Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия
7 класс
Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся
общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

Минск • «Аверсэв» • 2011

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721
Р59

Серия основана в 2010 году

Рогановский, Н. М.

Р59 Геометрия. 7 класс. Многообразие идей и методов : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 239 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-529-661-5.

Пособие содержит теоретический и практический материал, интересные исторические сведения, а также знакомит учеников с различными методами решения геометрических задач.

Предназначено учащимся 7 классов для использования на факультативных занятиях по геометрии и составлено в соответствии с программой факультативного курса.

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-529-661-5

Геометрия — большой, стройный мир со своим порядком и совершенством. Он зовет к себе и очаровывает. Каждый, кто прикоснулся к нему, совершенствует не только свой ум, но и душу.

От авторов

Дорогие школьники!

Современная школа призвана решать две тесно связанные друг с другом задачи: с одной стороны, обеспечить овладение вами твердо установленным и четко очерченным миниальным объемом знаний и умений, необходимых каждому члену нашего общества, с другой — создать условия для дополнительного изучения школьного курса математики для тех, кто проявляет повышенный интерес и склонность к данному предмету.

Бесспорно, что овладение практически любой современной профессией требует определенных знаний по математике. С математикой тесно связана и «компьютерная грамотность», широкое распространение которой стало неотъемлемой чертой нашего времени. Математические знания стали необходимой частью общей культуры. В школе математика является опорным предметом, обеспечивающим изучение на должном уровне как естественных, так и гуманитарных дисциплин. Необходимо отметить, что математика является профилирующим предметом на вступительных экзаменах в вузы по широкому спектру специальностей.

Наиболее массовой и доступной формой дополнительного изучения математики являются факультативные занятия.

Ввиду существенного повышения роли факультативов они проводятся в V–XI классах.

Изучение «спроса» показало, что наибольшую пользу факультативные занятия приносят, если они используются *для развития и расширения основного курса*, решения задач повышенной трудности, для проведения кружковой работы.

На факультативных занятиях вы имеете возможность улучшить знания по основному курсу, получаемые на уроках, приобрести умения решать более трудные и разнообразные задачи.

В предлагаемом факультативном курсе *содержание тем излагается в доступной форме, путем раскрытия многообразия идей и методов школьной геометрии, решения содержательных задач*.

На факультативных занятиях вы познакомитесь с рядом вопросов занимательного характера, с историческими сведениями. Вы получите возможность выступить с лекцией, провести под руководством учителя экскурсию на интересующее вас предприятие или в учебное заведение, подготовить и сделать доклад по выбранной вами тематике.

Надеемся, что такой факультатив окажется интересным и полезным и тем учащимся, которые не проявляют особого интереса к занятиям математикой, но хотят улучшить свои знания и расширить кругозор.

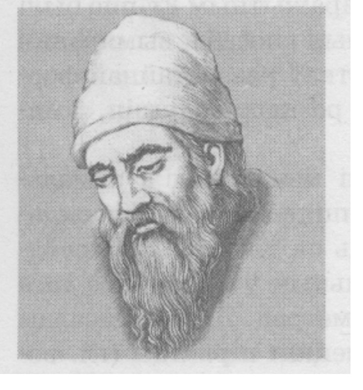
Введение

В 1–6-х классах вы знакомились с некоторыми геометрическими понятиями. С 7-го класса геометрия изучается как отдельный предмет. Данная книга дополняет учебное пособие по геометрии, по которому вы учитесь.

Основное ее назначение — помочь вам в изучении школьного курса геометрии.

Слово ***геометрия*** — греческое. В переводе на русский язык оно означает «землемерие». Уже само это название подчеркивает тот факт, что геометрия возникла на основе практической деятельности людей далекого прошлого. Действительно, геометрия начала развиваться еще в глубокой древности. Несколько тысяч лет назад в Древнем Египте были установлены (иногда приближенно, неточно) различные способы измерения расстояний, вычисления площадей участков разнообразной формы и размеров, нахождения объемов различных сосудов, вместимости сооружений.

Торговые связи между Египтом и Древней Грецией способствовали распространению геометрических знаний в Греции. Древнегреческие математики не только позаимствовали эти знания, но и много сделали для их расширения, углубления и уточнения. Наиболее крупные теоремы были открыты и доказаны именно древнегреческими учеными.



Евклид (III в. до н. э.)

Особые заслуги в развитии геометрии принадлежат греческому ученому *Евклиду*, жившему более 2000 лет назад. Евклид сумел разрозненные геометрические сведения превратить в стройную систему знаний.

Большой вклад в развитие математики внесли ученые Древнего Вавилона. Особое значение имеет тот факт, что ими была предложена первая позиционная система чисел. Примечательно, что она была не десятичной, а шестидесятеричной. Наиболее известные ее применения сохранились до сих пор. Для измерения углов и дуг окружности используется 1 градус = 60 минутам и 1 минута = 60 секундам.

Переводы «Начал» Евклида на различные языки способствовали распространению геометрических знаний во всем мире. В Европу геометрия пришла уже в достаточно сложившемся и развитом виде. Следует отметить, что «Начала» Евклида долгое время служили единственным учебным руководством (хотя эти книги больше похожи на научные работы, чем на школьные учебники). Современные учебники намного доступнее и проще, и в этом смысле «школяры» прошлых эпох наверняка позавидовали бы нашим ученикам.

В настоящее время геометрическая наука значительно богаче и сложнее по содержанию. Она занимается не только измерением длин, площадей и объемов. Большое развитие в геометрии получили многие математические методы: метод равных треугольников, метод площадей, координатный, векторные методы и др.

Кроме геометрии, которая изучается в средней школе, существуют и другие геометрии. Можно сказать, что школьная геометрия — это начало интересного и увлекательного пути в геометрию.

Тема 1 КАК СТРОИТСЯ ГЕОМЕТРИЯ: ГЛАВНАЯ ИДЕЯ

§ 1. Аксиомы, определения и теоремы: кому и зачем они нужны?

1.1. Игра «домино» и аксиомы

Математические предложения бывают трех видов: *аксиомы, определения* и *теоремы*. Аксиомы — это исходные предложения, исходные правила рассуждений. Они используются не только в математике. Взять, к примеру, всем известную игру «домино». Эта игра ведется по определенным правилам — правилам игры, которые определяют все действия игроков. «Играм присущи некоторые черты произведений искусства, — писал Хаксли. — С их простыми и четкими правилами они предстают перед нами как островки порядка в хаосе и неразберихе эмпирического опыта. Когда мы играем в них сами или только наблюдаем, как в них играют другие, мы переходим из непостижимой вселенной данной реальности в маленький, строго упорядоченный мир, созданный человеком, где все ясно, целесообразно и легко доступно пониманию» (Мартин Гарднер : Математические головоломки и развлечения. — М. : Мир, 1971. — С. 396). Игра эта достаточно проста, напомним только основные ее правила. В игре используют 28 домино. Каждое домино состоит из двух квадратиков, на которые нанесено определенное количество очков, применяются при этом все комбинации по 2 из 7 чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. В зависимости от этого домино называется двумя числами, например, *ноль и ноль* обозначает пустое домино, на квадратах которого нет очков, *ноль и один* — домино, на одном из квадратов которого есть одно очко, а другой пуст, *четыре и пять* — домино, на одном из квадратов которого стоит 4 очка, а на другом 5, и т. д. Сообразно с этим будем обозначать домино *двумя цифрами*, показывающими число очков на каждом квадратике и поставленными рядом. Так, домино *ноль и ноль* будем обозначать 00, домино *четыре и шесть* обозначим 46 и т. д. Расположим все 28 домино в таком порядке:

06 05 04 03 02 01 00
16 15 14 13 12 11
26 25 24 23 22
36 35 34 33
46 45 44
56 55
66

Предположим, что по завершении игры, когда были выложены все 28 домино, на левом конце оказалось домино 34 (начинающееся с трех очков): 34 45 53 33 31 16... На правом конце оказалось домино, заканчивающееся также тремя очками. Случайно это или закономерно? Правила игры позволяют дать однозначный ответ: закономерно.

Доказательство. Всего домино с тремя очками — 7, а их квадратиков с тремя очками — 8. Внутри ряда может встретиться только четное число домино с квадратиком из трех очков. Поэтому из четности общего числа таких квадратиков и четности числа квадратиков, расположенных внутри ряда, неизбежно следует, что на правом конце ряда будет домино, заканчивающееся тремя очками (в противном случае число квадратиков с тремя очками не окажется четным).

Доказательство закончилось. Как видно, оно обладает важными достоинствами: опирается на небольшое число исходных правил игры, играющих роль аксиом этой игры, освобождает нас от необходимости непосредственно выкладывать все домино и смотреть, какое из них окажется на правом конце.

Конечно, можно было бы поэкспериментировать, попытаться несколько раз выложить весь ряд из 28 домино и экспериментально убедиться в том, что если левый конец начинается с трех очков, то и правый конец будет заканчиваться тремя очками. Возможно, такой эксперимент и представляет интерес. Хотя согласитесь: он потребует немало времени. Кроме того, исчерпывающего ответа он не дает. Вдруг на некотором 25-м эксперименте что-то окажется не так и кажущаяся закономерность сразу разрушится?.. Рассуждение на основании правил игры обладает совсем другими свойствами. **Такое рассуждение показывает, что подобная закономерность, без всяких сомнений, имеет место всегда.** Правила игры здесь играют роль аксиом, а рассуждение на их основе — роль доказательства.

1.2. Что такое аксиома, определение, теорема, доказательство?

Играть в какую-либо игру, не зная ее правил, невозможно. По аналогичной причине нужны исходные правила и в геометрии. В геометрии различных фигур (точек, прямых, отрезков, лучей, углов, треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т. д., окружностей, различных комбинаций фигур) гораздо больше, чем домино (одних многоугольников бесконечное множество!). Поэтому несравненно труднее задать геометрические правила игры — исходные свойства геометрических фигур. Тем не менее не сразу, не за одно тысячелетие, но такие правила — аксиомы — были созданы. Давайте познакомимся с ними и с их ролью при построении геометрии. Рассмотрим, например, некоторые предложения, с которыми вы знакомились в предыдущих классах.

1. *Через любые две точки можно провести прямую и только одну.*

2. *Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной прямой.*

3. *Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.*

4. *Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами к сторонам другого.*

5. *Развернутый угол равен* 180°.

6. *Сумма смежных углов равна* 180°.

7. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.*

Из семи приведенных предложений аксиомами являются 1, 2 и 5 (конечно, это всего лишь примеры аксиом, а не полный их перечень).

> ***Аксиома*** — это исходное предложение для построения теории. С помощью аксиом описываются первые свойства точек, прямых, полуплоскостей, лучей, меры угла, равных треугольников, параллельных прямых, площади фигуры.

С помощью аксиом разъясняются первые понятия: что такое точка, прямая, расстояние и т. д.

Обратимся к предложениям 3 и 4. В них говорится, что такие-то фигуры называются так-то. С помощью этих предложений даются названия (имена) геометрическим фигурам. Такие предложения называются определениями.

Определение — это предложение, в котором сообщаются свойства некоторого понятия, позволяющие отличить это понятие от остальных. В определении, как уже сказано, дается название вводимому понятию.

К определениям предъявляется ряд логических требований. Вот одно из них: в каких-либо двух определениях не должно быть «замкнутого круга». Эта ошибка состоит в том, что одно понятие определяется через некоторое другое, причем это другое понятие определяется через первое понятие.

Пример ошибки «замкнутого круга».

Первое определение:	*Второе определение*:
перпендикулярными прямыми называются две прямые, которые пересекаются под прямым углом.	прямым углом называется угол, который получается при пересечении двух перпендикулярных прямых.

При наличии «замкнутого круга» одно из двух определений обязательно является неправильным. В данном пособии принято первое определение, поэтому второе определение является неправильным.

Между определениями и аксиомами существует большое сходство. И те и другие описывают первые свойства изучаемых понятий. Не случайно поэтому систему аксиом называют часто *аксиоматическим определением* исходных (первичных) понятий геометрии. Отличие аксиом от других определений состоит в том, что в аксиомах описываются самые первые свойства (!) самых первых понятий (!!).

Далеко не все свойства понятий формулируются в аксиомах и определениях. Большая часть их сообщается в виде теорем. Если аксиомы и определения не доказываются, то теоремы должны быть доказаны при помощи логических рассуждений.

Теорема — это предложение, в котором сообщаются свойства понятия, не вошедшие в аксиомы и определения. Эти предложения доказываются.

В каждой теореме выделяются две части: *условие* теоремы (то, что дано) и *заключение* теоремы (то, что нужно доказать).

Пример. Теорема: «Сумма смежных углов равна 180°».

Условие теоремы	**Заключение теоремы**
Даны смежные углы	Сумма этих углов равна 180°

Если условие теоремы обозначить буквой A, а заключение — буквой B, то в общем виде теорему можно записать так: ***если A***, ***то B***, или еще короче: $\boldsymbol{A \Rightarrow B}$.

Например, предыдущую теорему можно записать так:

даны смежные углы ⇒ сумма этих углов равна 180°.

Читается эта запись таким образом: «Если даны смежные углы, то их сумма равна 180°».

Доказательство представляет собой цепочку логических рассуждений. При доказательстве опираются на ранее известные аксиомы, определения и теоремы.

Доказательство обладает *точностью* (оно не связано с измерениями, физическим опытом), *общностью* (оно охватывает все случаи, даже если их бесконечное множество) и оно, если проводится правильно, всегда приводит к *одному и тому же* выводу.

Если логические рассуждения по неопытности подменяются утверждениями типа «из рисунка видно, что...» или в них используются искаженные или несуществующие в математике понятия, то подобные рассуждения не только не являются доказательством, но и во многих случаях могут привести к неправильному выводу. Поясним сказанное следующим примером.

Пример ошибочного рассуждения. На рисунке 1 изображены диагонали AX и AY двух параллелограммов. Требуется сравнить длины этих диагоналей.

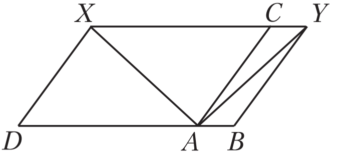


Рис. 1

Возможное «рассуждение». Из рисунка видно, что $AX > AY$. Этот вывод можно не только сделать с помощью рисунка, но и получить при помощи такого рассуждения: параллелограмм с диагональю AX длиннее параллелограмма с диагональю AY. В более длинном параллелограмме диагональ будет больше. Поэтому $AX > AY$.

Это рассуждение доказательством не является. В нем используются понятия, которые в геометрии отсутствуют. В геометрии нет понятий: «длина параллелограмма», «этот параллелограмм длиннее такого-то», «эти параллелограммы имеют одинаковую длину» и т. п. Как видно, в этом рассуждении нарушено требование: при доказательстве опираются на ранее известные аксиомы, определения и теоремы. Ошибочно проведенное рассуждение приводит к неправильному выводу. На самом деле $AX = AY$. (Убедитесь в этом хотя бы с помощью измерения.) Более того, доказательство в данном примере (сравнить диагонали AX и AY именно данных параллелограммов) оказывается вообще невозможным, так как условие сформулированного предложения не является полным (определенным).

Обратная теорема. Если условие и заключение теоремы поменять местами, то получится новое предложение: $B \Rightarrow A$. Оно может быть справедливым, а может быть ложным. Если предложение $B \Rightarrow A$ — справедливое, то оно называется теоремой, *обратной* теореме $A \Rightarrow B$. Теоремы $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ называются *взаимно обратными*.

Пример. Для теоремы о смежных углах обратное предложение будет следующим: если сумма двух углов равна 180°, то эти углы являются смежными. Нетрудно видеть, что обратное предложение несправедливо и поэтому оно не является теоремой.

Необходимые условия. Достаточные условия. В теореме $A \Rightarrow B$ заключение B называется *необходимым* для условия A, а условие A — *достаточным* для заключения B.

Пример. Для теоремы о смежных углах заключение «сумма углов равна 180°» является необходимым для условия «углы смежные», а условие «углы смежные» является достаточным для заключения «сумма углов равна 180°».

Необходимые и достаточные условия. Для теорем $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ (кратко это записывается так: $A \Leftrightarrow B$) условие B называется *необходимым и достаточным* для условия A, а условие A — *необходимым и достаточным* для условия B.

Пример. Ввиду того что для теоремы о смежных углах обратное предложение не является теоремой, условие теоремы не является необходимым и достаточным для заключения теоремы, а заключение теоремы не является необходимым и достаточным для условия теоремы.

§ 2. Аксиомы прямой и расстояния: что можно определить с их помощью?

2.1. Прямая, расстояние, между

Обратимся теперь к аксиомам геометрии. Их объединяют в группы, таких групп несколько.

1-я группа (*аксиомы прямой*)

1.1. Для каждой прямой существует сколько угодно точек, принадлежащих этой прямой, и сколько угодно точек, не принадлежащих ей (рис. 2).
1.2. Через любые две различные точки можно провести прямую и только одну (рис. 3).

Следствие. *Если прямые a и b имеют более одной общей точки, то они совпадают.*

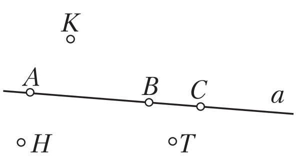


Рис. 2

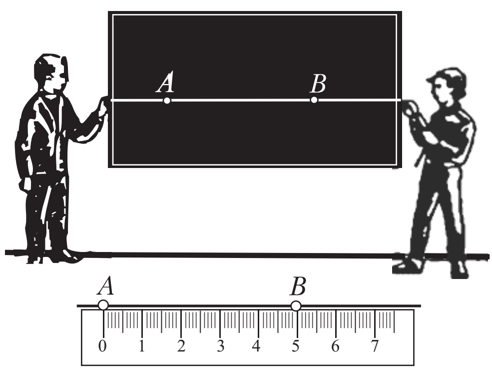


Рис. 3

Если две прямые a и b имеют единственную общую точку A, то они называются ***пересекающимися***, а точка A — *точкой их пересечения.*

Для измерения расстояний выбирают некоторое расстояние и принимают его за единицу измерения. При любом измерении (рис. 4) расстояние находится приближенно. Результаты измерения одного и того же расстояния могут не совпадать. Понятно, что это расхождение вызвано неточностью измерений. На самом же деле расстояние между двумя различными точками (при выбранной единице измерения) — это некоторое единственное для этих точек положительное число. В этом и состоят аксиомы расстояния между двумя точками.

2-я группа (*аксиомы расстояния*)

2.1. Существует расстояние, равное единице.
2.2. Расстояние между двумя точками всегда находится единственным образом (при выбранной единице измерения).
2.3. Если точки A и B различны, то расстояние AB положительно. Если две точки совпадают, то расстояние между ними равно нулю.
2.4. Отношение двух расстояний остается всегда постоянным, оно не зависит от выбора единицы измерения.

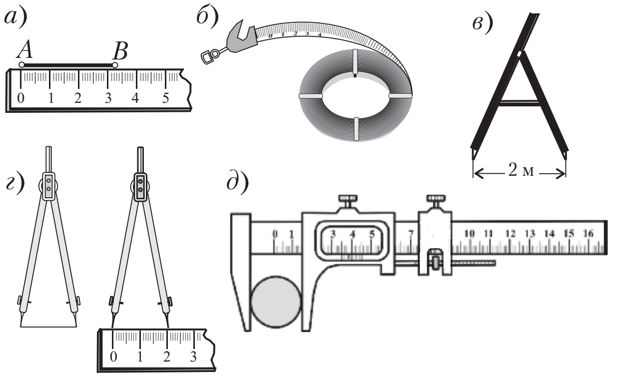


Рис. 4

Примеры расстояний:

Расстояние от центра Земли до ее поверхности (радиус Земли) примерно равно 6370 км.

За 1 с свет в вакууме проходит расстояние, примерно равное 299 792 458 м.

«Семь футов под килем» (старинное пожелание морякам) — расстояние, примерно равное 2,1336 м.

2.2. Какие понятия можно определить с помощью первых аксиом?

С помощью расстояния между двумя точками можно определить целый ряд понятий, в частности понятия отрезка, равных отрезков, длины отрезка и др.

Пусть на прямой AB взята точка X, которая не совпадает ни с точкой A, ни с точкой B (рис. 5, *а*). Познакомимся со следующим определением.

Рис. 5, а

Точка X называется ***лежащей между*** точками A и B, если эти три точки лежат на одной прямой и выполняется равенство: $AX + XB = AB$.

Рассмотрим первую аксиому третьей группы. В качестве аксиомы примем следующее утверждение.

Аксиома о трех точках прямой

3.1. Одна из трех точек, принадлежащих некоторой прямой, обязательно лежит между двумя другими.

Как уже было сказано, с помощью аксиом прямой и расстояния можно определить многие геометрические фигуры (отрезок, окружность, хорда окружности и т. д.)

и отношения между ними (равные отрезки, пересекающиеся отрезки, непересекающиеся отрезки и т. д.).

Рис. 5, б

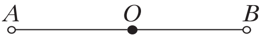


Рис. 6

Отрезком AB называется множество точек, состоящее из точек A и B и всех точек X, лежащих между ними (рис. 5, *б*). Точки A и B называются *концами* отрезка, точка X — *внутренней точкой* отрезка.

Если расстояния AB и CD равны, то отрезки AB и CD называются ***равными***.

Длиной отрезка AB называется расстояние AB.

Серединой отрезка AB называется точка O, делящая отрезок AB на два равных отрезка (рис. 6).

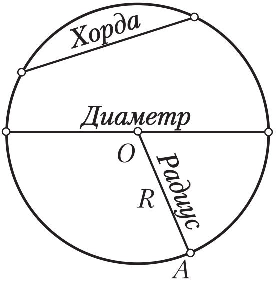


Рис. 7

Окружностью *с центром O и радиусом R* называется множество всех точек плоскости, удаленных от центра O на расстояние, равное R (рис. 7).

Радиусом окружности называют также любой отрезок, соединяющий центр с точкой окружности.

Хордой окружности называют отрезок, соединяющий две точки окружности. *Диаметром окружности* называется хорда, проходящая через центр окружности.

Два отрезка называются ***пересекающимися***, если они имеют единственную общую точку, которая является внутренней точкой каждого отрезка.

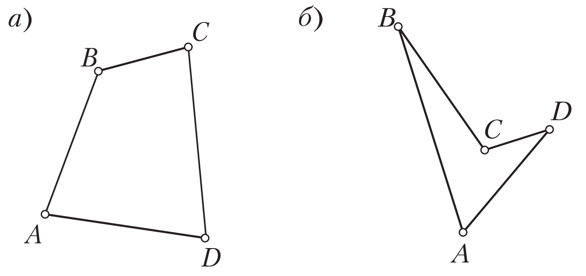


Рис. 8

Пусть на плоскости даны четыре точки A, B, C и D, причем никакие три из них не лежат на одной прямой (рис. 8, *а*, *б*).

Четырехугольником $ABCD$ называется фигура, состоящая из четырех отрезков AB, BC, CD и DA, из которых никакие два не пересекаются и не лежат на одной прямой. *Вершинами* четырехугольника называются точки A, B, C и D, *сторонами* четырехугольника — отрезки AB, BC, CD и DA. *Периметром* четырехугольника называется сумма длин всех его сторон.

2.3. Применение аксиом при решении задач

Аксиомы используются не только для построения определений понятий, с их помощью можно решать задачи. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. (*Решите без выполнения чертежа!*) Астроном, наблюдая в телескоп три космических объекта X, Y и Z, определил расстояния между ними в астрономических единицах (1 а. е. ≈ 150 000 000 км). Расположены ли эти объекты в данный момент наблюдения на одном отрезке, если $XY = 3$ а. е., $YZ = 4$ а. е., $XZ = 5$ а. е.?

Дано: $XY = 3$ а. е., $YZ = 4$ а. е., $XZ = 5$ а. е.

Требуется: установить, расположены ли точки X, Y и Z на одном отрезке.

Решение.

1) Для того чтобы космические объекты X, Y и Z оказались расположенными на одном отрезке, необходимо, чтобы сумма двух меньших расстояний была равна большему расстоянию;

2) проверим, выполняется ли это требование:
3 а. е. + 4 а. е. ≠ 5 (а. е.);

3) значит, эти космические объекты не расположены на одном отрезке.

Ответ: космические объекты X, Y и Z не лежат на одном отрезке.

Задача 2. Пусть даны те же самые космические объекты, что и в предыдущей задаче. Лежат ли эти космические объекты в момент наблюдения на одной прямой?

Вы, вероятно, уже догадались, какой ответ надо дать: данные объекты не лежат на одной прямой. Эта догадка правильная. А как провести ее доказательство?

Попытаемся это сделать. Посмотрим, к каким выводам можно прийти, допустив, что данные объекты лежат на одной прямой. Если по допущению они лежат на одной прямой, тогда по аксиоме 3.1 один из них лежит между двумя другими. Может ли, например, объект X лежать между объектами Y и Z? Так как $YX + XZ = 3 + 5 \neq 4$, т. е. $YX + XZ \neq YZ$, то приходим к выводу: объект X не лежит между Y и Z. Аналогично убеждаемся в том, что Y не лежит между X и Z и Z не лежит между X и Y. Получили противоречие с аксиомой 3.1. Оказалось, что из трех точек, принадлежащих прямой, никакая точка не лежит между двумя другими! Противоречие получено из-за того, что сделано неправильное допущение (данные объекты лежат на одной прямой).

Значит, космические объекты не лежат на одной прямой. (Заметим, что при доказательстве использовался метод, который называется *методом от противного*.)

§ 3. Аксиомы полуплоскости и луча: их возможности в построении геометрии. Проблема Жордана

3.1. Что такое полуплоскость и луч?

Прямая и отрезок называются ***пересекающимися***, если они имеют единственную общую точку, которая является внутренней точкой данного отрезка.

Введем понятия полуплоскости и луча и их аксиомы.

Проведем на плоскости прямую a. Эта прямая делит все точки плоскости, не принадлежащие прямой, на части, такие что (рис. 9, *а*):

а) если точки A и B принадлежат различным частям плоскости, то отрезок AB пересекает прямую a;

б) если точки A и C принадлежат одной части плоскости, то отрезок AC не пересекает прямую a.

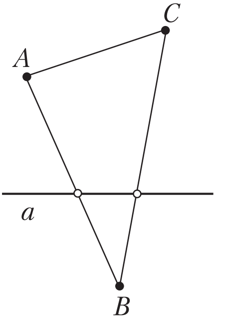


Рис. 9, а

Эти части плоскости называются ***полуплоскостями***.

Эти полуплоскости называются *дополнительными*. Они дополняют друг друга вместе с прямой a до плоскости. Прямая a называется *границей* каждой из дополнительных полуплоскостей.

Чтобы указать полуплоскость, задают границу полуплоскости и одну из точек полуплоскости, не принадлежащую границе.

На прямой a возьмем точку O. Эта точка делит все остальные точки прямой на части, такие что (рис. 9, *б*):

Рис. 9, б

а) если точки A и B принадлежат различным частям прямой a, то точка O лежит между точками A и B;

б) если точки A и C принадлежат одной части прямой, то точка O не лежит между точками A и C.

Эти части прямой называются ***лучами*** (***полупрямыми***). Эти лучи называются *дополнительными*. Они дополняют друг друга вместе с точкой O до прямой. Точка O называется *началом* (или *вершиной*) каждого из дополнительных лучей.

Сформулируем теперь другие аксиомы третьей группы — аксиомы полуплоскости, луча и откладывания отрезка:

Аксиома полуплоскости

3.2. Прямая a разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой прямой, на две полуплоскости.

Аксиома луча

3.3. Точка O, принадлежащая прямой a, разбивает все остальные точки этой прямой на два луча (две полупрямые).

Аксиома откладывания отрезка

3.4. На луче от его начала (рис. 10) можно отложить отрезок любой данной длины и только один.

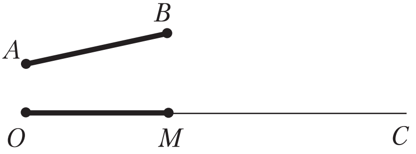


Рис. 10

Задача 1. С помощью аксиомы луча можно доказать, что прямая не может иметь вид, показанный на рисунке 11 (на этом рисунке она изображена в виде замкнутой линии). Как это сделать?

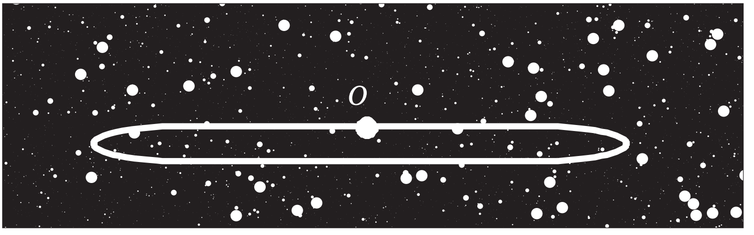


Рис. 11

Дано: некоторая замкнутая линия, которая «местами очень похожа на прямую линию».

Доказать: прямая линия не является замкнутой.

Идея доказательства. Выясним, к каким выводам можно прийти, если на некоторое время допустить, что прямая является замкнутой линией. Итак, делаем такое допущение.

Решение.

1) По аксиоме луча точка O, принадлежащая прямой, должна разбивать прямую на два луча (на две части). Точка O не разбивает замкнутую линию на две части (см. рис. 11). Если «разрезать» линию в точке O, то получится только один «кусок»;

2) приходим к противоречию с аксиомой луча.

Ответ: значит, прямая не может иметь вид, показанный на рисунке 11, она не может быть замкнутой.

Задача 2. (*Проблема, связанная с теоремой Жордана.*) Известно, что многоугольником называется ломаная линия, которая замкнута и не имеет самопересечений (является простой). Теорема Жордана формулируется следующим образом: *многоугольник разделяет все точки плоскости, не принадлежащие ему, на два подмножества, называемые внутренней и внешней областями многоугольника.*

Если многоугольник имеет довольно «замысловатый» вид, то далеко не очевидно, принадлежат ли, к примеру, точки X, Y, Z, U, V, изображенные на рисунке 12, к внутренней или внешней области многоугольника.

Рис. 12

Можно ли придумать на этот счет некоторые признаки, позволяющие определить принадлежность точки той или иной области?

Решение.

Например, для точек Y, V и Z нетрудно построить ломаные, соединяющие каждую из этих точек с точкой, заведомо принадлежащей внешней области, причем такие ломаные, которые не пересекают стороны многоугольника (идите от этих точек на «юго-запад»). Это означает, что три эти точки принадлежат внешней области. Построить аналогичные ломаные для точек X и U не удается, хотя полной уверенности в невозможности таких ломаных, возможно, нет.

Применим другой признак, который проверим вначале на точке V. Проведем луч из этой точки, например, в «восточном» направлении. Этот луч пересекает стороны многоугольника 4 раза, в «южном» направлении — тоже 4 раза, в «западном» направлении — 8 раз, в «северном» направлении — 4 раза, в «юго-восточном» направлении — 4 раза... В каком бы направлении такой луч ни провели, оказывается, что точек пересечения его со сторонами всегда получается четное число! Если немного поразмыслить, то для точки из внешней области так и должно быть: первое пересечение луча со стороной означает, что луч «вошел» во внутреннюю область, второе пересечение — «вышел» из внутренней области и т. д. В итоге, сколько «вхождений» внутрь области, столько должно быть и «выходов» из нее (в противном случае луч «не выйдет» во внешнюю область), т. е. для точки из внешней области число точек пересечения луча со сторонами — четное. Поэтому согласно второму признаку точки Y, V и Z принадлежат внешней области многоугольника.

Для точек X и U число таких точек нечетное (проверьте это!). Это может быть только для точек из внутренней области многоугольника. Для них первое пересечение луча со стороной означает вхождение во внешнюю область, тогда по первому случаю число остальных точек пересечения — четное, а значит, общее количество точек пересечения нечетное. Итак, точки X и U принадлежат внутренней области многоугольника. Нанесите на плоскости еще некоторые точки и установите, какой из областей многоугольника они принадлежат.

Задача 3. Нарисуйте многоугольник, аналогичный приведенному на рисунке 12, и заштрихуйте его внутреннюю область.

§ 4. Аксиомы измерения и откладывания углов: почему угол не может быть больше 180°?

4.1. Какая фигура называется углом?

Углом называется фигура, состоящая из двух лучей, имеющих общее начало (рис. 13, *а—в*). Лучи OA и OB — *стороны* угла, точка O — *вершина* угла.

Обозначение: $\angle AOB$ — угол AOB.

Развернутым углом называется угол AOB, стороны OA и OB которого образуют прямую (см. рис. 13, *в*).

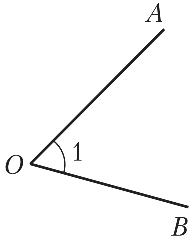


Рис. 13, а

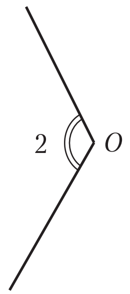


Рис. 13, б

Рис. 13, в

На рисунке 13, *г* изображен угол AOB, из вершины которого проведен луч OC. Луч OC пересекает отрезок, концы которого принадлежат сторонам данного угла. В таком случае говорят, что *луч OC разбивает* (*делит*) *угол AOB на два угла AOC и BOC*. Говорят также, что *луч OC проходит между сторонами угла AOB*.

Для развернутого угла любой луч, выходящий из его вершины, считается *проходящим между его сторонами*. Каждая точка луча OC (за исключением точки O, см. рис. 13, *г*) называется *внутренней* точкой данного угла. О ней говорят, что она *лежит внутри* данного угла. Внутренние точки образуют *внутреннюю область* угла.

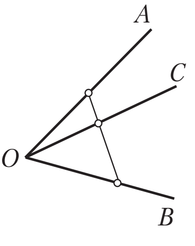


Рис. 13, г

4.2. Аксиомы измерения и откладывания углов

Аксиомы измерения угла

4.1. Каждому углу соответствует определенная положительная градусная мера.

Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами

Развернутый угол равен 180°.

Аксиома откладывания угла

4.2. От любого луча (рис. 14, *а*) в заданную полуплоскость можно отложить (построить) угол, имеющий заданную градусную меру, и притом только один.

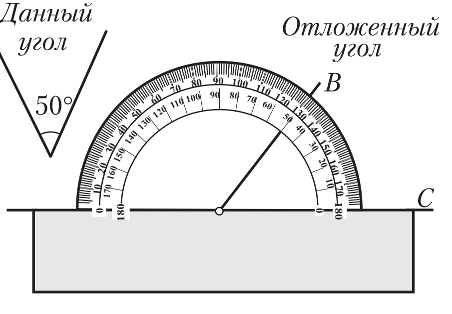


Рис. 14, а

4.3. Определения

Приведем первые применения аксиом измерения углов.

Прямым углом называется угол, равный 90°.

Острым углом называется угол, меньший 90°.

Тупым углом называется угол, больший 90°, но меньший 180°.

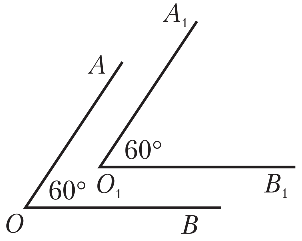
Равными углами называются два угла, имеющие одинаковую градусную меру (рис. 14, *б*).

Записывают: $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Перпендикулярными прямыми называются две прямые, которые пересекаются под углом 90° (под прямым углом, рис. 15).

Записывают: $a \perp b$ (a и b — перпендикулярные прямые).

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его на два равных угла (рис. 16).



14, б

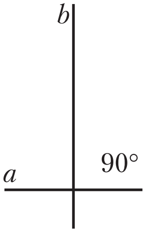


Рис. 15

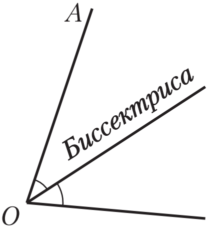


Рис. 16

4.4. Прямоугольник. Квадрат. Куб

Рассмотрим еще три определения. Углы часто рассматриваются в связи с различными геометрическими фигурами. Например, для четырехугольника $ABCD$ можно рассмотреть четыре угла *DAB*, *ABC*, *BCD*, *CDA*. Эти углы называются *углами четырехугольника* (рис. 17, *а*).

Прямоугольником называется четырехугольник, все углы которого прямые (рис. 17, *б*).

Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны (рис. 17, *в*).

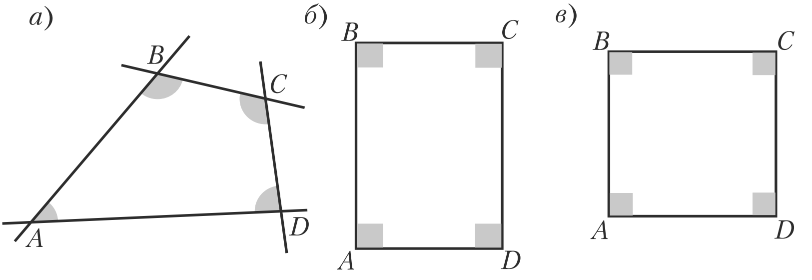


Рис. 17

С помощью квадратов образуются многие другие геометрические фигуры. Вы наблюдали, наверное, красиво выложенные паркеты из квадратов (рис. 18, *а*). Из квадратов можно образовывать и пространственные фигуры (фигуры, которые не лежат в одной плоскости). Примером такой фигуры служит куб.

Кубом называется шестигранник, гранями которого являются квадраты (рис. 18, *б*).

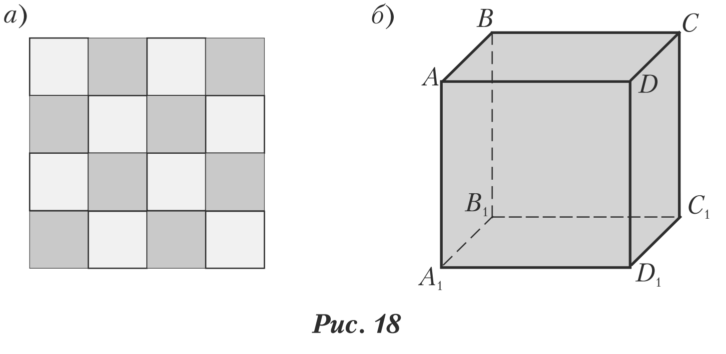


Рис. 18

Обозначение: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Заметим, что приведенное определение куба является первоначальным, в старших классах оно будет уточнено.

4.5. Почему угол не может быть больше 180°?

Все зависит от того, как определяется угол. В принятом в данной книге определении угла он действительно не может быть больше 180°. В самом деле, пусть угол AOB — данный угол (рис. 19). Продолжим сторону OA и рассмотрим три угла: AOB, BOC и AOC. Считается, что любой луч OB проходит между сторонами развернутого луча AOC. Тогда по аксиоме о сумме градусных мер углов имеем: $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°$. Если $\angle AOB + \angle BOC = 180°$, то $\angle AOB < 180°$.

Ниже мы познакомимся с центральным углом окружности. Это совсем другое понятие. Центральный угол окружности может быть больше 180°.

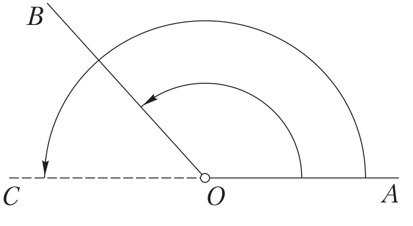


Рис. 19

4.6. Примеры решения задач: вычисляем, рассуждаем, развиваем пространственное представление

■ **Задача 1.** Угол ABC равен 108°, луч BM делит этот угол в отношении 1 : 3 считая от луча BA (рис. 20). Найдите угол CBM. Выполните чертеж, соответствующий условию задачи.

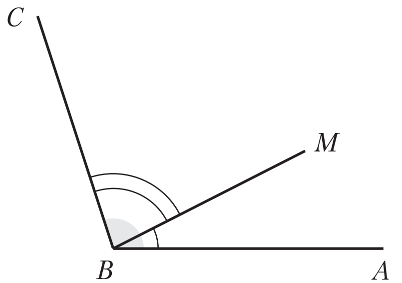


Рис. 20

Дано: $\angle ABC = 108°$, луч BM делит этот угол в отношении $1 : 3$ считая от луча BA.

Требуется: 1) найти угол CBM; 2) построить точный чертеж, соответствующий условию задачи.

Решение.

1) Данное отношение углов ABM и MBC будет выполняться, если $\angle ABM = x$ и $\angle MBC = 3x$ (x — неизвестная пока градусная величина);

2) тогда $\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC = x + 3x = 4x$;

3) так как $\angle ABC = 108°$, то $4x = 108$, $x = 108 : 4 = 27°$, $3x = 81°$;

4) получаем, что $\angle ABM = 27°$, $\angle MBC = 81°$;

5) с помощью транспортира строим $\angle ABM = 27°$, сторона BM которого проходит между сторонами угла ABC.

Ответ: $\angle CBM = 81°$.

Задача 2. Рассмотрим квадраты (рис. 21), состоящие из n^2 единичных квадратов (клеток), $n = 1, 2, 3, \ldots$. Требуется в каждом квадрате одним росчерком пера проложить маршрут через все его клетки, проходя каждую клетку один раз и только вдоль диагонали. При

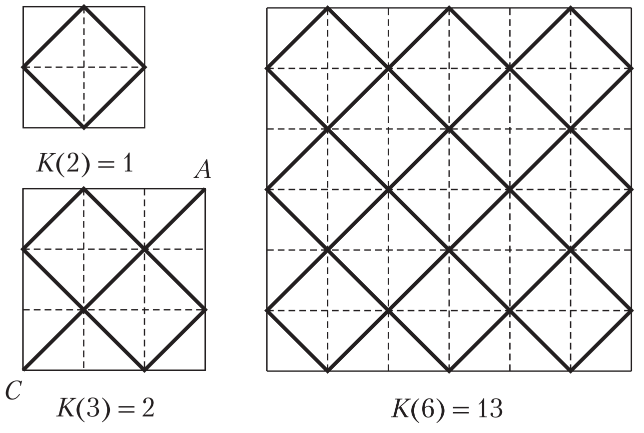


Рис. 21

этом во внутренней области квадрата должна образоваться фигура, содержащая наибольшее возможное для данного квадрата число $K(n)$ новых квадратов, сторонами которого являются диагонали клеток. Начертите искомые маршруты для $n = 4$, 5 и 8. (Математика в школе. 1993. № 2. С. 60.)

Решение. На рисунке 21 показаны искомые маршруты для $n = 2$, 3 и 6. Если n — четное, то маршрут можно начинать с любой вершины клетки. Если n — нечетное, то маршрут можно начинать с нечетных (по счету) вершин клетки. Начертите теперь самостоятельно искомые маршруты для $n = 4$, 5 и 8.

Задача 3. Отрезок, соединяющий две наиболее удаленные друг от друга вершины куба, называется диагональю куба (рис. 22, *а*). Как измерить диагональ непустого куба, пользуясь только линейкой и карандашом, если есть: 1) один куб; 2) два таких куба; 3) три таких куба? (Измерение, разумеется, может дать только приближенный результат.)

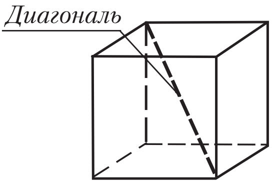


Рис. 22, а

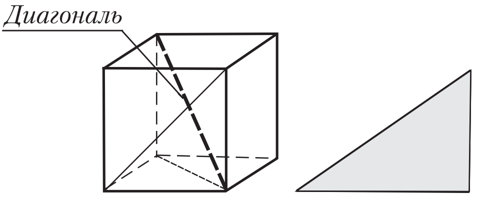


Рис. 22, б

Указание. В первом случае необходимо заметить, что диагональ куба является строной треугольника, в котором две другие стороны равны соответственно ребру куба и диагонали грани куба, а угол между этими сторонами — прямой. Остается построить этот треугольник (рис. 22, *б*) и измерить сторону, лежащую против прямого угла (прямой угол можно построить, обводя карандашом прямой угол грани куба). Во втором случае также будем стремиться построить аналогичный треугольник. Один способ построения показан на рисунке 22, *в*, другой — на рисунке 22, *г*. В третьем случае кубики можно сложить так, как показано на рисунке 22, *д*. После этого можно приложить линейку и измерить искомое расстояние. Как это сделать?

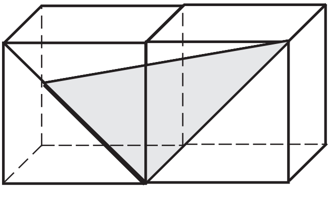


Рис. 22, в

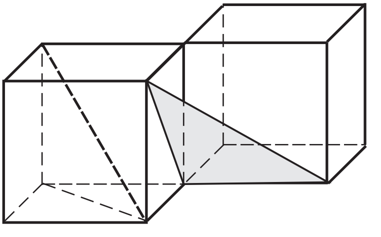


Рис. 22, г

Задача 4. В противоположных (наиболее удаленных друг от друга) вершинах куба сидят паук и муха. Каким кратчайшим путем паук может доползти до мухи? Объясните ответ.

