Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия
7–9 классы
Многообразие идей и методов

Пособие для учителей
общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

Минск • «Аверсэв» • 2011

УДК 372.851.4.046.14
ББК 74.262.21
Р59

Серия основана в 2010 году

Рогановский, Н. М.

Р59 Геометрия. 7—9 классы. Многообразие идей и методов : пособие для учителей общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 313 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-529-691-2.

Данное пособие входит в состав учебно-методического комплекса и предназначено для организации и проведения факультативных занятий по геометрии в 7—9 классах.

Адресовано учителям общеобразовательных учреждений.

УДК 372.851.4.046.14
ББК 74.262.21

ISBN 978-985-529-691-2

Введение

Изучение спроса учителей и учащихся показало, что наибольшую пользу факультативные занятия приносят, если они используются **для углубления и расширения основного курса**, решения задач повышенной трудности, для проведения кружковой работы. Именно эти потребности практики обучения положены в основу учебно-методического комплекса по данному факультативному курсу. Названиям тем и входящих в них параграфов в пособиях для учащихся придан научно-популярный, занимательный характер, позволяющий не только заинтересовать учащихся, но и более ярко акцентировать те или иные особенности геометрического материала и, прежде всего, идеи и методы школьного курса геометрии. При этом важно показать эти методы в действии, как методы построения теории.

В соответствии с этим в **7 классе** первая тема посвящена разъяснению того, как строится геометрия. В учебный текст включены не только формулировки тех или иных аксиом, но и пояснения: зачем они нужны, что можно определить, доказать с их помощью, какой шаг вперед в построении геометрии они позволяют сделать. Такой методический подход проявляется уже в названиях параграфов: «Аксиомы, определения и теоремы: кому и зачем они нужны», «Аксиомы прямой и расстояния. Что можно определить с их помощью?», «Аксиомы полуплоскости и луча: их возможности в построении геометрии», «Аксиомы измерения и откладывания углов. Почему угол не может быть больше 180°?» и т. д. Особое внимание уделено аксиоме параллельных прямых. При изложении учебного материала внимание учащихся обращается на то, используется или не используется в нем аксиома параллельных. Эти и другие приемы позволяют сделать акцент не на заучивании готовой теории, а на процессе ее построения. Определяется своего рода раздел между различными частями геометрии, которым служит аксиома параллельных прямых. Обращение к идейной стороне учебного материала прослеживается во всех последующих темах. Достаточно выпукло представлены методы школьной геометрии: методы синтетической геометрии (метод равных треугольников, метод геометрического места точек в задачах на построение, использование свойств различных видов треугольников, параллельных и перпендикулярных прямых и т. д.), а также аналитические, вычислительные методы (теорема Пифагора и обратная ей теорема, уравнения и неравенства, соотношения, связанные со сторонами, углами и площадями треугольника и прямоугольника). Применение учащимися математических методов облегчается своевременным ознакомлением их со схемами и признаками методов. Как правило, это делается в начале темы. Доказательства структурированы таким образом, чтобы в них наглядно было видно применение каждого математического метода. Стимулированию интереса служит включение (главным образом на уровне задач) таких вопросов, как четырехугольник Саккери, теорема Жордана, условия принадлежности точки внутренней или внешней области многоугольника, формула Пика и др. На пропедевтическом уровне вводится понятие квадратного корня.

В **8 классе** факультативный курс «Геометрия. Многообразие идей и методов» сохраняет общий замысел — он является своего рода **сопровождением (по содержанию) базового и повышенного курсов, посильно расширяя и дополняя их**. Содержание данного факультативного курса делает больший **акцент на математические методы**, являющиеся основным инструментом изложения теории и решения задач.

Средовый подход рассматривается как общая дидактическая основа организации обучения в современной общеобразовательной школе, повышения качества знаний. В противовес технократическому, фактологическому подходу акцент в построении содержания обучения на факультативных занятиях должен быть сделан на *усвоение идей и методов математики, непосредственно связанных со школьным курсом*.

Организация учебно-воспитательного процесса на факультативных занятиях предусматривает:

• *различные организационные формы*: использование внутренней дифференциации и индивидуализации обучения; уроков-лекций, уроков крупноблочного, обзорного изложения теоретического материала с последующей самостоятельной его проработкой, уроков-практикумов, уроков коллективного исследования, уроков с использованием электронных средств обучения; различных форм внеклассной работы по математике;

• *организацию дидактического цикла с учетом особенностей дополнительного обучения*. Рекомендуется следующая последовательность звеньев дидактического цикла: опережающее крупноблочное изучение теоретического материала с использованием конспектов теоретического материала; решение ключевых задач всех уровней сложности; организация фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся по решению задач, выполнение самостоятельных работ, в том числе и работ исследовательского характера;

• *использование проблемных методов обучения*, обучение учащихся эвристическим приемам решения задач, использование доказательства в целях обнаружения теорем, выработка общих учебных умений по отысканию замысла решения задачи, составлению плана решения задачи;

