можно найти также медиану, проведенную к гипотенузе, и радиус описанной окружности: $m_c=R=\frac{c}{2}$. Вычисление же остальных элементов без тригонометрии затруднительно. Выясним, как тригонометрия поможет решить эту задачу: 1) сначала найдем катеты: $\frac{AC}{c}=\cos\alpha\Rightarrow AC=c\cos\alpha$, $\frac{BC}{c}=\sin\alpha\Rightarrow BC=c\sin\alpha$; 2) после этого, как и при решении предыдущей задачи, найдем площадь: $S=\frac{1}{2}c^2\cos\alpha\sin\alpha$; 3) высоты находятся следующим образом: $h_a=c\cos\alpha$, $h_b=c\sin\alpha$, $h_c=\frac{ab}{c}=\cos\alpha\ \sin\alpha$; 4) найдем медианы: $m_b=\sqrt{c^2\sin^2\alpha+\frac{c^2\cos^2\alpha}{4}}=\frac{c}{2}\sqrt{3\sin^2\alpha+1}$, $m_a=\frac{c}{2}\sqrt{3\cos^2\alpha+1}$; 5) радиус вписанной окружности можно найти следующим образом:

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{c\sin\alpha+c\cos\alpha-c}{2}=\frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2},$$

или
$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{c^2\cos\alpha\sin\alpha}{c\sin\alpha+c\cos\alpha+c}=\frac{c\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1};$$
6) отрезки, на которые стороны треугольника делятся точками касания вписанной окружности, находятся следующим образом: катет AC делится на отрезки, равные
$$\frac{c\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \text{ и } \frac{c\cos\alpha(\cos\alpha+1)}{\sin\alpha+\cos\alpha+1};$$
катет BC делится на отрезки, равные
$$\frac{c\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \text{ и } \frac{c\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha+\cos\alpha+1};$$
гипотенуза AB делится на отрезки, равные
$$\frac{c\sin\alpha(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \text{ и } \frac{c\cos\alpha(\cos\alpha+1)}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}.$$
106. Имеем:
$h_c=c\cos\alpha\cdot\sin\alpha, AD=c\cos^2\alpha, DB=c\sin^2\alpha, AD\cdot DB=$
$=(c\cos^2\alpha)(c\sin^2\alpha)=c^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha, h_c^2=c^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha;$
$h_c^2=AD\cdot DB$.

107. а) $S=\frac{1}{4}p^2\sin\alpha$. Установите, что суммы противоположных сторон трапеции равны между собой. **б)** $S=\frac{1}{2}d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **в)** $S=\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$. **г)** Рассмотрите катеты a и b, воспользуйтесь теоремой Пифагора. **д)** 10 см, $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см, $\operatorname{tg}A=2$, $\operatorname{tg}B=\frac{1}{2}$.

108. а) 1) Пусть O — центр вписанной окружности (рис. 145). Точка O находится как точка пересечения биссектрис треугольника. Учтем еще, что радиус вписанной окружности, проведенной в точку касания, перпендикулярен к стороне треугольника; 2) поэтому ΔAOM — прямоугольный, в нем $AM=\frac{b}{2}, \angle OAM=\frac{\alpha}{2}$, $OM=r$ — искомый радиус; 3) тогда $\frac{OM}{AM}=\operatorname{tg}\angle OAM\Rightarrow\frac{r}{b/2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Rightarrow r=\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

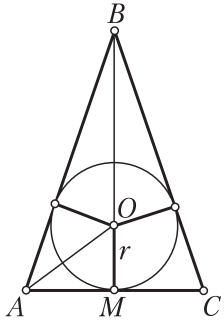


Рис. 145

б) Обозначим неизвестную сторону прямоугольника через x (рис. 146). Тогда $\dfrac{x}{a} = \mathrm{tg}\alpha \Rightarrow x = a\,\mathrm{tg}\alpha$; $S = ax = a \cdot a\,\mathrm{tg}\alpha = a^2\,\mathrm{tg}\alpha$. **в)** 1) Находим высоту трапеции (рис. 147): $\dfrac{h}{b} = \sin\alpha \Rightarrow h = b\sin\alpha$; 2) так как $AB_1 = DC_1 = b\cos\alpha$, то большее основание $AD = 2AB_1 + B_1C_1 =$ $= 2AB_1 + BC = 2b\cos\alpha + a$;

3) тогда $S = \dfrac{1}{2}(BC + AD)h = \dfrac{1}{2}(a + 2b\cos\alpha + a)b\sin\alpha =$

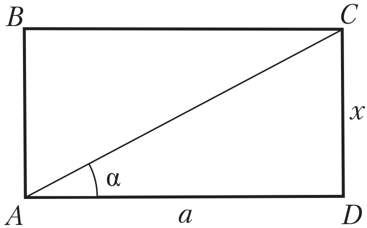


Рис. 146

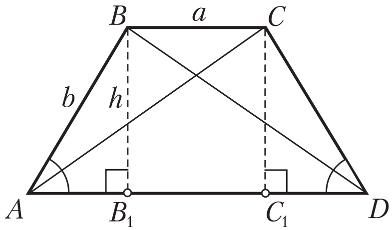


Рис. 147

$= \dfrac{1}{2}(2a + 2b\cos\alpha)b\sin\alpha = b(a + b\cos\alpha)\sin\alpha$. **г)** Пусть CC_1 — высота трапеции (рис. 148). Имеем: 1) $DC_1 = AD - BC = a - b$;

2) $\dfrac{CC_1}{DC_1} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow CC_1 = DC_1 \operatorname{tg}\alpha; CC_1 = (a-b)\operatorname{tg}\alpha$;

3) $S = \dfrac{1}{2}(AD + BC)CC_1 = \dfrac{1}{2}(a+b)(a-b)\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\alpha$. **д)** 1) Так как $OA = OB = OC = OD$, то OA — радиус окружности, AC — диаметр (рис. 149). Поэтому $AC = 2R$; 2) тогда $AD = AC\cos\alpha = 2R\cos\alpha$, $CD = AC\sin\alpha = 2R\sin\alpha$, $S = AD \cdot CD = 2R\cos\alpha \cdot 2R\sin\alpha =$ $= 4R^2\cos\alpha\sin\alpha$. *Замечание*. С помощью формулы синуса двойного аргумента ответ может быть представлен в виде: $S = 2R^2\sin 2\alpha$.

109. б) Имеем: 1) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$;

2) тогда $BC \cdot \overrightarrow{MA} + AC \cdot \overrightarrow{MB} + AB(-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$,

$(BC - AB)\overrightarrow{MA} + (AC - AB)\overrightarrow{MB} = \vec{0}$;

3) так как $\overrightarrow{MA} \nparallel \overrightarrow{MB}$, то $BC - AB = 0$ и $AC - AB = 0$;

4) получаем, что $AB = BC = CA$. Это означает, что если данное равенство выполняется, то ΔABC — равносторонний.

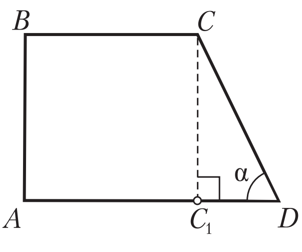


Рис. 148

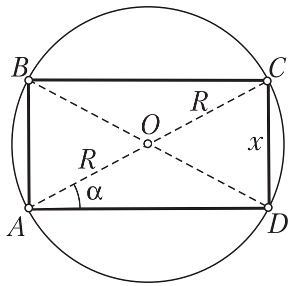


Рис. 149

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна
Тавгень Олег Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. 8 КЛАСС

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 20.12.2010. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 5,26. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.