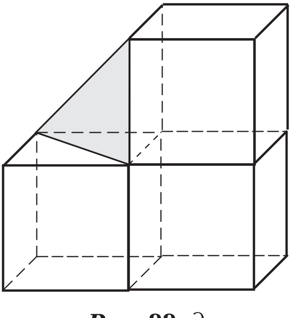


Рис. 22, д

§ 5. Смежные и вертикальные углы: «не совсем очевидное и не совсем вероятное»

5.1. Определения и теоремы

Смежными углами называются два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами (рис. 23).

Вертикальными углами называются два угла, у которых стороны одного являются дополнительными лучами к сторонам другого (рис. 24).

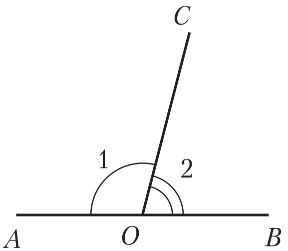


Рис. 23

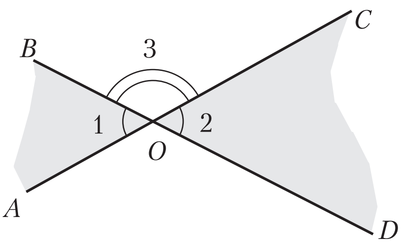


Рис. 24

Фалес Милетский
(около 625 – 574 г. до н. э.)

Сделаем одно важное замечание. Как уже отмечалось ранее, в математике часто справедливость утверждений устанавливается при помощи логических *рассуждений-доказательств*. Такие утверждения называются *теоремами*. Каждая теорема состоит из двух частей: *условия* и *заключения*. В условии теоремы сообщается, что дано в ней, в заключении — что требуется доказать. С первыми примерами теорем и их доказательств вы уже знакомились в основном курсе. Ими являются теоремы о сумме смежных углов и равенстве вертикальных углов. Доказательства этих теорем считаются одними из первых доказательств, которые появились в математике. Они предложены древнегреческим математиком *Фалесом* и относятся к VI в. до н. э.

Теоремы

1. **Сумма смежных углов равна 180°.**
2. **Вертикальные углы равны.**

Следствия. 1. *Угол между биссектрисами двух смежных углов — прямой.*

2. *Биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.*

Доказательства следствий.

1. Пусть углы AOC и COB (рис. 25) — смежные, OM — биссектриса угла AOC, ON — биссектриса угла BOC. Докажем, что $\angle MON = 90°$. Доказательство состоит из следующих шагов:

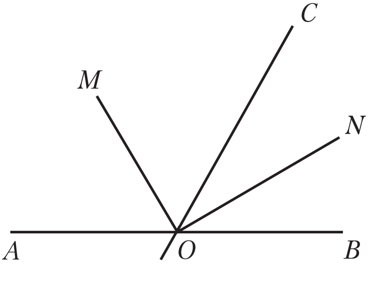


Рис. 25

1) положим, что $\angle AOC = \alpha$. Тогда на основании теоремы о сумме смежных углов $\angle BOC = 180° - \alpha$;

2) найдем углы COM и CON:

$$\angle COM = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle CON = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2};$$

3) тогда

$$\angle MON = \angle MOC + \angle CON = \frac{\alpha}{2} + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90°;$$

4) следовательно, биссектрисы OM и ON образуют прямой угол.

2. Дано: углы AOB и COD — вертикальные, OM и ON — их биссектрисы (рис. 26).

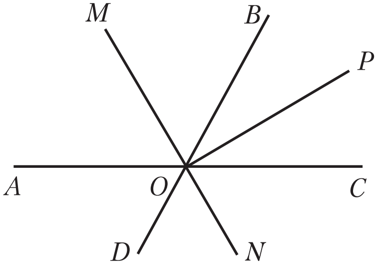


Рис. 26

Доказать: OM и ON лежат на одной прямой.

Идея доказательства. Нельзя ли воспользоваться предыдущим следствием? Для этого необходимо рассмотреть смежные углы.

Дополнительное построение. Проведем биссектрису OP угла BOC. Этот угол является смежным к каждому из двух данных вертикальных углов.

Доказательство.

1) Рассмотрим смежные углы AOB и BOC. На основании предыдущей задачи $\angle MOP = 90°$;

2) для смежных углов BOC и COD аналогично получим, что $\angle PON = 90°$;

3) $\angle MON = \angle MOP + \angle PON = 90° + 90° = 180°$;

4) если $\angle MON = 180°$, то OM и ON лежат на одной прямой.

5.2. Понятие угла — простое понятие? Да, но только с первого взгляда…

Выше угол определялся как фигура, состоящая из двух лучей, имеющих общее начало. Подчеркивалось, что этот угол не может быть больше 180°. Покажем, что произвольно обращаться в математике с понятиями нельзя. В противном случае можно неизбежно прийти к противоречиям и ошибкам. Допустим, что при имеющемся определении мы бы посчитали, что угол может быть больше 180°. Тогда под определение смежных углов подходят не только углы 1 и 2 (рис. 27), но и углы 1 и 2′, причем сумма таких «смежных углов» не равна 180°. Как же быть тогда с теоремой о сумме смежных углов? Аналогичная ситуация и с вертикальными углами: под определение вертикальных углов подходят не только углы 1 и 2 (рис. 28), но и углы 1 и 2′, причем эти «вертикальные углы» не равны. Как видно, самые первые и самые простые теоремы могут оказаться неверными, если небрежно обращаться с математическими понятиями!

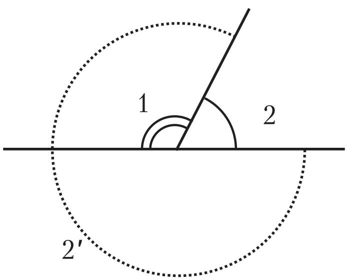


Рис. 27

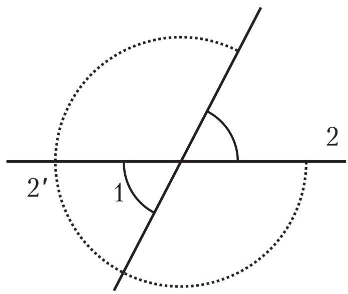


Рис. 28

§ 6. Центральный угол окружности: почему центральный угол окружности может быть больше 180°?

6.1. Теория

Две точки окружности разбивают ее на две части, называемые *дугами окружности*. Дугу обозначают значком $\cup$. Точ-

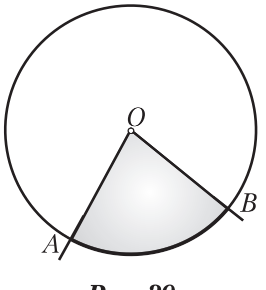


Рис. 29

ки A и B окружности разбивают окружность на две дуги. Их обозначают тремя буквами. Например, $\cup AnB$ и $\cup AmB$.

С помощью угловых градусов введем дуговые градусы, служащие для измерения дуг окружности. Для этого из центра окружности проведем два луча (рис. 29). Они образуют некоторый угол. Если этот угол равен $1°$, то отсекаемая им дуга окружности называется *дуговым градусом*. Если этот угол содержит $n°$, то соответствующая ему дуга (дуга, на которую он *опирается*) содержит n дуговых градусов.

Дуга полуокружности равна 180 дуговым градусам, четверти окружности — 90 дуговым градусам. Заметим, что дуга окружности может быть больше 180 дуговых градусов. Полагают, что дуга всей окружности равна 360 дуговым градусам. Если из двух дуг, дополняющих друг друга до окружности, одна равна α дуговым градусам, то другая равна $360 - \alpha$ дуговым градусам.

Две дуги одной окружности называются *равными*, если они имеют одну и ту же дуговую градусную меру.

Угол AOB вместе с дугой, на которую он опирается (см. рис. 29), называется ***центральным углом окружности***.

Центральный угол окружности всегда рассматривается вместе с дугой, на которую он опирается. Это позволяет задавать центральный угол окружности единственным образом.

Следствие. *Центральный угол окружности (по определению) содержит столько угловых градусов, сколько дуговых градусов содержит дуга, на которую он опирается.*

Центральный угол окружности может быть больше 180°. Если дуга, на которую опирается центральный угол окружности, равна, например, 240 дуговым градусам, то центральный угол равен 240°.

6.2. Примеры решения задач

Задача 1. Две дополнительные дуги окружности относятся как 2 : 3. Найдите центральный угол, опирающийся на большую дугу (рис. 30).

Дано: $\cup AnB : \cup AmB = 2 : 3$, O — центр окружности.

Найти: угол AOB, опирающийся на дугу AmB.

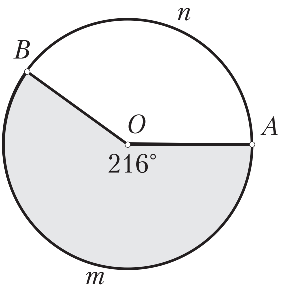


Рис. 30

Решение.

1) Если данные дуги относятся как 2 : 3, то $\cup AnB = 2x$ дуговым градусам, а $\cup AmB = 3x$ дуговым градусам;

2) так как эти дуги дополняют друг друга до окружности и длина окружности равна 360 дуговым градусам, то $2x + 3x = 5x = 360$ дуговым градусам. Отсюда $x = 360 : 5 = 72$ (дуговым градусам);

3) тогда $\cup AmB = 3x = 216$ дуговым градусам. Нашли большую дугу окружности;

4) центральный угол окружности, опирающийся на большую дугу, содержит столько угловых градусов, сколько дуговых градусов содержит эта дуга. Поэтому $\angle AOB = 216°$.

Ответ: $\angle AOB = 216°$.

Задача 2. Найдите центральный угол окружности между стрелками часов в 9 ч 20 мин (рис. 31).

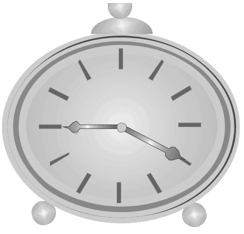


Рис. 31

Решение.

Окружность циферблата разбита на 12 равных дуг. На одну дугу приходится $\frac{360}{12} = 30$ дуговых градусов. Поэтому на центральный угол окружности, соответствующий этой дуге, приходится также 30 угловых градусов. Если посмотреть на рисунок, то напрашивается такой ответ. Между стрелками заключена дуга в 7 маленьких дуг по 30 дуговых градусов. Поэтому эта дуга содержит 210 дуговых градусов, а угол между стрелками (искомый центральный угол окружности) содержит столько же угловых градусов. Такой ответ можно подвергнуть сомнению. В самом деле, за то время, когда минутная стрелка стала показывать 20 мин, часовая стрелка не стояла на месте, она тоже вращалась. Поэтому искомый центральный угол меньше 210°. Каков же он? Нужно узнать, на какой угол повернется часовая стрелка за 20 мин. Дугу в 30 градусов часовая стрелка описывает за 60 мин, за 1 мин она опишет дугу в полградуса, за 20 мин — дугу в 10 дуговых градусов. Значит, искомый угол равен $210 - 10 = 200$ угловых градусов.

Ответ: 200°.

§ 7. Метод равных треугольников — исторически первый геометрический метод

7.1. Понятие о методе равных треугольников

Равенство треугольников имеет большое значение в геометрии. Использование признаков равенства треугольников представляет собой один из наиболее важных методов, называемых методом равных треугольников. Суть этого метода состоит в следующем.

Метод равных треугольников

1. Допустим, что, исходя из условия теоремы или задачи, требуется доказать равенство двух отрезков (углов). Для этого эти отрезки (углы) включаем в некоторые треугольники.

$\Downarrow$

2. Доказываем равенство этих треугольников.

$\Downarrow$

3. Из равенства треугольников делаем вывод о равенстве отрезков (углов).

Первые применения метода равных треугольников связаны с доказательством признаков равенства треугольников. Напомним некоторые сведения.

Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих их (рис. 32). Данные точки называются *вершинами* треугольника, отрезки — *сторонами* треугольника.

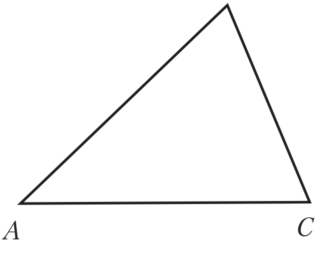


Рис. 32

Равными треугольниками называются два треугольника, у которых соответственные стороны и углы равны (рис. 33):

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ CA = C_1A_1$$
$$\text{и } \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

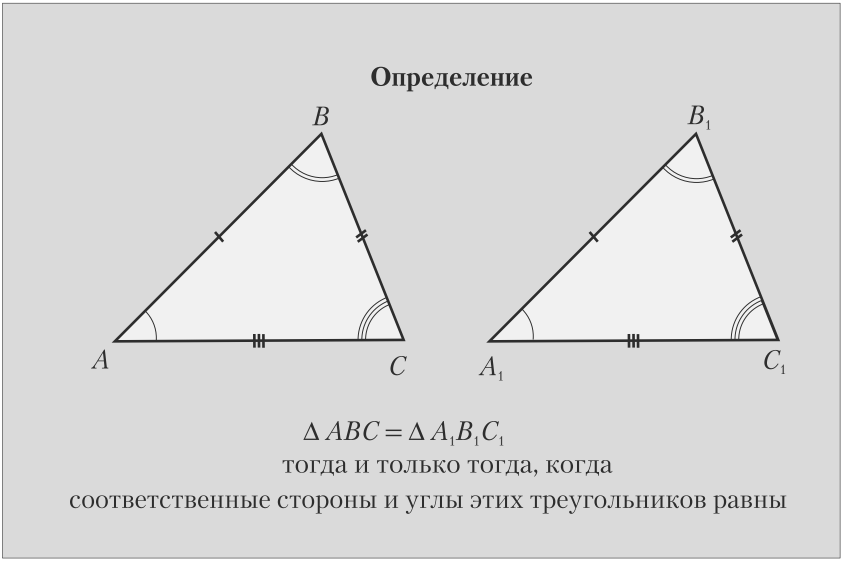


Рис. 33

Следствие. *В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.*

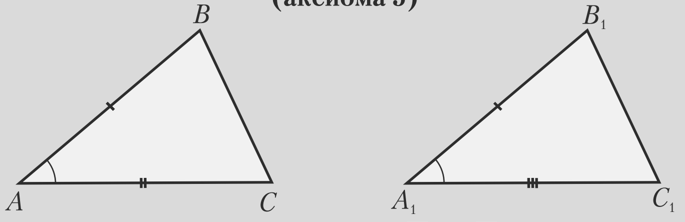
7.2. Первый и второй признаки равенства треугольников

В качестве аксиомы примем признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними. (Признак указывает условия, при выполнении которых треугольники будут равными.)

Аксиома о равенстве треугольников (*1-й признак равенства треугольников*)

5. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого, то такие треугольники равны (рис. 34).

Первый признак равенства треугольников (аксиома 5)



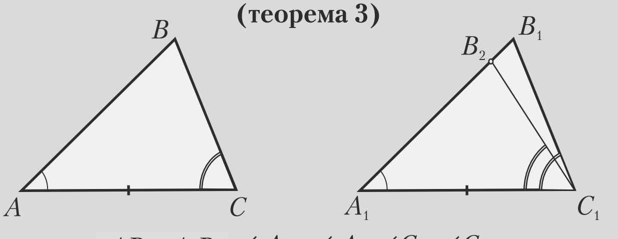
$$\frac{AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1}{\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1}$$

Рис. 34

Теорема 3 (*2-й признак равенства треугольников*)

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников (теорема 3)



$$\frac{AB = A_1B_1,\ \angle A = \angle A_1,\ \angle C = \angle C_1}{\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1}$$

Рис. 35

Идея доказательства. Достаточно доказать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 35) $AB = A_1B_1$. (Почему достаточно?)

Доказательство. Выполним следующие рассуждения.

I. *Применим метод от противного.*

1) Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если допустить, что $AB \neq \neq A_1B_1$, то к каким выводам можно прийти?

2) Отложим отрезок $A_1B_2 = AB$. Получим треугольник $A_1B_2C_1$.

II. *Далее воспользуемся методом равных треугольников.*

3) На основании 1-го признака равенства двух треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_1$.

4) Отсюда на основании предыдущего следствия $\angle C = \angle A_1C_1B_2$.

5) $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$.

III. *Приходим к противоречию.*

6) Пришли к противоречию: углы $A_1C_1B_2$ и $A_1C_1B_1$ равны между собой и не совпадают (!), что противоречит аксиоме откладывания угла.

7) Следовательно, допущение неверно, и поэтому $AB = A_1B_1$.

IV. *Вывод.*

8) Тогда по 1-му признаку равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Замечания.

1) Второй признак равенства треугольников часто называют иначе — *«признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам»*.

2) Примененный выше метод доказательства называется *методом от противного*. Этот метод каждый раз начинается с отрицания того, что нужно доказать.

7.3. Третий признак равенства треугольников

Прежде чем рассмотреть третий признак равенства треугольников, познакомимся с равнобедренным треугольником и одним его свойством.

Равнобедренным треугольником называется треугольник, у которого хотя бы две стороны равны (рис. 36). Равные стороны называются *боковыми*, а третья сторона — *основанием*.

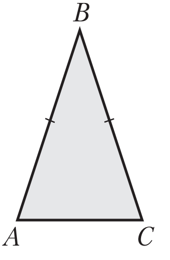


Рис. 36

Теоремы 4

Об углах при основании равнобедренного треугольника

1. **В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.**

3-й признак равенства треугольников (рис. 37)

2. **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны.**

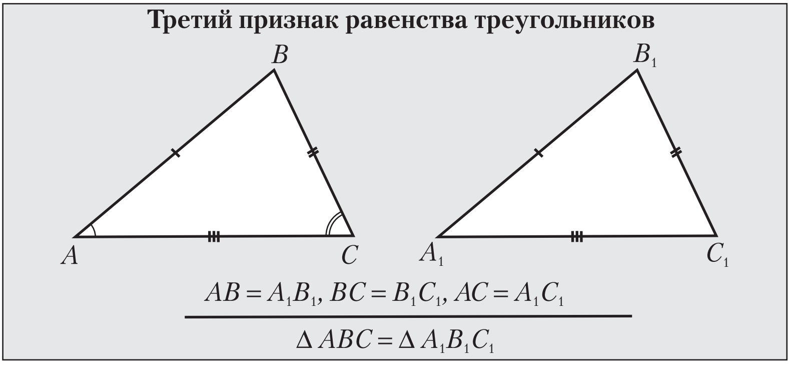


Рис. 37

Замечание. Третий признак равенства треугольников имеет и другое более выразительное название — *«признак равенства треугольников по трем сторонам»*.

7.4. Примеры применения метода равных треугольников

Задача 1. Пусть AB и CD — диаметры окружности с центром O (рис. 38). Докажите, что $\Delta AOC = \Delta BOD$.

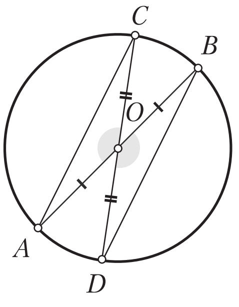


Рис. 38

Дано: O — центр окружности, AB и CD — диаметры.

Доказать: $\Delta AOC = \Delta BOD$.

Идея доказательства. Нельзя ли воспользоваться каким-либо признаком равенства треугольников? Для этого выясним, какие элементы этих треугольников (стороны и углы) равны.

Доказательство.

1) Рассмотрим треугольники AOC и BOD. В этих треугольниках $OA = OB$, $OC = OD$ как радиусы окружности;

2) $\angle AOC = \angle BOD$ — как вертикальные;

3) $\Delta AOC = \Delta BOD$ по 1-му признаку.

Задача 2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC (рис. 39) отложили равные отрезки AD и CE. Докажите, что треугольник DBE — равнобедренный.

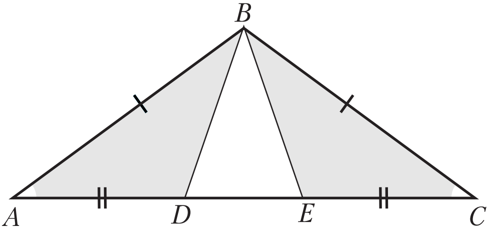


Рис. 39

Дано: ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$, $AD = CE$.

Доказать: ΔDBE — равнобедренный.

Идея доказательства. Доказать, что $BD = BE$.

Доказательство. 1) Так как треугольник ABC — равнобедренный, то $\angle A = \angle C$;

2) тогда $\Delta ABD = \Delta CBE$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CB$, $AD = CE$, $\angle A = \angle C$);

3) из равенства этих треугольников следует, что $BD = BE$;

4) значит, треугольник DBE — равнобедренный.

Задача 3. Треугольники ABC и CDA приложили друг к другу так, как показано на рисунке 40. Известно, что $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$. Провели также отрезок BD. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta CDB$.

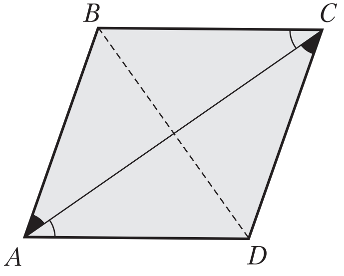


Рис. 40

Дано: ΔABC и ΔCDA, AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$.

Доказать: $\Delta ABD = \Delta CDB$.

Идея доказательства. Воспользоваться признаками равенства треугольников.

Доказательство.

1) $\Delta ABC = \Delta CDA$ по стороне и двум прилежащим углам (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$);

2) из равенства этих треугольников следует, что $AB = CD$, $BC = AD$;

3) рассмотрим теперь треугольники ABD и CDB. В этих треугольниках $\angle BAD = \angle BCD$ (эти углы состоят из равных частей);

4) тогда $\Delta ABD = \Delta CDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, $AD = BC$, $\angle BAD = \angle BCD$).

Задача 4. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис. 41). Докажите, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$.

Дано: O_1 и O_2 — центры окружностей, A и B — точки пересечения окружностей.

Доказать: $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$.

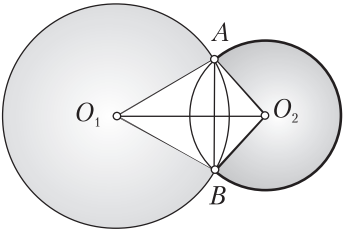


Рис. 41

Идея доказательства. Рассмотрите треугольники, в которые входят углы O_1AO_2 и O_1BO_2.

Доказательство.

1) $\Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2$ по трем сторонам ($O_1A = O_1B$, $AO_2 = BO_2$, O_1O_2 — общая сторона);

2) из равенства этих треугольников следует, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$.

Задача 5. В равнобедренном треугольнике ABC (рис. 42) на боковой стороне BC ($BC > AC$) отложили отрезок CD, равный основанию AC. Провели отрезок AD. Докажите, что $\angle C > \angle ADC$.

Дано: ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$, $CD = AC$.

Доказать: $\angle C > \angle ADC$.

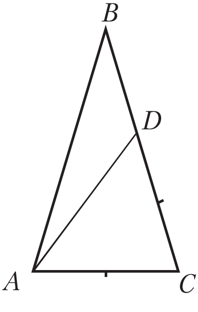


Рис. 42

Идея доказательства. Нельзя ли воспользоваться свойством углов при основании равнобедренного треугольника?

Доказательство.

1) $\angle C = \angle CAB$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABC;

2) $\angle CAB > \angle CAD$, так как угол всегда больше своей части;

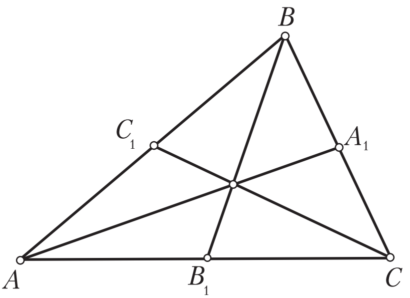
3) $\angle CAD = \angle ADC$ как углы при основании AD равнобедренного треугольника ADC;

4) поэтому $\angle C > \angle ADC$.

Итак, мы ознакомились с некоторыми первыми применениями метода равных треугольников. Приведем еще некоторые значимые для геометрии применения этого метода, подчеркнув их особенность — **отсутствие связи с аксиомой параллельности** (позже будет рассмотрен метод равных треугольников, применяемый совместно с аксиомой параллельности и ее следствиями).

Предварительно рассмотрим следующее определение.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



AA_1, BB_1, CC_1 — медианы

Рис. 43

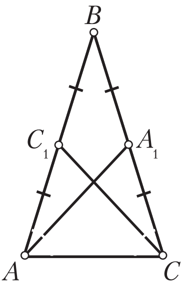


Рис. 44

На рисунке 43 изображены медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC.

Задача 6. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

Доказательство.

1) Пусть треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC$ (рис. 44), AA_1 и CC_1 — медианы, проведенные к боко-

вым сторонам. Требуется доказать, что $AA_1 = CC_1$. Рассмотрим медианы AA_1 и CC_1 как стороны треугольников AA_1C и CC_1A;

2) так как AC — общая сторона этих треугольников, $\angle ACA_1 = \angle CAC_1$ (по свойству углов равнобедренного треугольника) и $CA_1 = AC_1$ (как половины равных сторон CB и AB), то $\Delta ACA_1 = \Delta CAC_1$ (по 1-му признаку равенства треугольников);

3) если $\Delta ACA_1 = \Delta CAC_1$, то $AA_1 = CC_1$. Это и требовалось доказать.

Как видно, решение данной задачи вообще не опирается на понятие параллельности прямых.

Задача 7. Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны (рис. 45).

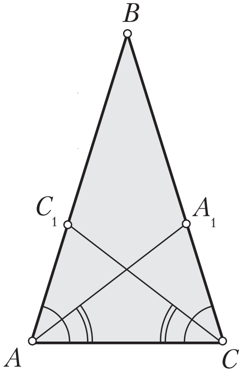


Рис. 45

Дано: ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$, AA_1 и CC_1 — биссектрисы.

Доказать: $AA_1 = CC_1$.

Идея доказательства. Необходимо рассмотреть два треугольника, в которых отрезки AA_1 и CC_1 являются сторонами, доказать равенство этих треугольников и из их равенства получить равенство отрезков AA_1 и CC_1.

Доказательство.

Рассмотрим треугольники ACA_1 и CAC_1. В этих треугольниках:

1) $\angle ACA_1 = \angle CAC_1$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABC;

2) $\angle A_1AC = \angle C_1CA$ как половины равных углов;

3) AC — общая сторона треугольников ACA_1 и CAC_1;

4) тогда $\Delta ACA_1 = \Delta CAC_1$ по стороне и двум прилежащим к ней углам;

5) из равенства этих треугольников следует, что $AA_1 = CC_1$.

Решение данной задачи, как и предыдущей, никак не связано с аксиомой параллельности.

Задача 8. На рисунке 46 $\angle AOB = \angle COD$. Какие равенства для треугольников, отрезков и углов можно доказать? (Решите задачу самостоятельно.)

В дальнейшем мы убедимся в том, что возможности метода равных треугольников значительно расширяются по мере изучения нового материала, в частности ознакомления с аксиомой параллельности и ее следствиями.

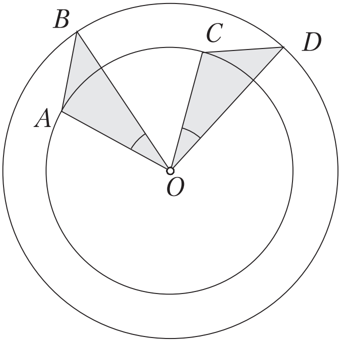


Рис. 46

Тема 2 КАК МЕТОД РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРИМЕНЯЕТСЯ ПРИ ИЗЛОЖЕНИИ ВОПРОСОВ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

§ 1. Метод равных треугольников и перпендикулярные прямые

1.1. Метод равных треугольников и единственность прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой

Да, действительно, теоремы о единственности и важны, и нужны. Допустим, мы с помощью чертежного треугольника через точку A провели прямую, перпендикулярную к данной прямой a, а потом приложили этот инструмент иначе (рис. 47) и еще раз провели прямую через точку A перпендикулярно к прямой a. Оказалось, что построили две прямые AC и AB. Может такое быть или нет? В чем дело? То ли инструмент неисправный, то ли геометрия — такая наука, в которой может быть все, в том числе и то, что на практике не встречается?

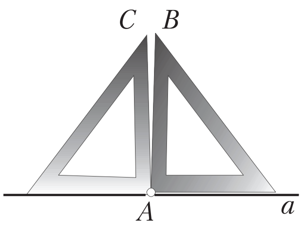


Рис. 47

Возникает необходимость рассмотреть одну из важных теорем курса геометрии. Ознакомьтесь с теоремой 1 и убедитесь, что она отвечает на эти и многие другие вопросы.

Напомним, что *перпендикулярными прямыми* называются две прямые, которые пересекаются под углом 90° (под прямым углом).

Теорема 1

> **Через данную точку A можно провести единственную прямую, перпендикулярную к данной прямой a.**

Идея доказательства. Доказательство проведем методом от противного. Будем использовать также метод равных треугольников. Аксиома параллельности здесь еще не применяется. Возможны два случая: $A \in a$, $A \notin a$.

Доказательство. *1-й случай*: $A \in a$.

I. *Применим метод от противного.*

1) Допустим, что существуют две прямые AC и AC_1 (рис. 48, *а*), перпендикулярные к прямой a. Могут ли прямые AC и AC_1 не совпасть?

II. *Приходим к противоречию.*

2) Если бы эти прямые не совпадали, то получились бы два различных(!) угла BAC и BAC_1, равные 90° каждый и отложенные в одну и ту же полуплоскость от прямой AB.

3) Это противоречит аксиоме откладывания угла.

III. *Вывод.*

4) Следовательно, прямые AC и AC_1 совпадают. Единственность прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a, для данного случая доказана.

2-й случай: $A \notin a$.

I. *Применим метод от противного.*

1) Допустим, что существуют две прямые AC и AC_1 (рис. 48, *б*), перпендикулярные к прямой a. Могут ли эти прямые не совпадать?

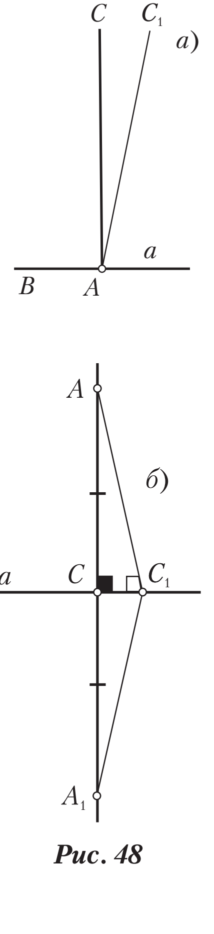


Рис. 48

2) Выполним дополнительные построения: продолжим AC за точку C и на продолжении отложим отрезок $CA_1 = CA$; проведем еще отрезок C_1A_1; получим треугольники ACC_1 и A_1CC_1.

3) $\angle A_1CC_1 = 180° - 90° = 90°$.

II. *Далее воспользуемся методом равных треугольников.*

4) $\Delta ACC_1 = \Delta A_1CC_1$ — по двум сторонам и углу между ними.

5) Из равенства этих треугольников следует, что $\angle A_1C_1C = \angle AC_1C$.

Но $\angle AC_1C = 90°$ (по допущению). Значит, $\angle A_1C_1C = 90°$.

6) Отсюда $\angle AC_1A_1 = \angle AC_1C + \angle A_1C_1C = 90° + 90° = 180°$.

7) Значит, $\angle AC_1A_1$ — развернутый, поэтому точки A, C_1 и A_1 лежат на одной прямой.

III. *Приходим к противоречию.*

8) Получили противоречие: через точки A и A_1 проходят две прямые — прямая AA_1 и «прямая» AC_1A_1, а этого быть не может.

IV. *Вывод.*

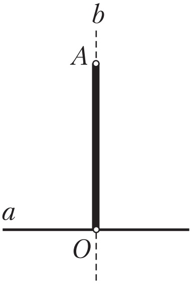


Рис. 49

9) Следовательно, прямые AC и AC_1 совпадают. Единственность прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к данной прямой a, доказана и в этом случае.

Доказательство закончено. Введем еще одно понятие.

Через точку A проведем прямую b, перпендикулярную к прямой a. Пусть прямая b пересекает прямую a в точке O (рис. 49). При этом получается отрезок OA. Этот отрезок называется ***перпендикуляром, проведенным из точки** A **к прямой** a*. Точка O называется *основанием* этого перпендикуляра.

1.2. Метод равных треугольников и серединный перпендикуляр к отрезку

Выясним, какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку и какими свойствами она обладает.

> ***Серединным перпендикуляром к отрезку*** называется прямая, перпендикулярная к отрезку и проходящая через его середину (рис. 50).

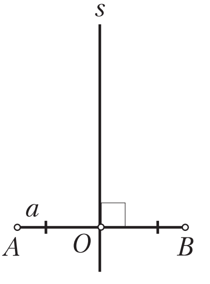


Рис. 50

Теоремы 2

О серединном перпендикуляре

1. **Если точка** M **принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку** AB**, то она равноудалена от концов этого отрезка** (рис. 51)**.**

Обратная

2. **Если точка** K **равноудалена от концов отрезка** AB**, то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку** (рис. 52)**.**

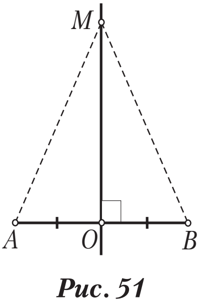


Рис. 51

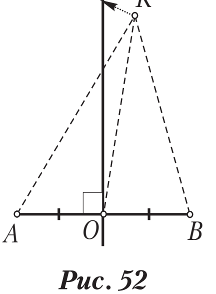


Рис. 52

Доказательства.

1. Сразу воспользуемся методом равных треугольников:

$\Delta AMO = \Delta BMO$ (по двум сторонам и углу между ними: $AO = OB$, $OM = OM$, $\angle AOM = \angle BOM = 90°$). Из равенства этих треугольников следует, что $AM = BM$.

2. Пусть точка K равноудалена от концов отрезка AB, т. е. $AK = BK$ (см. рис. 52), прямая s — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Докажем, что $K \in s$.

I. *Применим метод от противного и метод равных треугольников.*

1) Допустим, что $K \notin s$.

2) $\Delta AKO = \Delta BKO$ — по трем сторонам ($AO = OB$, $AK = BK$, $OK = OK$).

3) Из равенства этих треугольников следует, что

$$\angle AOK = \angle BOK = \frac{180°}{2} = 90°.$$

II. *Приходим к противоречию.*

4) Получили, что через точку O к прямой AB проведены две перпендикулярные к ней прямые OK и s.

5) Это противоречит единственности перпендикулярной прямой.

III. *Вывод.*

6) Полученное противоречие означает, что допущение неверно, поэтому $K \in s$.

1.3. Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что серединный перпендикуляр к хорде окружности проходит через ее центр (рис. 53).

Дано: AB — хорда, O — центр окружности, s — серединный перпендикуляр к хорде AB.

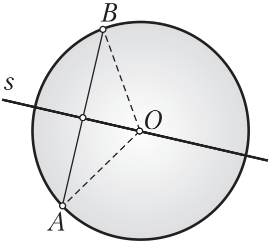


Рис. 53

Доказать: $O \in s$.

Идея доказательства. Нельзя ли воспользоваться теоремой: если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку?

Доказательство.

1) $OA = OB$ как радиусы окружности;

2) поэтому точка O равноудалена от концов отрезка AB;

3) значит, по указанной теореме точка O принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB.

Задача 2. Проведен серединный перпендикуляр к основанию AC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что вершина B принадлежит этому перпендикуляру (рис. 54).

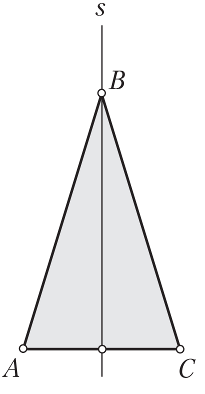


Рис. 54

Дано: ΔABC — равнобедренный, s — серединный перпендикуляр к основанию AC.

Доказать: $B \in s$.

Идея доказательства. Нельзя ли воспользоваться теоремой: если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку?

Доказательство.

1) $AB = BC$ как боковые стороны равнобедренного треугольника;

2) поэтому точка B равноудалена от концов отрезка AC;

3) значит, точка B принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AC.

Задача 3. (*На построение с помощью циркуля и линейки.*) Дан отрезок AB и прямая a. На прямой a постройте точку X, равноудаленную от концов отрезка AB (рис. 55).

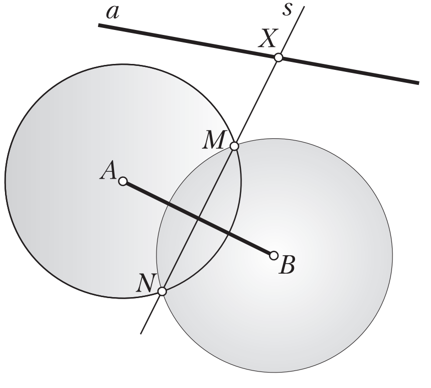


Рис. 55

Дано: AB — отрезок, a — прямая.

Построить: точку $X \in a$ и равноудаленную от точек A и B.

Идея решения задачи. Нельзя ли воспользоваться серединным перпендикуляром к отрезку? К какому?

Поиск решения. Точку X будем строить как точку пересечения двух линий. Одной такой линией является прямая a.

Учтем еще, что по условию точка X равноудалена от точек A и B. Тогда точка X должна принадлежать серединному перпендикуляру s к отрезку AB. В итоге точка X строится как точка пересечения прямых a и s.

Осталось выяснить, каким образом с помощью циркуля и линейки можно построить середину отрезка AB и как через нее провести перпендикуляр к AB. Для этого необходимо построить две точки, равноудаленные от точек A и B. Проведем две окружности одинакового радиуса с центрами в точках A и B так, чтобы они пересекались в двух точках M и N. Нетрудно видеть, что $MA = MB$ и $NA = NB$. Значит, прямая s проходит через точки M и N. Тем самым выяснили, как может быть построена прямая s.

Построение. Строим:

1) пересекающиеся окружности с центрами A и B;

2) точки M и N — точки пересечения этих окружностей;

3) прямую s, проходящую через точки M и N;

4) точку X — точку пересечения прямых a и s. Точка X — искомая точка.

Доказательство правильности построений. Точка X по построению принадлежит прямой a (тем самым одно условие задачи выполняется). Кроме того, точка X принадлежит серединному перпендикуляру s к отрезку AB, а значит, $XA = XB$ (поэтому второе условие задачи также выполняется), и значит, точка X является искомой.

Всегда ли задача имеет решение? Точку X всегда можно построить, если прямые a и s не параллельны. Но они могут быть параллельными, если $a \perp AB$. Итак, если a и AB не перпендикулярны, то задача имеет решение, причем единственное. Если $a \perp AB$ и a и s не совпадают, то задача не имеет решения.

Если прямые a и s совпадают, то задача имеет бесконечное множество (сколько угодно) решений.

§ 2. Как признаки помогают отличить одно понятие от другого: признаки параллельных прямых

2.1. Накрест лежащие и односторонние углы

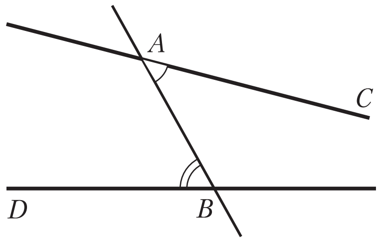


Рис. 56

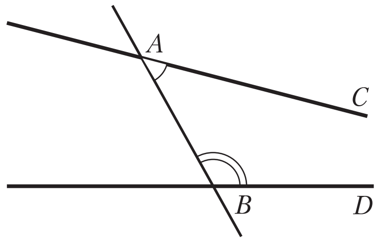


Рис. 57

Накрест лежащими углами называются углы CAB и DBA (рис. 56), у которых лучи AC и BD лежат по разные стороны от прямой AB.

Односторонними углами называются углы CAB и DBA (рис. 57), у которых лучи AC и BD лежат по по одну сторону от прямой AB.

Задача. Пусть даны две прямые a и b, которые пересечены третьей прямой c (рис. 58). При этом образовались две пары накрест лежащих углов ($\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$) и две пары односторонних углов ($\angle 1$ и $\angle 4$, $\angle 3$ и $\angle 2$). Докажите, что если: 1) накрест лежащие углы одной пары равны, то накрест лежащие углы другой пары также равны; 2) накрест лежащие углы одной пары равны, то сумма каждой пары односторонних углов равна $180°$.

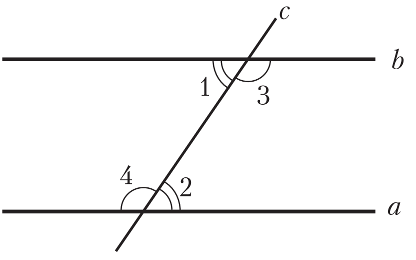


Рис. 58

Доказательства.

1. 1) Пусть $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $\angle 3 = \angle 4$. Имеем: $\angle 3 = 180° - \angle 1$ (так как углы 1 и 3 — смежные);

2) $\angle 4 = 180° - \angle 2$ (так как углы 2 и 4 — смежные);

3) так как $\angle 1 = \angle 2$, то из последних двух равенств следует, что $\angle 3 = \angle 4$.

2. Докажите самостоятельно.

2.2. Метод равных треугольников и признаки параллельных прямых

Признаки параллельности прямых указывают условия, при которых две прямые будут параллельными. Визуально не всегда удается отличить параллельные прямые от непараллельных. Непараллельные прямые могут иметь точку пересечения, расположенную от наблюдателя так далеко, что они кажутся параллельными. Признаки позволяют отличить различные виды прямых друг от друга, устраняя подобные сомнения. Приведем их. Заметим, что в формулировках ряда следующих теорем под *секущей* понимается прямая, которая пересекает данные прямые. Существенно отметить, что аксиома параллельности прямых при доказательстве признаков параллельности не применяется.

Теоремы 3 (*признаки параллельности прямых*)

Если при пересечении двух прямых секущей окажется, что
1) накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (рис. 59)**;**
2) сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны (рис. 60)**.**

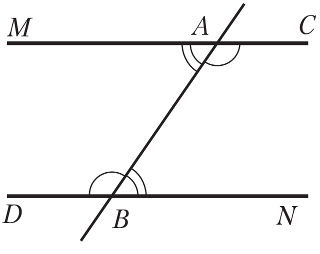


Рис. 59

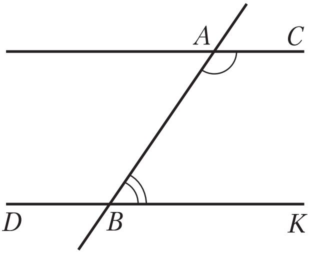


Рис. 60

Доказательство 1-го признака. Доказательства признаков параллельности прямых, как отмечено выше, не используют аксиому параллельности. Убедимся в этом.

Пусть при пересечении прямых AC и BD секущей AB образовались равные накрест лежащие углы (см. рис. 59): $\angle BAC = \angle ABD$ и $\angle MAB = \angle NBA$. Докажем, что $AC \parallel DB$.

I. *Доказательство проведем методом от противного.*

1) Могут ли прямые AC и DB пересекаться? Допустим, что $AC \nparallel DB$. Пусть E — точка пересечения этих прямых (рис. 61). Какие следствия можно получить из этого допущения?

2) Отложим отрезок AK, равный BE, и соединим точки B и K отрезком.

II. *Воспользуемся методом равных треугольников.*

3) $\Delta BAK = \Delta ABE$ — по двум сторонам и углу между ними.

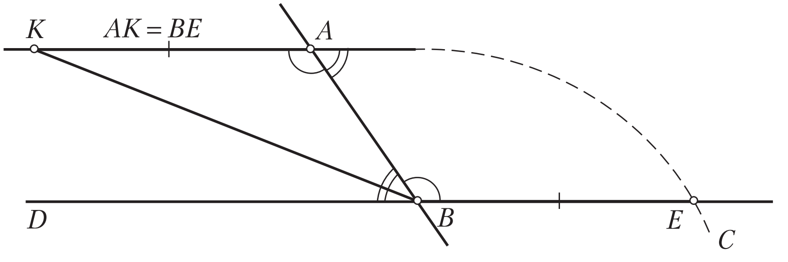


Рис. 61

4) Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABK = \angle BAE$.

5) Но углу BAE (углу BAC) равен также угол ABD (по условию).

III. *Приходим к противоречию.*

6) В результате от луча BA в одну полуплоскость от прямой BA оказались отложенными два разных угла (!) ($\angle ABK$ и $\angle ABD$) с одной и той же градусной мерой.

7) Этого не может быть (см. аксиому откладывания угла).

IV. *Вывод.*

8) Полученное противоречие означает, что допущение о пересечении прямых AC и DB неверно.

9) Следовательно, $AC \parallel DB$.

2.3. Примеры решения задач

Задача 1. Треугольники ABD и BCD приложены друг к другу так, как показано на рисунке 62. В этих треугольниках $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны параллельны.

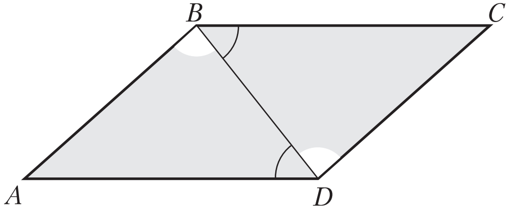


Рис. 62

Дано: ΔABD, ΔBCD, $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$.