• *сбалансированное выделение времени на изучение теоретического материала и решение задач* (с учетом общего сравнительно небольшого количества часов рекомендуется примерно 1/2 учебного времени выделять на изучение теории и 1/2 — на решение задач);

• *повышение роли самостоятельной работы учащихся* по изучению теоретического материала и решению задач (систематическая самостоятельная работа с учебной и научно-популярной литературой);

• *систематическое решение задач повышенной сложности*, используя при этом различные приемы: руководство и помощь со стороны учителя, коллективный разбор и решение задач повышенной трудности, опора на наиболее способных учащихся класса, использование исследовательских заданий для группы учащихся на сравнительно продолжительный срок;

• *использование компьютерной технологии обучения*;

• *использование опыта учителей-новаторов*;

• *стимулирование внеклассной работы* учащихся, тесное увязывание ее с факультативным занятием.

Содержание факультативного курса в 8 классе представлено следующими темами:

1. Четырехугольники: содружество геометрических методов. Начала метода подобия.

2. Координатный и векторный методы — окно в мир современной математики.

3. Тригонометрический метод: решение прямоугольных треугольников.

4. Повторяем, систематизируем, обновляем (решение нестандартных задач по темам курса).

В обучении решению задач акцент необходимо сместить на обучение поиску решения, на повышение целенаправленности поиска, на сочетания различных форм управления со стороны учителя, включая и самоуправление поисковой деятельностью самими учащимися. При этом важно, чтобы помощь носила систематический характер.

Систематическая помощь ученику в проведении поиска решения задачи

В ы б о р з н а н и й

Помощь 1-го типа. **Актуализация знаний** (в форме предположений): нельзя ли воспользоваться таким-то определением, такой-то теоремой, не встречалась ли вам аналогичная задача, обратитесь к такой-то задаче и т. д.

Э в р и с т и ч е с к и е р е к о м е н д а ц и и, с о в е т ы, п о д с к а з к и

Помощь 2-го типа. **Рекомендации общего характера**: прежде чем начать с отдельных деталей решения, продумайте его общий замысел, наметьте общий ход и план решения, каким математическим методом можно воспользоваться, хорошо ли проанализирован текст задачи, чертеж, данное выражение и т. д.

Помощь 3-го типа. **Конкретные советы и подсказки**: нельзя ли воспользоваться таким-то математическим методом, не поможет ли такое-то дополнительное построение, такое-то преобразование выражения и т. д.

Ф о р м и р о в а н и е с а м о с т о я т е л ь н о г о о п ы т а

Помощь 4-го типа. **Стимулирование самостоятельности поиска**: ученику предоставляется возможность проявить самостоятельность в процессе поиска решения, стимулируется его обращение не только к прошлому опыту, но и к эвристическим приемам, обладающим большой широтой переноса на новые ситуации (логическим методам познания, синтетическим и аналитическим методам поиска).

Основные методические подходы конкретизируются далее применительно к **9 классу**. Рекомендуется придерживаться следующих положений.

• *Четкое отражение в учебно-методическом комплексе соотношения факультативного обучения с базовым и повышенным уровнями*. Это соотношение определяется Образовательным стандартом и Программой по математике, соответствующим образом конкретизируется в учебнике. По номенклатуре тем в 9 классе уровни обучения существенных различий не имеют. На факультативных занятиях обязательный теоретический материал излагается без каких-либо излишеств и в то же время достаточно последовательно и полно. Особенно это замечание касается изучения геометрических преобразований. Основные отличия в уровнях обучения проявляются в системе задач.

• *Организация дидактического цикла при изучении учебного материала параграфа*. Рекомендуется следующая последовательность звеньев дидактического цикла при изучении учебного материала параграфа:

1-е звено: опережающее крупноблочное изучение теоретического материала параграфа, включая разбор образцов решений задач, приводимых в теоретической части учебника (метод срезов). На факультативных занятиях материал, знакомый учащимся из основного курса, рассматривается в обзорном порядке, с дополнительным освещением (который, как правило, в основном курсе отсутствует): какой математический метод дает изучение данного материала и, самое главное, — как этот метод используется при изложении теории и решении задач.

↓

2-е звено: фронтальное решение ключевых задач различных уровней сложности — первый урок по решению задач из раздела «Задания для самостоятельной работы».

↓

3-е звено: решение остальных задач из раздела «Задания для самостоятельной работы», отобранных учителем с учетом выделенного времени на решение задач к данному параграфу (с организацией фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся, оперативной обратной связи).

↓

4-е звено: выполнение домашних работ из раздела «Задания для самостоятельной работы» Дидактических материалов, коррекция учебных достижений учащихся.