Доказать: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Идея доказательства. Воспользуемся 1-м признаком параллельности прямых.

Доказательство.

1) Так как $\angle ABD = \angle BDC$ и эти углы являются накрест лежащими при прямых AB и DC и секущей BD, то $AB \parallel CD$;

2) так как $\angle ADB = \angle CBD$ и эти углы являются накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей BD, то $AD \parallel BC$.

Задача 2. Докажите, что в прямоугольнике (рис. 63) противоположные стороны параллельны.

Рис. 63

Дано: $ABCD$ — прямоугольник.

Доказать: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Идея доказательства. Нельзя ли воспользоваться признаком параллельности прямых? Каким?

Доказательство.

1) Воспользуемся 2-м признаком параллельности прямых. Так как четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, то углы A и D равны 90°, а их сумма равна 180°;

2) углы A и D являются односторонними при прямых AB и DC и секущей AD;

3) так как сумма односторонних углов равна 180°, то $AB \parallel DC$;

4) аналогично доказывается, что $AD \parallel BC$.

Задача 3. В окружности с центром O проведены диаметры AB и CD (рис. 64). Докажите, что хорды AC и BD параллельны (т. е. эти хорды лежат на параллельных прямых).

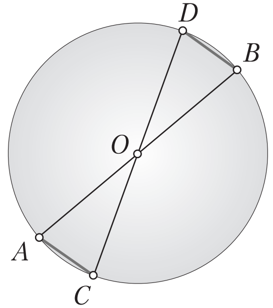


Рис. 64

Дано: O — центр, AB и CD — диаметры окружности.

Доказать: $AC \parallel BD$.

Идея доказательства. Нельзя ли воспользоваться признаком параллельности двух прямых?

Доказательство.

1) Воспользуемся методом равных треугольников: $\Delta AOC = \Delta BOD$ (почему?);

2) тогда $\angle A = \angle B$;

3) воспользуемся 1-м признаком параллельных прямых. Углы A и B являются накрест лежащими углами при прямых AC и BD и секущей AB. Поэтому $AC \parallel BD$.

§ 3. Аксиома параллельных прямых и ее трудный путь становления. Четырехугольник Саккери

3.1. Четырехугольник Саккери

Возьмем отрезок AD (рис. 65), по одну сторону от него отложим прямые углы A и D, на сторонах углов отложим равные отрезки AB и DC, проведем отрезок BC. В результате построили четырехугольник, который называется ***четырехугольником Саккери***.

Задача. Какие свойства четырехугольника Саккери можно установить? Можно ли доказать, что четырехугольник Саккери является прямоугольником?

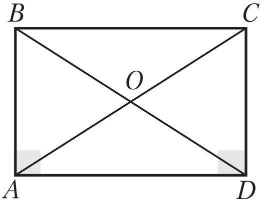


Рис. 65

Решение.

Нетрудно установить (см. рис. 65), что $\Delta BAD = \Delta CDA$ по 1-му признаку (по двум сторонам и углу между ними: $AB = DC$, AD — общая сторона и $\angle BAD = \angle CDA$). Из равенства этих треугольников следует, что $BD = AC$. Тем самым доказали, что диагонали четырехугольника Саккери равны.

Так как $BD = AC$, то нетрудно доказать равенство: $\Delta ABC = \Delta DCB$ (по трем сторонам: $AB = DC$ по определению четырехугольника Саккери, $AC = BD$ по доказанному и BC — общая сторона). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABC = \angle DCB$.

Далее Саккери пытался доказать, что углы ABC и DCB не только равны между собой, но и равны 90°. Но это ему никак не удавалось. Впоследствии выяснилось, что доказать это утверждение без аксиомы параллельности и ее следствий в принципе невозможно. Попробуйте и вы повторить попытки Саккери.

Итак, необходимо ввести новую аксиому — аксиому параллельности. Мы подошли к важному рубежу в построении геометрии. До сих пор в построении геометрии мы не были связаны с аксиомой параллельности. Изложенный выше раздел никак не связан с этой аксиомой. Эта часть геометрии называется абсолютной геометрией. Абсолютная геометрия как часть входит не только в элементарную геометрию, но и в геометрию Лобачевского.

3.2. Аксиома параллельных прямых и первые следствия из нее

Напомним, что ***параллельными прямыми*** называются две прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Совпадение двух прямых рассматривается как частный случай параллельности.

Приведем аксиому параллельных прямых. Она представляет собой исключительно важное для элементарной геометрии «ограничение». Вот оно.

Аксиома параллельных прямых

6. Через точку, не лежащую на данной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной данной прямой (рис. 66).

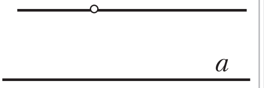


Рис. 66

Следствия. 1. *Если* $a \parallel b$ *и* $b \parallel c$ *, то* $a \parallel c$.

2. *Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и вторую.*

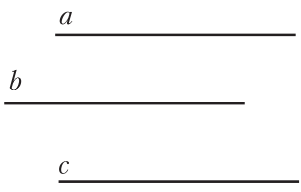


Рис. 67, а

Доказательства. **1.** Пусть $a \parallel b$ и $b \parallel c$ (рис. 67, *а*). Докажем, что $a \parallel c$. Воспользуемся методом от противного: допустим, что $a \nparallel c$. Тогда прямые a и c пересекаются в некоторой точке A (рис. 67, *б*). Через точку A проходят две прямые a и c, параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельных прямых. Следовательно, допущение о том, что $a \nparallel c$, неверно, значит, $a \parallel c$.

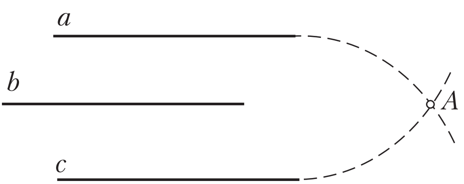


Рис. 67, б

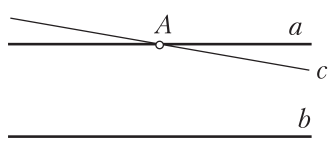


Рис. 67, в

2. Дано: $a \parallel b$, c пересекает a (рис. 67, *в*).

Доказать: c пересекает b.

1) Воспользуемся методом от противного: допустим, что прямая c не пересекает прямую b. Тогда $c \parallel b$;

2) получаем, что через точку A проходят две прямые a и c, параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельных прямых;

3) полученное противоречие означает, что сделано неверное допущение. Следовательно, прямая c пересекает прямую b.

3.3. Параллелограмм

Наряду с треугольником и окружностью в геометрии особую роль играет еще одна фигура — параллелограмм. Определим параллелограмм при помощи понятия параллельных отрезков (отрезки называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых).

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны (рис. 68).

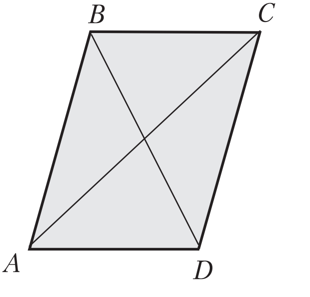


Рис. 68

Точки A, B, C и D называются *вершинами* параллелограмма, отрезки AB, BC, CD и DA — *сторонами* параллелограмма, отрезки AC и BD — *диагоналями* параллелограмма. *Записывают и читают*: параллелограмм $ABCD$.

3.4. Примеры решения задач

Задача 1. В параллелограмме $ABCD$ через вершины B и D (рис. 69, *а*) провели параллельные между собой прямые, пересекающие стороны параллелограмма соответственно в точках M и N. Докажите, что четырехугольник $MBND$ — параллелограмм.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $BM \parallel DN$.

Доказать: $MBND$ — параллелограмм.

Доказательство.

1) $BM \parallel DN$ по условию;

2) $BN \parallel MD$, так как $BC \parallel AD$;

3) из п. 1—2 следует, что $MBND$ — параллелограмм.

Задача 2. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $MBCN$. Докажите, что $AD \parallel MN$ (рис. 69, *б*).

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $MBCN$ — параллелограмм.

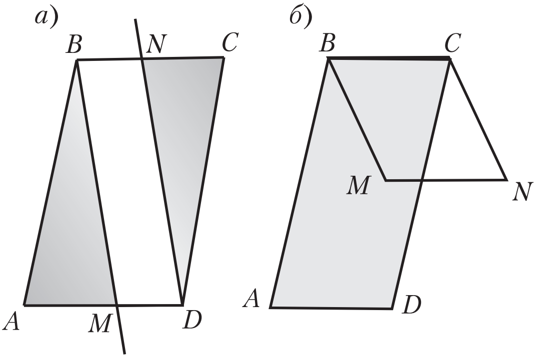


Рис. 69

Доказать: $AD \parallel MN$.

Доказательство.

1) Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AD \parallel BC$;

2) так как $MBCN$ — параллелограмм, то $MN \parallel BC$;

3) так как AD и MN параллельны одной и той же стороне BC, то они параллельны между собой.

§ 4. Свойства параллельных прямых: нужна аксиома параллельности! Разрешимость проблемы Саккери

4.1. Теория

Мы подошли к важному рубежу в построении геометрии. Оказывается, что доказать свойства параллельных прямых без аксиомы параллельных невозможно. Поэтому применение аксиомы параллельности в предлагаемых ниже доказательствах составляет самую существенную их черту!

Мы уже знаем, что обратные предложения справедливы не всегда. Выясним, справедливы ли утверждения, обратные теоремам 3.1 и 3.2.

Теоремы 4 (*свойства параллельных прямых*)

Если две прямые параллельны и пересечены секущей, то
1) **образовавшиеся накрест лежащие углы равны;**

2) **сумма образовавшихся односторонних углов равна 180°.**

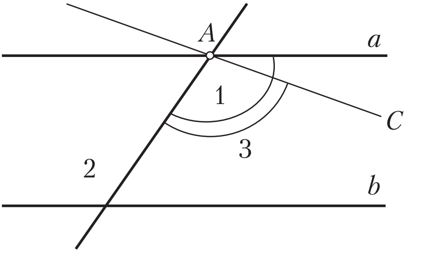


Рис. 70

Доказательство 1-го свойства. Пусть $a \parallel b$ и при пересечении этих прямых секущей c образовались накрест лежащие углы 1 и 2 (рис. 70). Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

I. *Применим метод от противного.*

1) Допустим, что $\angle 1 \neq \angle 2$.

2) Отложим угол 3, равный углу 2.

3) На основании 1-го признака параллельности прямых $AC \parallel b$.

II. *Получение противоречия.*

4. В результате оказалось, что через точку A проходят две различные (!) прямые a и AC, параллельные пря-

мой b. Это противоречит аксиоме параллельных прямых — единственности параллельной прямой.

III. *Вывод.*

5) Значит, допущение, что $\angle 1 \neq \angle 2$, неверно. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$.

4.2. Примеры решения задач с использованием метода равных треугольников, признаков и свойств параллельных прямых

Задача 1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника (рис. 71).

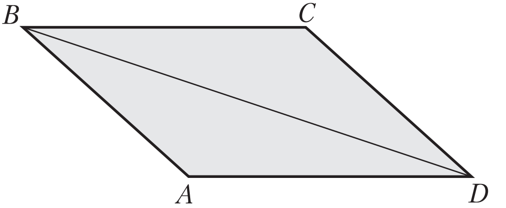


Рис. 71

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, BD — диагональ.

Доказать: $\Delta ABD = \Delta CDB$.

Доказательство.

1) В параллелограмме противоположные стороны параллельны. Так как $AB \parallel DC$, то накрест лежащие углы равны: $\angle ABD = \angle BDC$;

2) так как $AD \parallel BC$, то накрест лежащие углы при этих прямых также равны: $\angle ADB = \angle CBD$;

3) тогда $\Delta ABD = \Delta CDB$ по стороне и двум прилежащим углам.

Задача 2. Докажите, что противоположные углы и стороны параллелограмма равны (см. рис. 71).

Дано: $ABCD$ — параллелограмм.

Доказать: 1) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; 2) $AB = DC$, $BC = AD$.

Доказательство.

1) Воспользуемся методом равных треугольников: $\Delta ABD = \Delta CDB$ (см. предыдущую задачу);

2) из равенства этих треугольников следует, что $\angle A = \angle C$;

3) аналогично устанавливается равенство углов B и D;

4) из п. 1 следует также равенство противоположных сторон параллелограмма.

Задача 3. Пусть AB и CD — диаметры окружности (рис. 72). Докажите, что $\angle ACB + \angle DBC = 180°$.

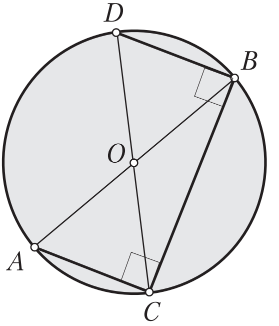


Рис. 72

Доказательство.

1) Пусть O — центр окружности. Проведем AC, CB и BD. Воспользуемся методом равных треугольников: $\Delta AOC = \Delta BOD$ (по двум сторонам и углу между ними: $OA = OB$, $OC = OD$, $\angle AOC = \angle BOD$);

2) из равенства этих треугольников следует, что $\angle CAO = \angle DBO$;

3) эти углы являются накрест лежащими при прямых AC и BD и секущей AB. На основании признака параллельности прямых (теоремы 3.1) $AC \parallel BD$;

4) воспользуемся свойством параллельных прямых: если $AC \parallel BD$, то сумма односторонних углов равна 180°: $\angle ACB + \angle DBC = 180°$.

Задача 4. Пусть AB — диаметр окружности (см. рис. 72), C — одна из точек данной окружности. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

Указание. Докажите самостоятельно, воспользовавшись результатом предыдущей задачи.

Задача 5. Вернемся к четырехугольнику Саккери. Выясним, можно ли теперь доказать, что четырехугольник Саккери является прямоугольником.

Решение.

Обратимся к рисунку 65. По 2-му признаку параллельности двух прямых $AB \parallel CD$. Рассмотрим эти две параллельные прямые и секущую BC. По теореме 4.2 (обратной 2-му признаку параллельности прямых) имеем, что $\angle ABC + \angle DCB = 180°$. Но по доказанному ранее $\angle ABC = \angle DCB$ (см. задачу в п. 3.1). Отсюда следует, что $\angle ABC = \angle DCB = 90°$. Поэтому четырехугольник Саккери является прямоугольником. Как видно, утверждение, которое нельзя было доказать до аксиомы параллельных прямых, после этой аксиомы доказывается чрезвычайно просто!

§ 5. Геометрические взаимосвязи: связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых

5.1. Связи между перпендикулярностью и параллельностью прямых

Вы уже, вероятно, убедились в том, что многие понятия в геометрии связаны друг с другом. Не менее тесные связи существуют между теоремами. Рассмотрим примеры таких теорем.

Теоремы 5 (*о связи между перпендикулярностью и параллельностью*)

> 1. **Если две прямые (**b и c, рис. 73, *а*) **перпендикулярны к третьей прямой (**a**), то они параллельны.**
>
> 2. **Если прямая** (a, рис. 73, *б*) **перпендикулярна к одной из параллельных прямых (**b**), то она перпендикулярна и к другой (**c**).**

5.2. Примеры решения задач

Задача 1. Докажите теорему 5.1, используя единственность перпендикулярной прямой, проведенной через данную точку к данной прямой.

Доказательство.

1) Могут ли прямые b и c (см. рис. 73, *а*) пересечься? Допустим (хотя бы временно), что эти прямые пересекаются в точке A (рис. 73, *в*);

2) тогда окажется, что через точку A проведены две прямые, перпендикулярные к прямой a;

3) это противоречит единственности такой прямой;

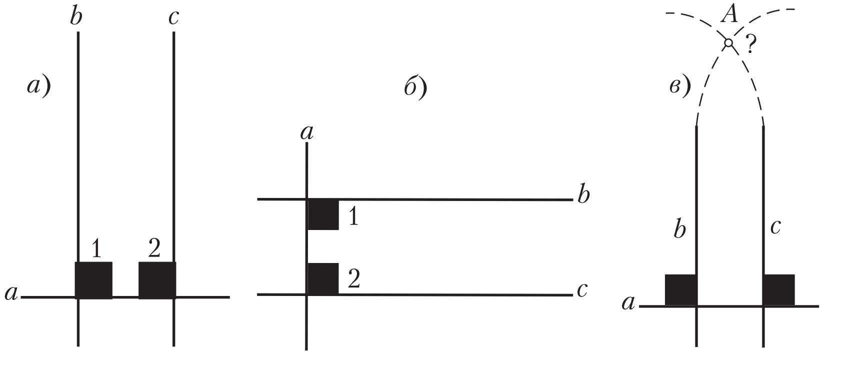


Рис. 73

4) следовательно, допущение о пересечении прямых b и c неверно;

5) поэтому $b \parallel c$.

Задача 2. На рисунке 74 даны острый угол α и углы β_1, β_2, β_3 и β_4, одна сторона которых параллельна одной стороне угла α, а другая перпендикулярна ко второй стороне угла α. Докажите, что $\beta_1 = \beta_3 = 90° - \alpha$, $\beta_2 = \beta_4 = 90° + \alpha$.

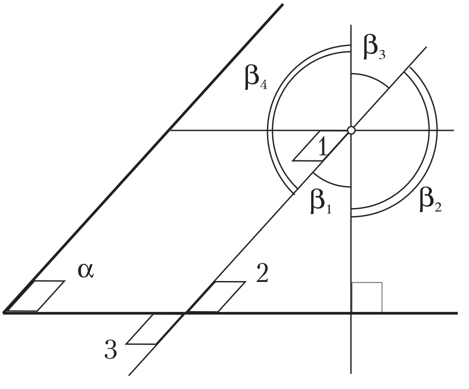


Рис. 74

Идея решения. Выполните рисунок и рассмотрите цепочку углов.

Доказательство.

1) Углы β_1 и β_3, β_2 и β_4 образуют две пары вертикальных углов, поэтому $\beta_1 = \beta_3$, $\beta_2 = \beta_4$. Для решения задачи достаточно найти один из этих углов;

2) через вершину угла β_1 проведем прямую, параллельную второй стороне угла α;

3) найдем угол β_1. Можно записать, что $\beta_1 = 90° - \angle 1$. Задача сводится к тому, чтобы $\angle 1$ выразить через α;

4) рассмотрим «цепочку» углов: 1, 2, 3 и α. Имеем: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \alpha$ (воспользовались равенством накрест лежащих углов при параллельных прямых и равенством вертикальных углов);

5) тогда $\beta_1 = 90° - \angle 1 = 90° - \alpha$;

6) отсюда $\beta_3 = \beta_1 = 90° - \alpha$;

7) так как β_2 и β_1 — смежные углы, то $\beta_2 = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$;

8) после этого находим угол β_4: $\beta_4 = \beta_2 = 90° + \alpha$.

Ответ: $\beta_1 = \beta_3 = 90° - \alpha$, $\beta_2 = \beta_4 = 90° + \alpha$.

§ 6. Теорема Фалеса — пик применений метода равных треугольников

6.1. Теорема Фалеса

Теорема 6 (*теорема Фалеса*)

Если на одной стороне данного угла (стороне OM угла MON, рис. 75) **последовательно отложить равные отрезки** ($AB = BC = CD = ...$) **и через их концы провести параллельные прямые** ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel ...$)**, пересекающие вторую сторону** (ON) **угла, то они отсекут на этой стороне равные отрезки** ($A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = ...$)**.**

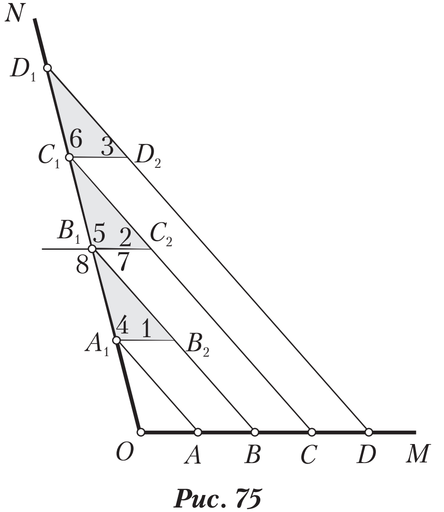


Рис. 75

6.2. Теорема Фалеса при решении задач

Теоремы о перпендикулярности и параллельности прямых, теорема Фалеса, метод равных треугольников помогают решать многие задачи. Убедимся в этом.

Задача 1. Разделите данный отрезок ON (рис. 76) на шесть равных частей.

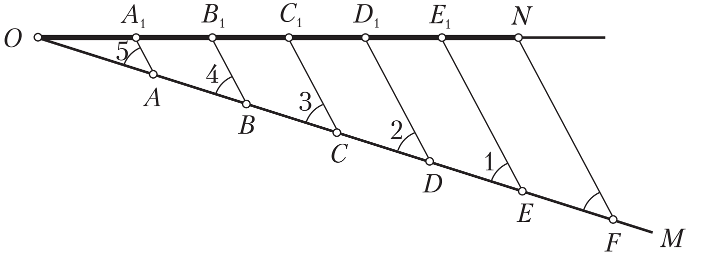


Рис. 76

Идея решения. Очевидно, что при решении данной задачи необходимо воспользоваться теоремой Фалеса.

Решение.

1) Через точку O проведем некоторый луч OM и на этом луче от его вершины O отложим циркулем последовательно шесть равных отрезков OA, AB, BC, CD, DE, EF;

2) соединим точки F и N отрезком;

3) с помощью транспортира отложим углы 1, 2, 3, 4 и 5, равные углу OFN. Нетрудно видеть, что стороны этих углов AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и EE_1 параллельны;

4) на основании теоремы Фалеса отрезки OA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1N равны. В итоге отрезок ON оказался разбитым на шесть равных частей.

Замечание. Аналогично отрезок ON может быть разбит на любое число равных частей. Заметим также, что откладывание равных углов с помощью транспортира является приближенным, а потому приближенным является и разбиение отрезка на равные части. Позже мы познакомимся с точным решением этой задачи с помощью циркуля и линейки.

Задача 2. В треугольнике BOB_1 (рис. 77) точка A — середина стороны OB, точка A_1 — середина стороны OB_1. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

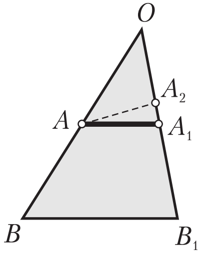


Рис. 77

Доказательство. 1) Воспользуемся методом от противного. Допустим, что $AA_1 \nparallel BB_1$;

2) тогда проведем $AA_2 \parallel BB_1$. По теореме Фалеса $OA_2 = A_2B_1$;

3) получили, что у отрезка OB_1 оказалось две середины: точки A_1 и A_2;

4) этого быть не может. Следовательно, допущение $AA_1 \nparallel BB_1$ не является верным. Поэтому $AA_1 \parallel BB_1$.

Задача 3. Данный отрезок AB разделите точкой X в отношении 3 : 2 считая от точки A. (Решите самостоятельно.)

Тема 3 ТРЕУГОЛЬНИК — ОСНОВНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА

§ 1. Необходимость доказательства теорем. Знаменитая теорема о сумме углов треугольника. Внешний угол треугольника

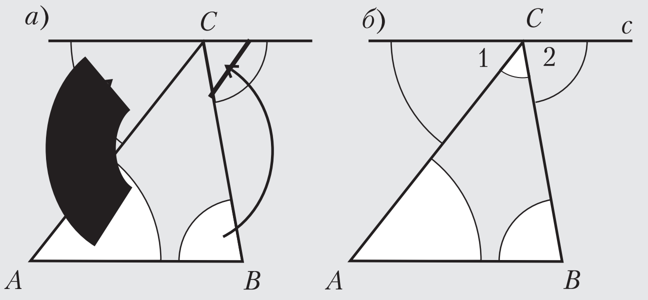
1.1. Необходимость доказательства теорем

Теорема 1

Сумма углов треугольника равна 180°.

Теорема о сумме углов треугольника является одной из важнейших теорем геометрии. Считается, что она была сформулирована древнегреческим математиком *Пифагором*. На рисунке 78, *а* приведена картонная модель треугольника. Если оторвать у модели два нижних угла и приложить их к третьему углу, то получим сумму всех трех углов треугольника. Наглядно видно, что при этом образуется развернутый угол, а значит, сумма углов треугольника равна 180°. Это действительно так. Однако полной уверенности в справедливости сделанного утверждения нет. Отрывание и складывание углов на картонной модели, разумеется, не дает точного доказательства. В геометрии, как вы уже неоднократно убедились, доказательство представляет собой логическое рассуждение, в котором опираются только на ранее известные теоретические знания. Доказательство не связано с опытом и поэтому дает точный ответ. В этом состоит большое преимущество доказательства, подчеркивающее его необходимость в математике.

Теорема о сумме углов треугольника



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Рис. 78

Идея доказательства. Она подсказывается описанным выше опытом: нужно сложить все три угла треугольника при одной из его вершин (рис. 78, *б*). Доказательство опирается на свойства параллельных прямых (и значит, на аксиому параллельных прямых!). Эта теорема примечательна во многих отношениях. Во-первых, отличается большим количеством доказательств. Рекомендуем вам попытаться самим «переоткрыть» некоторые ее доказательства. Во-вторых, данная теорема эквивалентна аксиоме параллельных прямых. Поэтому не случайно, что все доказательства этой теоремы неизбежно используют аксиому параллельности или некоторые ее следствия.

1.2. Внешний угол треугольника

Введем новое понятие — понятие внешнего угла треугольника.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

Важно правильно указать внешний угол треугольника на рисунке. При каждой вершине треугольника мож-

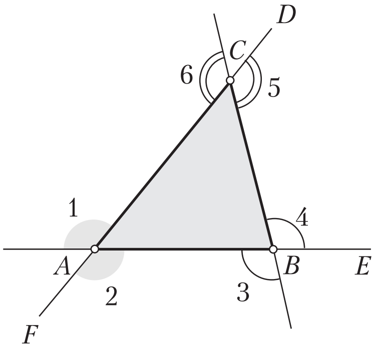


Рис. 79

но построить два его внешних угла (см. углы 1—6, рис. 79). Внешний угол BCD является смежным с углом C, внешний угол CBE — смежным с углом B, внешний угол FAB — смежным с углом A. Углы самого треугольника при этом называются *внутренними*.

Следствия. 1. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.*

2. *Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.*

1.3. Как теорема о сумме углов треугольника упрощает решение задач

Теорема о сумме углов треугольника упрощает решение многих задач. Убедимся в этом.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен α. Найдите второй острый угол (рис. 80, *а*).

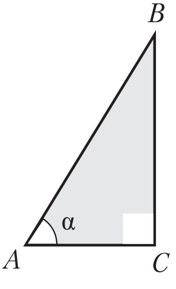


Рис. 80, а

Дано: ΔABC — прямоугольный, $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$.

Найти: $\angle B$.

Решение.

1) Так как сумма углов треугольника равна 180°, то сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°;

2) если один из острых углов равен α, то другой равен $90° - \alpha$.

Ответ: $90° - \alpha$.

Задача 2. (*Решите без выполнения чертежа!*) Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны 60°.

Дано: ΔABC — равносторонний.

Доказать: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Доказательство.

1) Применяя дважды свойство углов, прилежащих к основанию равнобедренного треугольника (мысленно представьте равнобедренный треугольник!), получаем, что $\angle A = \angle B = \angle C$;

2) так как углы данного треугольника равны и сумма их равна 180°, то каждый из этих углов равен 60°.

Задача 3. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой, две другие стороны — катетами. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу (рис. 80, *б*).

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство.

1) На основании задачи 1, если в прямоугольных треугольниках

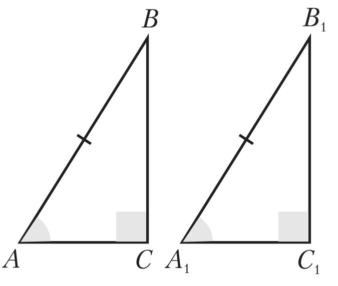


Рис. 80, б

одни острые углы равны, то другие острые углы также равны, поэтому $\angle B = \angle B_1$;

2) тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне (гипотенузе) и двум прилежащим к ней углам.

Задача 4. Найдите углы треугольника, если известно, что они относятся как 1 : 2 : 3.

Решение.

1) Если градусную меру одного угла обозначить через x, другого — через $2x$, третьего — через $3x$, то они будут находиться как раз в заданных отношениях;

2) тогда $x + 2x + 3x = 180°$, $6x = 180°$, $x = 30°$;

3) найдем значения $2x$ и $3x$: $2x = 2 \cdot 30° = 60°$, $3x = 3 \cdot 30° = 90°$;

4) итак, искомые углы треугольника равны 30°, 60° и 90°.

Задача 5. Докажите, что угол между биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника, взятых при одной его вершине, прямой.

Докажите самостоятельно.

§ 2. Неутомимые труженики в геометрии: равнобедренный и равносторонний треугольники

2.1. Определения и теоремы

Продолжим изучение одной из самых главных геометрических фигур — треугольника. Может сложиться впечатление, что треугольник настолько простая фигура, что вряд ли он может обладать какими-либо интересными свойствами. Однако такое впечатление обманчиво. Треугольник обладает самыми разнообразными свойствами.

Многие знаменитые математики считали своим долгом внести свой вклад в геометрию треугольника. А сколько открытий предстоит еще совершить!

С равнобедренным треугольником мы уже встречались. Напомним его определение.

Равнобедренным треугольником называется треугольник, у которого хотя бы две стороны равны.

Две равные стороны (AB и BC, рис. 81, *а*) называются *боковыми*, а третья сторона (AC) — *основанием*.

Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого все три стороны равны (рис. 81, *б*).

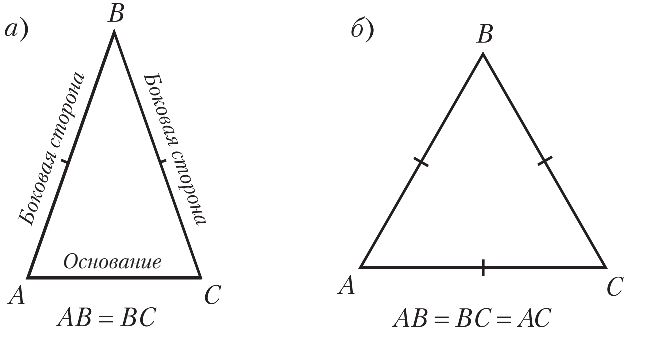
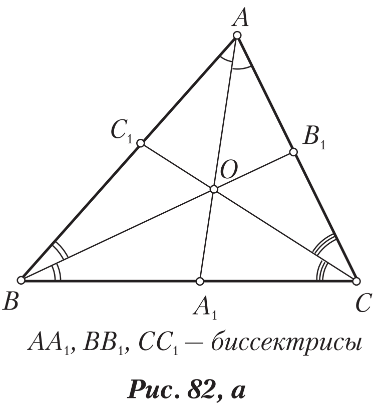


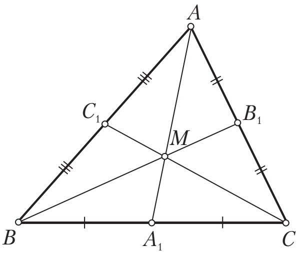
Рис. 81

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника и точку пересечения биссектрисы угла с противоположной стороной (рис. 82, *а*).



AA_1, BB_1, CC_1 — *биссектрисы*

Рис. 82, а

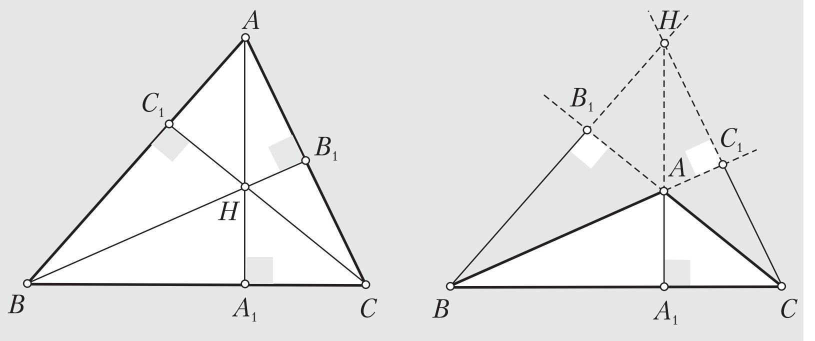


AA_1, BB_1, CC_1 — *медианы*

Рис. 82, б

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий его вершину с серединой противолежащей стороны (рис. 82, *б*).

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противолежащую его сторону (рис. 82, *в*).



AA_1, BB_1, CC_1 — *высоты*

Рис. 82, в

Теоремы 2 (*о равнобедренном треугольнике*)

1. **Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.**
2. **В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.**

Следствия. 1. *В равностороннем треугольнике все углы равны* 60°.

2. *Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.*

2.2. Задачи о треугольнике — самые распространенные геометрические задачи

Так как треугольник является одной из главнейших фигур, то не будет преувеличением, если скажем, что задачи, связанные с треугольником, являются основными геометрическими задачами. Такие задачи в геометрии встречаются «на каждом шагу», не случайно в названии параграфа сказано, что равнобедренный и равносторонний треугольники — самые настоящие труженики в геометрии. Обратимся к первым примерам таких задач.

Задача 1. На сторонах равностороннего треугольника от его вершин A, B и C в одном направлении (рис. 83) отложены равные отрезки AM, BN и CP. Докажите, что треугольник MNP — равносторонний.

Дано: ΔABC — равносторонний, $AM = BN = CP$.

Доказать: ΔMNP — равносторонний.

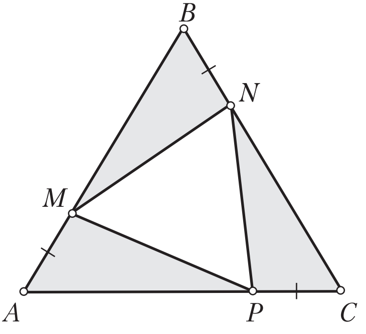


Рис. 83

Идея доказательства. Достаточно доказать равенство отрезков MN, NP и PM. Для этого их необходимо включить в некоторые треугольники и доказать равенство этих треугольников. Какие дополнительные построения необходимо выполнить?

Доказательство.

1) Построим треугольник MNP. Для доказательства равенства отрезков MN, NP и PM рассмотрим треугольник

ники BMN, CNP, APM и воспользуемся методом равных треугольников;

2) эти треугольники равны по двум сторонам и углу, заключенному между ними (убедитесь в этом!);

3) из равенства этих треугольников следует, что $MN = NP = PM$;

4) значит, треугольник MNP — равносторонний.

В 9-м классе будет доказано одно примечательное свойство: медианы в любом треугольнике пересекаются в одной точке! Сейчас мы докажем это утверждение для равнобедренного, а значит, и для равностороннего, треугольника.

Задача 2. Докажите, что в равнобедренном треугольнике все три медианы пересекаются в одной точке (рис. 84).

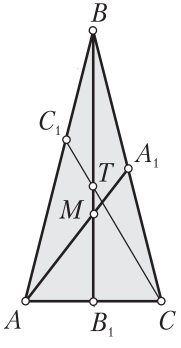


Рис. 84

Дано: ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$, AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы.

Доказать: AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке M.

Идея доказательства. Пусть M — точка пересечения медиан BB_1 и AA_1. Докажем, что медиана CC_1 также проходит через точку M. Для этого временно (!) допустим, что медиана CC_1 пересекает медиану BB_1 не в точке M, а в некоторой другой точке T.

Доказательство.

1) Ранее доказывалось, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны. Устанавливалось это при помощи равенства тре-

угольников ACA_1 и CAC_1. Из равенства этих же треугольников следует равенство углов CAA_1 и ACC_1;

2) рассмотрим треугольники AB_1M и CB_1T. В этих треугольниках $AB_1 = CB_1$, $\angle B_1AM = \angle B_1CT$ (см. п. 1) и углы при вершине B_1 равны, так как оба они прямые (почему?). Тогда $\Delta AB_1M = \Delta CB_1T$ по стороне и двум прилежащим углам;

3) из их равенства следует, что $B_1M = B_1T$;

4) поэтому точка T совпадет с точкой M;

5) значит, все три медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке — точке M.

Замечание. Полученный ответ ранее подтверждался с помощью построений (конечно, если эти построения выполнялись с большой точностью). Теперь мы убедились в этом при помощи доказательства. Одно из важнейших (и не единственных!) достоинств доказательства состоит в том, что выводы, сделанные при его помощи, обладают точностью.

Задача 3. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен α. Найдите углы при его основании.

Решение.

1) Найдем вначале сумму углов при основании равнобедренного треугольника. Она равна $180° - \alpha$;

2) так как углы при основании равнобедренного треугольника равны, то каждый из них равен:

$$\frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2};$$

3) таким образом, углы при основании равны:

$$90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $90° - \frac{\alpha}{2}$.

§ 3. Что такое средняя линия треугольника

3.1. Понятие простое, а доказательство его свойства — сложное

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 85).

С помощью теоремы Фалеса выведем одно следствие, которое поможет в изучении средней линии треугольника.

Следствие. *Если на одной стороне данного угла* (*стороне* OM угла MON, рис. 86, *а*) *от его вершины последовательно отложить равные отрезки* ($OA = AB = BC = CD = ...$) *и на второй стороне* (ON) *также от вершины отложить равные между собой отрезки* ($OA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = ...$), *то прямые, проходящие через соответственные концы этих отрезков, параллельны* ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel ...$).

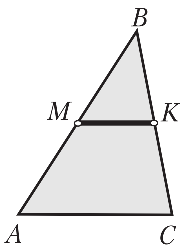


Рис. 85

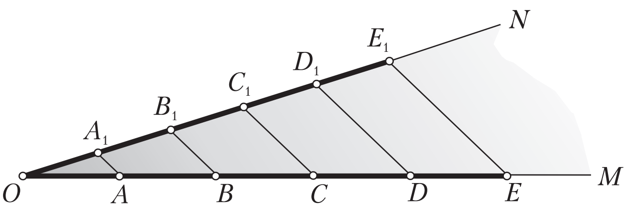


Рис. 86, а

Доказательство.

Требуется доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1... параллельны. Докажем вначале, что $BB_1 \parallel AA_1$.

I. *Применим метод от противного.*

1) Допустим, что $BB_1 \nparallel AA_1$.

2) Проведем $BB_2 \parallel AA_1$ (рис. 86, *б*).

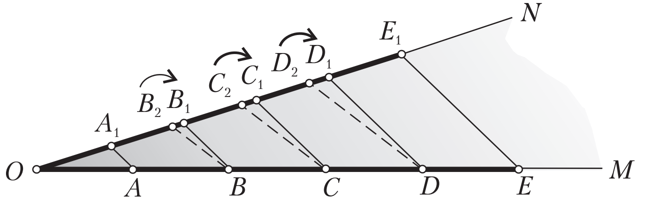


Рис. 86, б

II. *Получаем противоречие.*

3) По теореме Фалеса $A_1B_2 = OA_1$. Но по условию $A_1B_1 = OA_1$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} A_1B_2 &= OA_1, \\ A_1B_1 &= OA_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1B_2 = A_1B_1.$$

Это противоречит аксиоме откладывания отрезка.

III. *Вывод.*

4) Значит, допущение $BB_1 \nparallel AA_1$ неверно. Отсюда $BB_1 \parallel AA_1$.

5) Аналогично доказывается, что каждая следующая прямая параллельна предыдущей прямой.

Теорема 3 **(***о средней линии треугольника***)**

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Доказательство.

1) Пусть MK (см. рис. 85) — средняя линия треугольника ABC. Докажем, что $MK \parallel AC$ и $MK = \dfrac{AC}{2}$.

Докажем первое утверждение. Так как $BM = MA$ и $BK = KC$, то на основании предыдущего следствия $MK \parallel AC$;

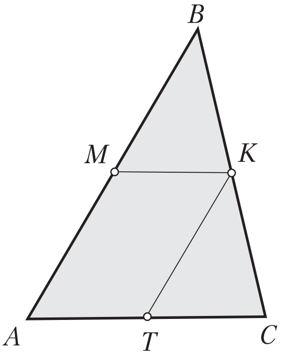


Рис. 87

2) докажем второе утверждение. Для этого проведем еще одну среднюю линию треугольника — KT (рис. 87). По только что доказанному $KT \parallel AB$. Фигура $AMKT$ является параллелограммом. Поэтому $MK = AT$ (см. задачу 2 из § 4.2 предыдущей темы);

3) имеем:

$$MK = AT = TC = \frac{AC}{2}.$$

3.2. Новое понятие — новые задачи

Задача 1. В равнобедренном треугольнике медианы точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1 считая от вершины треугольника (рис. 88).

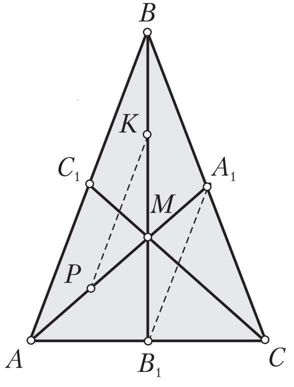


Рис. 88

Дано: ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M.

Доказать: $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$.

Идея доказательства. Пусть P — середина отрезка AM, K — середина отрезка BM. Докажем, что $AP = PM = MA_1$ и $BK = KM = MB_1$. Отсюда будут следовать искомые отношения.

Доказательство.

1) Так как A_1B_1 и PK — средние линии треугольников ABC и ABM, то они параллельны AB и равны половине AB;

2) поэтому A_1B_1 и PK равны и параллельны;

3) из параллельности этих отрезков следует равенство накрест лежащих углов: $\angle PKB_1 = \angle KB_1A_1$, $\angle KPM = \angle MA_1B_1$;

4) тогда $\Delta MPK = \Delta MA_1B_1$;

5) из равенства этих треугольников следует, что $PM = MA_1$ и $KM = MB_1$;

6) отсюда $AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$.

Задача 2. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 89) $BC \parallel AD$, точки M и K — середины соответственно сторон AB и CD. Докажите, что $MK = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

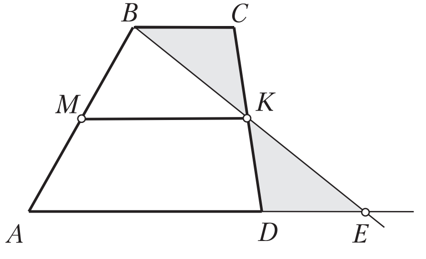


Рис. 89

Доказательство.

1) Пусть прямая BK пересекает прямую AD в точке E. Треугольники BCK и EDK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($CK = KD$, $\angle BKC = \angle EKD$ как вертикальные, $\angle BCK = \angle EDK$ как накрест лежащие при параллельных BC и DE);

2) из равенства этих треугольников следует, что $BK = KE$;

3) значит, MK — средняя линия треугольника ABE;

4) учитывая, что $BC = DE$, можно записать:

$$MK = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Задача 3. В треугольнике ABC точки P и P_1 делят соответственно стороны BA и BC в отношении 1 : 2 считая от вершины B. Докажите, что $PP_1 = \frac{1}{3}AC$ (рис. 90).

Доказательство.

1) Разделим стороны BA и BC на три равные части (точками P, K и P_1, K_1). По свойству средней линии, применяя его к треугольнику BKK_1:

$$PP_1 = \frac{1}{2}KK_1;$$

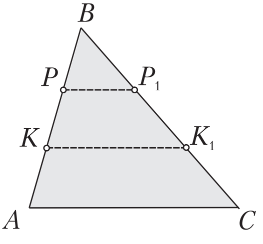


Рис. 90

2) из четырехугольника APP_1C, применяя результат предыдущей задачи,

$$KK_1 = \frac{1}{2}(PP_1 + AC);$$

3) тогда

$$PP_1 = \frac{1}{2}KK_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(PP_1 + AC);$$

4) $PP_1 = \frac{1}{4}PP_1 + \frac{1}{4}AC \Rightarrow \frac{3}{4}PP_1 = \frac{1}{4}AC \Rightarrow PP_1 = \frac{1}{3}AC.$

§ 4. Дальнейшее развитие метода равных треугольников — равенство прямоугольных треугольников

4.1. Прямоугольный треугольник

Наряду с равнобедренным и равносторонним треугольниками исключительно важную роль в элементарной геометрии играет прямоугольный треугольник. Равенство прямоугольных треугольников позволяет дальше развить метод равных треугольников, упростить его применение. Следующие несколько параграфов будут посвящены изучению прямоугольного треугольника.

> ***Прямоугольным треугольником*** называется треугольник, у которого имеется прямой угол (рис. 91).

Сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой*, а две другие стороны — *катетами*.

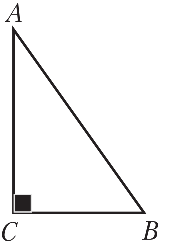


Рис. 91

Теоремы 4 (*три признака равенства прямоугольных треугольников*)

Прямоугольные треугольники равны, если (рис. 92)**:**

1) **гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого,** или

2) **катет и острый угол одного треугольника соответственно равны катету и острому углу другого,** или

3) **гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.**

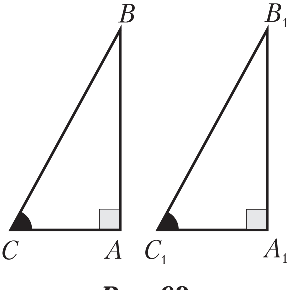


Рис. 92

Задача 1. Докажите, что в любом прямоугольнике диагонали равны (рис. 93).