• *Основные приемы крупноблочного изложения учебного материала (метода среза)*. Укрупнение порций учебного материала мы не сводим к механическому увеличению этих порций. Необходимы специальные методические приемы, которые помогают учащимся воспринимать, понимать и оперировать укрупненной порцией. Само понятие «укрупненная порция» мы связываем, в основном, с учебным материалом одного параграфа. Как правило, это цельная порция, содержащая определения, теоремы, доказательства, решение ключевых задач и которая при традиционной технологии за один урок обычно не охватывается. Увеличение порций теоретического материала и значительное опережение его изучения (по отношению к практике решения задач) может привести на значительном промежутке времени к определенному отрыву теории от практики. К основным методическим приемам, относящимся ко всему параграфу, мы относим составление и использование *конспекта* теоретического материала. Конспект составляется на классной доске по ходу изложения учебного материала учителем и записывается учащимися в тетрадях. В тетрадях удобнее придерживаться альбомной формы записей. Записи размещаются либо колонками, либо горизонтальными полосами. Каждая колонка (полоса) представляет собой срез учебного материала с определенной его стороны: первая содержит определения и рисунки к ним, вторая — теоремы и рисунки к ним, третья — доказательства. Как правило, при этом занимается вся передняя часть классной доски (эти записи мы называем большим конспектом). Ключевые задачи предъявляются отдельными записями на обратной стороне подвижных частей классной доски (малый конспект). Иногда колонки (полосы) «Определения» и «Теоремы» могут объединяться, но в этом случае они должны быть разделены соответствующими заголовками (см. с. 9–14).

Форма записей может быть разной: словесной (особенно если их объем невелик), частично словесной, частично символической (что удобно при значительном объеме словесного текста и возможном затруднении его размещения на площади классной доски). Необходимо иметь в виду, что длинные словесные записи колонками могут оказаться слишком растянутыми и неудобными для восприятия. В этом случае более удобным окажется использование полос. Вместо словесных записей определений может использоваться логико-структурная схема для группы понятий, подсказывающая родовое понятие и видовые признаки, могут использоваться неполные словесные записи, подсказывающие необходимую часть определения и облегчающие (с помощью рисунка) их воспроизведение.

БОЛЬШОЙ КОНСПЕКТ (ЗАПОЛНЯЕТСЯ ПО ХОДУ ИЗЛОЖЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА)

Тема: Замечательные точки треугольника

Определения

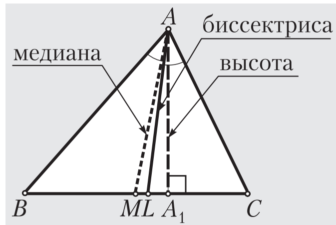


Рис. 1

Теоремы

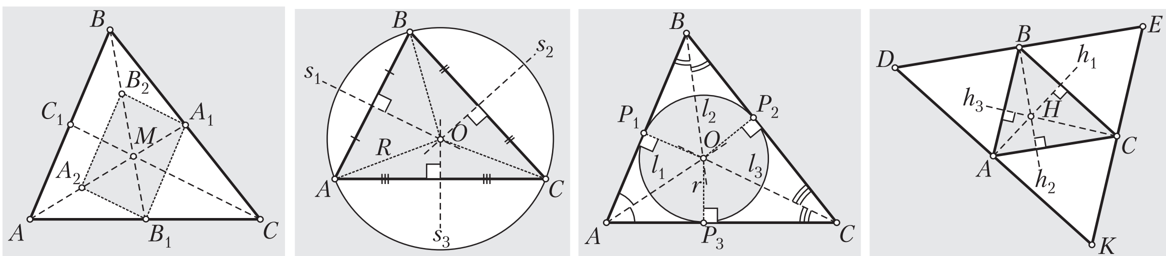


Рис. 2

1 (*о центроиде треугольника*). Медианы треугольника пересекаются в одной точке (называемой *центроидом треугольника*). В точке пересечения медианы делятся в отношении 2 : 1 считая от вершины.

2 (*о центре описанной окружности*). Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является *центром описанной окружности*.

3. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является *центром вписанной окружности*.

4. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (называемой *ортоцентром треугольника*).

Доказательство теоремы 1: какой математический метод использовался?

1) Рассмотрим вначале только две медианы AA_1 и BB_1. Пусть M — точка их пересечения. Докажем, что точка M делит каждую из этих медиан в отношении 2 : 1 считая от вершин треугольника. Пусть A_2 и B_2 — середины соответственно отрезков AM и BM. Так как A_1B_1 и A_2B_2 — средние линии соответственно треугольников ABC и ABM, то

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 \parallel AB, \\ A_2B_2 \parallel AB \end{array}\right\} \Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 = \dfrac{1}{2}AB, \\ A_2B_2 = \dfrac{1}{2}AB \end{array}\right\} \Rightarrow A_1B_1 = A_2B_2; \qquad (2)$$

2) из (1) и (2) следует, что $A_2B_2A_1B_1$ — параллелограмм, а точка M — точка пересечения его диагоналей;

3) $B_1M = MB_2$, $A_1M = MA_2$;

4) $BB_2 = B_2M = MB_1$, $AA_2 = A_2M = MA_1$. Следовательно, точка M делит медианы AA_1 и BB_1 в отношении 2 : 1 считая от вершин треугольника;

5) если бы мы рассмотрели другую пару медиан, например AA_1 и CC_1, то пришли бы к такому же выводу: медианы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке, которая делит медиану AA_1 в таком же отношении 2 : 1. Это означает, что *медиана CC_1 проходит через ту же точку M*;

6) Три медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1 считая от вершин треугольника.

Математический метод: использовался геометрический метод с применением свойств средней линии треугольника и параллелограмма.

Определения

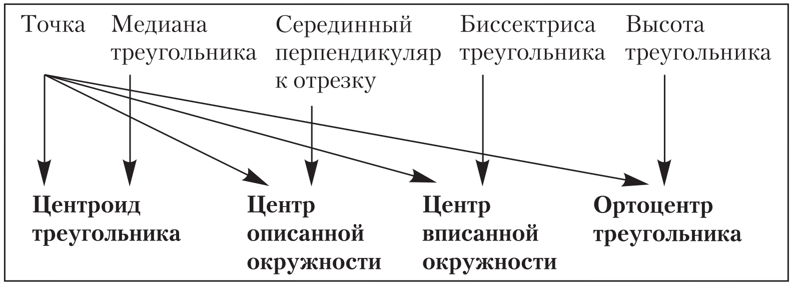
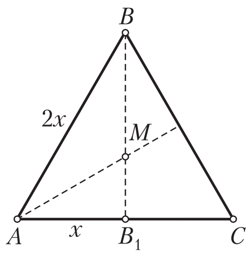
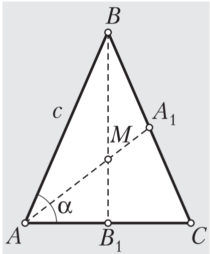
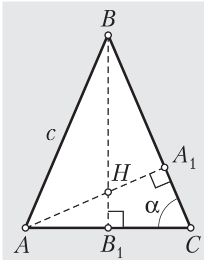


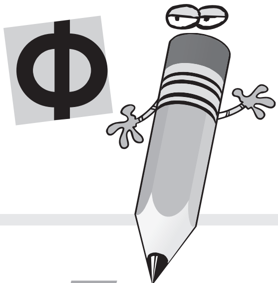
Рис. 3

МАЛЫЙ КОНСПЕКТ (ЗАПОЛНЯЕТСЯ ПО ХОДУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ)

Тема: Замечательные точки треугольника: ключевые задачи		
Задача	Математические методы	Решение
 Рис. 1 **1.** ΔABC — равносторонний (рис. 1), M — центроид, BB_1 — медиана, $MB_1 = 3$ см. $AB = ?$	**Математический метод.** Алгебраический метод с применением свойств медианы и теоремы Пифагора. Обозначим половину стороны данного треугольника через x... . Подходящие для анализа треугольники: ABB_1 и AMB_1. Можно найти два способа решения... .	*1-й способ.* 1) По свойству медиан треугольника $BM = 2MB_1 = 6$ см. Тогда медиана $BB_1 = 6 + 3 = 9$ (см); 2) в равностороннем треугольнике если $AB_1 = x$, то $AB = 2x$; 3) применим к ΔABB_1 теорему Пифагора: $(2x)^2 - x^2 = 9^2, \quad 3x^2 = 81, \quad x^2 = 27,$ $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \quad AB = 2x = 6\sqrt{3}.$ О т в е т: $6\sqrt{3}$ см. *2-й способ...*

 Рис. 2 **2.** ΔABC — равнобедренный (рис. 2), $AB = BC = c$, $\cos A = \sqrt{\frac{3}{8}}$. Найти медианы треугольника.	**Математический метод.** Нельзя ли прежний метод применить к равнобедренному треугольнику? Естественно применить также тригонометрический метод...	1) Найдем медиану BB_1 из прямоугольного ΔABB_1, предварительно отыскав $\sin A$: $$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}},$$ $$\frac{BB_1}{AB} = \sin A \Rightarrow BB_1 = m_b =$$ $$= AB\sin A = c\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}};$$ 2) для нахождения медианы AA_1 найдем вначале отрезок AM — часть искомой медианы. Для этого рассмотрим ΔAMB_1. В нем: $$MB_1 = \frac{1}{3}BB_1 = \frac{c}{6}\sqrt{\frac{5}{2}},$$ $$AB_1 = AB\cos A = c\cos A = c\sqrt{\frac{3}{8}} \ \text{(из } \Delta ABB_1\text{)},$$ $$AM = \sqrt{AB_1^2 + MB_1^2} =$$ $$= \sqrt{\frac{3c^2}{8} + \frac{5c^2}{72}} = \sqrt{\frac{4c^2}{9}} = \frac{2c}{3};$$ 3) тогда $AA_1 = \frac{3}{2}AM = \frac{3}{2}\cdot\frac{2c}{3} = c$.