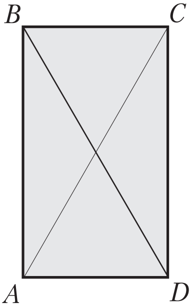


Рис. 93

Дано: $ABCD$ — прямоугольник.

Доказать: $AC = BD$.

Идея доказательства. Воспользуйтесь методом равных треугольников. Какие треугольники необходимо рассмотреть?

Доказательство.

1) Рассмотрим прямоугольные треугольники BAD и CDA. Эти треугольники равны по двум катетам: сторона AD — общая, $AB = DC$ как противоположные стороны параллелограмма;

2) из равенства этих треугольников следует, что $AC = BD$.

Задача 2. Докажите равенство двух прямоугольных треугольников по острому углу и биссектрисе, проведенной к противолежащему катету (рис. 94).

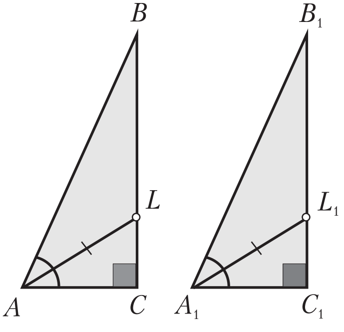


Рис. 94

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle A = \angle A_1$, $AL = A_1L_1$ — биссектрисы.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство.

1) Рассмотрим треугольники ACL и $A_1C_1L_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ (как половины равных углов);

2) тогда эти треугольники равны по гипотенузе и острому углу: $AL = A_1L_1$ (по условию), $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ (см. п. 1);

3) из их равенства следует, что $AC = A_1C_1$;

4) поэтому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по острому углу и катету.

Задача 3. Докажите равенство двух прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведенной к другому катету (рис. 95).

Доказательство.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$ и $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы, проведенные соответственно к катетам BC и B_1C_1. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$;

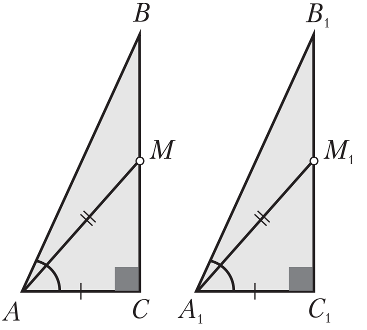


Рис. 95

1) $\Delta ACM = \Delta A_1C_1M_1$ (по гипотенузе и катету);

2) из равенства этих треугольников следует, что $CM = C_1M_1$;

3) если $CM = C_1M_1$, то $CB = C_1B_1$;

4) тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по двум катетам).

§ 5. Две замечательные теоремы: о катете, лежащем против угла в 30°, и медиане, проведенной к гипотенузе

5.1. Теоремы

Рассмотрим еще две новые теоремы, относящиеся к прямоугольному треугольнику. Заметим, что эти теоремы довольно часто применяются при решении задач.

Теоремы 5

1. **Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.**

2. **Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.**

5.2. Рассматриваем обратные задачи

Рассмотрим утверждения, обратные двум предыдущим.

Задача 1. а) Докажите, что если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30°.

б) Докажите, что если медиана, проведенная к стороне треугольника, равна половине этой стороны, то треугольник — прямоугольный.

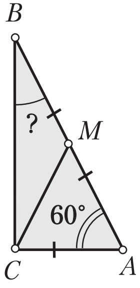


Рис. 96

Доказательства.

а) 1) Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = \frac{AB}{2}$. Докажем, что $\angle B = 30°$ (рис. 96). Для этого возьмем точку M — середину гипотенузы AB;

2) тогда $AC = AM$ (по условию);

3) по свойству медианы, проведенной к гипотенузе, $CM = AM$;

4) отсюда $AC = AM = CM$;

5) это значит, что треугольник CAM — равносторонний;

6) поэтому $\angle A = 60°$;

7) если $\angle A = 60°$, то $\angle B = 30°$.

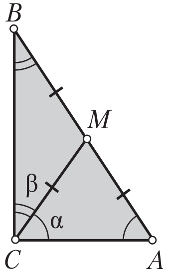


Рис. 97

б) 1) Пусть $CM = AM = BM$ (рис. 97). Докажем, что $\angle C = 90°$. Воспользуемся тем, что треугольники CMB и CMA — равнобедренные. Введем обозначения: $\angle MCA = \alpha$, $\angle MCB = \beta$. Тогда по свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$;

2) применим теорему о сумме углов треугольника к треугольнику ABC: $(\alpha + \beta) + \alpha + \beta = 180°$;

3) отсюда $\alpha + \beta = 90°$;

4) следовательно, $\angle C = 90°$.

Задача 2. Пусть AB — диаметр, C — точка, принадлежащая окружности. Докажите, что $\angle ACB = 90°$ (рис. 98).

Дано: AB — диаметр, C — точка окружности.

Доказать: $\angle ACB = 90°$.

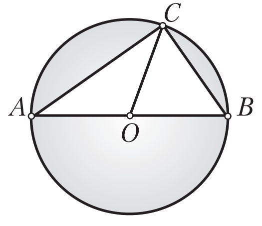


Рис. 98

Идея доказательства. Задача ранее рассматривалась (см. задачу 4 из § 4 предыдущей темы). Возможно более простое решение. Нельзя ли воспользоваться задачей 1 *б*)?

Доказательство.

1) Пусть O — центр окружности. Тогда $AO = OB$ и CO — медиана треугольника ACB;

2) получаем, что медиана CO равна половине стороны AB треугольника ACB;

3) на основании предыдущей задачи $\angle ACB = 90°$.

§ 6. Первые геометрические неравенства

6.1. Неравенства треугольника

Мы уже убедились в том, какую большую роль играют в геометрии равенства. А как быть с неравенствами, нужны ли они в геометрии? Нужны! Рассмотрим некоторые геометрические неравенства, относящиеся к сторонам и углам треугольника.

Теоремы 6

О соотношениях между сторонами и углами треугольника

1. **В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.**

Неравенства треугольника

2. **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.**

Следствие. *Каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.*

6.2. Неравенства в задачах

Задача 1. (*Решите задачу без выполнения чертежа!*) Выясните, существует ли треугольник со сторонами, равными 60 см, 91 см и 109 см.

Дано: 60 см, 91 см и 109 см — длины трех отрезков.

Выяснить: существует ли треугольник с такими сторонами.

Идея решения. Проверим, выполняются ли для данных сторон неравенства треугольника.

Решение.

1) Возьмем больший отрезок, равный 109 см. Он меньше суммы двух других: $109 < 60 + 91$. Тогда каждый из оставшихся двух отрезков тем более будет меньше суммы двух других;

2) значит, для данных отрезков неравенства треугольника выполняются и треугольник с такими сторонами существует.

Ответ: треугольник существует.

Задача 2. Пусть s — серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 99) и точки C и B лежат по одну сторону от прямой s. Докажите, что $BC < AC$.

Доказательство. 1) Пусть M — точка пересечения прямой s и гипотенузы AC, тогда по свойству серединного перпендикуляра $AM = BM$;

2) для треугольника BCM имеем: $BC < BM + MC$, $BC < AM + MC$, $BC < AC$.

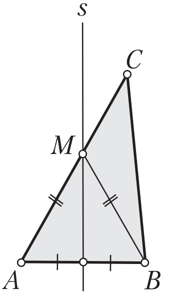


Рис. 99

§ 7. Заключительные планиметрические аксиомы — аксиомы площади

7.1. Определения

Ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ (рис. 100, *а*) называется фигура, состоящая из точек A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2 и т. д. называются *вершинами*, а отрезки A_1A_2, A_2A_3 и т. д. — *звеньями* ломаной.

Концы одного звена называются *соседними* вершинами ломаной. Два звена, выходящие из одной вершины, также называются *соседними* или *смежными*. Если ломаная не имеет самопересечений, то она называется *простой*.

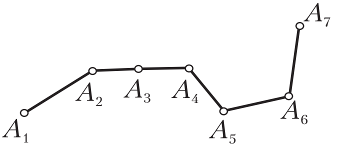


Рис. 100, а

Длиной ломаной называется сумма длин всех ее звеньев. Если концы ломаной совпадают, то она называется *замкнутой*.

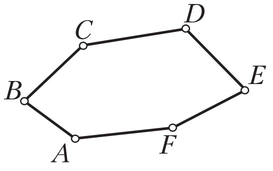


Рис. 100, б

Многоугольником (рис. 100, *б*) называется простая замкнутая ломаная (вместе с ограниченной ею конечной частью плоскости или без нее), соседние звенья которой не лежат на одной прямой.

Вершины ломаной называются *вершинами* многоугольника, звенья ломаной — *сторонами* многоугольника. Отрезок, соединяющий две ее несоседние вершины, называется *диагональю* многоугольника. Многоугольник с n вершинами (а значит, и n сторонами) называется *n-угольником*. Если $n = 3$, то многоугольник является треугольником; если $n = 4$, то — четырехугольником; если $n = 5$, то — пятиугольником и т. д.

7.2. Площадь по Жордану. Формула Пика

Понятие площади принадлежит к числу довольно сложных понятий математики. Хотелось бы подчеркнуть, что определение площади не надо смешивать с ее вычислением. Вычислять площади многих фигур люди научились давно, владея лишь интуитивными представлениями о площади. Вспомните, что площади квадрата и прямоугольника вы вычисляли еще в начальной школе. Первоначально люди площадь представляли как количество единичных квадратов, которые может вместить данная фигура. Это позволило подсчитать площадь прямоугольника, длины сторон которого выражаются целыми числами a и b. Такой прямоугольник содержит ab единичных квадратов. Поэтому естественно было считать, что число ab выражает площадь указанного прямоугольника. Затем этот результат распространили на случай, когда длины сторон прямоугольника выражаются дробными числами. В результате получили формулу для вычисления площади прямоугольника. Впоследствии люди научились вычислять площадь параллелограмма, треугольника и многоугольника. Используя понятие площади многоугольника, французский математик *Камилл Жордан* указал способ определения площади более широкого класса плоских фигур. Он предложил определять площадь криволинейной фигуры с помощью сетки равных квадратов, подобной той, которая нанесена на листе миллиметровой бумаги, рассматривая при этом все более мелкие и мелкие сетки. Неограниченное продолжение этого процесса связано с понятием предела последовательности, которое обычно из-за больших его сложностей рассматривается только в вузовском курсе математики.

В ходе достаточно длинного исторического пути было обнаружено, что площадь многоугольника обладает следующими свойствами.

Аксиомы площади

7. Каждому многоугольнику соответствует единственная положительная величина, называемая площадью многоугольника.

Если многоугольник состоит из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей составляющих его многоугольников.

Если два треугольника равны, то равны и их площади.

Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Разумеется, не всякая величина может быть принята в качестве площади многоугольника. Убедимся в этом.

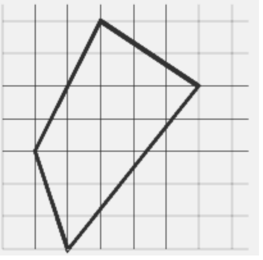


Рис. 101, а

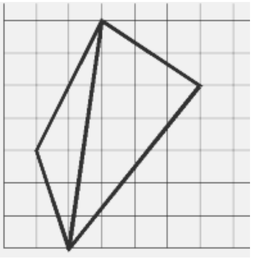


Рис. 101, б

1. Проверим, например, можно ли в качестве площади принять число единичных квадратов, целиком содержащихся в многоугольнике. На рисунке 101, *а* приведен четырехугольник, содержащий 6 единичных квадратов. Временно посчитаем, что площадь этого многоугольника равна 6. Первая аксиома площади, как видно, выполняется: $6 > 0$. Будет ли выполняться вторая аксиома? Оказывается, нет. Левый треугольник (рис. 101, *б*) вообще не содержит целиком ни одного единичного квадрата. По нашему временному соглашению он не имеет площади. Для него не выполняется первая аксиома. Понятно, что вторая аксиома по этой причине не выполняется. Это говорит о том, что измерять многоугольник указанным выше «способом» нельзя! Никакого другого вывода вы, вероятно, и не ожидали. Действительно, данный «способ» очень отличается от обычных представлений об измерении площади многоугольника (уж очень значительная часть площади оказывается не учтенной!).

2. Выясним, можно ли площадь многоугольника выражать таким числом $m + \frac{n}{2} - 1$, где m — количество точек решетки, находящихся внутри многоугольника, а n — количество точек решетки, лежащих на его границе. Для четырехугольника, приведенного на рисунке 101, *б*, $m =$ $= 15$, $n = 5$. Предполагаемая площадь четырехугольника

равна 16,5. Так как 16,5 > 0, то первая аксиома площади выполняется! Проверим выполнимость второй аксиомы. Для рисунка 101, *б* имеем, что предполагаемая площадь левого треугольника равна 5, правого — равна 11,5. Как видно, 5 + 11,5 = 16,5, что означает, что вторая аксиома площади выполняется! Выполнимость третьей аксиомы площади проверьте самостоятельно. Обратимся к четвертой аксиоме. По известной формуле площади квадрата (рис. 101, *в*) $S = 25$. По формуле предполагаемой площади получаем тоже 25. Это означает, что третья аксиома площади выполняется!

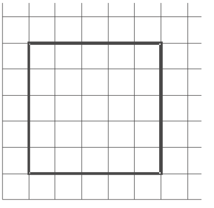


Рис. 101, в

Вывод: число $S = m + \frac{n}{2} - 1$ претендует на то, чтобы его посчитать площадью многоугольника. Действительно, это так, однако требуется специальное доказательство (которое мы опускаем), а не только подтверждение на примерах. Заметим, что формула $S = m + \frac{n}{2} - 1$ называется *формулой Пика*.

7.3. Метод площадей — начало нового геометрического метода

В математике используются различные методы. Разнообразие их достаточно велико. Конечно, большое разнообразие создает определенные трудности в их изучении. Но согласитесь, что, зная различные методы, мы можем при решении задач выбирать такие из них, которые дают наиболее простое решение. А это многого стоит!

Метод площадей состоит в том, что, используя площадь, можно доказывать многие теоремы и решать задачи. Основные приемы решения геометрических задач при помощи метода площадей:

1. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то сумма их площадей равна площади исходного многоугольника. Это дает возможность записать равенство для площадей, с помощью которого возможно нахождение некоторых элементов многоугольника.

2. Отношение длин отрезков можно заменить отношением площадей треугольников. В результате получаем равенство, из которого можно извлечь пользу для решения задачи.

3. Различные формулы для площади позволяют получить соотношения между сторонами, высотами, периметром и т. д. Этот прием особенно полезен тогда, когда площадь является данной величиной.

4. Равенство площадей фигур (равновеликость фигур) также позволяет часто извлечь информацию, полезную для решения задачи.

7.4. Площадь прямоугольника и прямоугольного треугольника

Теоремы 7

1. **Площадь прямоугольника равна произведению двух соседних его сторон.**

2. **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.**

3. **Площадь любого треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.**

Доказательство теоремы 7.1. Пусть $ABCD$ (рис. 102) — данный прямоугольник, искомую площадь которого обозначим через S.

Выполним построения, указанные на рисунке, и применим метод площадей (прием 1). Тогда:
$2S + b^2 + a^2 = (a + b)^2$.
Отсюда $2S + b^2 + a^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $S = ab$.

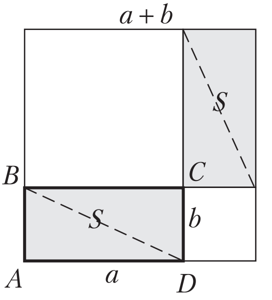


Рис. 102

7.5. Первые применения метода площадей при решении задач

Следующие две задачи по своей значимости могут посоперничать с теоремами.

Задача 1. Докажите, что $h_c = \dfrac{ab}{c}$, где h_c — высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, a, b — катеты, c — гипотенуза (рис. 103, *а*).

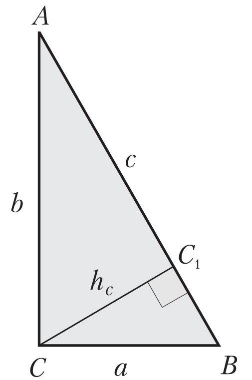


Рис. 103, а

Доказательство.

Применим метод площадей (см. прием 3). Дважды запишем площадь данного прямоугольного треугольника. Приравняв полученные выражения, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab, \\ S &= \frac{1}{2}ch_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow h_c = \frac{ab}{c}.$$

Задача 2. Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам (рис. 103, *б*).

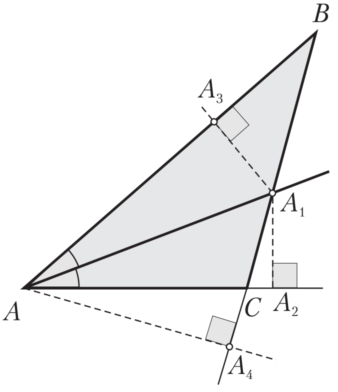


Рис. 103, б

Дано: AA_1 — биссектриса треугольника ABC.

Доказать: $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

Идея доказательства. Воспользуемся методом площадей (см. прием 3). Запишем различными способами отношение площадей треугольников ABA_1 и ACA_1 и приравняем эти отношения.

Доказательство. 1) В указанных треугольниках проведем высоту AA_4 и запишем отношение их площадей:

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{\frac{1}{2}BA_1 \cdot AA_4}{\frac{1}{2}A_1C \cdot AA_4} = \frac{BA_1}{A_1C};$$

2) в этих же треугольниках проведем высоты A_1A_2 и A_1A_3 из вершины A_1. Треугольники AA_1A_2 и AA_1A_3 равны по гипотенузе и острому углу. Из их равенства следует, что $A_1A_2 = A_1A_3$;

3) еще раз запишем отношение площадей тех же треугольников:

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot A_1A_2}{\frac{1}{2}AC \cdot A_1A_3} = \frac{AB}{AC};$$

4) из п. 1 и 3 приходим к искомому равенству.

§ 8. Второй вычислительный геометрический метод: теорема Пифагора и обратная теорема

8.1. Предварительная задача

Теорема Пифагора после метода площадей является вторым геометрическим вычислительным методом. Числовая зависимость между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника была известна в глубочайшей древности китайским, индусским, египетским и вавилонским ученым. Пифагор, много путешествовавший в Вавилоне и Египте, сумел дать доказательство этого предложения путем сравнения площадей квадратов, построенных на гипотенузе и катетах. Доказательство Пифагора до нашего времени не дошло, но название теоремы сохранилось за Пифагором. В настоящее время известно не менее сотни доказательств этой теоремы. Приведем доказательство, которое по праву считается одним из самых красивых доказательств элементарной геометрии. Наряду с теоремой Пифагора рассмотрим также и обратную ей теорему, которая имеет не меньшее значение, нежели теорема Пифагора. Начнем со следующей задачи.

Задача. На сторонах квадрата $ABCD$ (рис. 104) по направлению часовой стрелки отложили равные отрезки AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ также является квадратом.

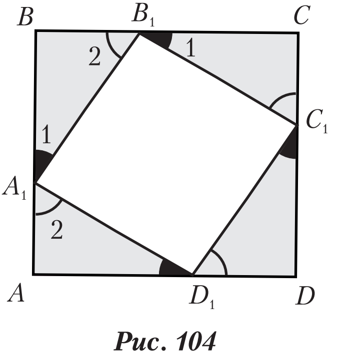


Рис. 104

Доказательство.

1) Имеем: $\Delta A_1BB_1 = \Delta B_1CC_1 = \Delta C_1DD_1 = \Delta D_1AA_1$ (по двум катетам);

2) из этих равенств следует, что $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$;

3) так как сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\angle 1 + \angle 2 = 90°$;

4) тогда $\angle BA_1B_1 + \angle AA_1D_1 = \angle 1 + \angle 2 = 90°$;

5) поэтому $\angle B_1A_1D_1 = 180° - (\angle BA_1B_1 + \angle AA_1D_1) = 180° - 90° = 90°$;

6) аналогично доказывается, что остальные углы четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ — прямые;

7) отсюда следует, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

8.2. Доказательство теорем

Теоремы 8

Теорема Пифагора

1. **Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.**

Обратная теорема

2. **Если в треугольнике квадрат некоторой стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник — прямоугольный.**

Доказательства.

1. Обратимся к рисунку 105. Пусть в прямоугольном треугольнике AA_1D_1 $AD_1 = a$, $AA_1 = b$ и $A_1D_1 = c$. Докажем, что $a^2 + b^2 = c^2$.

I. *Применим метод площадей.*

Как было установлено в предыдущем параграфе, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является квадратом. Тогда его площадь равна c^2. Площадь квадрата $ABCD$ равна $(a+b)^2$, а площадь каждого из прямоугольных треугольников AA_1D_1, A_1BB_1, B_1CC_1, C_1DD_1 равна $\frac{1}{2}ab$. Выразим площадь большего квадрата через площади составляющих его фигур: $(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$.

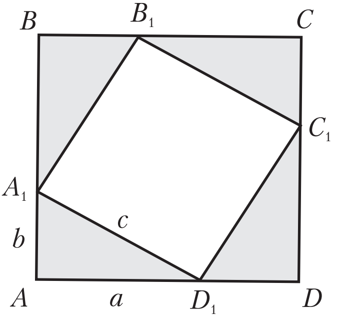


Рис. 105

II. *Вывод.*

Отсюда $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

2. Пусть в треугольнике ABC (рис. 106) стороны таковы, что $AB^2 = CA^2 + CB^2$. Докажем, что $\angle C = 90°$.

I. *Воспользуемся теоремой Пифагора.*

Для этого построим прямой угол C_1 и на его сторонах отложим $C_1A_1 = CA$ и $C_1B_1 = CB$. На основании теоремы Пифагора $(A_1B_1)^2 = (C_1A_1)^2 + (C_1B_1)^2 = CA^2 + CB^2 = AB^2$. Поэтому $AB = A_1B_1$.

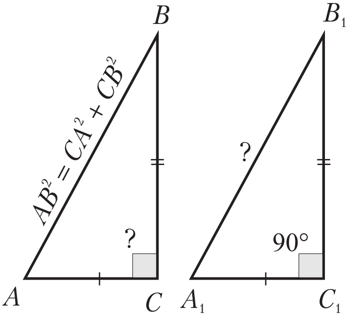


Рис. 106

II. *Применим метод равных треугольников.*

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle C = \angle C_1 = 90°$.

III. *Вывод.*

Таким образом, треугольник ABC — прямоугольный.

Следствия. 1. *Зная гипотенузу и катет, можно найти другой катет*: $a^2 = c^2 - b^2$, $b^2 = c^2 - a^2$.

2. *Гипотенуза больше катета.*

Задача. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найдите гипотенузу. Свой ответ сравните с табличным.

a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
3	4	5	16	63	65
5	12	13	33	56	65
8	15	17	48	55	73
7	24	25	36	77	85
20	21	29	13	84	85
12	35	37	39	80	89
9	40	41	65	72	97
28	45	53	20	99	101
11	60	61	60	91	109

8.3. О понятии квадратного корня

В рассмотренной выше задаче по известному квадрату положительного числа находили само это число. А именно, зная, что $x^2 = a$ и $x \geq 0$, находили x. Нахождение числа x по известному его квадрату a называется *извлечением квадратного корня из числа a. Записывают*: $\sqrt{a} = x$. Эта запись читается так: «корень квадратный из a равен x».

Итак, приходим к следующему определению.

Квадратный корень из числа a — это такое число x, квадрат которого равен a.

Для рассмотренной выше задачи квадрат гипотенузы был равен 289. С помощью квадратного корня можно записать: $AB = \sqrt{289} = 17$, так как $17^2 = 289$.

Не всегда можно найти точное значение квадратного корня в виде натурального или дробного числа. В этом случае выражение оставляют в виде корня или его находят приближенно по таблицам, а также с помощью микрокалькулятора.

Если в уравнении $x^2 = a$, $a \geq 0$, число x может быть не только положительным, но и отрицательным, то это уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$. (Более детально квадратные корни изучаются в курсе алгебры.)

При помощи квадратного корня теорему Пифагора и следствие 1 из нее можно записать следующим образом: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Примеры:

$\sqrt{400} = 20$, так как $20^2 = 400$;

$\sqrt{529} = 23$, так как $23^2 = 529$;

$\sqrt{625} = 25$, так как $25^2 = 625$;

$\sqrt{10} \approx 3{,}162$, так как $(3{,}162)^2 \approx 10$;

$\sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$, так как $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4 \cdot 5$;

$\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, так как $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2} = \dfrac{3}{4}$.

При $a > 0$ $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$,
так как $\left(a\sqrt{2}\right)^2 = a^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = a^2 \cdot 2 = 2a^2$.

§ 9. Решение задач с помощью теоремы Пифагора

До сих пор задачи на вычисление решались путем составления уравнения на основе тех соотношений, которые давались в условии задачи, т. е. алгебраическим методом. Геометрического же метода вычислений не было. Метод площадей и теорема Пифагора являются первыми из таких методов. Как вы уже знаете, понятие расстояния вводилось уже на первых страницах этой книги.

Теорема Пифагора, по существу, дает формулу вычисления расстояния между двумя точками. Эта формула определяет метрику геометрии. В неевклидовой геометрии есть свои формулы, по-своему вводится метрика, и от того, какие это формулы, какой вид они имеют, определяется сам характер геометрии, ее «неевклидовость». Все это указывает на центральное место теоремы Пифагора в элементарной геометрии. Наряду с этим не будет преувеличением, если скажем, что самые интересные вычислительные задачи в геометрии начинаются только сейчас!

9.1. Задачи на прямоугольный треугольник

Задача 1. (*Решите без выполнения чертежа!*) Стороны треугольника равны 60 см, 91 см и 109 см. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

Идея решения. Нельзя ли вначале установить вид данного треугольника?

Решение.

1) Применим теорему, обратную теореме Пифагора: так как $60^2 + 91^2 = 109^2$ (проверьте это!), то треугольник является прямоугольным и требуется найти медиану, проведенную к его гипотенузе;

2) медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. Поэтому искомая медиана равна 109 : 2 = 54,5 см.

Ответ: 54,5 см.

Задача 2. Высота h_c, проведенная к гипотенузе AB треугольника ABC, разбивает ее на части a' и b'. Докажите, что $h_c^2 = a' \cdot b'$, или $h_c = \sqrt{a' \cdot b'}$.

Доказательство.

1) Пусть $CD = h_c$ (рис. 107) — высота, проведенная к гипотенузе; $AC = b$, $BC = a$, $AD = b'$, $BD = a'$. Трижды применим теорему Пифагора (к треугольникам ACD, BCD и ACB):

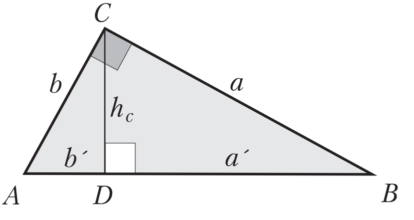


Рис. 107

$$AC^2 = (b')^2 + h_c^2,$$
$$BC^2 = (a')^2 + h_c^2.$$
$$AC^2 + BC^2 = (b')^2 + (a')^2 + 2h_c^2 = AB^2 = (a' + b')^2;$$

2) получили равенство $(b')^2 + (a')^2 + 2h_c^2 = (a' + b')^2$;

3) из него находим, что

$$2h_c^2 = 2a' \cdot b' \Rightarrow h_c^2 = a' \cdot b' \Rightarrow h_c = \sqrt{a' \cdot b'}.$$

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC катет $AC = 2$, $\angle A = 30°$ (рис. 108, *а*). Найдите: 1) неизвестные стороны; 2) высоту, медиану и биссектрису, проведенные из вершины B.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AC = 2$.

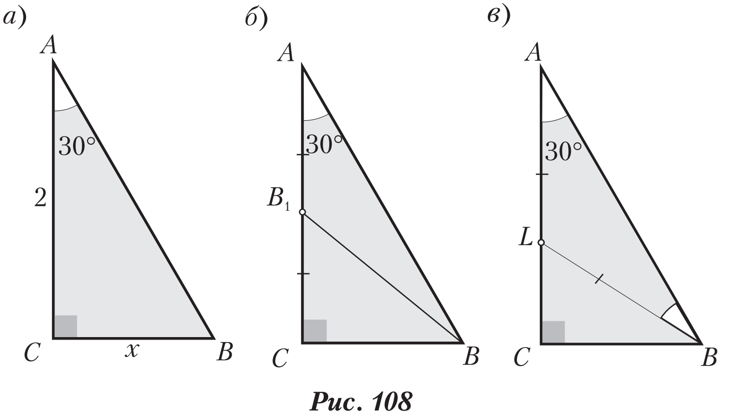


Рис. 108

Найти: BC, AB, h_b, m_b, l_b.

Решение.

1) Введем обозначение: $BC = x$. Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен x, то гипотенуза в два раза больше: $AB = 2x$;

2) по теореме Пифагора $4x^2 = x^2 + 4$. Отсюда $x^2 = \frac{4}{3}$, $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$;

3) тогда $BC = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $AB = 2\sqrt{\frac{4}{3}}$;

4) так как $h_b = BC$, то $h_b = \sqrt{\frac{4}{3}}$;

5) пусть BB_1 — медиана треугольника ABC (рис. 108, *б*). Тогда из треугольника BCB_1 по теореме Пифагора имеем:

$$m_b = BB_1 = \sqrt{BC^2 + CB_1^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 1} = \sqrt{\frac{7}{3}};$$

6) для нахождения биссектрисы BL (рис. 108, *в*) воспользуемся тем, что она делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Имеем:

$$\frac{CL}{AL} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{2 - AL}{AL} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2 - AL}{AL} = \frac{1}{2}, \quad 4 - 2AL = AL, \quad AL = \frac{4}{3};$$

7) так как $\angle ABL = 30°$, то $\angle ABL = \angle CAB$. Поэтому треугольник ABL — равнобедренный и $l_b = BL = AL = \frac{4}{3}$;

Ответ: $BC = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $AB = 2\sqrt{\frac{4}{3}}$, $h_b = \sqrt{\frac{4}{3}}$, $m_b = \sqrt{\frac{7}{3}}$, $l_b = \frac{4}{3}$.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза и катет: $c = 5$, $a = 4$. Найдите неизвестный катет, а также высоту, медиану и биссектрису, проведенные из вершины прямого угла (рис. 109, *а*).

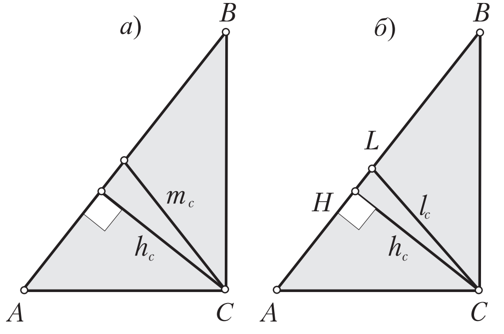


Рис. 109

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $c = 5$, $a = 4$.

Найти: 1) AC; 2) h_c, m_c, l_c.

Решение.

1) По теореме Пифагора
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3;$

2) $h_c = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5};$

3) $m_c = \dfrac{1}{2}c = \dfrac{5}{2};$

4) пусть CL — искомая биссектриса (рис. 109, *б*), CH — высота. Биссектрису CL будем находить из треугольника CHL. В этом треугольнике высота CH была найдена ранее. Остается найти HL. Для этого достаточно найти AL и AH. Для нахождения AL воспользуемся тем, что биссектриса делит противоположную сторону тре-

угольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам (см. задачу 2 на с. 108):

$$\frac{AL}{5-AL}=\frac{3}{4}\Rightarrow AL=\frac{15}{8};$$

5) находим AH:

$$AH=\sqrt{AC^2-HC^2}=\sqrt{9-\frac{144}{25}}=\sqrt{\frac{81}{25}}=1,8;$$

6) тогда $HL=AL-AH=\frac{15}{8}-\frac{9}{5}=\frac{3}{40}$;

7) находим CL:

$$CL=\sqrt{CH^2+HL^2}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{9}{1600}}=\sqrt{\frac{9225}{1600}}=\sqrt{\frac{369}{64}}\approx 2,4.$$

Ответ: 1) $AC=3$; 2) $h_c=\frac{12}{5}$, $m_c=\frac{5}{2}$, $l_c=\sqrt{\frac{369}{64}}\approx 2,4$.

9.2. Задачи на равнобедренный и произвольный треугольники

Задача 5. В равнобедренном треугольнике известно основание b и высота, проведенная к основанию h_b. Найдите медиану m_a, проведенную из вершины A.

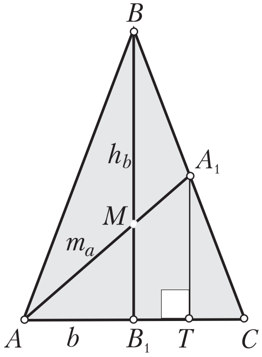


Рис. 110, а

Дано: $\Delta ABC, AB=BC, AC=b, BB_1=h_b$.

Найти: m_a.

Решение.

1-й способ (рис. 110, *а*). 1) Пусть AA_1 — искомая медиана. Из точки A_1 проведем перпендикуляр A_1T к основанию AC. Медиану AA_1 будем находить из прямоугольного треугольника AA_1T;

2) так как A_1T является средней линией треугольника BB_1C, то

$$A_1T = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}h_b \quad \text{и} \quad AT = AB_1 + B_1T = \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}b;$$

3) тогда по теореме Пифагора

$$m_a = AA_1 = \sqrt{A_1T^2 + AT^2} = \sqrt{\frac{1}{4}h_b^2 + \frac{9}{16}b^2} = \sqrt{\frac{4h_b^2 + 9b^2}{16}}.$$

2-й способ (рис. 110, *б*). 1) Воспользуемся тем, что медианы в равнобедренном треугольнике точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1 считая от вершины треугольника. Пусть M — точка пересечения медиан. Тогда $MB_1 = \frac{1}{3}h_b$;

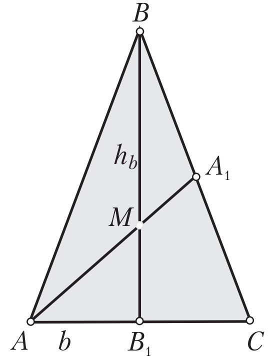


Рис. 110, б

2) из треугольника AMB_1 по теореме Пифагора

$$AM = \sqrt{MB_1^2 + AB_1^2} = \sqrt{\frac{1}{9}h_b^2 + \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{\frac{4h_b^2 + 9b^2}{36}};$$

3) тогда $AA_1 = \frac{3}{2}AM = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4h_b^2 + 9b^2}{36}}$ (при более детальном ознакомлении с квадратными корнями можно убедиться в том, что полученное выражение для AA_1 сводится к ранее найденному).

Ответ: $m_a = AA_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4h_b^2 + 9b^2}{36}} = \sqrt{\frac{4h_b^2 + 9b^2}{16}}.$

Задача 6. В условиях предыдущей задачи найдите высоту, проведенную к боковой стороне (рис. 111).

Дано: ΔABC, $AB = BC$, $AC = b$, $BB_1 = h_b$.

Найти: h_a.

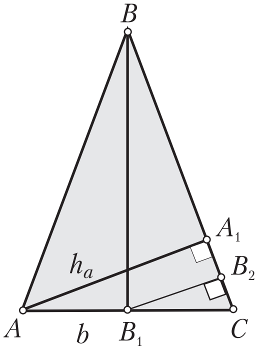


Рис. 111

Решение.

1-й способ. 1) Воспользуемся методом площадей. Для этого дважды выразим площадь треугольника ABC и приравняем полученные выражения. Предварительно найдем, что $BC = \sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}}$;

2) тогда

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bh_b \\ S &= \frac{1}{2}\sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}} \cdot h_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2}\sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}} \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{bh_b}{\sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}}}.$$

2-й способ. 1) Проведем высоту B_1B_2 прямоугольного треугольника BCB_1. Так как B_1B_2 является средней линией треугольника ACA_1, то $AA_1 = 2B_1B_2$;

2) по формуле высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, имеем:

$$B_1B_2 = \frac{h_b \cdot \frac{1}{2} b}{\sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}}};$$

3) тогда $AA_1 = 2B_1B_2 = \dfrac{h_b \cdot b}{\sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}}}$. Пришли к тому же самому ответу.

Ответ: $h_a = AA_1 = \dfrac{h_b \cdot b}{\sqrt{h_b^2 + \frac{b^2}{4}}}$.

Задача 7. Пусть a, b и c — стороны произвольного треугольника, h_c — высота, проведенная к стороне c. Докажите, что

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2. \qquad (1)$$

В частности, если треугольник — прямоугольный и c — его гипотенуза, то высота h_c, проведенная к ней, находится по более простой формуле:

$$h_c = \frac{ab}{c}. \qquad (2)$$

Доказательство.

1) Пусть CD — высота, проведенная к стороне AB (рис. 112, *а*). Положим, что $AD = x$. Применив теорему Пифагора к треугольникам BCD и ACD, запишем:

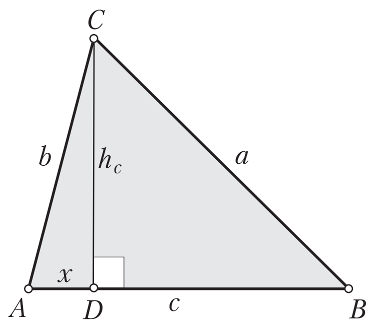


Рис. 112, а

$$\left.\begin{aligned} CD^2 &= a^2 - (c-x)^2, \\ CD^2 &= b^2 - x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 - (c-x)^2 = b^2 - x^2;$$

2) выполним преобразования:

$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 = b^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c};$$

3) тогда, применив теорему Пифагора к треугольнику ACD, получим:

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2;$$

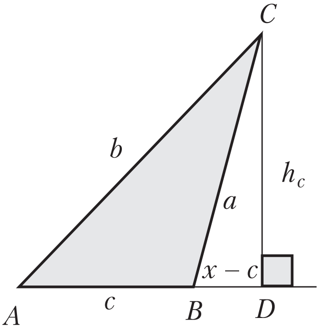


Рис. 112, б

4) если высота h_c располагается так, как показано на рисунке 112, *б*, то рассуждения проводятся аналогично и приводят к формуле

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2,$$

сводимой к первой, так как

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2 =$$

$$= b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2;$$

5) из формулы (1), учитывая, что для прямоугольного треугольника $c^2 = a^2 + b^2$, получаем формулу (2). Проверьте это!

9.3. Некоторые задачи, связанные с пифагоровыми тройками чисел

Пифагоровы тройки чисел можно разбивать на некоторые группы и изучать свойства троек, присущие этим группам. Если оттолкнуться от пифагорой тройки чисел 3, 4 и 5, то к какой такой группе можно прийти? В этом случае объединяющим признаком может служить такой признак: гипотенуза на единицу больше большего катета. Каков общий вид таких троек? Для ответа на этот вопрос рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. (*Историческая задача.*) Как построить на местности прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5?

Задача нахождения целых решений уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ служит примером ранней теории чисел. Простейший случай $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ был найден на вавилонских глиняных табличках. Ему можно дать следующее истолкование. Предположим, что у нас есть веревочное кольцо с узелками или метками, расположенными на равных расстояниях и делящими кольцо на 12 частей. Тогда, если мы растянем кольцо на трех колышках, вбитых в поле, так, чтобы получился треугольник со сторонами 3 и 4, то третья сторона будет иметь длину 5, а противоположный ей угол будет прямым. Существует миф, что этот метод построения прямого угла использовался египетскими землемерами при размежевании полей по окончании разлива Нила, поэтому прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 часто называют *египетским*.

Задача 2. Если какая-либо тройка чисел (a, b, c) является пифагоровой, то тройка чисел (ka, kb, kc) также будет пифагоровой, и наоборот.

Докажите самостоятельно.

Пример. Тройки (6, 8, 10), (15, 20, 25) являются пифагоровыми тройками, получающимися из пифагоровой тройки (3, 4, 5).

Задача 3. Если не существует общего множителя для всех трех чисел пифагоровой тройки (a, b, c), то эту тройку будем называть *простейшей*. Докажите, что никакие два числа из простейшей тройки не имеют общего множителя: НОД$(a, b) = 1$, НОД$(a, c) = 1$, НОД$(b, c) = 1$.

Доказательство.

Предположим, что, например, a и b имеют общий простой делитель p, тогда число p должно также делить и c (учтите, что $a^2 + b^2 = c^2$), следовательно, (a, b, c) не может быть простейшей тройкой. Аналогично можно доказать и два других утверждения.

Задача 4. Числа a и b в простейшей пифагоровой тройке не могут быть оба четными и не могут быть оба нечетными.

Доказательство.

Если допустить, что a и b — четные, то нетрудно установить, что 2 является делителем c. Тогда тройка не будет простейшей, что противоречит условию. Значит, a и b не могут быть четными.

Допустим, что a и b — нечетные: $a = 2x + 1$, $b = 2y + 1$. После возведения в квадрат этих чисел и сложения их получим число

$$c^2 = a^2 + b^2 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 =$$
$$= 2 + 4x + 4x^2 + 4y + 4y^2 = 2 + 4(x + x^2 + y + y^2),$$

делящееся на 2, но не делящееся на 4. Это означает, что c^2 делится на 2, но не делится на 4, но это невозможно, так как если c^2 делится на 2, то и c делится на 2, но тогда c^2 делится на 4.

Следствие. *В простейшей пифагоровой тройке c — нечетное.*

Задача 5. Найдите пифагоровы тройки, у которых гипотенуза на 1 больше большего катета.

Решение.

Путем перебора целочисленных значений двух сторон прямоугольного треугольника можно найти целые значения третьей стороны, такие, как (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41) и т. д. Индуктивным путем находим закономерности в общем случае для a_n, b_n, c_n (см. таблицу):

$c_1 = 5,$	$b_1 = 4,$	$a_1 = 3,$
$c_2 = c_1 + 8 = 13,$	$b_2 = b_1 + 8 = 12,$	$a_2 = a_1 + 2 = 5,$
$c_3 = c_1 + 20 = 25,$	$b_3 = b_1 + 20 = 24,$	$a_3 = a_1 + 4 = 7,$
$c_4 = c_1 + 36 = 41,$	$b_4 = b_1 + 36 = 40,$	$a_4 = a_1 + 6 = 9,$
....	....	....
$c_n = c_1 + 2(n+2)\,(n-1)$	$b_n = b_1 + 2(n+2)\,(n-1)$	$a_n = a_1 + 2(n-1)$

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнимиости равенства $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$.

С помощью полученных формул для a_n, b_n и c_n можно из простейшей тройки (3, 4, 5) получить прямоугольные треугольники с целочисленными значениями сторон, у которых гипотенуза отличается от большего катета на 1.

Например, найдем стороны у треугольника, который будет на 10-м месте:

$c_{10} = 5 + 2 \cdot 12 \cdot 9 = 221$, $b_{10} = 4 + 2 \cdot 12 \cdot 9 = 220$, $a_{10} = 3 + 2 \cdot 9 = 21$.

Итак, получим тройку (21, 220, 221).

Проверка: эта тройка в самом деле является пифагоровой, так как $220^2 + 21^2 = 48\ 400 + 441 = 48\ 841 = 221^2$. Кроме того, гипотенуза на 1 больше большего катета.

Тема 4 КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ: ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

§ 1. Основные задачи на построение

1.1. Схема решения задач на построение

Задачи на построение, или, как их называют в геометрии, *конструктивные задачи*, развивают новый тип мышления, который так и называется — конструктивное мышление. Это мышление ориентировано прежде всего на то, как можно построить тот или иной математический объект, какие свойства его можно обнаружить исходя из этого построения.

До сих пор при решении задач на построение мы пользовались достаточно широким набором чертежных инструментов: циркулем, линейкой, чертежным треугольником и транспортиром. Изученный теоретический материал позволяет выполнить многие построения с помощью только двух инструментов: **циркуля и линейки**. Построение с помощью чертежного треугольника и транспортира обычно считается приближенным, а с помощью линейки и циркуля — точным. Точные построения являются одним из красивейших разделов элементарной геометрии, который привлекал к себе внимание с древнейших времен. Приступим к изучению этого раздела. Несколько слов о том, как решаются задачи на построение.

Решение задач на построение предполагает следующие этапы:

1) *поиск решения задачи* (*анализ*), в ходе которого допускают, что искомая фигура существует, и исходя

из этого устанавливают ряд свойств этой фигуры, которыми можно было бы воспользоваться для ее построения;

2) *построение* искомой фигуры циркулем и линейкой;

3) *доказательство* правильности построений;

4) *исследование* — нахождение условий, при которых задача имеет (или не имеет) решения, и определение числа решений.

1.2. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя параллельными прямыми

При решении задач на построение часто строятся точки пересечения прямой и окружности, поэтому необходимо знать условия существования этих точек.

Вначале обратимся к понятию расстояния от точки до прямой и понятию расстояния между двумя параллельными прямыми.