 Рис. 3 **3.** В условиях задачи 2 найдите высоты ΔABC (рис. 3).	**Математический метод.** Если есть возможность, надо пользоваться результатами решения предыдущих задач. Полезным окажется также тригонометрический метод.	1) $BB_1 = h_b = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$; 2) из ΔAA_1C: $\frac{AA_1}{AC} = \sin A \Rightarrow$ $\Rightarrow AA_1 = AC\sin A = 2c\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{c\sqrt{15}}{4}$.



7 класс

ТЕМА 1 КАК СТРОИТСЯ ГЕОМЕТРИЯ: ГЛАВНАЯ ИДЕЯ

Занятие 1. Аксиомы, определения и теоремы: кому и зачем они нужны

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

1.1. *Игра домино и аксиомы.* Учащимся сразу сообщается, что математические предложения бывают трех видов: аксиомы, определения и теоремы. Важно подчеркнуть, что аксиомы — это исходные предложения, исходные правила рассуждений. Они используются не только в математике и не только математиками. Пользуясь рассказом и беседой, можно изложить приводимый в пособии для учащихся учебный текст: процитировать Хаксли, разобрать игру домино, ее исходные правила, составить таблицу всех 28 домино.

Далее следует сообщить учащимся, что в связи с различными играми можно рассматривать интересные математические задачи.

Пример такой задачи приведен в пособии для учащихся с доказательством. При рассмотрении ее целесообразно воспользоваться методом беседы. Вопросы, направляющие беседу:

Сколько всего домино с тремя очками, сколько всего квадратиков с тремя очками? Какое число домино с квадратиком из трех очков может встретиться внутри ряда, четное или нечетное? Если общее число таких квадратиков четное и число квадратиков, расположенных внутри ряда, также четное, то какой вывод можно сделать, сколькими очками будет заканчиваться домино, стоящее в правом конце ряда?

По завершении доказательства важно подчеркнуть его особенности: оно опирается на небольшое число исходных правил игры, исполняющих роль аксиом этой игры, освобождает от необходимости непосредственно выкладывать все домино и смотреть, какое из них окажется на правом конце.

Полезно сравнить возможности доказательства и эксперимента. В итоге делается вывод о том, что аксиомы используются многими людьми, а не только математиками.

1.2. *Что такое аксиома, определение, теорема, доказательство?*

При знакомстве с данным материалом рекомендуется воспользоваться крупноблочным методом изложения. На классной доске можно привести список понятий: аксиома, теорема, доказательство, обратное предложение, обратная теорема, необходимое условие, достаточное условие, необходимое и достаточное условие, символическая запись теоремы.

Работая с учебной книгой, полезно использовать репродуктивный метод изложения.

Далее сообщается, что в каждой теореме выделяются две части: *условие* теоремы (то, что дано) и *заключение* теоремы (то, что нужно доказать). Продолжаем работать с текстом пособия для учащихся. Вначале рассматриваем теорему: «Сумма смежных углов равна 180°», которую можно записать так:

даны смежные углы $\Rightarrow$ сумма этих углов равна 180°.

Далее выполняем задание по составлению обратного предложения и выяснения, является ли оно теоремой.

Пример 1. Для теоремы о смежных углах одно из обратных предложений будет следующим: если сумма двух углов равна 180°, то эти углы являются смежными. Нетрудно видеть, что обратное предложение не справедливо и поэтому оно не является теоремой.

Пример 2. Теорему о смежных углах можно сформулировать таким образом, что условие ее окажется составным: если два угла имеют общую сторону, а две другие являются дополнительными лучами, то сумма таких углов равна 180°. В этом случае можно сформулировать несколько обратных предложений.

Обратное предложение 1. Если сумма двух углов равна 180°, то эти два угла имеют общую сторону, а две другие являются дополнительными лучами.

Обратное предложение 2. Если сумма двух углов равна 180°, они имеют общую сторону, то две другие являются дополнительными лучами.

Обратное предложение 3. Если сумма двух углов равна 180°, две стороны этих углов являются дополнительными лучами, то эти углы имеют общую сторону.

Убедитесь в том, что все эти обратные предложения не являются справедливыми (для этого достаточно привести соответствующий пример) и, следовательно, не являются теоремами.

Пример 3. Теорему о смежных углах можно сформулировать таким образом, что условие ее окажется еще более составным: если два угла имеют общую сторону, а две другие являются дополнительными лучами, расположенными по разные стороны от прямой, содержащей общую сторону, то сумма таких углов равна 180°.

В этом случае количество обратных предложений увеличится. Одно из обратных предложений можно сформулировать таким образом: если сумма двух углов равна 180°, они имеют общую сторону, две другие стороны расположены по разные строны от прямой, содержащей общую сторону, то эти две стороны являются дополнительными лучами.

Убедитесь в том, что это обратное предложение является справедливым и, следовательно, является теоремой.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рассматриваем задачу 1 из раздела «Задания для самостоятельной работы».[1]

1. (*Логические задачи.*) Задача решается устно. Руководствуемся при этом таблицей, приведенной в ней.

Ответ: а) не справедливо; б) справедливо; в) справедливо; г) не справедливо; д) нельзя.

2. (*Логическая задача.*) При решении необходимо иметь в виду, что для одной и той же теоремы могут быть сформулированы различные обратные предложения. Это зависит от того, каким образом рассматриваются условие и заключение прямой теоремы — как простые или как составные (Более подробно с этим можно познакомиться в книге: Градштейн, И. С. Прямая и обратная теоремы / И. С. Градштейн. — М. : Наука, 1965). Все три приводимых предложения являются обратными для теоремы о сумме смежных углов треугольника. Первое предложение не является справедливым и, следовательно, не является теоремой (в этом случае два угла можно нарисовать вообще отдельно друг от друга). Второе предложение также не является справедливым, оно не является теоремой (в этом случае можно нарисовать два угла, удовле-

[1] Здесь и далее приводятся номера задач и рисунков из раздела «Задания для самостоятельной работы» пособия для учащихся «Геометрия. 7 класс. Многообразие идей и методов».

творяющие условию предложения и расположенные по одну сторону от прямой, содержащей общую сторону). Третье предложение оказывается справедливым, поэтому оно является теоремой, причем теоремой, обратной теореме о сумме смежных углов.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: выучить формулировки определений из § 1, решить задачу 2, г.

2, *г.* Дана теорема о равенстве вертикальных углов: если углы вертикальные, то они равны. Необходимо сформулировать предложение, обратное этой теореме. Какая из следующих формулировок является правильной, является теоремой?

1) Если два угла равны, то эти углы являются вертикальными.

2) Если два угла равны, причем сторона одного и сторона другого являются дополнительными лучами, то эти углы являются вертикальными.

3) Если два угла равны, сторона одного и сторона другого являются дополнительными лучами, а другие стороны лежат по разные стороны от прямой, образуемой дополнительными лучами, то эти углы являются вертикальными.

Ответ: все три предложения являются обратными для теоремы о равенстве вертикальных углов. Справедливо только третье предложение. Оно является теоремой, обратной данной теореме.

Занятие 2. Аксиомы прямой и расстояния: что можно определить с их помощью?

1. Методические комментарии к решению задач в классе

В классе рекомендуется рассмотреть задачи 4; 5, а; 6, а (последняя приведена с образцом записи решения).

4. (*Задача на космическую тему.*) Задачу рекомендуется решать устно, пользуясь рисунком 142. Вначале, конечно, следует обратить внимание учащихся на космическую (астрономическую) тематику данной задачи. Безусловно, это заинтересует учащихся. Главное состоит в том, чтобы правильно установить взаимное расположение трех космических объектов (Солнца, Земли и Луны) относительно друг друга. В момент солнечного затмения Луна (по отношению к Земле) заслоняет Солнце. Это означает, что Луна находится между Солнцем и Землей. В момент лунного затмения тень от Земли падает на Луну, вызывая затмение. Это означает, что Земля расположена между Солнцем и Луной. После этого нетрудно выполнить необходимые вычисления.

5. (*Вначале построения, затем вычисления.*) Задачу рекомендуется решить устно. Основное назначение задачи — помочь учащимся выработать навыки осмысленного восприятия текста задачи, соотнесения его с соответствующей графической моделью. После этого находится периметр четырехугольника $ABCD$.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 3, в; 6, б (она приведена с решением); 7.

Индивидуальное задание: одну-две задачи из числа оставшихся задач, приводимых к рассматриваемому параграфу, желательно разным учащимся предложить различные задачи.

3, *в*. Точки A, B и C лежат на одной прямой и $AB = 10$, $AC = 7$, $CB = 3$. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

Учащиеся должны не только дать правильный ответ, но и объяснить, на основании чего он дается. В данном случае полное обоснование таково: так как точки A, B и C лежат на одной прямой и $AC + CB = 7 + 3 = 10 = AB$, то на основании определения точки, лежащей между двумя другими точками, точка C лежит между точками A и B.

7. На сколько не перекрывающихся частей делится отрезок: а) одной, двумя, тремя, четырьмя точками; б) 100 точками; в) n точками?

Учащиеся должны перебрать предложенные случаи, заметить закономерность и сформулировать ее. Одна точка разбивает отрезок на 2 части, две точки — на 3 части, три точки — на 4 части. После чего закономерность легко обнаруживается. Даются остальные ответы: сто точек разбивают отрезок на 101 часть, n точек — на $n + 1$ частей.

Занятие 3. Аксиомы полуплоскости и луча: их возможности в построении геометрии. Проблема Жордана

1. Методические комментарии к решению задач в классе

10, *а*. Для случая 1 задача решается непосредственным подсчетом. Для случаев 2 и 3 делается индуктивное обобщение.