Расстоянием от точки A ***до прямой*** a называется наименьшее из расстояний между точкой A и точками прямой a.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется наименьшее из расстояний между точками этих прямых.

Следствия. 1. *Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной прямой.*

2. *Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине общего перпендикуляра к этим прямым, концы которого лежат на данных прямых.*

1.3. Общие точки окружности и прямой

Следствие. *Прямая и окружность могут не иметь общих точек, иметь одну общую точку, иметь две общие точки. Других случаев нет.*

Касательной к окружности называется прямая, которая с окружностью лежит в одной плоскости и имеет единственную общую точку. В этом случае говорят также, что *окружность касается прямой*.

1.4. Основные задачи

В основном курсе вами были рассмотрены следующие задачи.

- **Задача 1.** Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC.
- **Задача 2.** Постройте угол, равный данному углу.
- **Задача 3.** Постройте треугольник, зная: а) две стороны треугольника и угол между ними; б) сторону треугольника и два прилежащих к ней угла; в) три стороны треугольника.
- **Задача 4.** Разделите данный отрезок пополам.
- **Задача 5.** Постройте биссектрису данного угла.

§ 2. Примеры более сложных задач на построение. Задача, не разрешимая с помощью циркуля и линейки

2.1. Построение перпендикулярных и параллельных прямых

Запись построений можно сделать более краткой, если не описывать заново те построения, которые ранее выполнялись. Достаточно сделать ссылку на них. Этот прием помогает также четче представить замысел решения задачи, показать, к каким ранее решенным задачам сводится данная.

Задача 1. Дана точка A и прямая a. Требуется построить прямую b, проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a.

Решение.

1. *Поиск решения.* Необходимо рассмотреть два случая: $A \notin a$ и $A \in a$. Нельзя ли указать один (общий) способ решения задачи для этих случаев? Можно ли воспользоваться серединным перпендикуляром к некоторому отрезку XY? Оказывается, можно.

Проведем окружность с центром A, пересекающую прямую a в некоторых двух точках. Обозначим их через X и Y (рис. 113).

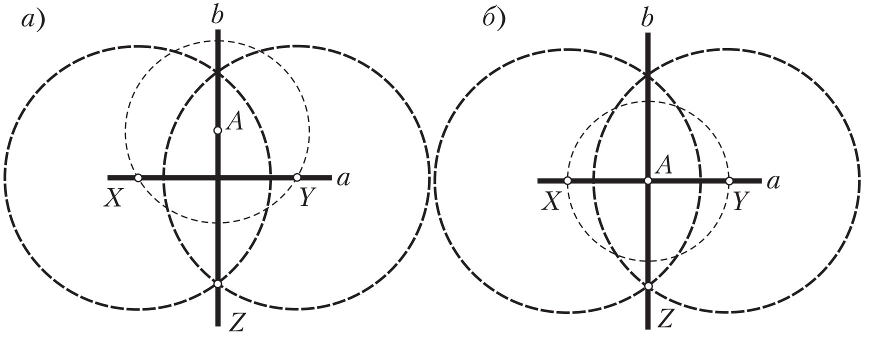


Рис. 113

Так как точка A равноудалена от точек X и Y, то серединный перпендикуляр к отрезку XY пройдет через точку A. Значит, этот серединный перпендикуляр будет искомой прямой b.

2. *Построение*. Строим:

1) (A, R) — окружность, пересекающую прямую a в двух точках X и Y;

2) b — серединный перпендикуляр к отрезку XY. Прямая b — искомая прямая.

3. *Доказательство*. Так как $b \perp XY$, то $b \perp a$. Кроме того, так как $XA = AY$ (т. е. точка A равноудалена от концов отрезка XY), то серединный перпендикуляр к отрезку XY пройдет через точку A. Таким образом, построенная прямая b проходит через точку A и перпендикулярна к прямой a.

4. *Исследование*. Задача всегда имеет решение, причем единственное.

Задача 2. Даны точка A и прямая a. Требуется построить прямую b, проходящую через точку A и параллельную прямой a.

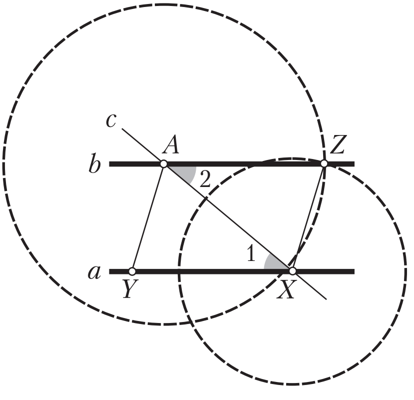


Рис. 114

Решение.

1. *Поиск решения*. Естественно решение задачи связать с построением равных накрест лежащих углов. Через точку A проведем произвольную прямую c, пересекающую прямую a (рис. 114).

Если теперь построить для угла 1 угол 2 так, чтобы эти углы были равными и накрест лежащими, то получим искомую прямую b.

2. *Построение*. Строим:

1) c — прямую, пересекающую прямую a в некоторой точке X;

2) $\angle 1$;

3) $\angle 2 = \angle 1$ так, чтобы эти углы были накрест лежащими;

4) b — прямую, содержащую вторую сторону угла 2.

Прямая b — искомая.

3. *Доказательство*. Прямые a и b параллельны в силу признака параллельности. Кроме того, прямая b по построению проходит через точку A. Значит, прямая b — искомая.

4. *Исследование*. Задача всегда имеет решение, причем единственное (в силу аксиомы параллельных прямых).

2.2. Метод геометрических мест точек

Если фигура задана указанием свойства, которым обладают все точки этой фигуры и только они, то такую фигуру называют ***геометрическим местом точек*** **(ГМТ)**, обладающих указанным свойством.

При записи геометрического места точек часто пользуются сокращением — ГМТ. Свойство, при помощи которого задается геометрическое место точек (фигура), называется *характеристическим свойством* этого ГМТ.

В геометрии новые фигуры иногда вводятся как ГМТ. Именно таким образом было введено понятие окружности. ГМТ при решении задач на построение уже неоднократно использовалось.

Поясним суть метода ГМТ на примере следующей задачи.

Задача 1. Постройте треугольник ABC по трем данным сторонам a, b и c.

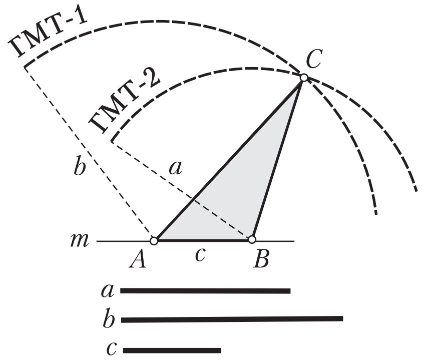


Рис. 115

Решение.

1. *Поиск решения.* На произвольной прямой m (рис. 115) возьмем некоторую точку A и отложим отрезок $AB = c$. В результате будут построены две вершины искомого треугольника ABC и остается построить третью вершину — вершину C.

При ее построении воспользуемся методом ГМТ. Для этого учтем вначале, что точка C удалена от точки A на известное расстояние, равное b (опускаем пока условие, что точка C удалена от точки A на расстояние a).

Если точка C удалена от точки A на расстояние b, то это означает, что точка C лежит на окружности (A, b). Эта окружность является первым ГМТ, используемым при решении данной задачи (ГМТ-1).

Аналогично, принимая во внимание только второе условие, приходим к выводу о том, что точка C лежит на окружности (B, a). Эта окружность является вторым ГМТ (ГМТ-2).

Итак, точка C, принадлежащая обоим ГМТ, является точкой пересечения указанных окружностей (точкой пересечения ГМТ-1 и ГМТ-2). Отсюда ясно, как построить вершину C. В итоге строится треугольник ABC.

2—3. *Построение* и *доказательство* проведите самостоятельно.

4. Для выбранных на рисунке сторон задача имеет решение. Так как задача более одного решения иметь не может (в силу 3-го признака равенства треугольников), то она имеет единственное решение.

Задача 2. Постройте треугольник ABC, зная углы A и B и среднюю линию, параллельную стороне AB.

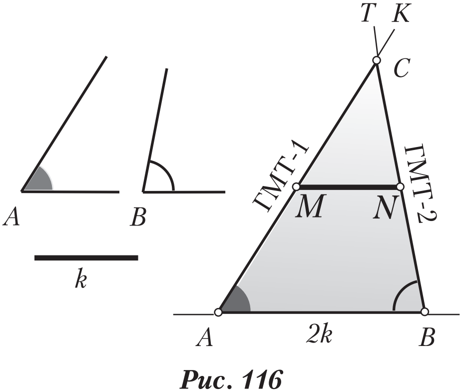


Рис. 116

Решение.

1. *Поиск решения.* Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 116). В нем углы A и B равны данным, $MN = k$ — данная средняя линия.

По свойству средней линии треугольника $AB = 2k$. Тогда треугольник ABC строится по стороне $AB = 2k$ и двум прилежащим к ней углам A и B. Итак, вначале строим сторону $AB = 2k$, затем $\angle BAK = \angle A$ и $\angle ABT = \angle B$.

Луч AK — это ГМТ-1, а луч BT — ГМТ-2. Точка C является пересечением этих ГМТ.

2. *Построение*. Строим:

1) $AB = 2k$;

2) треугольник ABC по стороне AB и двум углам A и B (ранее решенная задача). Треугольник ABC — искомый.

3. *Доказательство*. Построенный треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи. В нем средняя линия, параллельная стороне AB, равна k, углы A и B равны данным углам.

4. *Исследование*. Если $\angle A + \angle B < 180°$, то задача имеет единственное решение. В противном случае задача решения не имеет.

Задача 3. Постройте прямоугольный треугольник ABC по катету b и гипотенузе c.

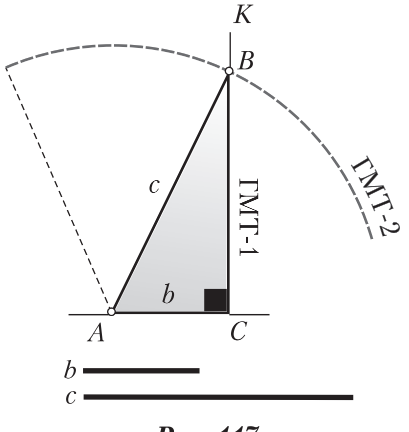


Рис. 117

Решение.

1. *Поиск решения*. Допустим, что искомый прямоугольный треугольник ABC построен (рис. 117). В нем угол C — прямой, $AC = b$ и $AB = c$. Сразу можно построить прямой угол C и на его стороне отложить отрезок $CA = b$. Тем самым будут построены вершины A и C и останется построить вершину B. Вершина B должна лежать на второй стороне прямого угла C (этот луч есть ГМТ-1).

Кроме того, так как вершина B удалена от вершины A на заданное расстояние c, то она лежит на окружности (A, c). Эта окружность есть ГМТ-2.

Точка B определяется как точка пересечения ГМТ-1 и ГМТ-2.

В итоге построение треугольника ABC найдено.

2. *Построение*. Строим:

1) $\angle C = 90°$;

2) $CA = b$;

3) (A, c);

4) B — точку пересечения окружности (A, c) и прямой CK; треугольник ABC — искомый.

3. *Доказательство*. Построенный треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи. Он прямоугольный, в нем катет $AC = b$, гипотенуза $AB = c$.

4. *Исследование*. Задача имеет единственное решение, если $c > b$. В противном случае задача решения не имеет.

Задача 4. Постройте прямоугольный треугольник ABC по катету b и медиане m_a.

Решение.

1. *Поиск решения*. Допустим, что прямоугольный треугольник ABC построен (рис. 118) и удовлетворяет условиям задачи. В нем $\angle C = 90°$, $AC = b$ и медиана $AA_1 = m_a$. Как и в предыдущей задаче, начнем с построения прямого угла C.

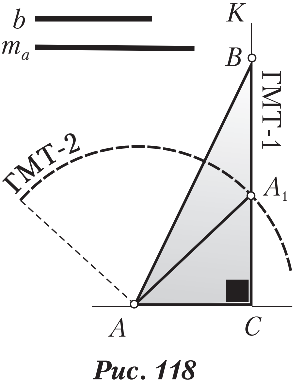


Рис. 118

На его стороне отложим катет $CA = b$. Осталось построить вершину C. Необходимо воспользоваться данной медианой AA_1. Замечаем, что легко может быть построена точка A_1. Эта точка лежит на стороне CK прямого угла (ГМТ-1), и так как она удалена от точки A на известное расстояние m_a, то точка A_1 лежит на окружности (A, m_a). Эта окружность есть ГМТ-2.

Точка A_1 строится как пересечение указанных ГМТ-1 и ГМТ-2.

Так как AA_1 — медиана, то $BA_1 = A_1C$.

Пользуясь этим, нетрудно построить точку B и, значит, треугольник ABC.

2. *Построение*. Строим:

1) $\angle C = 90°$;

2) треугольник ACA_1;

3) B, такую, что $A_1B = A_1C$; треугольник ABC — искомый.

3. *Доказательство*. Треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи. В нем $\angle C = 90°$, катет $AC = b$, по построению AA_1 является медианой и $AA_1 = m_a$.

4. *Исследование*. Задача имеет решение, причем единственное, если $m_a > b$. В противном случае задача решения не имеет.

Задача 5. Постройте треугольник ABC по сторонам b и c и острому углу B.

Решение.

1. *Поиск решения*. Допустим, что треугольник ABC построен (рис. 119). В нем угол B равен данному, $AB = c$ и $AC = b$. Построение начнем с угла B. На его стороне отложим отрезок $BA = c$. В результате имеем две вершины искомого треугольника — вершины A и B. Остается по-

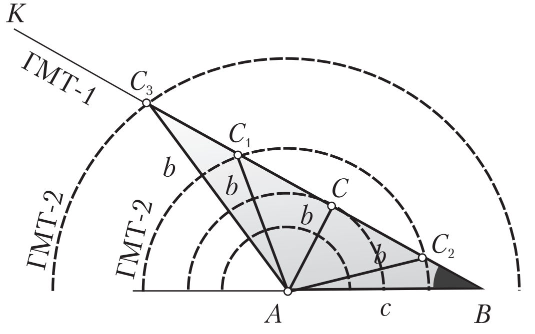


Рис. 119

строить вершину C. Для этого замечаем, что вершина C должна лежать на второй стороне угла B (ГМТ-1), и так как она удалена от вершины A на известное расстояние b, то точка C принадлежит также окружности (A, b) — ГМТ-2.

В итоге вершина C находится как точка пересечения указанных двух ГМТ. Построение треугольника ABC найдено.

2. *Построение*. Строим:

1) угол B;

2) $BA = c$ (на стороне угла B);

3) (A, b);

4) C — точку пересечения окружности (A, b) и прямой BK;

5) треугольник ABC — искомый.

3. *Доказательство*. По построению в треугольнике ABC угол B равен данному, $BA = c$. Кроме того, $AC = b$. Это следует из того, что AC является радиусом окружности (A, b).

4. *Исследование*. Пусть h_a — перпендикуляр, проведенный из точки A на сторону BC (высота треугольника ABC). Если $b < h_a$, то окружность (A, b) не будет пересекать вторую сторону угла B. В этом случае точка C не существует, и значит, задача решения не имеет. Если $b = h_a$, то окружность $(A,\ b)$ будет иметь только одну общую точку со второй стороной угла B. В этом случае точка C строится единственным образом, и задача имеет единственное решение. Если $h_a < b < c$, то окружность $(A,\ b)$ пересекает вторую сторону угла B в двух точках C_1 и C_2. В этом случае задача имеет два решения. Оба треугольника ABC_1 и ABC_2 удовлетворяют условиям задачи. Если $b > c$, то окружность $(A,\ b)$ пересечет вторую сторону угла B (луч!) только в одной точке C. В этом случае задача имеет единственное решение.

Задача 6. Постройте треугольник по его высотам h_a, h_b и медиане m_c.

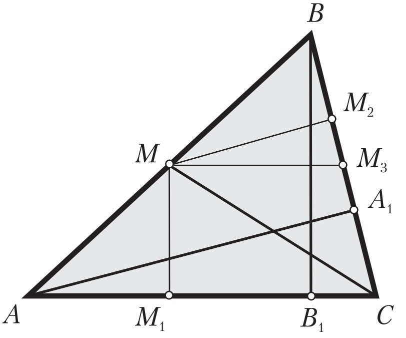


Рис. 120, а

Решение.

1. *Поиск решения.* Допустим, что задача решена: треугольник ABC (рис. 120, *а*) — искомый, в нем $AA_1 = h_a$, $BB_1 = h_b$, $CM = m_c$. Нельзя ли вначале построить некоторый (быть может, и не один!) вспомогательный треугольник? Вспомогательный треугольник должен быть связан с данными задачи.

При первом рассмотрении треугольника ABC (с его данными элементами) никакого такого треугольника не обнаруживается. Возможно, это затруднение можно преодолеть с помощью некоторых дополнительных построений на треугольнике ABC. Эта мысль оказывается весьма полезной!

Попробуем провести из точки M перпендикуляры MM_1 и MM_2 соответственно к сторонам AC и BC. Теперь можно заметить ряд свойств треугольников, полученных на рисунке. Например: MM_1 — средняя линия треугольника ABB_1 (значит, $MM_1 = \frac{1}{2}h_b$), MM_2 — средняя линия треугольника ABA_1 (значит, $MM_2 = \frac{1}{2}h_a$). Тогда в треугольнике MM_1C оказываются известными гипотенуза $CM = m_c$ и катет $MM_1 = \frac{1}{2}h_b$, а в треугольнике MM_2C — гипотенуза $CM = m_c$ и катет $MM_2 = \frac{1}{2}h_a$.

По полученным данным можно построить два прямоугольных треугольника MM_1C и MM_2C с общей гипотенузой MC.

В искомом треугольнике ABC определился угол C и (что интересно) одна точка — точка M — конец медианы CM. Обнаруженные выше свойства позволяют построить «часть» треугольника ABC: его угол C и точку M. Для завершения построения треугольника ABC необходимо заметить новые свойства. Попытаемся еще раз с точкой M связать среднюю линию треугольника ABC — MM_3. Имея точку M, точку M_3 можно построить. Для этого достаточно через точку M провести прямую, параллельную стороне угла C. После этого ситуация моментально упрощается. Зная конец C стороны BC и середину M_3 этой стороны, сразу можно построить точку B (отложив $M_3B = M_3C$). Наконец, можно построить третью вершину треугольника ABC — вершину A (она находится как точка пересечения прямой BM со стороной угла C).

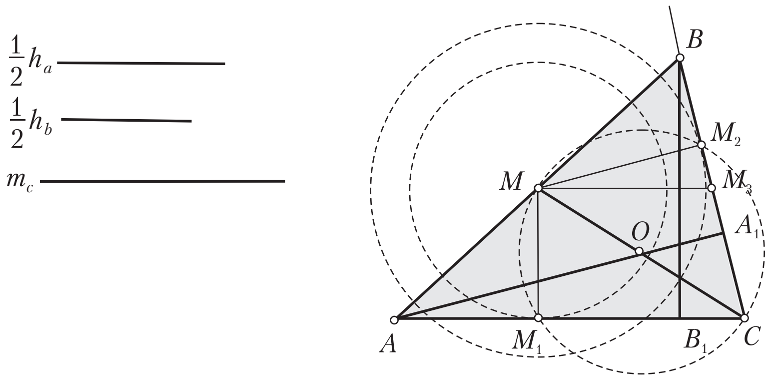


Рис. 120, б

2. *Построение* (рис. 120, *б*). Строим:

1) отрезки $\frac{1}{2}h_a$ и $\frac{1}{2}h_b$, равные половинам данных высот;

2) прямоугольный треугольник MM_1C — по катету $MM_1 = \frac{1}{2}h_b$ и гипотенузе $CM = m_c$;

3) прямоугольный треугольник MM_2C — по катету $MM_2 = \frac{1}{2}h_a$ и гипотенузе $CM = m_c$;

4) $MM_2 \parallel CM_1$;

5) вершину B так, что $M_3B = M_3C$;

6) вершину A как точку пересечения прямой BM и прямой CM_1; треугольник ABC — искомый.

3. *Доказательство*. Далеко не очевидно, будет ли треугольник ABC удовлетворять условию задачи. Отрезок CM имеет заданный размер (по построению $CM = m_c$). Будет ли он являться медианой треугольника ABC? Аналогично, будут ли высоты AA_1 и BB_1 построенного треугольника иметь заданные размеры?

Начнем с отрезка CM. По построению $MM_3 \parallel AC$ и M_3 — середина стороны BC. Значит, MM_3 — средняя линия треугольника ABC. Поэтому M — середина стороны AB, и значит, CM — медиана треугольника ABC. Итак, в треугольнике ABC отрезок CM является медианой и $CM = m_c$.

Обратимся к высотам AA_1 и BB_1. Так как MM_2 и AA_1 перпендикулярны к BC, то они параллельны. Если MM_2 и AA_1 параллельны и M — середина стороны AB, то MM_2 — средняя линия треугольника ABA_1. Поэтому $AA_1 = 2MM_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} h_a = h_a$. Аналогично $BB_1 = h_b$.

Итак, треугольник ABC является искомым.

4. *Исследование.* Прямоугольные треугольники MM_1C и MM_2C строятся при условиях $m_c > \frac{1}{2} h_a$, $m_c > \frac{1}{2} h_b$. Остальные построения выполняются без каких-либо ограничений. Поэтому задача имеет решение, если указанные неравенства выполняются одновременно. Так как построения 1—6 заканчиваются каждый раз единственным результатом, то это решение будет единственным. Если хотя бы одно из этих неравенств не выполняется, то задача решения не имеет.

2.3. Задача, не разрешимая с помощью циркуля и линейки

Необходимо иметь в виду и то, что существуют задачи, не разрешимые с помощью циркуля и линейки. Часто такая задача может быть решена с помощью другого набора чертежных инструментов. Использование, например, вместо обычной линейки (которой разрешается проводить только прямые через две данные точки) нового инструмента — линейки с двумя метками на ней существенно расширяет набор задач, решаемых с помощью циркуля и такой линейки. Приведем пример.

Задача о трисекции угла. Разделите данный угол α на три равные части с помощью циркуля и линейки с двумя делениями на ней.

Метод трисекции угла, указанный Архимедом. Обычной линейкой и циркулем выполнить это построение в общем случае нельзя. Однако с помощью циркуля и линейки с делениями построение осуществимо (рис. 121).

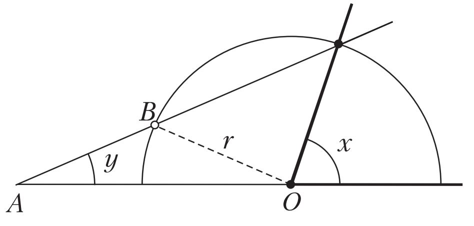


Рис. 121

Архимед делил угол α на три равные части следующим образом. Продолжал горизонтальную сторону угла α влево и строил окружность с центром в точке O и радиусом r, равным расстоянию между двумя отметками A и B на линейке. Затем приводил линейку в такое положение, чтобы точка A линейки располагалась на горизонтальной прямой, а точка B — на построенной полуокружности, причем сама линейка проходила бы через точку пересечения второй стороны угла с полуокружностью. В этом положении линейки Архимед проводил по ней прямую, образующую с горизонтальной прямой угол β. Докажите, что $\beta = \frac{1}{3}\alpha$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Необходимо также использовать равенство углов при основании равнобедренного треугольника.

Тема 5 ПОВТОРЯЕМ, СИСТЕМАТИЗИРУЕМ, ОБНОВЛЯЕМ

§ 1. Понятие об аксиоматическом методе

1.1. Об аксиомах геометрии

Аксиомы являются математической основой для построения определений понятий и доказательства теорем. Строгое построение математической теории (в средней школе оно не выполнимо полностью) осуществляется следующим образом:

1) *перечисляются основные (исходные) геометрические понятия, которые вводятся при помощи аксиом*;

2) *при их помощи даются определения остальным геометрическим понятиям*;

3) *на основе аксиом и определений доказываются все остальные геометрические факты*.

• В данном пособии применяется одна из возможных систем аксиом, ориентированная на более раннее введение нескольких математических методов. Такая система аксиом (за счет выборочного и совместного применения математических методов) помогла во многих случаях существенно упростить доказательства отдельных теорем, изложение всего курса планиметрии.

• Основным методом является *традиционно-синтетический метод* (использование признаков равенства треугольника, свойств и признаков параллельных и перпендикулярных прямых, построений с помощью циркуля и линейки). Используются также некоторые *аналитические методы* (метод уравнений, теорема о сумме углов треугольника, теорема Пифагора, метод площадей).

• В целях упрощения изложения допущена некоторая избыточность аксиом. Избыточна, например, аксиома 1.1, утверждающая существование бесконечного множества точек, принадлежащих прямой. В основаниях геометрии за аксиому обычно берется утверждение о существовании на прямой по меньшей мере двух точек.

Утверждение о существовании бесконечного множества точек, не принадлежащих прямой (см. аксиому 1.1), также избыточно. В основаниях геометрии в соответствующей аксиоме утверждается существование по меньшей мере трех точек, не принадлежащих одной прямой.

Доказательство бесконечности множества точек, принадлежащих и не принадлежащих прямой, довольно сложно и оно не рассматривается в школьном курсе.

Избыточность аксиом помогает избежать излишней детализации изложения, отвлекающей от главного. Чаще аксиомы стремятся формулировать все же в минимальной форме. В качестве аксиомы обычно принимается утверждение: развернутый угол равен 180°. Обратное утверждение: если угол равен 180°, то он является развернутым — доказывается. Приведем соответствующее доказательство.

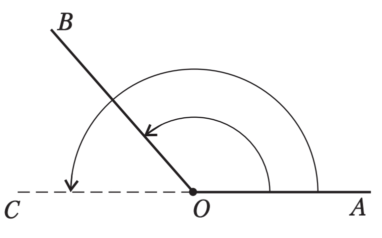


Рис. 122

Допустим, что $\angle AOB = 180°$ (рис. 122) и не является развернутым.

Тогда возьмем развернутый угол A_1OB. По аксиоме $\angle A_1OB = 180°$. Оказалось, что в одну и ту же полуплоскость на луче OB построены два разных угла — угол AOB

и угол A_1OB, имеющих одну и ту же градусную меру. Это противоречит основному свойству 4.2 откладывания угла. В итоге доказано, что если угол равен 180°, то он — развернутый.

В основаниях геометрии обычно в более слабой форме формулируется и аксиома 5. Вместо первого признака равенства двух треугольников приводится такая аксиома: если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то имеет место также и равенство $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

В основаниях геометрии обычно в качестве одной из аксиом измерения площадей многоугольников принимается предложение о том, что площадь квадрата со стороной, равной единице, равна единице. В нашем изложении принято более сильное утверждение: площадь любого квадрата равна квадрату его стороны.

• Остановимся еще на роли основного свойства параллельных прямых. Ввиду особой роли этого свойства в геометрии принято часть теории, не зависящей от него, называть ***абсолютной геометрией***.

К абсолютной геометрии относятся:

• доказанное выше предложение о том, что угол, равный 180°, является развернутым;

• теорема о единственности прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой;

• признаки параллельности двух прямых (даваемые при помощи накрест лежащих и односторонних углов) и др.

Примерами же теорем, которые не относятся к абсолютной геометрии (их доказательства опираются на аксиому параллельных), являются следующие:

• теорема о равенстве накрест лежащих углов при параллельных прямых;

• о сумме углов треугольника;

• теорема Пифагора и др. (рекомендуем еще раз обратиться к доказательствам этих теорем и проанализировать, каким образом они связаны с аксиомой параллельных).

В заключение отметим, что метод построения теории, опирающийся на систему аксиом, называется ***аксиоматическим методом***.

Аксиоматический метод находит применение в различных науках, наиболее широко он применяется в математике.

Подчеркнем еще, что наличие аксиом не является единственным, и тем более главным, признаком аксиоматического метода. Существенным является само построение теории на их основе (построение системы понятий, теорем и доказательств).

В следующем пункте на конкретном примере покажем, каким может быть процесс построения математической теории, как можно догадаться, какие определения и теоремы формулируются в том или ином случае.

1.2. Как строится теория?

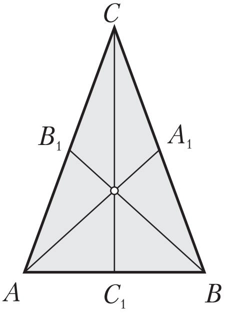


Рис. 123

Начнем не с определения фигуры, а с перечисления ее свойств из наглядных соображений, по рисунку (рис. 123). На рисунке изображен треугольник ABC и три его медианы AA_1, BB_1 и CC_1. Свойства данной фигуры формулируются в виде ряда утверждений. Приведем такие утверждения, составленные учащимися 7-го класса одной из школ г. Могилева:

1) $AC = BC$.

2) $\angle A = \angle B$.

3) Медиана CC_1 является биссектрисой треугольника ABC.

4) Медиана CC_1 является высотой треугольника ABC.

5) Медианы AA_1, и BB_1, проведенные к боковым сторонам треугольника ABC, равны: $AA_1 = BB_1$.

Далее выясним, можно ли на основании первого утверждения доказать остальные. Следует ли из первого утверждения второе?

Так как $AC = BC$ (утверждение 1), $AC_1 = C_1B$ (так как CC_1 — медиана) и CC_1 — общая сторона треугольников ACC_1 и BCC_1, то эти треугольники равны (по трем сторонам). Из их равенства следует, что $\angle A = \angle B$. Это означает, что из первого утверждения следует второе.

Из равенства этих же треугольников следует, что $\angle ACC_1 = \angle BCC_1$, т. е. медиана CC_1 является биссектрисой треугольника ABC. Это означает, что из первого утверждения следует третье.

Еще раз обратимся к равным треугольникам ACC_1 и BCC_1. Из их равенства следует, что $\angle AC_1C = \angle BC_1C = \frac{180°}{2} = 90°$. Это означает, что CC_1 является высотой треугольника ABC и, следовательно, из первого утверждения следует четвертое.

Для доказательства пятого утверждения рассмотрим, например, треугольники ACA_1 и BCB_1. Нетрудно убедиться в том, что эти треугольники равны (по двум сторонам и углу между ними). Из их равенства следует, что $AA_1 = BB_1$. Поэтому из первого утверждения следует пятое.

Подведем некоторые итоги. Ввиду того что первого утверждения оказалось достаточно для доказательства остальных, есть смысл выделить это утверждение особо. Важность этого утверждения как исходного утверждения при построении данного фрагмента теории подчеркнем, если положим его в основу определения такого вида треугольника. Приходим к определению.

Равнобедренным треугольником называется треугольник, имеющий равными хотя бы две стороны.

Проведенные выше доказательства позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. **В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.**

Теорема 2. **В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является его биссектрисой.**

Теорема 3. **В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является его высотой.**

Теорема 4. **В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к его боковым сторонам, равны.**

Все эти теоремы были выше доказаны. Построение данного фрагмента теории закончено. Проведенные рассуждения показывают процесс построения математической теории. Как видно, он не всегда начинается с «готовых» определений. Какое определение изучаемой фигуры следует сформулировать, выясняется лишь после проведенных доказательств. Отметим еще, что первое утверждение играло роль аксиомы при построении данного фрагмента теории. Это обстоятельство подчеркивает мысль о том, что аксиомы и определения играют сходную роль в построении теории — роль «отправных» предложений, на которые опирается изложение остального математического материала.

Полученный фрагмент теории в дальнейшем может быть расширен. Не всегда список утверждений может быть составлен только при помощи наблюдения чертежа. Иногда он может формулироваться на основании аналогии с уже известными утверждениями. Например, по аналогии с четвертым утверждением могут быть сформулированы следующие два:

5) Высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

6) Биссектрисы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

Чертеж может подсказать еще и такие утверждения:

7) Медианы равнобедренного треугольника пересекаются в одной точке.

8) Высоты равнобедренного треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

9) Биссектрисы равнобедренного треугольника пересекаются в одной точке.

Дополнительно к рассмотренным выше могут быть сформулированы обратные утверждения:

10) Если в треугольнике равны два угла, то он является равнобедренным.

11) Если в треугольнике медиана является биссектрисой, то он является равнобедренным.

12) Если в треугольнике медиана является высотой, то он является равнобедренным.

13) Если в треугольнике равны две высоты, то он является равнобедренным.

14) Если в треугольнике равны две медианы, то он является равнобедренным.

15) Если в треугольнике равны две биссектрисы, то он является равнобедренным.

16) Если в треугольнике медианы пересекаются в одной точке, то он является равнобедренным.

17) Если в треугольнике высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то он является равнобедренным.

18) Если в треугольнике биссектрисы пересекаются в одной точке, то он является равнобедренным.

Предлагаем учащимся завершить построение «расширенного» фрагмента теории равнобедренного треугольника. При этом предупредим, что сложность доказательства некоторых утверждений может значительно отличаться от других.

Довольно простыми являются доказательства утверждений 7, 8, 10, 12—14. Не столь сложными, сколь непривычными, являются доказательства утверждений 7—9. Особенно трудно додуматься до доказательства утверждения 15. **Утверждения 16—18 вообще не справедливы!**

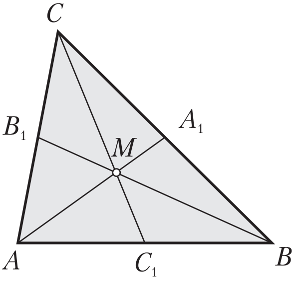


Рис. 124

Покажем, например, что утверждение 16 не является справедливым, для этого достаточно привести пример треугольника, для которого условие утверждения выполняется, а заключение — не выполняется. Пример такого треугольника приведен на рисунке 124. На нем медианы треугольника пересекаются в одной точке, но этот треугольник равнобедренным не является. Это означает, что утверждение 16 ложно. Аналогично устанавливается ложность утверждений 17 и 18.

§ 2. Метод равных треугольников

2.1. Применение метода равных треугольников к изучению замечательных точек равнобедренного треугольника

Мы уже знаем, что *метод равных треугольников* служит основным методом доказательства равенства треугольников, различных их элементов (углов, сторон, медиан, биссектрис, высот и т. д.). Этим методом можно воспользоваться и для доказательства пересечения некоторых трех отрезков (или прямых) в одной точке. Утверждения 7—9 из предыдущего пункта являются примерами таких утверждений. Рассмотрим соответствующие доказательства.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике все три медианы пересекаются в одной точке. Докажите это.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике все три биссектрисы пересекаются в одной точке. Докажите это.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике все три высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите это.

Предлагаем эти задачи решить самостоятельно.

Замечание. В 9-м классе будут рассмотрены обобщения приведенных выше трех задач. Отметим также, что точки пересечения медиан, биссектрис и высот (или их продолжений) — не единственные замечательные точки треугольника. В 9-м классе будут рассмотрены и другие замечательные точки.

2.2. Применение метода равных треугольников к нахождению отношения двух отрезков

Выше установлено, что медианы равнобедренного треугольника пересекаются в одной точке. Оказывается, эта точка делит каждую медиану в одном и том же отношении. Установить это отношение поможет метод равных треугольников.

Задача 4. Докажите, что точка пересечения медиан равнобедренного треугольника делит каждую его медиану в отношении 2 : 1 считая от вершины треугольника.

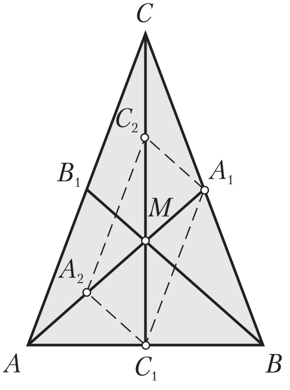


Рис. 125

Доказательство.

1) Пусть в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 125) точка M — точка пересечения его медиан AA_1, BB_1 и CC_1. Докажем, что $AM : MA_1 = CM : MC_1 = BM : MB_1 = 2 : 1$. Возьмем точки A_2 и C_2 — середины соответственно отрезков AM и CM;

2) рассмотрим четырехугольник $A_2C_2A_1C_1$. Так как A_1C_1 и A_2C_2 — средние линии соответственно треугольников ACB и ACM, то эти средние линии, будучи параллельны AC, будут параллельны и между собой;

3) аналогично доказывается, что $A_1C_2 \parallel A_2C_1$;

4) тогда четырехугольник $A_2C_2A_1C_1$ — параллелограмм;

5) нетрудно доказать, что $\Delta MC_2A_1 = \Delta MC_1A_2$ (докажите это!);

6) из их равенства следует, что $MC_2 = MC_1$ и $MA_2 = MA_1$;

7) так как $CC_2 = C_2M = MC_1$, то $MC : MC_1 = 2 : 1$;

8) аналогично $AM : MA_1 = 2 : 1$ и $BM : MB_1 = 2 : 1$.

Ответ: точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2 : 1$ считая от вершины треугольника.

Замечание. В 9-м классе утверждение задачи 4 будет распространено на произвольные треугольники.

2.3. Применение метода равных треугольников к решению задач, связанных с окружностью

Метод равных треугольников помогает решать также задачи, связанные с окружностью. Рассмотрим примеры таких задач.

Задача 5. В окружности с центром O (рис. 126) проведены диаметр AD и параллельная ему хорда BC. Докажите, что $AB = CD$.

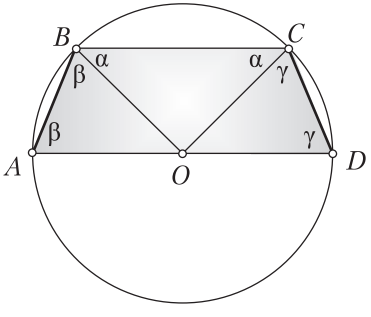


Рис. 126

Доказательство.

1) Точку O соединим с концами хорды BC, получим три равнобедренных треугольника OAB, OBC и OCD. Обозначим их углы через α, β и γ так, как показано на рисунке;

2) так как углы CBA и DAB — внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BC, то их сумма равна 180°. Поэтому $\alpha + 2\beta = 180°$;

3) аналогично $\alpha + 2\gamma = 180°$;

4) из этих двух равенств следует, что $\beta = \gamma$;

5) тогда в треугольниках OAB и ODC равны по два соответственных угла, и значит, в этих треугольниках равны третьи углы: $\angle AOB = \angle DOC$;

6) поэтому $\Delta OAB = \Delta ODC$ (по двум сторонам и углу между ними);

7) из их равенства следует, что $AB = CD$.

Задача 6. Решите предыдущую задачу при условии, что хорда AD не является диаметром окружности. Рассмотрите два случая: а) центр окружности лежит внутри четырехугольника $ABCD$; б) центр окружности лежит вне этого четырехугольника.

Задача 7. Две окружности пересекаются в точках M и N (рис. 127). Через эти точки проведены две параллельные прямые, пересекающие первую окружность соответственно в точках A и B, а вторую окружность — в точках D и C. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

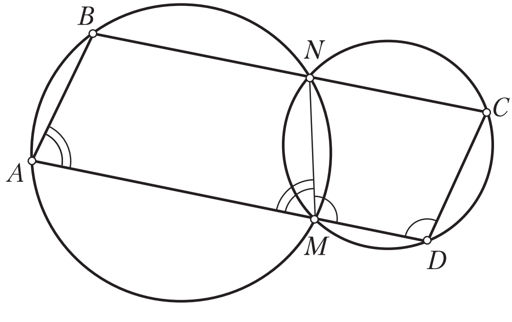


Рис. 127

Доказательство. 1) При решении задачи 5 установлено, что $\angle BAM = \angle NMA$ и $\angle NMD = \angle CDM$;

2) так как $\angle AMN + \angle NMD = 180°$, то $\angle A + \angle D = 180°$;

3) углы A и D являются внутренними односторонними при прямых AB и DC и секущей AD. Так как их сумма равна $180°$, то $AB \parallel DC$;

4) поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2.4. Применение метода равных треугольников к решению задач, связанных с квадратом

Задача 8. Внутри квадрата $ABCD$ (рис. 128) построены равнобедренные треугольники ABB_1, BCC_1, CDD_1 и DAA_1 с углами при сторонах квадрата, равными 15°. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является квадратом.

Доказательство.

1) Так как $\angle B_1BC_1 = 90° - (15° + 15°) = 60°$ и $BB_1 = BC_1$, то треугольник BC_1B_1 — равносторонний;

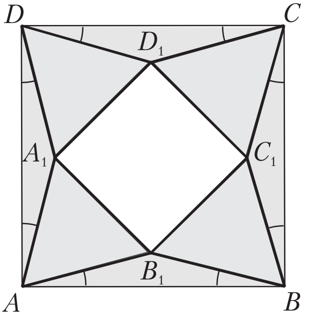


Рис. 128

2) аналогично получаем, что треугольники CD_1C_1, DA_1D_1 и AB_1A_1 — равносторонние;

3) поэтому $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = DA_1$;

4) далее непосредственным подсчетом устанавливается, что углы четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ — прямые;

5) таким образом, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

Задача 9. В условиях предыдущей задачи докажите, что прямая DA_1 является серединным перпендикуляром к отрезку AB_1.

Задача 10. В условиях задачи 8 докажите, что треугольник ABD_1 является равносторонним.

2.5. Применение метода равных треугольников к решению задач, связанных с кубом

Задача 11. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 129). Докажите, что треугольник ACB_1 является равносторонним.

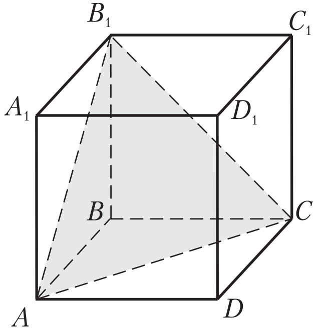


Рис. 129

Задача 12. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки O_1, O_2 и O_3 — точки пересечения диагоналей соответственно квадратов $ABCD$, AA_1B_1B и BB_1C_1C. Докажите, что отрезки AO_3, B_1O_1 и CO_2 равны и пересекаются в одной точке.

Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

§ 3. Теорема Пифагора. Площади некоторых фигур

Задача 1. Стороны равностороннего треугольника ABC разделены на три равные части (рис. 130). Пусть $AB_1 = \frac{1}{3}AC$, $CA_1 = \frac{1}{3}CB$, $BC_1 = \frac{1}{3}BA$. Докажите, что треугольники AB_1C_1, CB_1A_1 и BA_1C_1 — прямоугольные.

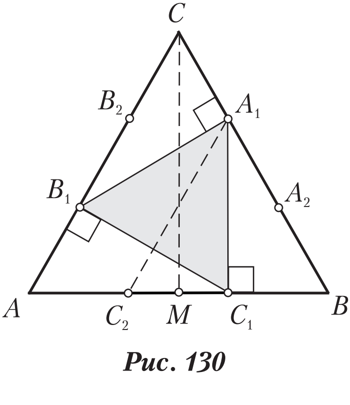


Рис. 130

Доказательство.

1) Рассмотрим треугольник BA_1C_2. Этот треугольник равнобедренный ($BA_1 = BC_2$) и у него $\angle B = 60°$. Значит, он — равносторонний;

2) тогда медиана A_1C_1 является высотой, поэтому $A_1C_1 \perp BC_2$;

3) значит, треугольник BA_1C_1 — прямоугольный;

4) аналогично устанавливается, что остальные треугольники такого вида являются прямоугольными.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 3$.

Решение.

1) Нетрудно установить, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний (см. рис. 130);

2) сторону A_1C_1 найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BA_1C_1. Так как $BA_1 = 2$, $BC_1 = 1$, то

$$A_1C_1 = \sqrt{BA_1^2 - BC_1^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \approx 1,73;$$

3) приходим к искомому ответу: $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$.

Задача 3. Найдите высоты равностороннего треугольника ABC, если $AB = 3$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{27}{4}}$.

Задача 4. В условиях задачи 1 найдите высоты треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 3$. (Решите самостоятельно.)

Задача 5. Найдите высоту h прямоугольного треугольника AB_1C_1, проведенную к его гипотенузе, если $AB = 3$ (см. задачу 1).

Решение. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу. Поэтому сразу получаем:

$$h = \frac{AB_1 \cdot B_1C_1}{AC_1} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 6. В условии задачи 1 найдите площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и AB_1C_1, если $AB = 3$.

Решение.

Имеем:

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ACM} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{27}{4}}.$$

Завершите решение задачи.

Задача 7. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 131) все стороны равны, $\angle A = 60°$, $DC_1 = \frac{1}{3}DA$, $DD_1 = \frac{1}{3}DC$, $BA_1 = \frac{1}{3}DB$. Докажите, что треугольник $A_1C_1D_1$ — равносторонний. (Воспользуйтесь результатом задачи 1.)

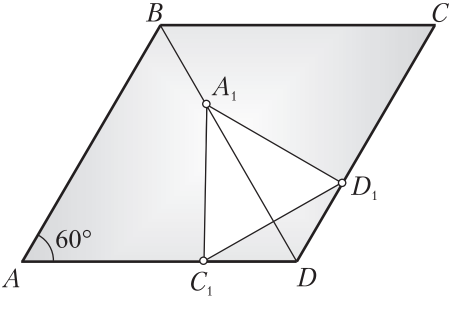


Рис. 131

Задача 8. В условиях предыдущей задачи найдите стороны треугольника $A_1C_1D_1$, если $AB = 3$. (Воспользуйтесь результатом задачи 2.)