Ответ: 1) на 2, 3, 4 и 5 частей; 2) на 101; 3) на $n + 1$.

10, *б*. Для того чтобы заметить закономерность, учащиеся должны рассмотреть случаи, удобные для непосредственного подсчета: берутся 1 прямая, 2 прямые, 3 прямые. После этого делается индуктивное обобщение и даются ответы для 100 прямых, n прямых.

Ответ: 1) 200; 2) $2n$.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 10, в; 11.
Индивидуальное задание: 10, г; одну-две задачи из предыдущего параграфа (на выбор).

10, *в*. Требуется установить, на сколько частей разбивается прямая n точками.

Особенность постановки задачи состоит в том, что она сразу предлагается в общем виде. Решение предыдущих задач подготовило учащихся к решению данной задачи. Как и в предыдущих задачах, необходимо рассмотреть частные случаи, заметить и сформулировать закономерность в общем виде.

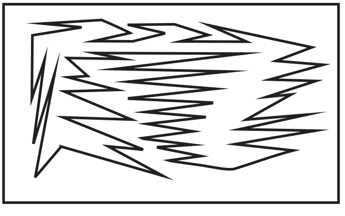


Рис. 1

11, *а*. Разбивает ли ломаная, приведенная на рисунке 1, плоскость на две области?

Эта ломаная не имеет самопересечений, она замкнутая. Поэтому она разбивает все точки плоскости, не принадлежащие ей, на две области — внутреннюю и внешнюю.

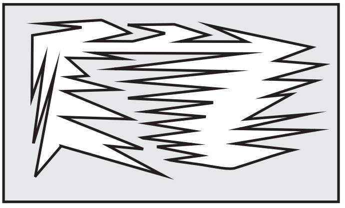


Рис. 2

11, *б.* Нанесите некоторые точки и определите, какой области многоугольника они принадлежат, внутренней или внешней. Заштрихуйте (закрасьте) внешнюю область многоугольника.

На рисунке 2 показано выполнение данного задания.

в) (*Логическая задача.*) Прямая разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой прямой, на две области. Справедливо ли обратное предложение: «Если некоторая линия разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой линии, на две области, то эта линия является прямой»?

Обратное предложение не является верным. Например, если окружность разбивает все точки плоскости, не принадлежащие этой линии, на две области, то эта линия не является прямой.

Занятие 4. Аксиомы измерения и откладывания углов. Почему угол не может быть больше 180°?

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Предлагается самостоятельно разобрать решение задачи 2, приведенной в теоретической части пособия для учащихся. Возможные приемы рассмотрения задачи: а) читается текст задачи и ее решение (по частям) и приводятся пояснения со стороны учащихся, на основании чего выполнен тот или иной шаг решения; б) задача решается самостоятельно, затем полученное решение сравнивается с решением из пособия для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задачи домашнего задания

3. (*Задача, связанная с кубом.*) Эта задача из теоретической части пособия для учащихся служит неплохим средством развития пространственного представления. На примере этой задачи учащиеся знакомятся с примерами перпендикулярных прямых в пространстве, с прямоугольным треугольником, расположенным в пространстве, и т. д. Сразу задача учащимися, как правило, не решается. Поэтому требуется вначале ввести их в ситуацию, дать возможность осмыслить ее. Этой цели служит приведенное в пособии для учащихся указание. Дополнительные указания при необходимости может сделать учитель.

Замысел решения. Необходимо суметь построить отрезок, равный диагонали куба, доступный для измерения его линейкой. Для этого замечаем, что диагональ куба является стороной треугольника, двумя другими сторонами которого являются соответственно ребро куба и диагональ грани куба, причем угол между этими сторонами — прямой. Остается суметь построить этот треугольник и измерить линейкой сторону, лежащую против прямого угла (прямой угол строится с помощью прямого угла грани куба). Соответствующее указание и рисунок приведены в пособии для учащихся.

Если даны два одинаковых куба, то их можно приложить друг к другу так, чтобы совпали, например, боковые грани. В этом случае передние грани, задние грани, грани верхних и нижних оснований лежат в одной плоскости. Рассмотрим передние грани. Проведем в них диагонали квадратов, имеющих общую вершину. На одной такой диагонали отложим отрезок, равный ребру куба. Рассмотрим треугольник, образованный диагональю грани одного куба и отложенным отрезком на диагонали грани другого куба. Нетрудно установить, что этот треугольник прямоугольный и что третья его сторона равна искомой диагонали куба. Полученный отрезок можно непосредственно построить и измерить линейкой. Возможен и другой способ расположения двух кубов, при котором какие-либо построения вообще не требуются и возможно обойтись без карандаша.

Если даны три одинаковых куба, то можно расположить два куба точно так же, как и в предыдущем случае, а на один из них сверху поставить третий куб, совместив верхнее основание второго куба с нижним основанием третьего куба. В результате можно обнаружить треугольник со сторонами, равными диагонали грани куба, ребру куба и диагонали куба. Концы стороны, равной диагонали куба, доступны для того, чтобы приложить линейку и измерить искомое расстояние. В этом случае карандаш также не потребуется.