Задача 9. На рисунке 132 изображено 6 квадратов со стороной, равной 1. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

Доказательство.

1-й способ. Нетрудно установить, что сторона AC проходит через вершину B_1 маленького квадрата. Тогда

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle KCB + \angle MCB) = \\ = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ.$$

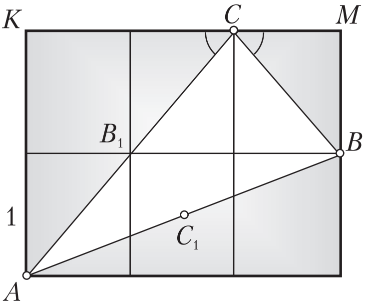


Рис. 132

2-й способ. Воспользуемся вначале теоремой Пифагора, затем — обратной ей теоремой. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = 3^2 + 1^2 = 10, \\ BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \\ AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ.$$

Ответ: $\angle ACB = 90^\circ$.

Задача 10. В условиях предыдущей задачи найдите стороны треугольника ABC. (Решите самостоятельно.)

Задача 11. Пусть C_1 (см. рис. 132) — середина отрезка AB. Докажите, что окружность с центром в точке C_1 и радиусом, равным C_1C, пройдет через все вершины треугольника ABC. (Докажите самостоятельно.)

Задача 12. Докажите, что площадь треугольника ABC равна 2. (Докажите самостоятельно, см. рис. 132.)

Задача 13. В условиях задачи 9 найдите медианы треугольника ABC и высоту, проведенную к его гипотенузе. (Решите самостоятельно.)

Следующие задачи связаны с окружностью.

Задача 14. Пусть $AB = 2\sqrt{3}$ — диаметр окружности (рис. 133), C — точка окружности, причем $\angle A = 30°$. Найдите неизвестные стороны и площадь треугольника ABC.

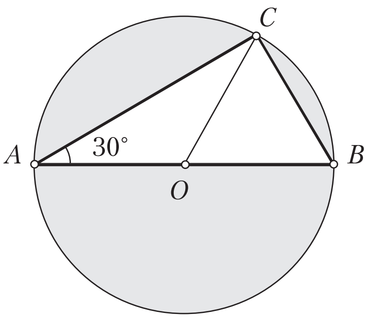


Рис. 133

Решение.

1) Нетрудно установить, что $\angle ACB = 90°$;

2) тогда катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы:

$$BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3};$$

3) найдем теперь катет AC. По теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4\cdot 3 - 3} = \sqrt{9} = 3;$$

4) зная катеты, найдем искомую площадь треугольника ABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot CB = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Задача 15. Две окружности пересекаются в точках A и B (рис. 134), AC и AD — диаметры этих окружностей. Докажите, что точки C, B и D лежат на одной прямой. (Докажите самостоятельно.)

Задача 16. В условиях предыдущей задачи радиусы окружностей равны 2 и 1,5. Отрезок $CB = 3$. Найдите отрезок BD. (Решите задачу самостоятельно.)

Задача 17. Дана окружность с радиусом $OA = 2$ (рис. 135). Через середину M радиуса OA проведена хорда CD, перпендикулярная к этому радиусу. а) Докажите, что треугольник BCD — равносторонний; б) найдите стороны треугольника BCD; в) найдите площадь четырехугольника $ACBD$.

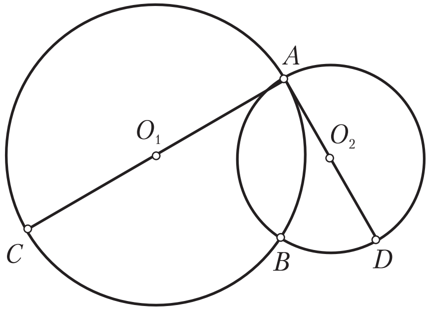


Рис. 134

Решение.

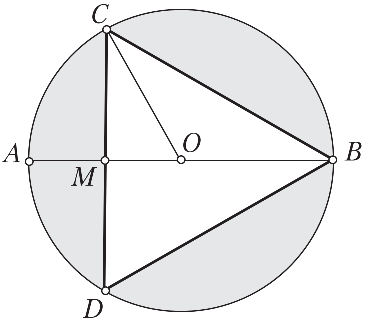


Рис. 135

а) 1) В прямоугольном треугольнике OMC катет OM равен половине гипотенузы OC. Поэтому $\angle OCM = 30°$;

2) тогда $\angle MOC = 90° - 30° = 60°$;

3) $\angle MOC$ — внешний угол треугольника OBC. Поэтому $\angle MOC = \angle OBC + \angle BCO = 2\angle BCO$;

4) отсюда $\angle BCO = 30°$, $\angle BCM = 60°$;

5) аналогично получаем, что $\angle D = 60°$;

6) тогда и $\angle CBD = 60°$. Значит, треугольник BCD — равносторонний.

б) Из прямоугольного треугольника OMC по теореме Пифагора

$$CM = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}; \quad CD = 2\sqrt{3};$$

$$BC = BD = CD = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46.$$

в) Для нахождения площади четырехугольника $ACBD$ найдем площадь прямоугольного треугольника ACB и удвоим ее. Имеем:

$AC = OC = 2$ (на основании равенства треугольников AMC и OMC);

$$S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$S_{ACBD} = 2S_{\Delta ACB} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Рассмотрим теперь задачу, связанную с кубом.

Задача 18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 136). Пусть O — середина отрезка AB_1. Найдите расстояние CO.

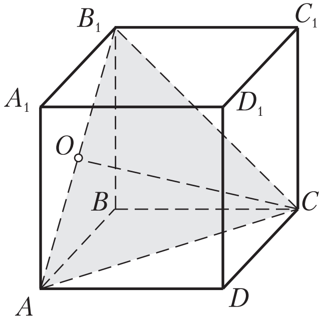


Рис. 136

Решение.

1) В треугольнике CAB_1 отрезок CO является медианой. Так как этот треугольник — равносторонний (убедитесь в этом), то CO — высота этого треугольника;

2) тогда к треугольнику COA можно применить теорему Пифагора:

$$AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$AO = \frac{1}{2} AB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$AC = AB_1 = \sqrt{2},$$

$$CO = \sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Задача 19. В треугольнике ABC $AC = 3$, $\angle C = 90°$, $AA_1 = 5$ — медиана этого треугольника. Найдите неизвестные стороны данного треугольника.
(Решите задачу самостоятельно.)

Ответ: $BC = 8$, $AB = \sqrt{73}$.

§ 4. Метод геометрических мест точек в задачах на построение

Задача 1. Постройте треугольник ABC по острому углу A, стороне c и медиане m_b.

Поиск решения. Пусть треугольник ABC (рис. 137) обладает свойствами, указанными в задаче. В нем угол A равен данному, $AB = c$ и $BB_1 = m_b$ — медиана. Замечаем, что вначале можно построить треугольник ABB_1, затем — искомый треугольник ABC.

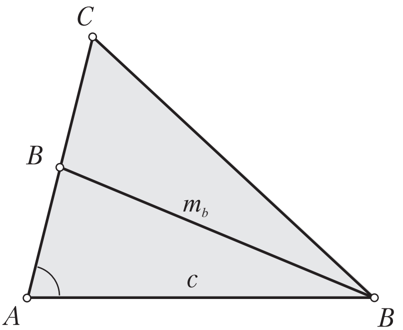


Рис. 137

Предлагаем учащимся завершить решение задачи.

Задача 2. Постройте треугольник ABC по сторонам b и c и высоте h_c.

Поиск решения. Пусть треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи (рис. 138). В нем $AB = c$, $AC = b$ и $CC_1 = h_c$ — высота. Сразу можно построить отрезок $AB = c$. В результате две вершины искомого треугольника будут построены. Выясним, каким двум ГМТ принадлежит точка C. Так как точка C удалена от точки A на известное расстояние $AC = b$, то точка C принадлежит окружности (A, b). Эта окружность есть ГМТ-1.

Учтем еще, что нам дана высота h_c. В силу этого условия точка C должна принадлежать прямой m, параллельной прямой AB и такой, что общий перпендикуляр к этим двум параллельным прямым равен h_c. Прямая m есть ГМТ-2. Точка C определяется как точка пересечения указанных ГМТ. В итоге построение треугольника ABC найдено.

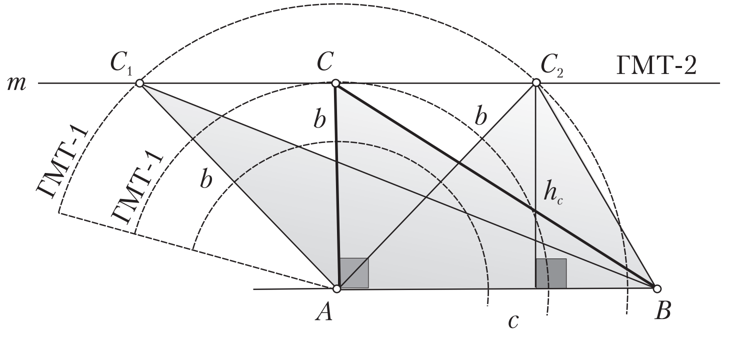


Рис. 138

Построение. Строим:

1) $AB = c$;

2) (A, b) — ГМТ-1;

3) m: $m \parallel AB$ и перпендикуляр к m и AB равен h_c; m — ГМТ-2;

4) C — точку пересечения окружности (A, b) и прямой m; треугольник ABC — искомый.

Доказательство.

Треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи. В нем по построению $AB = c$, $AC = b$, так как AC есть радиус окружности (A, b). Кроме того, $CC_1 = h_c$ — высота этого треугольника.

Исследование. Если $b < h_c$, то окружность (A, b) не будет пересекать прямую m. В этом случае задача решения не имеет.

Если $b = h_c$, то окружность (A, b) имеет с прямой m единственную общую точку. Задача в этом случае имеет единственное решение.

Если $b > h_c$, то окружность (A, b) имеет с прямой m две общие точки C_1 и C_2. В этом случае треугольники ABC_1 и ABC_2 оба удовлетворяют условию задачи, и значит, задача имеет два решения.

Задача 3. Постройте треугольник ABC по стороне c, высоте h_c и углу A.

Задача 4. Постройте треугольник ABC по стороне c, высоте h_c и углу B.

(Задачи 3—4 решите самостоятельно.)

Задача 5. Постройте треугольник ABC по сторонам a и b и высоте h_c.

Поиск решения. Допустим, что треугольник ABC (рис. 139) удовлетворяет условиям задачи. В нем $BC = a$, $AC = b$ и $CC_1 = h_c$ — высота. Представим, что точка C лежит на прямой m, точки A и B — на прямой n, причем $m \parallel n$ и общий перпендикуляр к этим двум прямым равен h_c.

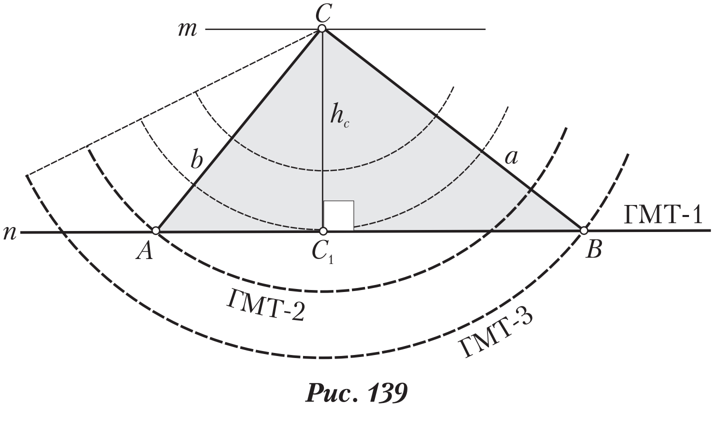


Рис. 139

Заметим, что точку C на прямой можно выбрать произвольно. Остается выяснить, каким образом могут быть построены точки A и B. Для этого учтем, что точка A удалена от точки C на расстояние b. Поэтому точка A может быть найдена как точка пересечения прямой n — ГМТ-1 и окружности (C, b) — ГМТ-2. Аналогично точка B может быть найдена как точка пересечения прямой n — ГМТ-1 и окружности (C, a) — ГМТ-3. В итоге найдено построение треугольника ABC.

Построение. Строим:

1) параллельные прямые m и n с общим перпендикуляром между ними, равным h_c;

2) $C \in m$;

3) (C, b);

4) A — точку пересечения окружности (C, b) и прямой n;

5) (C, a);

6) B — точку пересечения окружности (C, a) и прямой n; треугольник ABC — искомый.

Доказательство. Так как общий перпендикуляр между параллельными прямыми m и n равен h_c, то высота CC_1 треугольника ABC равна h_c. Кроме того, $CA = b$ и $CB = a$ — по построению. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Если $b < h_c$, или $a < h_c$, то либо окружность (C, b), либо окружность (C, a) не имеет общих точек с прямой n. В этом случае задача решения не имеет. Если $a = b = h_c$,то задача также решения не имеет. Если $b > h_c$, или $a > h_c$, то задача имеет два решения (в этом случае получаются четыре треугольника, но неравных будет только два). Выясните, может ли задача иметь одно решение.

Задача 6. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$) по основанию c и высоте h_c.

Задача 7. Постройте равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$) по основанию c и углу A.

Задача 8. Постройте равнобедренный треугольник ABC по основанию c и высоте h_b.

Задача 9. Постройте равнобедренный треугольник ABC по боковой стороне b и высоте h_b.

Поиск решения. Пусть треугольник ABC (рис. 140) является равнобедренным: $AC = BC = b$ и h_b — высота, проведенная к его боковой стороне. Сразу может быть

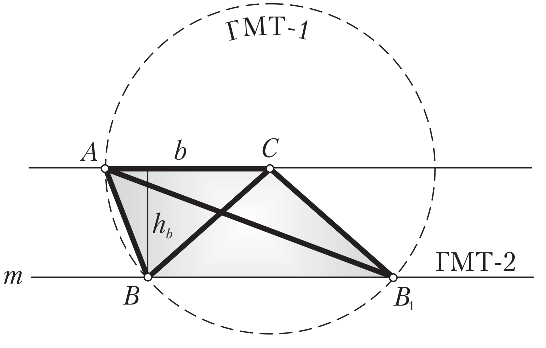


Рис. 140

построена сторона $AC = b$ искомого треугольника. Выясним далее, каким образом может быть построена вершина B. Для этого учтем, что вершина B удалена от вершины C на известное расстояние b. Поэтому вершина B находится на окружности (C, b) — ГМТ-1. Кроме того, вершина B лежит на прямой m, параллельной AC и такой, что общий перпендикуляр, заключенный между прямыми AC и m, равен h_b. Прямая m — ГМТ-2. Итак, вершина B

находится как точка пересечения указанных двух ГМТ. Построение треугольника ABC найдено.

Построение. Строим:

1) $AC = b$;

2) (C, b) — ГМТ-1;

3) m: $m \parallel AC$, общий перпендикуляр между прямыми m и AC равен h_b; прямая m — ГМТ-2;

4) B — точку пересечения окружности (C, b) и прямой m. Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. Треугольник ABC — равнобедренный: $CA = CB$ как радиусы одной и той же окружности. Кроме того, $CA = CB = b$ (по построению). Так как общий перпендикуляр между параллельными прямыми AC и m равен h_b, то высота треугольника ABC, проведенная к стороне AC, равна h_b. Значит, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Если $h_b > b$, то прямая m и окружность (C, b) общих точек не имеют. В этом случае точка B не существует и задача не имеет решения. Если $h_b = b$, то окружность (C, b) и прямая m имеют одну общую точку B, поэтому задача имеет единственное решение. Если $h_b < b$, то задача имеет два решения.

Задача 10. Постройте треугольник ABC по стороне c, медиане m_c и высоте h_c.

Задача 11. Постройте прямоугольный треугольник ABC по гипотенузе c и высоте h_c.

Поиск решения. Пусть треугольник ABC — прямоугольный: $\angle C = 90°$, $AB = c$ — его гипотенуза и h_c — высота, проведенная к гипотенузе (рис. 141). Заметим, что сразу можно построить гипотенузу AB. Далее учтем, что вершина прямого угла (вершина C) находится на окруж-

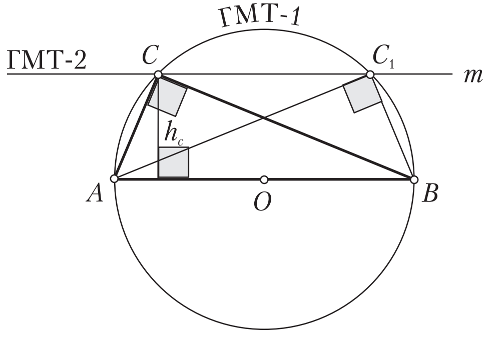


Рис. 141

ности, построенной на отрезке AB как на диаметре. Эта окружность есть ГМТ-1. Кроме того, вершина C находится на прямой m, параллельной прямой AB, такой, что общий перпендикуляр между этими прямыми равен h_c. Прямая m есть ГМТ-2. Точка C находится как точка пересечения указанных ГМТ. Построение треугольника ABC найдено.

Построение. Строим:

1) $AB = c$;

2) $\left(O, \dfrac{c}{2}\right)$, где O — середина отрезка AB;

3) m: $m \parallel AB$, общий перпендикуляр между прямыми m и AB равен h_c;

4) C — общую точку окружности $\left(O, \dfrac{c}{2}\right)$ и прямой m.

Треугольник ABC — искомый.

Доказательство. Так как угол C опирается на диаметр окружности, то он равен 90°. Кроме того, по построению $AB = c$ и высота, проведенная к гипотенузе, равна общему перпендикуляру между параллельными прямыми AB и m, и значит, эта высота равна h_c. Построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование. Если $h_c > \frac{c}{2}$, то прямая m и окружность общих точек не имеют. В этом случае точка C не существует и задача решения не имеет. Если $h_c = \frac{c}{2}$, то прямая m и окружность имеют одну общую точку C. Поэтому задача имеет единственное решение. Если $h_c < \frac{c}{2}$, то прямая m и окружность имеют две общие точки C и C_1. Но так как треугольники ABC и ABC_1 равны, то и в этом случае задача имеет одно решение!

- **Задача 12.** Постройте треугольник ABC по двум сторонам b и c и радиусу R окружности, на которой лежат все три вершины треугольника.
- **Задача 13.** Постройте треугольник ABC по стороне c, высоте h_c и радиусу R окружности, на которой лежат все три вершины треугольника.
- **Задача 14.** Постройте треугольник ABC по стороне c, углу A и биссектрисе l_a.
- **Задача 15.** Постройте треугольник ABC по стороне b, углу A и биссектрисе l_a.

(Задачи 12—15 решите самостоятельно.)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1. Как строится геометрия: главная идея

§ 1—2

Какое условие является необходимым, достаточным, необходимым и достаточным?

Теорема $A \Rightarrow B$: A достаточно для B, B необходимо для A	Теорема $A \Leftrightarrow B$: A достаточно для B, B достаточно для A, B необходимо для A, A необходимо для B	Предложение $A \Rightarrow B$ теоремой не является: A не является достаточным для B, B не является необходимым для A

1. (*Логические задачи.*) Обратимся к теореме о сумме смежных углов.
а) Справедливо ли утверждение: условие теоремы «два угла являются смежными» является необходимым для заключения «сумма этих углов равна 180°»?
б) Справедливо ли утверждение: условие теоремы «два угла являются смежными» является достаточным для заключения «сумма этих углов равна 180°»?
в) Справедливо ли утверждение: заключение теоремы «сумма двух углов равна 180°» является необходимым для условия «два угла являются смежными»?
г) Справедливо ли утверждение: заключение теоремы «сумма двух углов равна 180°» является достаточным для условия «два угла являются смежными»?

д) Можно ли утверждать, что условие теоремы о сумме смежных углов (в ее обычной формулировке) является необходимым и достаточным для заключения этой теоремы?

2. (*Логические задачи.*) а) Необходимо сформулировать предложение, обратное теореме о сумме смежных углов. Какая из следующих формулировок является правильной, больше того — является теоремой?

1) Если сумма двух углов равна 180°, то эти углы являются смежными.

2) Если сумма двух углов равна 180° и они имеют общую сторону, то эти углы являются смежными.

3) Если сумма двух углов равна 180°, они имеют общую сторону и их другие стороны расположены по разные стороны от прямой, содержащей общую сторону, то эти углы являются смежными.

б) Справедливо ли предложение, обратное теореме о сумме смежных углов?

в) Углы AOC и BOC расположены по разные стороны от прямой OC, и их сумма равна 180°. Докажите, что эти углы — смежные.

г) Дана теорема о равенстве вертикальных углов: если углы вертикальные, то они равны. Необходимо сформулировать предложение, обратное этой теореме. Какая из следующих формулировок является правильной, является теоремой?

1) Если два угла равны, то эти углы являются вертикальными.

2) Если два угла равны, причем сторона одного и сторона другого являются дополнительными лучами, то эти углы являются вертикальными.

3) Если два угла равны, сторона одного и сторона другого являются дополнительными лучами, а другие стороны лежат по разные стороны от прямой, образуемой дополнительными лучами, то эти углы являются вертикальными.

3. а) Пусть точка A лежит на поверхности Земли, а точка B — на поверхности Луны. Можно ли через эти точки провести прямую?

б) Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AB = 10$, $AC = 7$, $CB = 2$?

в) Точки A, B и C лежат на одной прямой, и $AB = 10$, $AC = 7$, $CB = 3$. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

4. (*Задача на космическую тему.*) Расстояние между Землей и Солнцем приближенно равно 149 млн км, между Землей и Луной — 384 тыс. км. На каком расстоянии находится Луна от Солнца в момент (рис. 142): 1) солнечного затмения; 2) лунного затмения?

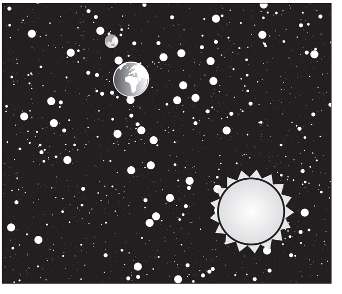


Рис. 142

5. (*Вначале построения, затем вычисления.*) Постройте две окружности одного и того же радиуса с центрами в точках A и C. Пусть эти окружности пересекаются в точках B и D. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если радиусы окружностей равны R.

6. а) Отрезок AB разбит точкой C на части, равные a и b. Найдите расстояние между серединами этих частей.

Решение. Имеем (выполните рисунок):

$$XY = XC + CY = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB =$$
$$= \frac{1}{2}(a + b).$$

Ответ: $XY = \frac{1}{2}(a + b)$.

б) Отрезок AB разбит на n равных частей (n — любое натуральное число). Найдите расстояние между серединами крайних частей, если $AB = a$.

Решение. Выполните рисунок: разбейте, например, отрезок AB на 10 равных частей. Несмотря на это, рассуждение будем проводить в общем виде — для n равных частей. Имеем:

$$XY = AB - (AX + YB) = a - \frac{a}{n} = \frac{an - a}{n} = \frac{a(n-1)}{n}.$$

Ответ: $XY = \frac{a(n-1)}{n}$.

7. На сколько не перекрывающихся частей делится отрезок: а) одной, двумя, тремя, четырьмя точками; б) 100 точками; в) n точками?

8. а) (*Задача Ньютона.*) Мне нужна помощь, чтобы посадить 9 деревьев в 10 рядов так, чтобы в каждом ряду было 3 дерева (рис. 143, *а*). Скажи — как, и я больше у тебя ничего не спрошу.

б) (*Историческая задача.*) Один военачальник распорядился построить укрепление, состоящее из 10 крепостей, соединенных между собой оборонительными траншеями. Траншеи должны были представлять 5 прямых линий, на каждой из которых

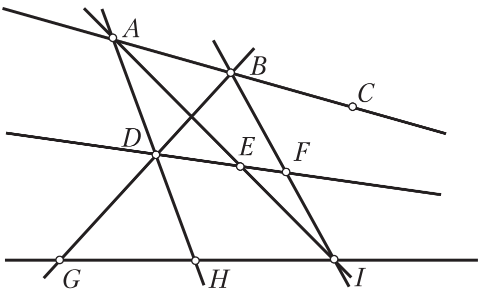


Рис. 143, а

приходилось бы по 4 крепости. Причем хотя бы одна из крепостей должна быть защищена траншеями со всех сторон. План одного из таких укреплений приведен на рисунке 143, *б*. Приведите другие планы.

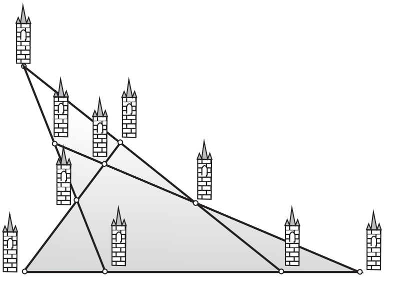


Рис. 143, б

9. а) (*Логическая задача.*) Если точка O — середина отрезка AB, то $AO = OB$. Справедливо ли это утверждение? Является ли равенство $AO = OB$ необходимым условием для утверждения «точка O — середина отрезка AB»? Является ли утверждение «точка O — середина отрезка AB» достаточным для выполнения равенства $AO = OB$?

б) (*Комбинаторная задача.*) На некотором удалении от центральной туристической базы A находятся три пункта B_1, B_2 и B_3, образующие «ближний пояс», и четыре более удаленных пункта C_1, C_2, C_3 и C_4, образующие «дальний пояс». Сколько можно составить разных маршрутов, начинающихся в пункте A и проходящих через один пункт «ближнего пояса» и один пункт «дальнего пояса»? (Изобразите все маршруты с помощью отрезков.)

§ 3

10. а) На сколько не перекрывающихся частей делится луч: 1) 1, 2, 3, 4 точками; 2) 100 точками; 3) n точками?

б) На сколько не перекрывающихся частей делится плоскость: 1) 100 прямыми, проходящими через одну и ту же точку; 2) n прямыми, проходящими через одну и ту же точку?

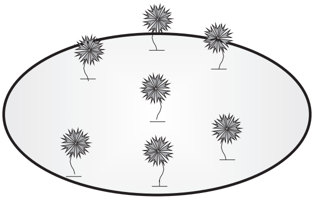


Рис. 144

в) На сколько частей разбивается прямая n точками?

г) (*Занимательная задача.*) На клумбе (рис. 144) имеется 7 цветков. Требуется тремя прямыми разделить клумбу на 7 частей, каждая из которых содержала бы по одному цветку.

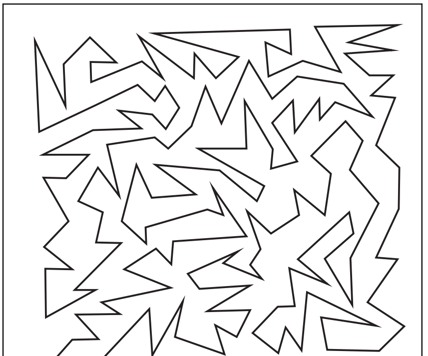


Рис. 145

11. а) Разбивает ли ломаная, приведенная на рисунке 145, плоскость на две области?

б) Нанесите некоторые точки и определите, какой области многоугольника они

принадлежат, — внутренней или внешней (см. рис. 145). Заштрихуйте внешнюю область многоугольника.
в) (*Логическая задача.*) Прямая разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой прямой, на две области. Справедливо ли обратное предложение: «Если некоторая линия разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой линии, на две области, то эта линия является прямой»?

§ 4

12. а) (*Занимательная задача.*) Внутри угла 1 (рис. 146) находится муравей. Выясните, окажется ли он внутри угла 2, если известно, что он не пересекал лучи OA и OC, а луч OB пересек четное число раз.
б) Верно ли, что развернутый угол имеет наибольшую меру?
в) Может ли сумма мер двух углов быть больше 180°?

13. а) $\angle AOB = 72°$. Внутри этого угла проведен луч OC и биссектрисы углов AOC и BOC. Найдите угол между биссектрисами.

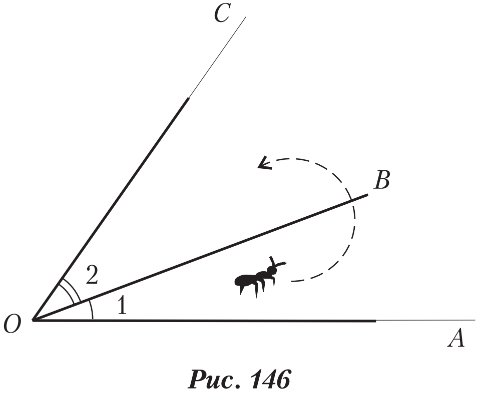


Рис. 146

б) $\angle AOB = \alpha$ (греческой буквой α обозначена градусная мера данного угла). Как и выше, внутри этого угла проведен произвольно луч OC и построены биссектрисы углов AOC и BOC. Найдите угол между этими биссектрисами.

14. а) Сколько нужно провести лучей, проходящих между сторонами данного угла, для того, чтобы разбить этот угол на n не перекрывающихся частей?

б) Угол AOB лучами, проходящими между его сторонами, разбит на n последовательных равных частей. Найдите угол, образованный биссектрисами двух крайних углов, если $\angle AOB = \alpha$.

15. а) Докажите, что любой угол меньше или равен 180°.

б) Найдите угол между стрелками часов в 9 ч 20 мин (рис. 147, *а*).

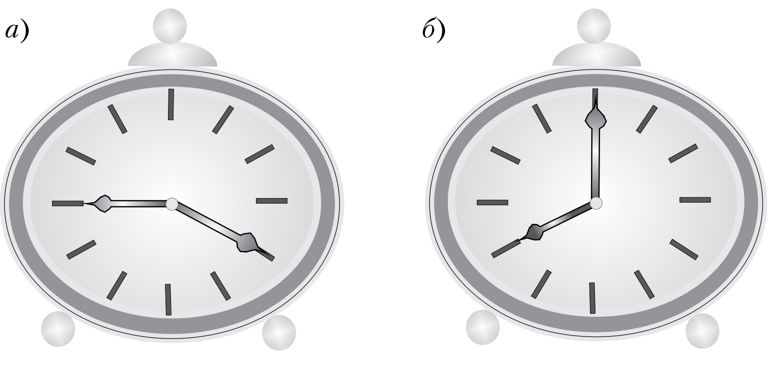


Рис. 147

в) Часы показывают 8 ч утра. Какое время покажут часы, если часовая стрелка повернется на 45° (рис. 147, *б*)?

16. а) Пусть луч OC — биссектриса угла AOB, точка T — произвольная точка этой биссектрисы. На сторонах OA и OB отложены равные отрезки OM и OK. Дока-

жите, что: 1) $\Delta OTM = \Delta OTK$; 2) $MT = KT$; 3) $\angle OMT =$
$= \angle OKT$; 4) $\angle OTM = \angle OTK$.

б) На сторонах OA и OB угла AOB отложены равные отрезки OM и OK. Точка T лежит внутри угла AOB и равноудалена от точек M и K. Докажите, что точка T лежит на биссектрисе угла AOB.

17. (*Задача на развитие пространственного представления.*) Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и выполните следующие задания: 1) Сравните суммы длин отрезков $AD + DD_1 + D_1C_1 + C_1B_1 + B_1B + BA$ и $AD + DC + CB + BB_1 + B_1A_1 + A_1A$. 2) Покажите на рисунке фигуры, образованные этими отрезками. Какие это фигуры — плоские или пространственные? 3) Покажите и назовите на рисунке прямые углы. 4) Сравните меры углов $A_1D_1C_1$ и BCD. 5) Найдите сумму мер углов D_1DC и A_1AB.

§ 5

18. Какие записи необходимо сделать в таблице на рисунке 148?

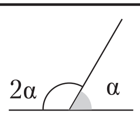
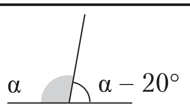
	$2\alpha + \alpha = 180°$	$60°$	$120°$
	?	?	?

Рис. 148

19. а) Найдите смежные углы, если они относятся как $2:3$.
б) Найдите смежные углы, если один из них больше другого на $45°$.

в) Найдите смежные углы, если один из них составляет $\frac{2}{3}$ другого.

20. Смежные углы равны α и $180° - \alpha$. Над этими углами выполнили следующие действия (вначале разделили их на 2, затем полученные «половинки» сложили): 1) $\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{180° - \alpha}{2}$; 3) $\frac{\alpha}{2} + \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} = 90°$. Получили некоторый угол, равный 90°. Что это за угол? Нарисуйте его. Какую геометрическую закономерность вы заметили? Сформулируйте ее.

21. Пусть α и β — смежные углы и угол α изменяется от 0° до 60°. Как при этом будет изменяться угол β? Выполните рисунок и покажите на нем эти изменения.

22. а) Найдите вертикальные углы, если один из них равен углу, смежному с ним.

б) Найдите вертикальные углы, если один из них на 20° больше угла, смежного с ним.

в) Может ли сумма мер двух вертикальных углов равняться 380°?

г) Найдите вертикальные углы, если сумма их мер равна 320°.

д) (*Логическая задача.*) Два угла являются одновременно смежными и вертикальными. Найдите эти углы. Корректно ли сформулирована задача?

е) Найдите вертикальные углы, если биссектриса одного из них образует со стороной другого угол, равный 100°.

23. а) Один из смежных углов больше другого на 60°. Известно еще, что он в 2 раза больше другого. Найдите эти углы. Нет ли в задаче лишних данных? Если есть, то составьте задачу без лишних данных. Решите ее.

б) Один из смежных углов больше другого на 60°. Известно еще, что он в 3 раза больше другого. Найдите эти углы. Нет ли в задаче лишних данных? Не противоречат ли данные друг другу? Составьте задачу, не имеющую указанных недостатков. Решите ее.

в) Один из смежных углов больше другого. Найдите эти углы. Хватает ли данных для решения задачи? Дополните условие задачи каким-либо данным и решите ее.

г) Один из смежных углов увеличили на 10° (увеличили в 10 раз). Как изменился при этом второй угол?

24. а) Угол AOB — прямой, $\angle AOC = \frac{1}{3} \angle AOB$. Вычислите угол COD, у которого луч OD является дополнительным к лучу OA (луч OC проходит между сторонами угла AOB). Какой из рисунков 149, *а—в* соответствует условию задачи?

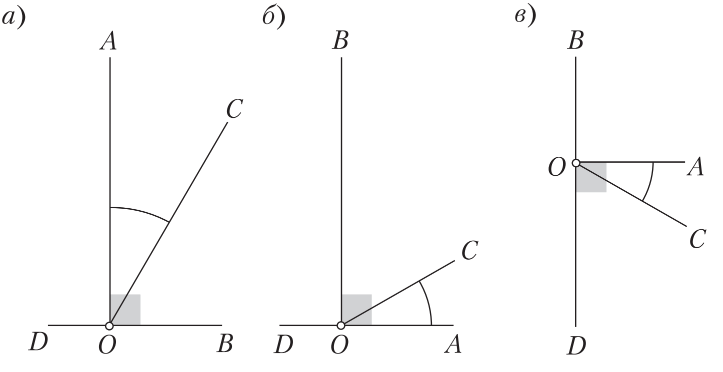


Рис. 149

б) Из вершины развернутого угла AOB в одну полуплоскость проведены лучи OC и OD. Чему равен угол COD, если $\angle AOC = 50°$, $\angle AOD = 70°$? Какой из рисунков 150, *а—в* соответствует условию задачи?

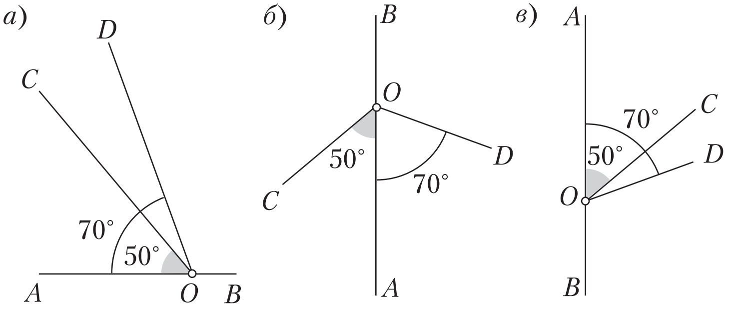


Рис. 150

в) (*Задача на сообразительность.*) Есть ли ошибка в указании величин углов на рисунке 151, *а*, *б*?

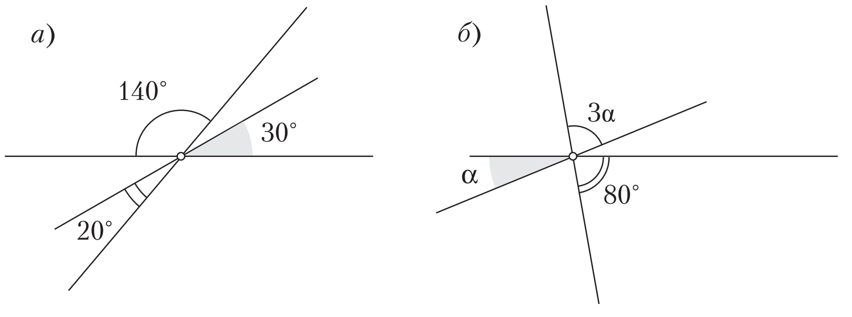


Рис. 151

25. а) Из вершины O развернутого угла AOB проведены лучи OC и OD. Чему равен угол COD, если $\angle AOC = 50°$, $\angle AOD = 70°$?

б) Обратимся к задаче 24, а). Внесем в нее небольшие изменения: $\angle AOB = 90°$, $\angle AOC = \frac{1}{3}\angle AOB$. Вычислите угол COD, если луч OD является дополнительным к лучу OA.

26. а) Докажите, что угол между биссектрисами двух вертикальных углов равен 180°.

б) Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

27. От луча AB в разные полуплоскости от прямой AB отложены два угла: $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BAD = 180° - \alpha$. Докажите, что эти углы смежные.

28. а) Можно ли определение смежных углов сформулировать следующим образом: «Если из вершины O развернутого угла AOB проведем луч OC, то получим два угла AOC и BOC, которые называются смежными»?
б) Является ли предложение «Если два угла равны, то они являются вертикальными» обратным теореме о равенстве вертикальных углов? Является ли это предложение справедливым?

§ 6

29. а) Точки A и B делят окружность на две дуги, одна из которых равна 60 дуговым градусам. Чему равна другая дуга?
б) Точки A и B делят окружность на две дуги, которые относятся как 3 : 4. Найдите дуговые градусные меры этих дуг.

30. а) Точки A и B делят окружность на две дуги, одна из которых больше другой на 50 дуговых градусов. Найдите дуговые градусные меры этих дуг.
б) Точки A, B и C делят окружность на три дуги, которые относятся как 2 : 5 : 4. Найдите дуговые градусные меры этих дуг.

31. а) Какой больший центральный угол окружности составляют минутная и часовая стрелки в 4 ч дня?
б) Какой меньший центральный угол окружности составляют минутная и часовая стрелки в 4 ч 20 мин дня?

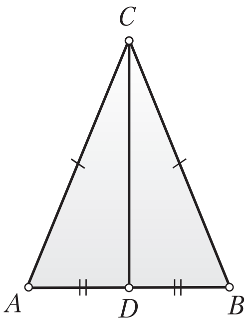


Рис. 152

32. На рисунке 152 отмечены равные элементы треугольников ADC и BDC. Достаточно ли этих данных для доказательства следующих равенств:
1) $\Delta ADC = \Delta BDC$, 2) $\angle ACD = \angle BCD$,
3) $\angle ADC = \angle BDC = 90°$?

33. Что можно доказать на основании следующих данных?

а) Точки A и A_1, B и B_1 (рис. 153, *а*) симметричны относительно точки O, т. е. точка O — середина отрезков AA_1 и BB_1.

б) На отрезке AC (см. рис. 153, *б*) взяли произвольную точку M и соединили ее отрезками с точками B и D.

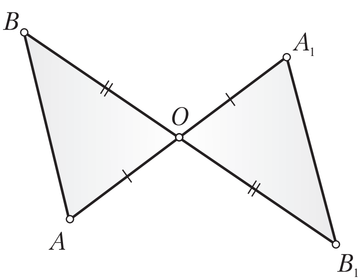


Рис. 153, а

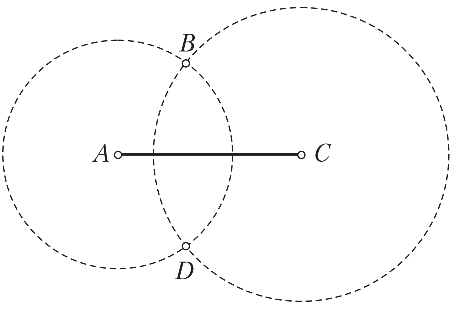


Рис. 153, б

в) На отрезках AB и AD (проведите их на рисунке 153, *б*) отложили равные отрезки AP и AT. Точки B, P, T и D соединили с точкой C, получили треугольники CBP и CDT.

г) На сторонах CA и CB треугольника ACB (см. рис. 152) отложили равные отрезки CM и CH. Точки M и H соединили отрезком. Отметили точку K — точку пересечения отрезков MH и CD.

д) На рисунке 153, *б* точки B и D соединили отрезком. Отметили точку E — точку пересечения отрезков BD и AC.

е) На рисунке 153, *в*: $AB = BC$, $AD = EC$, $\angle A = \angle C$.

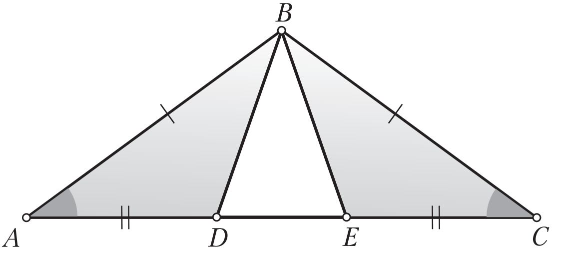


Рис. 153, в

34. На рисунке:

а) 154, *а* $\angle AEC = \angle ADB = 90°$, $AE = AD$, $BD = CE$;

б) 154, *б* $\angle AOB = 90°$, $AO = OC$, $BO = OD$.

Какие задачи можно составить по этим рисункам? Решите их!

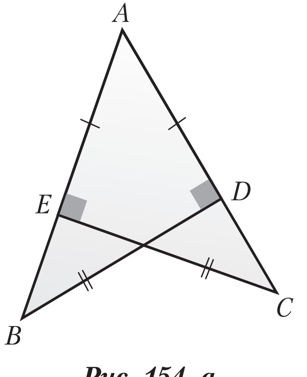


Рис. 154, а

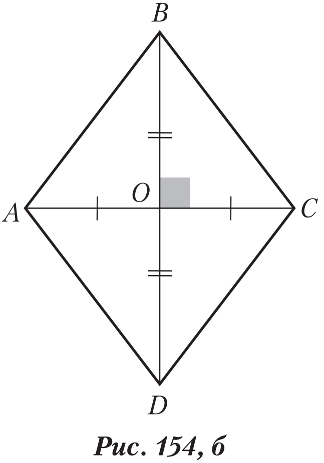


Рис. 154, б

35. а) Дана окружность с центром O, хорда AB этой окружности и точка M — середина хорды AB. Докажите, что $\Delta AOM = \Delta BOM$.

б) В условиях задачи а) докажите, что $OM \perp AB$.

в) В условиях задачи а) докажите, что $\angle AOM = \angle BOM$.

36. Дана окружность с центром O, хорда AB и точка M — середина хорды AB. Через точку M проведен перпендикуляр к хорде AB. Докажите, что этот перпендикуляр пройдет через центр O.

37. В треугольнике две стороны равны, сумма углов, прилежащих к третьей стороне, равна α. Найдите эти углы.

38. а) Докажите, что если две дуги окружности равны, то хорды, стягивающие концы этих дуг, также равны.

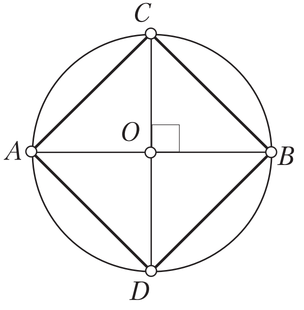


Рис. 154, в

б) Постройте точки A, B и C, делящие окружность на три равные части (с помощью транспортира), и треугольник ABC. Докажите, что $AB = BC = CA$ и $\angle A = \angle B = \angle C$.

39. а) На рисунке 154, *в* соедините отрезками точки A и D, C и B. Докажите, что Р$CAD = \angle ADB = \angle DBC = \angle BCA$.

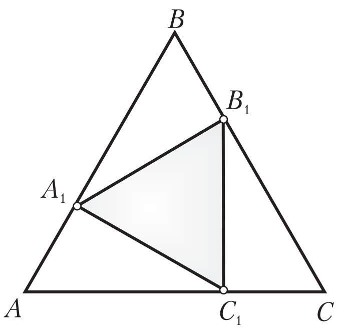


Рис. 155

б) Докажите, что если в треугольнике ABC $AB = BC = CA$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1$ (рис. 155), то в треугольнике $A_1B_1C_1$ $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$.

40. а) Дана окружность с центром O. По разные стороны от точки A, принадлежащей окружности, построены две равные хорды AB и AC. Докажите, что луч AO является биссектрисой угла BAC.

б) Дана окружность с центром O. По разные стороны от точки A, принадлежащей окружности, построены две равные хорды AB и AC. Докажите, что биссектриса угла BAC пройдет через центр O.

в) Докажите, что если в треугольнике имеются два равных угла, то он равнобедренный.

41. В пятиугольной звезде, изображенной на рисунке 156, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ и $AB = CD$. Докажите, что $AE = ED$.

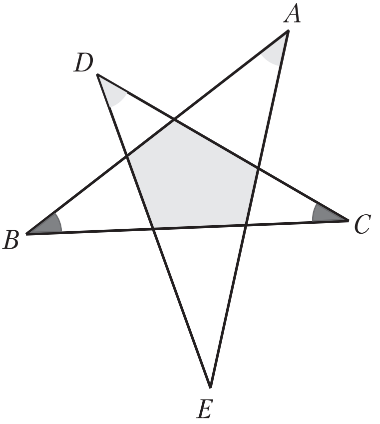


Рис. 156

42. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметры треугольников ABC и ABD равны. Равны также периметры треугольников ACD и BCD. Докажите, что $AO = OB$.

43. Постройте угол с вершиной O и две прямые, перпендикулярные к его биссектрисе. Пусть эти прямые пересекают одну сторону угла в точках A и B, а вторую сторону — соответственно в точках D и C. Докажите, что: 1) $AB = CD$; 2) $AC = BD$; 3) $\angle BAD = \angle CDA$.

Тема 2. Как метод равных треугольников применяется при изложении вопросов перпендикулярности и параллельности прямых

§ 1

44. Даны прямые a и AB. Постройте на данной прямой a точку X, принадлежащую прямой b, которая проходит через точку A и перпендикулярна к прямой AB. (Прямые a и AB выберите сами.)

45. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Стороны BC и B_1C_1 продолжили соответственно за вершины C и C_1 и на продолжении в первом случае отложили отрезок $CK = CB$, а во втором случае — отрезок $C_1K_1 = C_1B_1$. Докажите, что $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$.

46. а) В треугольнике ABC $AB = BC$, M — середина стороны AC, луч BT — продолжение стороны AB за точку B, BK — биссектриса угла CBT. Докажите, что $BM \perp BK$.

б) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Точки K и K_1 — середины соответственно сторон AC и A_1C_1. Докажите, что $BK = B_1K_1$.

47. а) Дан угол с вершиной O. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, пересекает стороны угла в точках A и B. Пусть M — произвольная точка биссектрисы. Докажите, что $MA = MB$.

б) Дан угол с вершиной O и биссектриса угла. Проведены две прямые, перпендикулярные к биссектрисе и пересекающие ее в точках T и M (T лежит между O и M). Эти прямые пересекают одну сторону угла соответственно в точках A и B, а вторую сторону — соответственно в точках C и P. Докажите, что луч MT — биссектриса угла AMC, а луч TM — биссектриса угла BTP.

48. а) Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $AB \perp O_1O_2$.

б) Дана прямая a и точка O, не принадлежащая этой прямой. С центром в точке O провели окружность, пересекающую прямую a в точках A и B. Пусть M — середина хорды AB. Докажите, что $OM \perp AB$.

в) Дана окружность с центром O и радиусом OA. По разные стороны от точки A построены хорды AB и AC, равные радиусу окружности. Докажите, что $BC \perp AO$.

49. Докажите, что диагонали квадрата перпендикулярны.

50. (*Задача на развитие пространственного представления и логического мышления.*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — середина отрезка AC. Докажите, что $B_1O \perp AC$.

51. а) Дано (рис. 157): $AO \perp OB$, $CO \perp OD$, OM — биссектриса угла AOD. Докажите, что OM является биссектрисой угла COB.

б) Дана окружность с центром O и диаметром AB. К радиусам OA и OB через их середины проведены перпендикулярные прямые. Эти прямые пересекают одну полуокружность в точках P и K, а другую — соответственно в точках M и T. Докажите, что: 1) $\Delta OAP = \Delta OAM = \Delta OBK = \Delta OBT$; 2) хорды PT и KM являются диаметрами; 3) $PK = MT$.

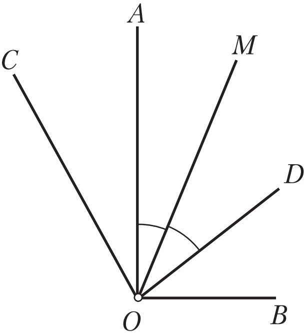


Рис. 157

в) Дан квадрат $ABCD$, M и K — середины соответственно сторон AD и BC. Докажите, что $MK \perp AD$ и $MK \perp BC$.

г) (*Задача на развитие пространственного представления и логического мышления.*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $AC = A_1C_1$.

52. а) Известно, что $\angle AOB = \angle AOC = 90°$. Как располагаются прямые OB и OC относительно друг друга? Какие случаи необходимо рассмотреть?

б) Точки C и D — точки пересечения двух окружностей одинакового радиуса с центрами в точках A и B. Как располагаются прямые AB и CD относительно друг друга?

в) Даны равнобедренные треугольники ACB и AKB, $AC = CB$, $AK = KB$, точки C и K лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что $CK \perp AB$.

53. а) Прямые a и b перпендикулярны к прямой c. К какому противоречию можно прийти, если допустить, что прямые a и b пересекаются? Какой вывод можно сделать о расположении прямых a и b?

б) (*Задача на развитие пространственного представления.*) Теорема о единственности прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой, справедлива только для плоскости. В пространстве же через точку можно всегда провести более одной прямой, перпендикулярной к данной. На примере куба приведите примеры нарушения этой теоремы в пространстве.

54. а) Докажите, что диаметр окружности, проходящий через середину некоторой хорды, перпендикулярен к этой хорде.

б) (*Логическая задача.*) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное предыдущему.

в) Дана окружность, центр которой не указан. Как построить центр этой окружности?

г) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — середина отрезка AC. Докажите, что $OB_1 \perp AC$ и $OD_1 \perp AC$.

55. а) В треугольнике ABC $AB = BC$, точка D делит сторону AC пополам, точка E принадлежит отрезку BD. Сравните отрезки AE и CE. Укажите несколько способов решения задачи.

б) К сторонам AB и BC треугольника ABC проведены серединные перпендикуляры, которые пересекаются в точке O. Сравните отрезки OA, OB и OC.

в) В условиях предыдущей задачи дополнительно проведена окружность с центром O и радиусом OA. Пройдет ли эта окружность через вершины треугольника ABC?

г) Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне квадрата является серединным перпендикуляром и к противоположной стороне.

д) Пусть $ABCD$ — квадрат. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку AC пройдет через точки B и D.

56. (*Практические задачи.*) а) Придумайте способ построения серединного перпендикуляра к отрезку на местности. Нельзя ли для этого воспользоваться шнуром с узлом, завязанным в его середине?

б) Докажите, что серединный перпендикуляр к хорде окружности проходит через центр окружности. Встречалась ли ранее аналогичная задача?

в) Из металлической пластинки изготовили круг. В центре его надо просверлить отверстие. Укажите практический способ разметки, с помощью которого можно было бы найти положение центра круга.

57. а) Дана окружность и ее хорда AB. На окружности постройте точку X такую, что $XA = XB$. Сколько решений имеет задача?

б) Дан отрезок AB и прямая a. На прямой a постройте точку X такую, что $XA = XB$. Всегда ли задача имеет решение?
в) Даны отрезки AB и MK. Постройте точку X, равноудаленную от концов отрезка AB и равноудаленную (возможно на другое расстояние) от концов отрезка MK.

§ 2—4

58. При пересечении двух прямых секущей образовались две пары накрест лежащих углов. Докажите, что если накрест лежащие углы одной пары равны, то накрест лежащие углы другой пары также равны.

59. а) Пусть $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = \angle 100°$. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными?
б) Всегда ли прямые AB и CD, о которых говорится в задаче 59, а), не параллельны? Какие случаи должны быть рассмотрены?

60. а) Пусть $\angle ABC = 80°$, $\angle BCD = 100°$. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными?
б) Всегда ли прямые AB и CD, о которых говорится в задаче 60, а), параллельны?

61. а) Накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \alpha$. Могут ли прямые a и b быть параллельными?
б) Односторонние углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \alpha$. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

62. а) Пусть $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 80°$. Чему равен угол BCD?
б) Пусть $AB \parallel CD$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите угол BCD.

63. Пусть AB и CD — два диаметра окружности. Докажите, что четырехугольник $ACBD$ является прямоугольником.

64. а) На рисунке 154, *в* постройте отрезки AD и CB. Докажите, что $\angle CAD = \angle ADB = \angle DBC = \angle BCA = 90°$. Как называется четырехугольник $ADBC$?

б) На рисунке 158 $AB \perp CD$. Докажите, что все углы этого четырехугольника — прямые (нельзя ли сослаться на предыдущую задачу?). Равны ли его стороны? Вспомните, как называется такой четырехугольник.

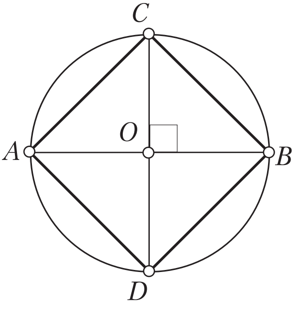


Рис. 158

в) Вершина угла лежит на окружности, а его стороны проходят через концы диаметра. Докажите, что этот угол — прямой. Нельзя ли воспользоваться результатом задачи 64, а)?

г) Могут ли две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, пересечься? Ответ обоснуйте.

65. (*Практическая задача.*) Приложим чертежный треугольник к линейке так, как это показано на рисунке 159. Будем передвигать треугольник так, чтобы одна его сторона скользила по линейке, а по какой-либо другой стороне треугольника проведем несколько прямых. Эти прямые будут парал-

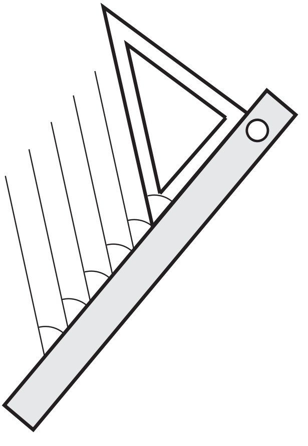


Рис. 159

лельны. Объясните, почему таким способом можно строить параллельные прямые.

66. На рисунке 160 $AB \parallel TK$, $BC \parallel MT$, $AM = CK$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta KTM$.

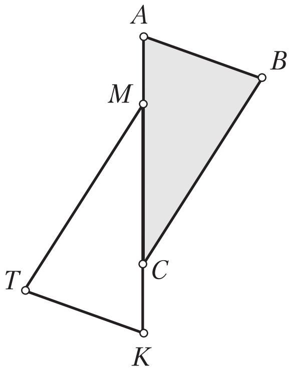


Рис. 160

67. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов при параллельных прямых — параллельны (используются ли при решении данной задачи признаки и свойства параллельных прямых? В какой последовательности?);
б) если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; в) в параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной него стороне, равна $180°$; г) если в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны ($AB = CD$, $BC = AD$), то этот четырехугольник является параллелограммом; д) если в четырехугольнике $ABCD$ суммы углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равны $180°$, то четырехугольник является параллелограммом; е) если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то четырехугольник является параллелограммом.

68. а) Докажите, что если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то такой параллелограмм является прямоугольником.
б) Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то такой параллелограмм является прямоугольником.

в) Назовите некоторые свойства квадрата и докажите их.

г) Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Проведите окружность с центром O и радиусом OA. Докажите, что эта окружность пройдет через все вершины квадрата.

д) (*Обобщение предыдущей задачи.*) Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Проведите окружность с центром O и радиусом OA. Докажите, что эта окружность пройдет через все вершины прямоугольника.

69. а) При пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов. Меньший из них называется ***углом между пересекающимися прямыми***. Найдите угол между прямыми, если один из смежных углов, образуемых при их пересечении, в 3 раза больше другого.

б) Три прямые пересекаются в одной точке. Докажите, что наименьший угол между двумя прямыми не может быть больше $60°$.

70. Пять прямых на плоскости расположены так, что никакие две из них не параллельны. Докажите, что среди них найдутся по крайней мере две прямые, угол между которыми не меньше $36°$. Какое дополнительное построение необходимо выполнить?

71. (*Логическая задача.*) Прочитайте схему, приведенную на рисунке 161. Могут ли прямые, расположенные в одной плоскости, одновременно и не пересекаться и не быть параллельными?

72. С помощью схемы (см. рис. 161) установите, что если прямые, расположенные в одной плоскости, не пересекаются, то они параллельны, и наоборот, если прямые параллельны, то они не пересекаются.

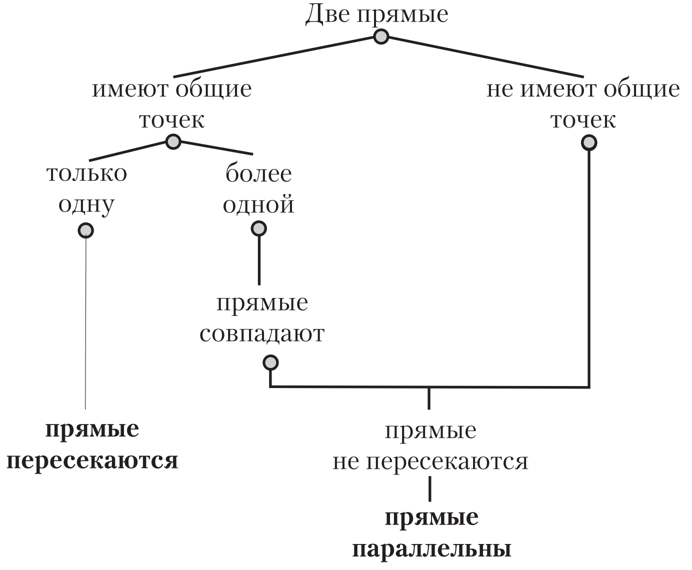


Рис. 161

73. Докажите, что если все прямые, пересекающие прямую a, пересекают прямую b, то $a \parallel b$.

74. Докажите, что если в четырехугольнике Саккери три угла прямые, то четвертый угол тоже прямой.

§ 4—6

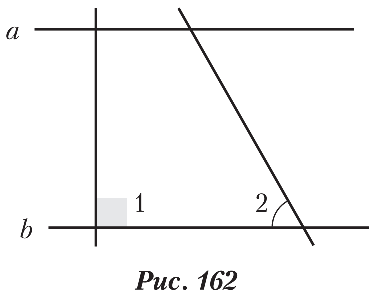


Рис. 162

75. а) 1) На рисунке 162 изображены четыре прямые, причем $a \parallel b$, $\angle 1 = 90°$, $\angle 2 = 60°$. Найдите остальные углы, образованные при пересечении данных прямых.

2) На рисунке 162 найдите пары односторонних углов, сумма которых равна 180°.

б) Докажите, что в четырехугольнике Саккери все четыре угла прямые.

76. а) Постройте параллелограмм, считая данными три его вершины. Разрешается пользоваться линейкой, чертежным треугольником и циркулем.

б) Докажите, что если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то он является квадратом.

77. (*Задача на развитие пространственного представления.*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что четырехугольник AB_1C_1D — параллелограмм.

78. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. Точка K делит отрезок AM в отношении $3:1$ считая от вершины A. В каком отношении прямая BK делит сторону AC? Какие дополнительные построения необходимо выполнить?

79. а) Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. Точка T делит сторону AB в отношении $5:1$ считая от вершины A. В каком отношении прямая CT делит отрезок AM? Какие дополнительные построения необходимо выполнить?

б) В треугольнике ABC точки A_1 и B_1 являются серединами соответственно сторон BC и AC, точка O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. В каком отношении прямая CO делит сторону AB?

80. а) 1) Докажите, что сумма углов прямоугольного треугольника равна 180°. 2) Обобщите это утверждение на произвольный треугольник. 3) Пользуясь этим, докажите, что биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых — перпендикулярны. 4) Докажите обратное утверждение.

б) Докажите, что если стороны некоторого угла перпендикулярны к сторонам прямого угла, то этот угол также будет прямым.

в) Докажите, что два угла с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

81. а) Даны две параллельные хорды окружности и диаметр, который проходит через середину одной из них. Докажите, что этот диаметр перпендикулярен ко второй хорде.

б) Докажите, что прямая, проходящая через середины двух параллельных хорд окружности, проходит через центр окружности.

Тема 3. Треугольник — основная геометрическая фигура

§ 1

82. а) Составьте задачи по рисункам 163, *а*, *б*. Все ли правильно изображено на этих рисунках?

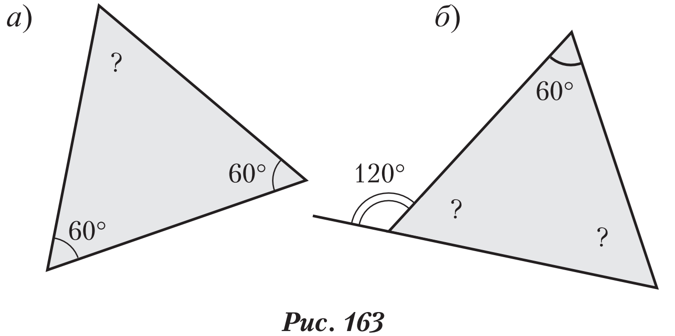


Рис. 163

б) (*Логическая задача.*) Допущена ли ошибка на рисунках 164, *а*, *б*? Какими могут быть углы треугольника? Заметим, что x считается положительным.

в) Может ли быть в треугольнике: 1) два тупых угла; 2) тупой и прямой углы; 3) тупой и два острых; 4) два прямых угла?

83. а) Может ли больший угол треугольника быть меньше 60°?

б) Может ли меньший угол треугольника быть больше 60°?

в) Один из углов треугольника равен 90°. Могут ли два других его угла быть равными? Чему они равны?

84. а) Сумма мер двух углов в треугольнике равна мере третьего угла. Докажите, что в треугольнике имеется прямой угол.

б) Имеется ли в треугольнике прямой угол, если его углы относятся как 1 : 2 : 3?

в) Два угла треугольника относятся как 3 : 7, причем один из них больше другого на 40°. Найдите углы треугольника.

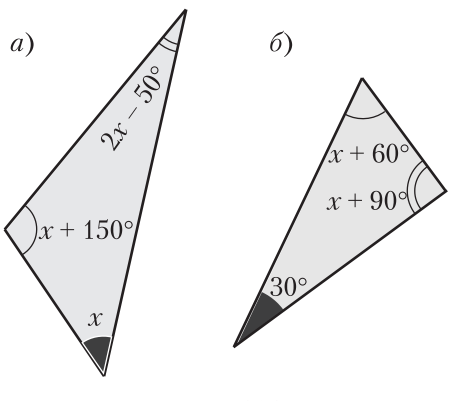


Рис. 164

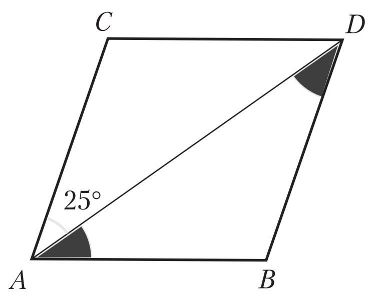


Рис. 165, а

85. Дано (рис. 165, *а*): $AC \parallel BD$, $\angle DAB = \angle BDA$, $\angle CAD = 25°$. Какие из следующих утверждений можно доказать на основе этих данных, а какие нельзя?

1) $\angle ADB = 25°$; 2) $\angle BAD = 25°$; 3) луч AD делит угол CAB пополам; 4) $\angle B = 130°$; 5) $AB = 5$ см; 6) $\angle CAB + \angle DBA = 180°$; 7) $\angle ACD = 130°$.

86. а) Дано (рис. 165, *б*): $AB \parallel CD$, $\angle C = 40°$, $\angle COD = 70°$. Найдите углы треугольников ABO и COD.

б) Дано (рис. 165, *в*): $AB \parallel CD$, $\angle C = \alpha$, $\angle D = \beta$. Найдите остальные углы треугольников ABO и COD.

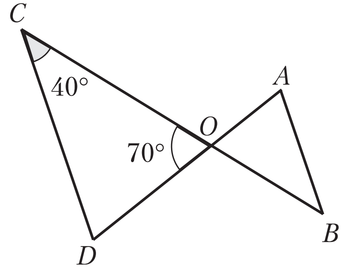


Рис. 165, б

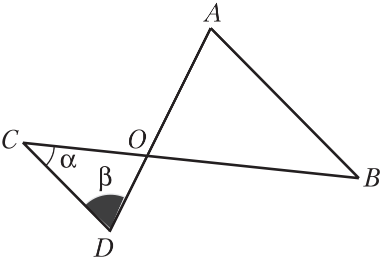


Рис. 165, в

в) Сравните углы треугольников ABO и COD в задачах 86, а), б). Достаточно ли для равенства двух треугольников равенство всех трех соответственных углов?

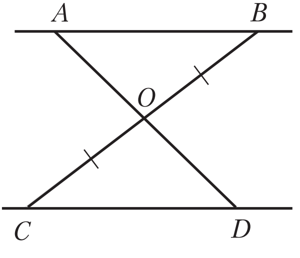


Рис. 166, а

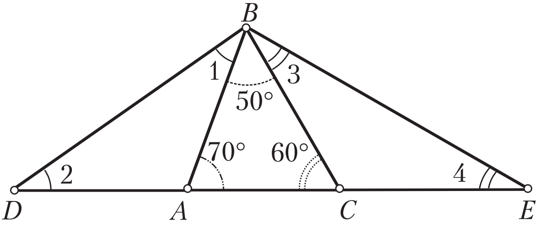


Рис. 166, б

г) Дано (рис. 166, *а*): $AB \parallel CD$, $CO = OB$. Равны ли треугольники AOB и DOC? Чем отличаются данные в этой задаче от данных в задачах 86, а), б)?

д) (*Логическая задача.*) Дано (рис. 166, *б*): $\angle BAC = 70°$, $\angle ABC = 50°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Найдите углы треугольника DBE. Есть ли в этой задаче лишнее данное?

87. а) Докажите теорему (рис. 166, *в*): «Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна ... градусам».

Указание. Вначале выскажите догадку относительно величины этой суммы, а затем постарайтесь доказать или опровергнуть ее.

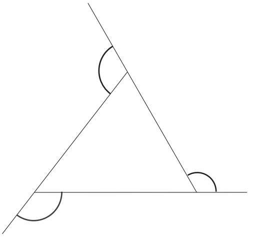


Рис. 166, в

б) Чему равен угол между биссектрисами смежных внутреннего и внешнего углов?

в) Докажите, что $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (рис. 166, *г*).

г) В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, $\angle B = \beta$, биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите угол AOC. Нет ли в задаче лишнего данного?

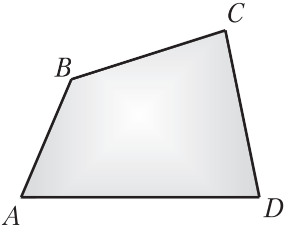


Рис. 166, г

§ 2

88. а) Построены две окружности одинакового радиуса с центрами A и B. Точка C — одна из точек пересечения этих окружностей. Постройте треугольник ABC и установите его вид.

б) Выполните те же построения, что и в предыдущей задаче, только радиусы окружностей возьмите равными отрезку AB. Постройте треугольник ABC и установите его вид.

в) На каждой стороне равностороннего треугольника ABC отложены (по направлению часовой стрелки) равные отрезки: $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Точки A_1, B_1 и C_1 соединены отрезками. Установите вид треугольника $A_1B_1C_1$.

89. Докажите равенство: а) медиан равностороннего треугольника; б) медиан равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам (рассмотрите два способа решения); в) биссектрис равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам; г) высот равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам.

90. (*Практическая задача.*) Чтобы измерить на местности расстояние между точками A и B, между которыми нельзя пройти (!), выполняют построения, указанные на рисунке 167, и измеряют расстояние DE (вместо AB). Почему так поступают?

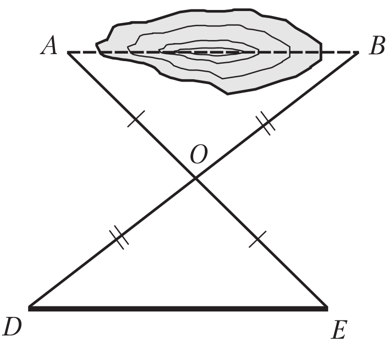


Рис. 167

91. (*Логическая задача.*) Справедливы ли утверждения: а) если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого, то такие треугольники равны; б) в двух треугольниках против равных сторон лежат равные углы?

92. а) Один из углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите остальные его углы.
б) Один из углов равнобедренного треугольника равен α. Найдите остальные его углы.

в) Один из внешних углов треугольника равен 130° (равен α). При каком условии этот треугольник окажется равнобедренным? Может ли он быть равносторонним?

93. а) Угол между биссектрисами двух углов равнобедренного треугольника равен 130°. Найдите углы этого треугольника. Рассмотрите различные варианты выбора биссектрис. Уточнение: пусть O — точка пересечения биссектрис углов A и B. Под углом между этими биссектрисами будем понимать угол AOB.

б) (*Задача на исследование.*) Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей, положив угол между биссектрисами равным 120°. Можно ли этот угол выбирать равным 20°, 45°, 67°, 83°, 87°? В каких границах может изменяться этот угол?

в) В треугольнике ABC AA_1 и CC_1 — биссектрисы, O — точка пересечения этих биссектрис. Докажите, что $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle B + 90°$.

94. Постройте: а) равносторонний треугольник по его медиане; б) равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

95. а) Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

б) (*Логическая задача.*) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи.

в) Вершины равнобедренного треугольника лежат на окружности. Докажите, что высота, проведенная к основанию (или продолжение этой высоты), проходит через центр окружности.

г) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная стороне AC. Эта прямая пересекает сторону AB в точке T, а сторону BC — в точке K. Докажите, что $AT + KC = TK$.

96. Треугольники ABC и CDE равносторонние, основания AC и CE лежат на одной прямой и не накладываются друг на друга, вершины B и D лежат в одной полуплоскости от этой прямой. Какие из следующих утверждений можно доказать на основании этих данных: а) $AD = BE$; б) $AB \parallel CD$; в) $BC \parallel DE$; г) $\angle BCD = 60°$; д) $\angle ADC = 90°$; е) $BD = BC$?

97. Постройте равнобедренный треугольник: а) по высоте, проведенной к основанию, и углу при его вершине; б) по углу при основании и сумме основания и боковой стороны.

98. а) Высота AK, биссектриса BL и медиана CM треугольника ABC пересекаются в одной точке O, причем $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

б) В треугольнике ABC все углы острые, высота CH и медиана BK равны, кроме того, $\angle KBC = \angle HCB$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

в) Найдите углы равнобедренного треугольника, если известно, что прямая, проходящая через вершину угла при основании, делит его на два треугольника, каждый из которых также является равнобедренным.

§ 3

99. а) Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как $5:6$. Найдите средние линии треугольника, если его периметр равен 80 см.

100. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как $3:5$ и меньше основания на 15 см. Найдите средние линии треугольника.

101. а) Дан угол, внутри него точка M. Постройте прямую, проходящую через точку M так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам.

б) Даны три точки P, H и M, которые являются серединами сторон треугольника ABC. Постройте треугольник ABC.

102. Докажите, что если в треугольнике две медианы равны, то этот треугольник — равнобедренный.

103. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O, AB является ее диаметром. Из точки O проведен перпендикуляр OM к стороне AC. Докажите, что OM — средняя линия треугольника ABC.

104. В треугольнике ABC $AC > AB$, $\angle A = \alpha$. На стороне AC взята точка K так, что $CK = AB$. Пусть E и M — середины соответственно отрезков AK и BC. Найдите угол CEM.

§ 4

105. а) Будут ли равны прямоугольные треугольники, если: 1) катеты одного треугольника равны катетам другого; 2) острые углы одного из них равны острым углам другого; 3) гипотенузы треугольников равны?

б) На рисунке 168, *а* $\angle 1 = \angle 2$, $BD = CE$, $\angle D = \angle E = 90°$. Нет ли ошибки на этом рисунке?
в) На рисунке 168, *б* $\angle A = \angle D = 90°$, $BA = CD$. Какие задачи можно составить по этому рисунку?

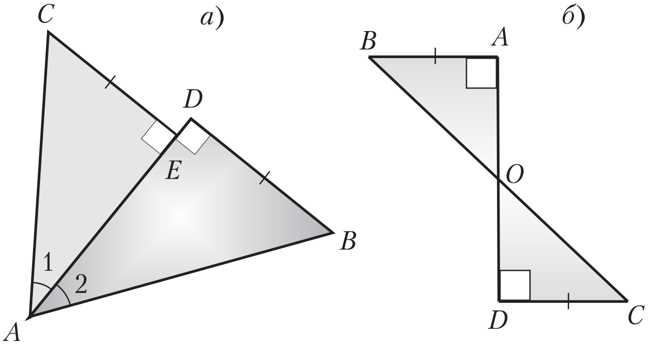


Рис. 168

106. Перпендикуляры, проведенные из внутренней точки K данного угла к его сторонам, равны. Можно ли доказать, что точка K лежит на биссектрисе этого угла?

107. Постройте прямоугольный треугольник: а) по гипотенузе и катету; б) по гипотенузе и острому углу; в) по катету и прилежащему углу.

108. По разные стороны от прямой a даны две точки A и B. Перпендикуляры, проведенные из этих точек на прямую, соответственно равны 10 м и 4 м. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из середины O отрезка AB к данной прямой.

109. Решите предыдущую задачу, положив перпендикуляры, проведенные из точек A и B, равными соответственно a и b.

110. (*Задача олимпиадного уровня.*) Пусть $\angle AOB = 60°$, точка C не является внутренней точкой угла и не лежит на его сторонах. Из точки C проведены перпендикуляры CP, CM и CN соответственно на стороны OA, OB и на биссектрису ON данного угла. Докажите, что если $CM > CP$, то $ON = CM - CP$.

111. Решите предыдущую задачу при условии, что точка C лежит внутри угла AOB. Установите, что в этом случае $ON = CM + CP$.

112. а) Будут ли равны прямоугольные треугольники по: 1) катету и медиане, проведенной к этому катету; 2) катету и медиане, проведенной к другому катету; 3) острому углу и биссектрисе этого угла; 4) острому углу и биссектрисе другого острого угла?

б) Как построить серединный перпендикуляр к отрезку, середина которого недоступна?

в) Одна прямая пересекает две противоположные стороны квадрата в точках E и K. Другая прямая перпендикулярна к первой и пересекает две другие стороны квадрата в точках F и L. Докажите, что $EK = FL$.

§ 5

113. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Найдите: а) катет AC, если гипотенуза $AB = 8$, $\angle B = 30°$; б) гипотенузу AB, если $AC = 5$ и $\angle B = 30°$; в) катет AC, если гипотенуза $AB = c$ и $\angle A = 60°$; г) гипотенузу AB, если катет $AC = b$ и $\angle A = 60°$.

114. Катет, лежащий против угла в 30°, равен 9. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

115. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна m. Найдите катет, лежащий против угла в 30°.

116. (*Логическая задача.*) Медиана, проведенная к гипотенузе, равна 8; гипотенуза равна 16. Найдите неизвестные стороны треугольника. Достаточно ли данных для решения задачи?

117. (*Задача с межпредметным содержанием.*) Санки скользят по ледяной горке (рис. 169). Угол наклона траектории санок к горизонтальной плоскости равен 30°, а скорость движения $v = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Вычислите вертикальную скорость санок ($v_{\text{в}}$).

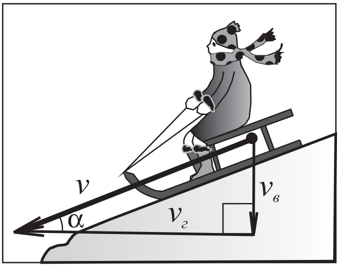


Рис. 169

Указание. Вертикальная скорость — скорость, с которой санки «снижаются» в вертикальном направлении.

118. а) Дан параллелограмм $ABCD$, на сторонах AB и BC которого во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABM и BCK. Докажите, что треугольник MKD — равносторонний.

б) В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, CC_1 — высота, $AC_1 = 1$. Найдите BC_1.

в) В треугольнике ABC: $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$, CC_1 — высота, $AC_1 = 8$. Найдите BC.

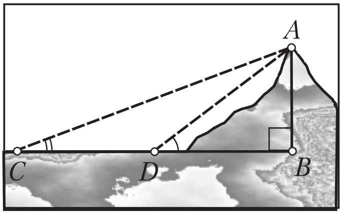


Рис. 170

г) Для измерения высоты холма (рис. 170) отошли от него по прямой и отметили точку D, из которой вершина холма видна под $\angle ADB = 30°$, и точку C, из которой вершина холма видна под $\angle ACB = 15°$. Какое расстояние осталось измерить, чтобы найти высоту холма?

д) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B, равным 36°, проведена биссектриса AA_1. Докажите, что биссектриса AA_1 равна основанию треугольника.

119. Можно ли построить прямоугольный треугольник, у которого: 1) катет $a = 5$, гипотенуза $c = 4$; 2) катет $a = 5$, гипотенуза $c = 7$?

120. а) Сравните хорду CD, не проходящую через центр окружности, с диаметром AB (рис. 171, *а—г*).
Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника.

б) Верно ли, что диаметр окружности есть наибольшая из хорд этой окружности?

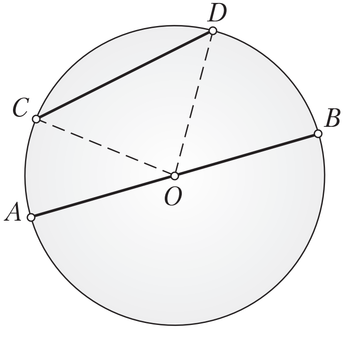


Рис. 171, а

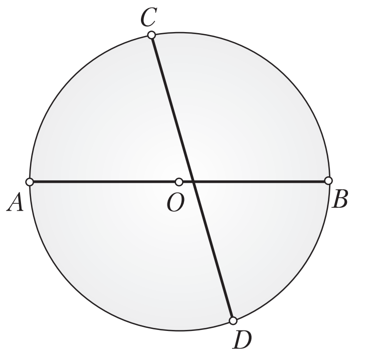


Рис. 171, б

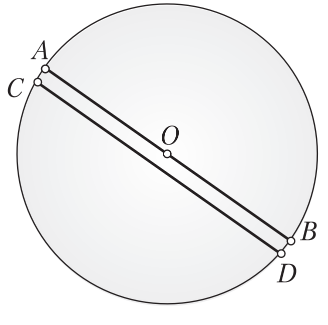


Рис. 171, в

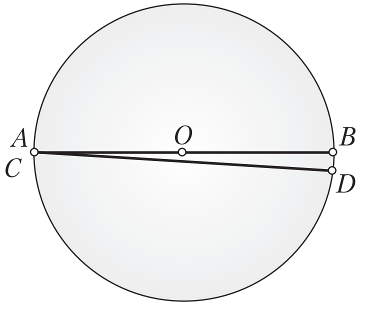


Рис. 171, г

в) Из точки B (рис. 171, *д*), взятой вне окружности, проведена прямая BM, проходящая через центр окружности, и прямая BN, не проходящая через ее центр. Точки K и C (ближайшие к точке B) — точки пересечения этих прямых с окружностью. Сравните отрезки BK и BC. Какое дополнительное построение надо выполнить?

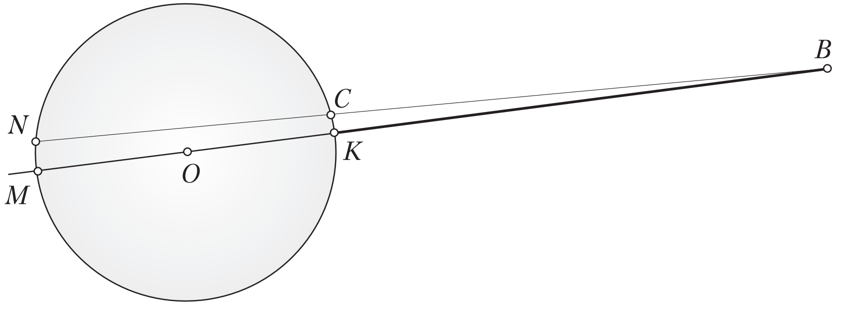


Рис. 171, д

121. а) Известно, что из отрезков a, b и c можно построить треугольник. Докажите, что из отрезков ka, kb и kc $(k > 0)$ также можно построить треугольник.
б) При каком натуральном n из отрезков $n, n+1, n+2$ можно построить треугольник?

§ 7

122. а) Площадь прямоугольного треугольника равна 12, один из катетов равен 5. Найдите второй катет.
б) Площадь прямоугольного треугольника равна 9. Один из катетов в 2 раза больше другого. Найдите катеты.
в) Основание равнобедренного треугольника равно a, высота, проведенная к этому основанию, равна h. Найдите площадь треугольника.

г) В прямоугольнике одна сторона равна a. Диагональ образует с этой стороной угол в 45°. Найдите площадь прямоугольника.

д) Проверьте, справедлива ли формула Пика для невыпуклого многоугольника.

е) Проверьте, справедлива ли формула Пика для прямоугольника, квадрата (в том числе и для единичного квадрата).

123. а) В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что: 1) $S_{ABD} = S_{DCA}$; 2) $S_{ABC} = S_{DCB}$; 3) $S_{BOC} = S_{AOD}$; 4) $S_{AOB} = S_{DOC}$; 5) $S_{AOB} = S_{AOD}$; 6) $S_{AOB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

б) В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC. Какую часть составляет площадь треугольника ABM от площади данного прямоугольника?

в) В прямоугольнике $ABCD$ точка M делит сторону BC в отношении 1 : 3 считая от вершины B. Найдите отношение площади треугольника ABM к площади прямоугольника.

124. а) В произвольном треугольнике ABC высота CC_1 делит сторону AB на части $AC_1 = m$ и $C_1B = n$. Найдите отношение площадей треугольников ACC_1 и BCC_1.

б) В произвольном треугольнике ABC высота CC_1 делит сторону AB на части так, что $AC_1 : C_1B = m : n$. Площадь треугольника ACC_1 равна 3. Найдите площадь треугольника BCC_1.

в) В прямоугольном треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = a$, CC_1 — высота. Докажите, что площадь треугольника ACC_1 в 3 раза больше площади треугольника BCC_1.

г) В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, через середину M гипотенузы AB проведен к ней серединный перпендикуляр, пересекающий катет BC в точке K. Известно, что $S_{AKC} = 5$. Найдите S_{ABC}.

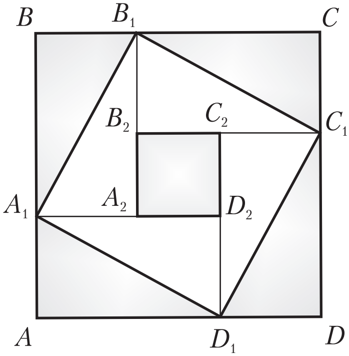


Рис. 172

125. Сторона квадрата $ABCD$ равна 3. На его сторонах по часовой стрелке отложены отрезки $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 1$. Далее выполнили построения, указанные на рисунке 172. Докажите, что данный квадрат разбился на девять частей, площадь каждой из которых равна 1.

§ 8—9

126. а) В прямоугольном треугольнике гипотенуза и катет соответственно равны: 1) 13 и 5; 2) 5 и 4. Найдите второй катет.

б) В прямоугольном треугольнике катеты равны: 1) 8 и 15; 2) 5 и 12. Найдите гипотенузу.

в) Установите вид треугольника, стороны которого равны: 1) 6, 8 и 10; 2) 13,12 и 5.

г) Приведите примеры целочисленных значений сторон прямоугольного треугольника таким образом, чтобы гипотенуза на 1 была больше большего катета.

127. а) Будет ли треугольник прямоугольным, если его стороны равны 5, 6 и 7?

б) Один из катетов равен a, гипотенуза равна c. Найдите второй катет.

в) Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 40. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

128. а) Известны боковые стороны треугольника: $a = 13$ см, $b = 20$ см. Высота $h_c = 12$ см. Найдите основание c.

б) В треугольнике больший угол при основании равен 45°, а высота делит основание на части, равные 8 м и 15 м. Найдите большую боковую сторону.

129. Найдите: а) высоту, проведенную из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на части, равные: 1) 2 см и 8 см; 2) 1 м и 4 м; б) катеты треугольника из предыдущей задачи.

130. а) Катеты равны 5 и 12. Найдите: 1) отрезки, на которые гипотенуза делится проведенной к ней высотой; 2) высоту, проведенную к гипотенузе.

б) Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится проведенной к ней высотой, равной 16 см. Известно еще, что эти отрезки относятся как 1 : 4.

в) Найдите стороны прямоугольного треугольника, данного в предыдущей задаче.

г) Высота, проведенная к гипотенузе и равная 6 см, делит гипотенузу на два отрезка, один из которых равен 4 см. Найдите второй отрезок.

131. а) Докажите, что для прямоугольного треугольника выполняется равенство $ch_c = ab$, где a и b — катеты, c — гипотенуза, h_c — высота, проведенная к гипотенузе.

б) Пусть AC — некоторая хорда окружности, AB — ее диаметр: $AC = 5$ см, $AB = 8$ см. Найдите высоту треугольника ABC, проведенную к стороне AB.

132. а) Найдите высоту равностороннего треугольника, сторона которого равна 6 см.

б) Найдите сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 2 см.

в) Найдите отношение стороны равностороннего треугольника к высоте.

г) Пусть боковая сторона и основание равнобедренного треугольника соответственно равны 6 см и 5 см. Найдите высоту, проведенную к основанию.

133. а) Гипотенуза и катет соответственно равны 5 и 3. Найдите медианы, проведенные к катетам.

б) Гипотенуза и медиана, проведенная к одному из катетов, соответственно равны 13 и $\sqrt{61}$. Найдите катеты.

в) В равнобедренном треугольнике ABC известно, что основание $AC = b$, CC_1 — высота, $AC_1 : C_1B = 7 : 1$. Найдите высоту CC_1.

134. а) Основание равнобедренного треугольника равно 4 см, высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне.

б) Медиана, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, равна 5 см. Высота, проведенная к основанию, равна 8 см. Найдите основание.

в) Основание равнобедренного треугольника равно 4 см, медиана, проведенная к основанию, равна 5 см. Найдите высоту, проведенную к основанию.

г) В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = 2c$, $\angle B = 30°$. Проведен серединный перпендикуляр к стороне AB, который пересекает сторону BC в точке M. Докажите, что: 1) AM — биссектриса угла BAC; 2) $AM = \frac{2c}{\sqrt{3}}$; 3) $MC = \frac{c}{\sqrt{3}}$; 4) $BM : MC = 2$; 5) $BM : MC = AB : AC$.

135. а) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $3a$. На сторонах AB, BC и CA построены соответственно точки A_1, B_1, и C_1 так, что $AA_1 = \frac{1}{3}AB$, $BB_1 = \frac{1}{3}BC$, $CC_1 = \frac{1}{3}CA$. Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

б) В квадрате $ABCD$ на стороне BC взята точка M так, что $BM = \frac{BC}{3}$. Из точки M проведен перпендикуляр на диагональ AC. Найдите его длину, если сторона квадрата равна $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

в) В треугольнике ABC стороны AB и BC соответственно равны 6 и 8, а медиана BB_1 равна 5. Докажите, что этот треугольник является прямоугольным.

г) Найдите площадь треугольника со сторонами 5, 6 и $\sqrt{11}$.

136. а) Пусть $AB = 2R$ — диаметр, O — центр окружности, хорда $CD \perp AB$, M — точка пересечения хорды CD и диаметра AB, $OM = d$. Найдите AC и BC.

б) Вершины квадрата лежат на окружности радиуса R. Найдите сторону квадрата.

в) Вершины равностороннего треугольника лежат на окружности радиуса R. Найдите сторону треугольника.

137. а) Стороны треугольника равны: 1) 3 см, 4 см и 5 см; 2) 5 см, 12 см и 13 см; 3) 8 см, 15 см и 17 см. Какой это треугольник? Найдите высоту, проведенную к большей стороне.

б) В равнобедренном треугольнике основание равно $2\sqrt{2}$ см, а медианы, проведенные к боковым сторонам, перпендикулярны. Найдите эти медианы.

в) В равнобедренном треугольнике основание равно $2\sqrt{2}$ см, а медианы, проведенные к боковым сторонам, равны 3 см. Докажите, что эти медианы перпендикулярны.

г) В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, перпендикулярны и равны 3 см. Найдите основание.

138. а) Докажите, что квадрат медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, в 5 раз меньше суммы квадратов двух других медиан.

б) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Из вершины B к диагонали AC проведен перпендикуляр BB_1. Найдите отрезки, на которые эта диагональ делится точкой B_1.

в) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CC_1. Пусть AM и CK — медианы соответственно треугольников ACC_1 и BCC_1. Докажите, что $AM \perp CK$.

г) (*Задача на развитие пространственного представления.*) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O — середина отрезка BD. Докажите, что треугольник CC_1O — прямоугольный.

139. Точка P лежит внутри прямоугольника $ABCD$. Докажите, что $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

140. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = \sqrt{44}$, высота $BD = 5$. Найдите высоту треугольника BDC, проведенную из вершины D.

141. Докажите, что для любого прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c справедливо неравенство $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Тема 4. Конструктивные методы геометрии: задачи на построение

§ 1

142. Постройте: а) прямоугольный треугольник по медиане, проведенной к гипотенузе, и острому углу; б) треугольник по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины.

143. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к гипотенузе.

144. Постройте треугольник ABC, если $AC = b$, $AB = c$ и известно, что точка M — середина стороны AB — равноудалена от вершин A и C.

145. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к этому катету.

146. Постройте равносторонний треугольник, вершины которого лежали бы на данной окружности.

147. а) С помощью циркуля и линейки разделите прямой угол на три равные части.

б) С помощью циркуля и линейки разделите развернутый угол на три равные части.

148. а) Постройте окружность, проходящую через данные три точки, не лежащие на одной прямой.

б) По данным отрезкам a и b $(b > a)$ постройте отрезки, равные:

1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{b^2 - a^2}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$; 4) $a\sqrt{2}$; 5) $a\sqrt{3}$; 6) $a\sqrt{5}$.

в) Дана прямая a и точка A. Постройте точку B так, чтобы прямая a была бы серединным перпендикуляром к отрезку AB.

149. а) Дана прямая a и точка A. Постройте точку B так, чтобы отрезок AB был перпендикуляром к прямой a.
б) Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и биссектрисе, проведенной из вершины прямого угла.

150. Постройте: а) треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне; б) треугольник по стороне a и высотам h_b и h_c.

§ 2

151. а) Постройте треугольник по двум сторонам a, b и углу A.
б) Даны две окружности с общим центром. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на большей окружности, а две другие — на меньшей.

152. а) Даны прямые a и b. Постройте точку O так, чтобы перпендикуляры, проведенные из этой точки к данным прямым, равнялись бы данным (!) отрезкам m и n.
б) Внутри данного угла постройте точку так, чтобы перпендикуляры, проведенные из этой точки к сторонам угла, были бы равны данному отрезку h.

153. Постройте треугольник: а) по стороне a, медиане m_a и высоте h_a; б) зная b, $a - c$ и угол C; в) по данной стороне, медиане, проведенной из конца этой стороны, и углу между ними.

154. Концы отрезка данной длины скользят по сторонам прямого угла. Постройте линию, которую описывает середина этого отрезка.

155. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B так, чтобы угол между радиусом, проведенным в точку A, и хордой AB был равен 45°.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

3. а) Можно. **б)** Точки на прямой не лежат. **в)** Точка C лежит между точками A и B.

6. а) $\frac{a+b}{2}$. **б)** $\frac{a(n-1)}{n}$.

7. а) На 2, 3, 4 и 5 частей; **б)** 101; **в)** $n+1$. Выполняя рисунки, замечаем, что одна точка разбивает данный отрезок на 2 части, две точки — на 3 части, три точки — на 4 части, четыре точки — на 5 частей, т. е. число частей на 1 больше числа точек. Поэтому 100 точек разобьют отрезок на 101 не перекрывающихся частей, n точек — на $n+1$ не перекрывающихся частей.

9. б) 12.

10. а) 1) На 2, 3, 4 и 5 частей; 2) 101; 3) $n+1$. **б)** 1) 200; 2) $2n$. **в)** $n+1$.

12. а) Не окажется. **б)** Верно. **в)** Может.

13. а) 36°. **б)** $\frac{\alpha}{2}$.

14. а) $n-1$. **б)** $\frac{\alpha(n-1)}{n}$.

15. а) Для одной из сторон данного угла проведите дополнительный луч и рассмотрите получившийся при этом развернутый угол. Установите, что данный угол является частью развернутого угла, и значит, ... **б)** 160°. Рассмотрите исходное положение стрелок в 9 ч. Установите, на какие углы повернется каждая стрелка за 20 мин. **в)** 9 ч 30 мин.

16. а), б) Воспользуйтесь признаком равенства треугольников, известным из предыдущих классов.

17. 1) Обе суммы составлены из шести отрезков, каждый из которых является ребром куба, а у куба все ребра равны между собой. Значит, ... 2) Эти фигуры пространственные — они не лежат в одной плоскости.

19. а) 72°, 108°. **б)** 67,5°, 112,5°. **в)** 108°, 72°.

20. Предложенное задание не является стандартным. Оно предполагает проявление определенной сообразительности, способности геометрически осмыслить проводимые вычисления. Обращаемся к каждому действию по отдельности: выясняем, какое это действие, что оно означает геометрически, проводим соответствующие построения на рисунке. В итоге обнаруживается интересная геометрическая закономерность: «Угол между биссектрисами двух смежных углов — прямой». (Предварительно напоминается определение: луч, выходящий из вершины угла и делящий этот угол пополам, называется биссектрисой угла.)

21. Особенность данного задания состоит в том, что углы в нем рассматриваются в движении, снимается распространенная статичная форма предъявления геометрических фигур. Это побуждает к пространственному представлению и воображению. 1) Выясняется, что угол α увеличивается от $0°$ до $60°$; 2) что происходит при этом с углом β? Угол β уменьшается. Этот вывод хорошо подсказывается как рисунком, так и равенством $\beta = 180° - \alpha$; 3) последнее равенство помогает установить наибольшее значение угла β. Оно получится, когда угол α примет наименьшее значение. Поэтому наибольшее значение угла β равно $180° - 0° = 180°$; 4) наименьшее значение угла β получится, когда α примет наибольшее значение. Поэтому наименьшее значение угла β равно $180° - 60° = 120°$; 5) значит, угол β уменьшается от $180°$ до $120°$: $120° < \beta < 180°$.

22. в) Не может. **г)** 160°.

23. а) В задаче есть лишнее данное. **б)** Задание может выполняться в такой же последовательности, как и предыдущее. Его особенность состоит в том, что данные в нем не только избыточны, но и противоречивы. Это означает, что если один из смежных углов больше другого на 60°, то он не может быть в 3 раза больше этого угла. Итак, в задаче есть лишнее данное. Данные задачи противоречивы. **в)** 1) Устанавливаем, что условие задачи является неполным. В задаче сказано, что один из смежных углов больше другого. На сколько именно больше, не сообщается. С помощью рисунка можно убедиться в том, что условие «больше» не фиксирует величины углов, поэтому данных в задаче недостаточно; 2) составляем задачу с полным условием. Каждый ученик составляет и решает свою задачу. г) Для решения задачи необходимо воспользоваться определением смежных углов и постоянством их суммы. *Решение*. Так как сумма двух смежных углов постоянна, то при увеличении одного из слагаемых этой суммы на 10° другое слагаемое уменьшится на 10°. Поэтому если один из смежных углов увеличился на 10°, то другой уменьшится на 10°. (Полученный вывод целесообразно наглядно подтвердить рисунком.) Переходим к решению второй задачи. Зададимся вопросом: «Как вы думаете, какой ответ следует дать на вопрос второй задачи?» Возможно (по аналогии с результатом первой задачи), хочется дать ответ, что второй угол уменьшится в 10 раз. Как можно подтвердить или опровергнуть это предположение? Проверим, справедливо ли сделанное предположение для углов, равных 10° и 170°. Пусть первый угол увеличился в 10 раз и стал равным 100°. Тогда второй угол окажется равным 80°. Так как 170° : : 80° $\approx 2{,}1 \neq 10$, то видно, что уменьшения второго угла в 10 раз не произошло. Следовательно, высказанное предположение неверно. В общем случае предположение оказалось неверным. Интересно выяснить, найдется ли хотя бы один угол, для которого предположение окажется верным. Пусть $180° - \alpha$ — первоначальная величина второго угла, $180° - 10\alpha$ — измененная величина второго угла. Найдется ли такое α, для которого будет выполняться равенство $\frac{180° - \alpha}{180° - 10\alpha} = 10$? Выполнив преобразования: $180° - \alpha = 1800° - 100\alpha$, $99\alpha = 1800° - 180°$, получим $\alpha = \left(16\frac{4}{11}\right)^{\circ}$. Таким образом, высказанное выше предположение оказывается справедливым всего лишь в одном случае, когда $\alpha = \left(16\frac{4}{11}\right)^{\circ}$. Опыт решения данной задачи свидетельствует о том, что высказанные по аналогии предположения не всегда следует принимать на веру и в целях избежания ошибок они должны подвергаться строгой проверке.

24. а) 150°. **б)** 20°.

26. а) Положите, что один из вертикальных углов равен α. Проведите необходимые вычисления. **б)** Воспользуйтесь тем, что если угол равен 180°, то он развернутый.

27. См. указание к предыдущей задаче.

29. а) 300 дуговым градусам.

б) $\frac{1080}{7}$ дуговых градусов; $\frac{1440}{7}$ дуговых градусов.

30. а) 155 дуговых градусов, 205 дуговых градусов. Для решения задачи меру меньшей дуги обозначьте через x. **б)** $\frac{720}{11}$ дуговых градусов, $\frac{1800}{11}$ дуговых градусов, $\frac{1440}{11}$ дуговых градусов.

31. а) 240°. **б)** 10°.

32. а) Достаточно; **в)** достаточно; **г)** не достаточно.

33. а) Рассмотрите треугольники AOB и A_1OB_1, BOA_1 и B_1OA, ABA_1 и A_1B_1A.

34. Составьте задачи на равенство треугольников и их элементов.

35. а) Воспользуйтесь третьим признаком равенства треугольников.

38. а) Воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников.

39. а) Воспользуйтесь свойством углов при основании равнобедренного треугольника. **б)** Воспользуйтесь равенством углов треугольника ABC.

40. а) Соедините точку O с точками A, B и C отрезками. **б)** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. **в)** Доказательство состоит в том, что на один треугольник надо посмотреть как на два обозначенных по-разному треугольника и убедиться в том, что $\Delta ABC = \Delta CBA$ (по 2-му признаку).

41. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

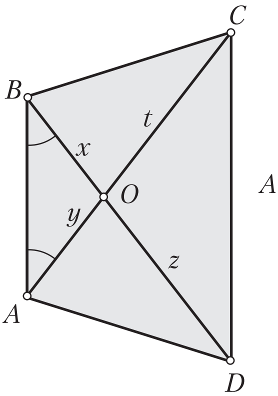


Рис. 173

42. Введите обозначения, показанные на рисунке 173. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta BAD$. По условию $AB + BC + AC = AB + BD + AD$, $CD + DA + AC = CD + BC + BD$. Тогда $BC + AC = BD + AD$, $DA + AC = BC + BD$. Сложив левые и правые части этих равенств, получим: $BC + 2AC + DA = 2BD + BC + AD$. Отсюда $AC = BD$. Далее: $y + t + BC = x + z + AD$, $t + y + AD = x + z + BC$; тогда $BC - AD = x + z - y - t$, $AD - BC = x + z - y - t$; отсюда $BC - AD = AD - BC$, $2(AD - BC) = 0$, $AD = BC$. Тогда $\Delta ABC = \Delta BAD$. Из их равенства следует, что $\angle BAC = \angle ABD$... .

43. 1) Воспользуйтесь вторым признаком равенства треугольников; 2) примените первый признак равенства треугольников; 3) используйте третий признак равенства треугольников.

44. Выполните чертеж-набросок (самостоятельно) и выясните, что решение задачи сводится к построению прямой b. Можно не сразу понять, как нужно строить прямую b. Эти затруднения вызываются тем, что, возможно, не учитываются все данные, которыми необходимо воспользоваться. Поставьте перед собой следующие вопросы: «Все ли данные использованы при решении задачи?», «Какими свойствами обладает прямая b?» Обратитесь к тексту задачи, выделите по отдельности все свойства прямой b: она проходит через точку A; расположена перпендикулярно к прямой AB. Зная это, с помощью чертежного треугольника постройте прямую b. Точку X постройте как точку пересечения прямых a и b. *Построение*: 1) AB; 2) a; 3) b ($A \in b$, $b \perp AB$); 4) X — точку пересечения a и b. *Доказательство* проведите самостоятельно, в устной форме. Задача не предполагает проведение исследования, так как предлагается для конкретного выбора отрезка AB и прямой a, сделанного вами.

45. Воспользуйтесь вначале первым признаком равенства треугольников.

46. а) Примените свойство медианы равнобедренного треугольника и результат задачи 21, а). **б)** Воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников.

47. а) Примените вначале второй, затем первый признаки равенства треугольников. **б)** Учтите, что прямые, проходящие через точки T и M, пересекают одну сторону угла соответственно в точках A и B, а вторую — в точках C и P.

48. а)—в) Воспользуйтесь условием принадлежности точки серединному перпендикуляру к отрезку.

49. Докажите, что $\Delta AOB = \Delta AOD$.

50. Рассмотрите треугольник AB_1C.

51. а) Можно доказать, что $\angle EOP = \angle AOD = 90°$. **б)** Для доказательства того, что хорда PT является диаметром, установите, что углы AOP и BOT — вертикальные (рис. 174). **в)** Докажите вначале, что $AK = DK$. **г)** Рассмотрите треугольники ADC и $A_1D_1C_1$.

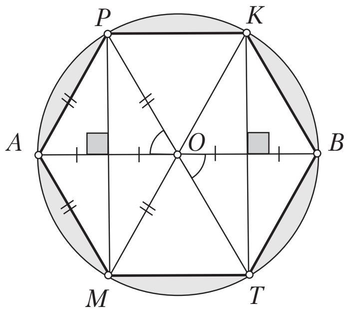


Рис. 174

52. а) Прямые OB и OC совпадают. Рассмотрите случаи, когда лучи OB и OC лежат по одну сторону от прямой OA, когда эти лучи лежат по разные стороны от прямой OA. **б)** $AB \perp CD$. Докажем это (рисунок выполните самостоятельно): 1) $\Delta BCD = \Delta ACD$ по трем сторонам ($BC = AC$, $BD = AD$, DC — общая); 2) из равенства этих треугольников следует: $\angle BCD = \angle ACD$ (или $\angle BCO = \angle ACO$); 3) $\Delta BCO = \Delta ACO$ по двум сторонам и углу между ними ($BC = AC$, CO — общая,

$\angle BCO = \angle ACO$); 4) из равенства этих треугольников следует: $\angle BOC = \angle AOC$; 5) так как $\angle BOC = \angle AOC$ и эти два угла в сумме составляют $180°$, то на каждый из них приходится $\frac{180°}{2} = 90°$; 6) следовательно, $CD \perp AB$;

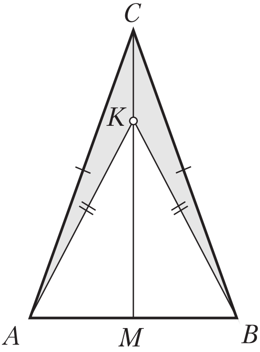


Рис. 175

в) Рассмотрите треугольники ACK и BCK (рис. 175), затем треугольники ACM и BCM (M — точка пересечения CK и AB). Докажите, что $\angle AMC = \angle BMC$.

53. а) Воспользуйтесь теоремой о единственности прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой. **б)** Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Убедитесь, например, что AB и AD перпендикулярны к AA_1.

54. а) Пусть AB — данная хорда, O — центр окружности. Рассмотрите треугольники OMA и OMB. **б)** Обратное утверждение: диаметр, перпендикулярный к хорде, проходит через ее середину. **в)** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

55. а) *1-й способ. Поиск решения.* 1) Рисунок подсказывает (выполните его самостоятельно), что $AE = CE$. Как это равенство можно доказать? Сторонами каких треугольников являются отрезки AE и CE? (Отрезки AE и CE являются сторонами треугольников ADE и CDE.) 2) Чтобы равенство $AE = CE$ выполнялось, что достаточно доказать? (Равенство треугольников ADE и CDE.) Обращаем внимание на то, что выбор именно этих треугольников определяет данный способ решения. 3) Что достаточно доказать для равенства треугольников ADE и CDE? (Равенство углов ADE и CDE, или, в иных обозначениях, — равенство углов ADB и CDB.) 4) Что достаточно доказать для равенства углов ADB и CDB? (Равенство треугольников ADB и CDB.) 5) Что достаточно знать для доказательства равенства треугольников ADB и CDB? (Равенство сторон: $AB = BC$, $AD = DC$, BD — общая.) *2-й способ.* Отрезки AE и CE можно рассмотреть как стороны двух других треугольников. Каких? Обратите внимание на то, что второй способ решения обусловливается выбором другой пары треугольников (ABE и CBE). *3-й способ.* Нельзя ли на рисунке найти серединный перпендикуляр к отрезку AC и воспользоваться его свойством? (Доказываем, что BD — серединный перпендикуляр к отрезку AC и если $E \in BD$, то, по свойству точек серединного перпендикуляра, $AE = CE$). **б)** Для решения задачи необходим аккуратно выполненный чертеж (выполните его самостоятельно). При его построении середины M_1 и M_2 могут быть найдены подбором, серединные перпендикуляры s_1 и s_2 проведены при помощи чертежного треугольника. Построив точку O, полезно с помощью циркуля проверить равенство отрезков OA, OB и OC, высказать соответствующее предположение и перейти к его доказательству. Найти замысел доказательства помогут следующие вопросы. Как строилась точка O? (Проводили серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC ...) Нельзя ли воспользоваться свойством точек серединного перпендикуляра? Каким образом? Воспользуемся тем, что если точка O принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, то она равноудалена от его концов. Имеем: 1) $O \in s_1 \Rightarrow \Rightarrow OA = OB$, 2) $O \in s_2 \Rightarrow OB = OC$, 3) п. 1–2 $\Rightarrow OA = OB = OC$. **г)** Пусть M — середина стороны AD, K — точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне AD со стороной BC. Рассмотрите треугольники AMK и DMK, AKB и DKC.

56. а) Для построения на местности серединного перпендикуляра к отрезку AB достаточно построить две его точки X и Y, равноудаленные от концов отрезка AB. При этом можно использовать шнур, длина которого больше длины отрезка AB. Отметим середину шнура. Закрепим концы шнура в точках A и B и натянем его за середину. Отметим положение середины шнура на местности точкой X. Аналогично построим точку Y. Прямая XY — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Выполните рисунок. **в)** В слесарном деле есть специальные инструменты, которые позволяют вычерчивать геометрические фигуры на металлической пластинке. Эти построения называются разметкой. Дан круг. Проведем в нем две хорды AB и BC (рисунок выполните самостоятельно) и их серединные перпендикуляры s_1 и s_2. Они пройдут через центр данного круга. Следовательно, искомый центр круга строится как точка пересечения серединных перпендикуляров s_1 и s_2. Качество построений искомого центра полезно проверить с помощью циркуля: проводим окружность с центром O и радиусом OA и смотрим, совпадает ли она с данной.

57. а) Воспользуйтесь серединным перпендикуляром к хорде AB. Заметьте, что задача имеет два решения. **б)** Сравните эту задачу с задачей 56, а). **в)** Воспользуйтесь двумя серединными перпендикулярами.

59. а) С помощью линейки и транспортира вначале постройте $\angle ABC = 70°$. Затем от луча CB отложите $\angle BCD = 100°$. Построение угла при помощи транспортира поможет обнаружить возможность выполнения двух различных рисунков, удовлетворяющих условию задачи. (Предоставляем вам возможность выполнить рисунок самостоятельно.) При решении задачи, может быть, вы сразу не заметили все возможные случаи. Построив углы ABC и BCD односторонними, вы, вероятно, утверждаете, что прямые AB и CD не могут быть параллельными, и считаете решение задачи законченным. Ответ правильный, но обоснование его неполное. На основе одного рассмотренного случая нельзя делать общий вывод. Углы ABC и BCD могут быть накрест лежащими (условие задачи допускает это). Вдруг в этом случае прямые AB и CD окажутся параллельными?! Убеждаемся, что и в этом случае прямые не могут быть параллельными. После этого делаем общий вывод. *1-й случай*: углы ABC и BCD — односторонние. Тогда: 1) $\angle ABC + \angle BCD = 70° + 100° = 170° \neq 180°$; 2) поэтому $AB \nparallel CD$. *2-й случай*: $\angle ABC$ и $\angle BCD$ — накрест лежащие. Тогда: 1) $\angle ABC \neq \angle BCD$; 2) поэтому и в этом случае $AB \nparallel CD$. *Вывод*: прямые AB и CD не могут быть параллельными.

60. а) Возможны различные ситуации. Если, например, вы начали с рассмотрения углов ABC и BCD как односторонних, то сразу обнаруживается, что $AB \parallel CD$. Поэтому на поставленный вопрос дается утвердительный ответ: «Прямые AB и CD могут быть параллельными». Если начали с рассмотрения углов ABC и BCD как накрест лежащих, то прямые в этом случае не будут параллельными. Однако торопиться давать отрицательный ответ нельзя. Выясните, как еще могут располагаться углы ABC и BCD, какой ответ следует дать в этом случае. Только после этого можно сделать общий вывод. Возможна и третья ситуация, когда вы сразу видите оба случая и даете общий ответ.

61. а) Величины углов задаются буквами. Поэтому уровень общности выше, нежели в задачах с числовыми данными. В этом состоит одна из ценных особенностей задачи. На первый взгляд (выполните рисунок) кажется, что накрест лежащие углы α и $180° - \alpha$ всегда не равны. На самом деле углы α и $180° - \alpha$ при некотором значении α оказываются равными. Как в этом можно убедиться? Указанное значение α найдем, решив уравнение $\alpha = 180° - \alpha$. Корень этого уравнения: $\alpha = 90°$. Таким образом, если $\alpha = 90°$, то накрест лежащие углы α и $180° - \alpha$ равны между собой и, следовательно, $a \parallel b$. *Вывод*: прямые a и b могут быть параллельными. **б)** 1) Найдем сумму односторонних углов α и $180° - \alpha$: $\alpha + (180° - \alpha) = 180°$; 2) так как при любом α эта сумма равна $180°$, то всегда $a \parallel b$ (выполните рисунок); 3) если всегда $a \parallel b$, то на вопрос задачи: «Могут ли...» следует дать утвердительный ответ.

62. а) В расположении углов ABC и BCD возможны два случая: 1) углы ABC и BCD — накрест лежащие (выполните рисунок). В этом случае $\angle ABC = \angle BCD = 80°$; 2) углы ABC и BCD — односторонние (выполните отдельный рисунок). Тогда $\angle ABC + \angle BCD = 180°$. Поэтому $80° + \angle BCD = 180°$. Отсюда $\angle BCD = 180° - 80° = 100°$. *Ответ*: угол BCD равен $80°$ или $100°$. **б)** Как связана данная задача с предыдущей, не аналогичны ли они? Какие случаи необходимо рассмотреть? Эта задача является обобщением предыдущей. Для ее решения необходимо рассмотреть такие же случаи, как и выше. В первом случае $\angle BCD = \alpha$, во втором случае $\angle BCD = 180° - \alpha$. Подводя итог решения задач данной серии, еще раз обращаемся к поставленной перед этими задачами проблеме и закрепляем установку: решение многих задач ведется через рассмотрение отдельных случаев; это решение является полным и, следовательно, правильным, если рассмотрены все возможные случаи; в противном случае его нельзя считать правильным.

63. Докажите вначале параллельность противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Затем воспользуйтесь свойством односторонних углов при параллельных прямых.

64. г) Не могут.

65. Продолжите нарисованные лучи в противоположном направлении. Рассмотрите накрест лежащие углы. Убедитесь в том, что этим способом можно построить прямую, параллельную любой данной прямой.

66. Воспользуйтесь свойством параллельных прямых и вторым признаком равенства треугольников.

67. а) Рассмотрите новые накрест лежащие углы; **б)** докажите, что $\Delta ABC = \Delta CDA$; **в)** воспользуйтесь свойством односторонних углов при параллельных прямых; **г)** воспользуйтесь признаком параллельных прямых; **е)** воспользуйтесь задачей 67, г).

69. б) Обратите внимание на сумму углов.

70. Возьмите некоторую точку и проведите через нее прямые, параллельные данным.

71. Не могут.

76. а) Параллельные прямые стройте с помощью линейки и чертежного треугольника. **б)** Пусть O — точка пересечения диагоналей. Рассмотрите треугольники AOB и AOD.

77. Воспользуйтесь тем, что в пространстве, как и на плоскости, выполняется следующее предложение: если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой. С помощью этого предложения докажите, что $AD \parallel B_1C_1$. По определению параллельных прямых эти прямые лежат в одной плоскости... Завершите решение.

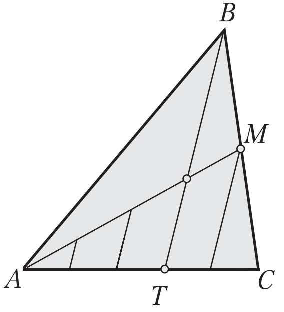


Рис. 176

78. Разделите отрезок AM (рис. 176) на четыре равные части и проведите прямые, параллельные BK.

80. в) *1-й способ*: воспользуйтесь тем, что сумма углов треугольника равна 180°; *2-й способ*: через вершину одного из углов проведите прямые, параллельные сторонам другого угла, используйте признаки и свойства параллельных прямых.

81. а) Воспользуйтесь тем, что диаметр, проходящий через середину хорды окружности, перпендикулярен к этой хорде. **б)** Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

82. а) Рисунки правильные. **б)** Для первого рисунка должно выполняться равенство: $x + (x + 150°) + (2x - 50°) = 180°$. Отсюда $4x + 100° = 180°$, $4x = 80°$, $x = 20°$. Итак, один внутренний угол треугольника равен 20°. Тогда другой угол равен 170°. Оказалось, что сумма двух внутренних углов треугольника 20° + 170° больше 180°. Этого быть не может. Следовательно, соотношения между углами на рисунке 163, *а* указаны неправильно. Для второго рисунка имеем: $30° + (x + 90°) + (x + 60°) = 180°$. Отсюда $2x + 180° = 180°$, $x = 0°$. Поэтому соотношение между углами треугольника, указанное на этом рисунке, также невозможно.

86. а) Воспользуйтесь теоремой о сумме углов треугольника, равенством вертикальных углов и свойством параллельных прямых. Осуществить анализ задачи и поиск решения помогут следующие вопросы и указания: «Что известно в задаче? Что нужно найти?», «Какие следствия можно получить из условий?», «Рассмотрите углы DCO и ABO. Какие они?», «Воспользуйтесь свойством накрест лежащих углов при параллельных прямых», «Какими являются углы COD и AOB?» и т. д. **б)** Задача решается по аналогии с предыдущей. **в)** При выполнении данного задания устанавливается важный теоретический факт о том, что для равенства треугольников недостаточно равенства соответствующих углов. **г)** $AB \parallel CD \Rightarrow$ ($\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$) как накрест лежащие. Необходимо установить, равны ли треугольники AOB и DOC, т. е. выполняется ли для них один из признаков равенства. Известно, что $CO = OB$, значит, есть смысл рассмотреть углы, прилежащие к этим сторонам, и проверить их равенство. Прилежащими к CO являются углы DCO и COD, а к OB — углы ABO и BOA. Завершите решение задачи. **д)** Равные углы 1 и 2 можно найти по теореме о сумме углов треугольника. Для этого нужно знать угол DAB, который является смежным с $\angle BAC = 70°$. Аналогично можно найти равные углы 3 и 4, угол DBE находится как сумма $\angle 1 + \angle 3 + \angle ABC$. Таким образом, приходим к следующему решению: 1) $\angle DAB = 180° - \angle BAC = 180° - 70° = 110°$; 2) $\angle 2 + \angle 1 + 110° = 180° \Rightarrow \angle 2 = \frac{180° - 110°}{2} = 35°$; 3) $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 180° - 60° = 120°$; 4) $\angle 4 = \angle 3 = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$; 5) $\angle DBE = 35° + 30° + 50° = 115°$. В задаче имеется лишнее данное: один из углов треугольника ABC, например, $\angle ABC = 50°$. Этот угол можно найти по теореме о сумме углов треугольника, применяя ее к треугольнику ABC.

87. а) Выполняем рисунок, вводим обозначения, анализируем его, устанавливаем, что в теореме речь идет о сумме углов 4, 5 и 6. Выскажем догадку относительно величины этой суммы. Для этого попытаемся мысленно «оторвать» углы 4, 5 и 6 и сложить их при вершине C. В действительности никакого отрывания углов проводить не будем, а проведем $CQ \parallel BA$. Наблюдение подсказывает, что $\angle QCR = \angle 5$, $\angle QCB = \angle 6$. Тогда $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle RCB + \angle QCB + \angle QCR = 360°$. В результате высказываем догадку: «Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°». *1-й способ* (выполните рисунок). Докажем, например, что $\angle QCR = \angle 5$. Для этого достаточно воспользоваться параллельностью прямых CQ и AN, а значит, равенством накрест лежащих углов QCA и 1. Аналогично доказываем, что $\angle QCB = \angle 6$. Тогда $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle RCB + \angle QCB + \angle QCR = 360°$. *2-й способ.* Запишем суммы смежных углов при каждой вершине: $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, $\angle 2 + \angle 6 = 180°$, $\angle 1 + \angle 5 = 180°$. Сложим левые и правые части этих равенств: $(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 540°$, $180° + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 540°$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540° - 180°$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$. *3-й способ.* Воспользуемся тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, $\angle 5 = \angle 2 + \angle 3$, $\angle 6 = \angle 1 + \angle 3$. Сложим левые и правые части этих равенств: $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2 \cdot 180°$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$.

88. а) Так как $AC = BC$, то треугольник ABC — равнобедренный. **в)** Сравним стороны $\Delta A_1B_1C_1$. Для этого рассмотрим треугольники A_1AB_1, B_1BC_1, C_1CA_1. 1) $CA_1 = AB_1 = BC_1$ (по условию); 2) $B_1B = C_1C = A_1A$ (если от равных сторон отнимем равные отрезки, то полученные отрезки будут равны); 3) $\angle A = \angle B = \angle C$ (свойство углов равностороннего треугольника); 4) п. 1—3 $\Rightarrow \Delta A_1AB_1 = \Delta B_1BC_1 = \Delta C_1CA_1$ (по двум сторонам и углу между ними); 5) п. 4 $\Rightarrow A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$; 6) п. 5 $\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1$ — равносторонний.

89. а), б) Воспользуйтесь 1-м признаком равенства треугольников; **в, г)** воспользуйтесь 2-м признаком равенства треугольников.

90. Докажите, что $DE = AB$.

91. а) Да; **б)** нет.

93. в) Проведите луч BO и воспользуйтесь свойством внешнего угла треугольника. Введите обозначения величин углов.

95. а) Обозначьте угол при основании равнобедренного треугольника через α и воспользуйтесь тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. **б)** Обратное утверждение: «Если из вершины равнобедреннего треугольника проведен луч, параллельный основанию треугольника, то этот луч является...» Как и выше, обозначьте угол при основании равнобедренного треугольника через α. Осталось выразить через α весь внешний угол и его части. **в)** Воспользуйтесь свойством точек, равноудаленных от концов отрезка. **г)** Воспользуйтесь накрест лежащими углами при параллельных прямых, найдите на рисунке равнобедренные треугольники.

96. Утверждение а) следует из равенства треугольников ACD и BCE. Они равны по двум сторонам и углу между ними (рис. 177, *а*): $AC = BC$, $CD = CE$, $\angle ACD = \angle BCE = 120°$. Оставшуюся часть задания рекомендуется выполнять устно. Так как сумма односторонних углов BAC и DCA равна 180° ($\angle BAC + \angle DCA = 60° + 120° = 180°$), то прямые AB и CD параллельны. Следовательно, второе утверждение доказано на основании имеющихся данных. Аналогично доказывается утверждение в). Утверждение г) также доказывается на основании имеющихся данных: $\angle BCD = 180° - (\angle ACB + \angle DCE) = 180° - (60° + 60°) = 180° - 120° = 60°$. Утверждение д) не может быть до-

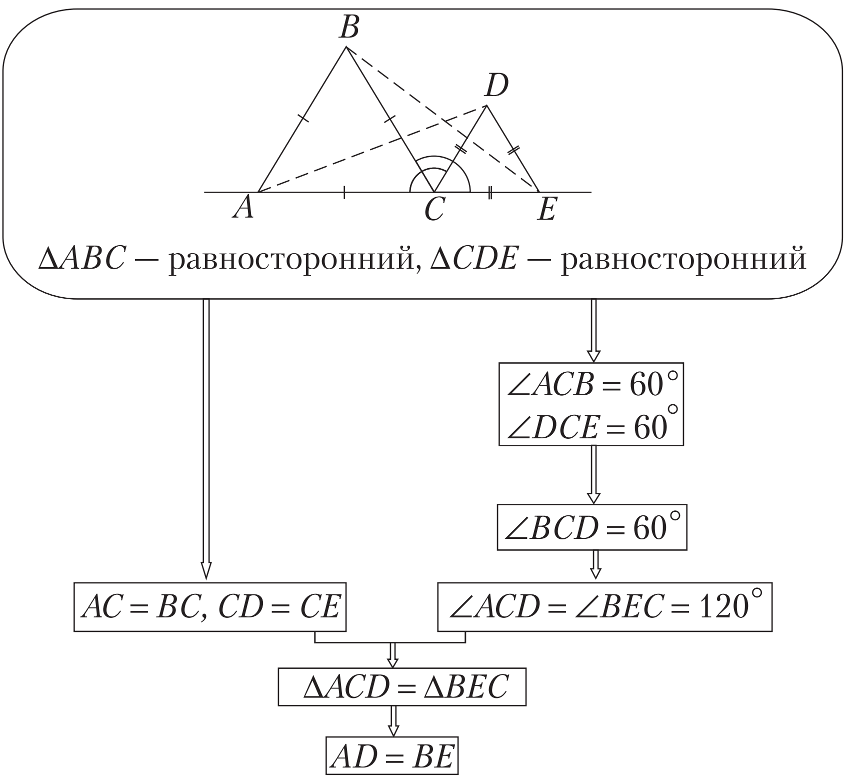


Рис. 177, а

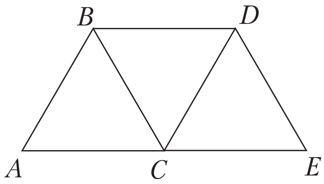


Рис. 177, б

казано на основании имеющихся данных. Утверждение е) также не может быть доказано на основании имеющихся данных. Отрезки BD и BC могут быть равными только при условии, когда треугольник BCD окажется равносторонним. Для этого треугольники ABC и CDE должны быть равными (рис. 177, *б*), но наши данные такого требования не содержат. Опыт исследования рассматриваемой учебной проблемы подсказывает обобщение, показывающее, на каком логическом законе делается вывод о том, что из утверждений A и B не следует утверждение C. Чтобы установить, что (A и B) $\nRightarrow C$, подбираем пример, в котором утверждения A и B выполняются, а утверждение C — не выполняется. Это и означает, что на основании утверждений A и B нельзя доказать утверждение C.

97. б) Рассмотрите треугольник со стороной, равной указанной сумме.

98. а) Рассмотрите треугольники ABO, AMC и BMC, BOM и BOK, ABK и CBM (рис. 178, *а*). **б)** Пусть O — точка пересечения BK и CH, $\angle KBC = \angle HCB = \alpha$. Докажите, что: 1) треугольник OHK — равнобедренный; 2) $\angle OHK = \angle OKH = \alpha$; 3) $KH \parallel CB$; 4) H — середина AB, CH — медиана; 5) $CB = CA$; 6) $HB = KC$; 7) $AB = AC$ (рис. 178, *б*). **в)** 72°, 72°, 36°.

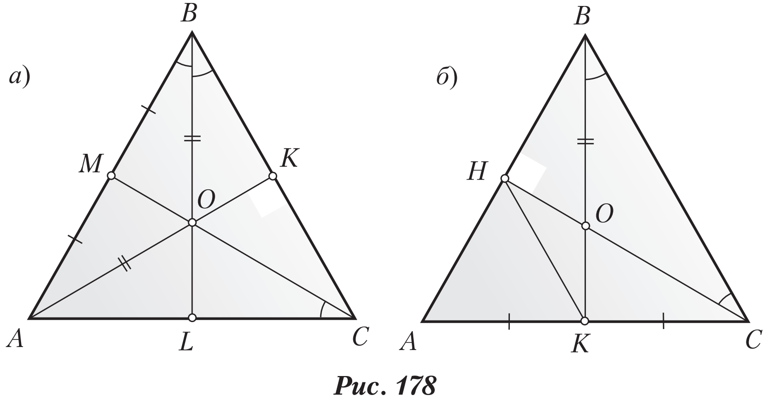


Рис. 178

99. б) Составьте вначале план решения задачи.

101. а) *Анализ.* Допустим, что прямая BC проведена так, как требуется в задаче (рис. 179). В результате получен треугольник ABC,

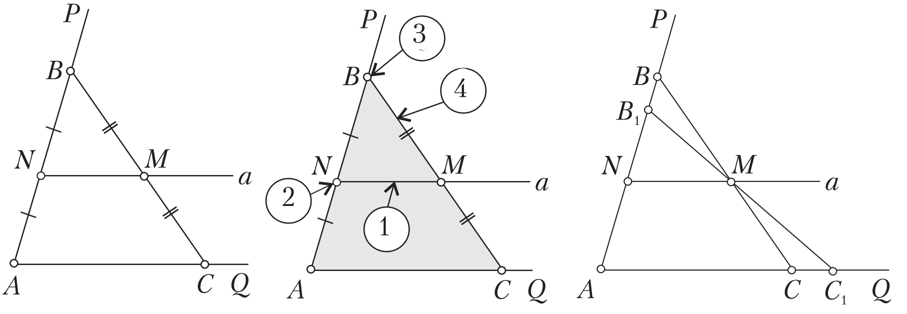


Рис. 179

сторона BC которого делится точкой M пополам. Какими свойствами обладают вершины ΔABC? Какие нужно выполнить дополнительные построения? Нельзя ли воспользоваться средней линией треугольника? Для построения средней линии через точку M проведем прямую a, параллельную AQ. Пусть N — точка пересечения этой прямой со стороной AP. Тогда MN — средняя линия треугольника ABC. Поэтому $AN = NB$. Нельзя ли этими свойствами воспользоваться для построения вершины B? Замечаем, что, действительно, зная один конец отрезка (точку A) и середину отрезка (точку N), можно построить второй конец (точку B). Построив точку B и проведя прямую BM, построим искомую прямую BC.

102. Рассмотрите параллелограмм, одной стороной которого является одна из данных медиан, а другой — средняя линия треугольника.

104. Проведите среднюю линию MT треугольника ABC, параллельную стороне AB. Тогда угол $MTC = \alpha$. Обозначьте $\angle MET$ через x. Докажите, что треугольник EMT — равнобедренный. Для этого установите, что $MT = ET$. Введите обозначения длин сторон. В итоге получите, что $x = \frac{\alpha}{2}$.

105. а) 1) Будут. Треугольники будут равны по 1-му признаку равенства произвольных треугольников. **б)** На рисунке есть ошибка: катеты AE и AD должны быть равными.

106. Можно. Воспользуйтесь признаком равенства прямоугольных треугольников. Каким?

107. **а)** Постройте вначале прямой угол.
108. 3 см.
109. $\dfrac{a-b}{2}$.
110. Установите, что треугольник OKK_2 (рис. 180) — равносторонний и в нем $ON = KK_1 = TM$. Для решения задачи необходимо установить также, что $\Delta CPK = \Delta CTK$ и $CP = CT$.

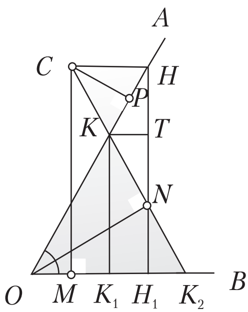


Рис. 180

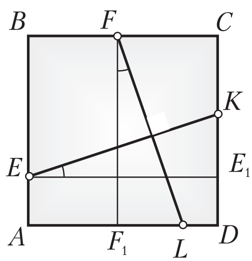


Рис. 181

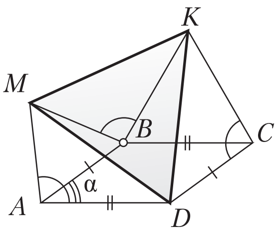


Рис. 182

112. **а)** Воспользуйтесь признаками равенства прямоугольных треугольников. **в)** Постройте два прямоугольных треугольника, гипотенузами которых являлись бы соответственно EK и FL (рис. 181).
114. 9.
115. m.
116. Данных недостаточно.
117. $3\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.
118. **а)** Рассмотрите треугольники BMK, CDK и AMD (рис. 182). Воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников. **б)** 3. **в)** 16. **г)** Так как $CD = 2AB$, то, измерив CD, найдем AB.
119. 1) Нельзя.
120. **а)** $CD < AB$. **б)** Верно. **в)** $BK < BC$. Запишите неравенство для сторон треугольника OBC.
121. **б)** $n > 1$.
122. **а)** 4,8. **б)** 3 и 6. **в)** $\dfrac{1}{2}ah$. **г)** a^2.
124. **а)** $m : n$. **б)** $\dfrac{3n}{m}$. **в)** Основания треугольников: $\dfrac{3a}{2}$ и $\dfrac{a}{2}$. Далее воспользуйтесь результатом задачи 124, а).

126. в) Воспользуйтесь таблицей «Пифагоровы тройки чисел».
127. б) $\sqrt{c^2 - a^2}$. **в)** 20,5.
128. а) 21 см, 11 см. **б)** 17 м.
129. а) 4 см.
130. б) 8 см, 32 см. **г)** 9 см.
131. а) Выразите дважды площадь данного треугольника.
135. а) Установите, что треугольник C_1B_1C — прямоугольный; $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = a$. **б)** 1. **в)** Найдите гипотенузы. Проверьте, не выполняется ли теорема обратная теореме Пифагора. **г)** Установите, что данный треугольник — прямоугольный с катетами, равными 5 и $\sqrt{11}$.
136. а) $\sqrt{2R(R-d)}, \sqrt{2R(R+d)}$.
137. б) 3 см. **в)** Воспользуйтесь рисунком к предыдущей задаче. **г)** $2\sqrt{2}$ см. Воспользуйтесь рисунком, полученным при решении двух предыдущих задач.
138. а) Обозначьте катеты через a и b. Воспользуйтесь свойством медианы, проведенной к гипотенузе, и теоремой Пифагора. **б)** $\frac{9}{5}$ см, $\frac{16}{5}$ см. **в)** Рассмотрите треугольник CC_1C_2, в котором отрезок AM был бы средней линией При помощи теоремы, обратной теореме Пифагора, установите, что треугольник KCC_2 прямоугольный (рис. 183).

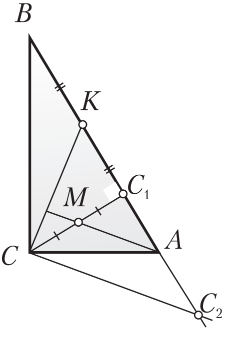


Рис. 183

141. Выполните следующие преобразования: $a + b \le c\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le 2c^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$. Так как последнее неравенство выполняется очевидным образом, то данное неравенство также выполняется.
144. Выясните, нельзя ли построить точку M.
147. а) Разделите вначале прямой угол на углы, равные 60° и 30°. **б)** Постройте вначале вспомогательный прямоугольный треугольник.
148. а) Рассмотрите серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC. **б)** 1) Постройте прямоугольный треугольник с катетами a и b. 2) Постройте прямоугольный треугольник с гипотенузой b и катетом a. 3) Постройте половину отрезка, построенного в предыдущей задаче. 4) Постройте прямоугольный треугольник

с катетами, равными a. 5) Постройте прямоугольный треугольник с катетами, равными a и $a\sqrt{2}$. 6) Постройте прямоугольный треугольник с катетами, равными a и $2a$.

150. а) Пусть в треугольнике ABC третьей стороной является сторона AC. Рассмотрите прямую, проходящую через вершину B и параллельную AC. При исследовании обратите внимание на то, что задача может иметь два решения.

151. а) Воспользуйтесь методом ГМТ. Установите, когда задача не имеет решения, имеет одно решение, имеет два решения. **б)** Пусть вершины A и C искомого треугольника лежат на меньшей окружности, а вершина B — на большей окружности. Проведите диаметр большей окружности, выходящий из точки B. Воспользуйтесь тем, что этот диаметр лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC и $\angle OBA = 30°$ (O — центр данных окружностей). Установите, что задача может не иметь решения, иметь одно решение, иметь два решения.

152. а) Рассмотрите два случая: данные прямые пересекаются, они параллельны. Установите, что в первом случае задача имеет четыре решения, а во втором случае решений либо нет либо их бесконечное множество. **б)** Эта задача является частным случаем задачи 152, а).

153. а) Рассмотрите прямую, проходящую через вершину A и параллельную стороне BC, воспользовавшись методом ГМТ.

154. Постройте отрезок, соединяющий вершину прямого угла с серединой данного отрезка.

Содержание

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна
Тавгень Олег Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. 7 КЛАСС

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Ответственный за выпуск *Д.Л. Дембовский*

Подписано в печать 20.12.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 8,33. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.