Занятие 5. Аксиомы измерения и откладывания углов. Почему угол не может быть больше 180°? (Занятие по решению задач)

1. Методические комментарии к решению задач в классе

1.1. Разбор задач из домашнего задания.
1.2. Решение задач в классе: 13, а; 13, б; 14, а; 15, б; 16, а.

13, *а*. Задача решается устно. Данный угол AOB лучом OC разбивается на два угла AOC и BOC. Сумма мер этих углов равна 72°. Так как углы AOC и BOC уменьшаются в 2 раза, то угол, составленный из их половинок, в 2 раза меньше данного угла AOB. Находим искомый угол между биссектрисами: 72° : 2 = 36°.

13, *б*. Задача решается устно. Рассуждение, проведенное при решении предыдущей задачи, полностью сохраняется и в данном случае. Поэтому сразу дается ответ: искомый угол равен $\frac{\alpha}{2}$.

14, *а*. В задаче спрашивается, сколько нужно провести лучей, проходящих между сторонами данного угла, для того, чтобы разбить этот угол на n неперекрывающихся частей. Ответ дается на основе индуктивного перебора ряда случаев: для того чтобы разбить угол на две части, нужно провести 1 луч, на три части — 2 луча, на четыре части — 3 луча, ..., на n частей — $n - 1$ лучей.

15, *б*. Требуется найти угол между стрелками часов в 9 ч 20 мин (см. рис. 147, *а*).

На угол между стрелками часов можно смотреть как на обычный угол (угол, составленный двумя лучами с общим началом) и как на центральный угол окружности. Центральный угол окружности вводится несколько позже. Поэтому естественно пока рассматривать угол, составленный стрелками часов, как обычный угол. Для решения задачи рассмотрим исходное положение стрелок в 9 ч и установим, на какие углы повернется каждая стрелка за 20 мин. Легче установить, на какой угол повернется минутная стрелка. Замечаем, что развернутый угол на циферблате делится на шесть равных частей. На одну часть приходится, следовательно, 30°. За 20 мин минутная стрелка пройдет четыре таких части, т. е. она повернется на 120°. В течение этих 20 мин часовая стрелка тоже не стоит на месте, она повернется на некоторый угол. На какой? Часовая стрелка за 60 мин поворачивается на 30°, за 1 мин — на полградуса, за 20 мин — на 10°. Если величину искомого угла подсчитывать от часовой стрелки в направлении ее движения, то получим такую величину: $80° + 120° = 200°$. Такой ответ не удовлетворяет условию задачи и принятому определению угла. Если подсчет величины угла вести в противоположном направлении, то получим такую величину: $100° + 60° = 160°$. Это и будет ответом к задаче.

16, *а*. Задача приводится до систематического изучения признаков равенства треугольников. Ее цель — подготовить учащихся к такому изучению, опираясь при этом на сведения, полученные о равенстве треугольников из предыдущих классов. Учитывая опережающий характер задачи, она приводится на готовом чертеже.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 12, а; 14, б; 15, в.
Индивидуальное задание: 16, 17 (одну задачу на выбор).

12, *а*. Задача носит занимательный характер, предназначена для устного выполнения. Рассуждение проводится индуктивным методом.

14, *б*. Данная задача приучает учащихся оперировать с величинами, заданными в общем виде. Для этого им надо записать меру одной части: она равна $\frac{\alpha}{n}$. Дальше надо заметить, что мера искомого угла получится, если из меры данного угла вычесть меры двух половинок одной части, т. е. надо вычесть меру одной части:

$$\alpha - \frac{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot n - \alpha}{n} = \frac{\alpha(n-1)}{n}.$$

15, *в*. Задача проще решенной в классе задачи 15, б. Она подготовлена решением этой задачи, поэтому предлагается для домашнего выполнения. К ней приводится ответ: 9 ч 30 мин.

Занятие 6. Смежные и вертикальные углы: «не совсем очевидное и не совсем вероятное»

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи: 18 (дан поиск решения и решение этой задачи); 19, а; 20; 22, а; 23, а.

19, *а*. Это одна из обязательных типовых задач на смежные углы. Величины смежных углов записываем как $2x$ и $3x$, составляем уравнение $2x + 3x = 180°$, решая его, находим, что $2x = 72°$, $3x = 108°$.

Проверка: $2x + 3x = 72° + 108° = 180°$, $\frac{72°}{108°} = \frac{2}{3}$.

20. Задача развивает умение истолковывать геометрически те или иные преобразования над величинами. Последовательность решения задачи такова. Читаем текст задачи по частям и каждое ее условие отражаем на рисунке.

Текст задачи	Выполнение рисунка
Смежные углы равны α и $180° - \alpha$.	Строим смежные углы, вводим на рисунке указанные величины.
$\frac{\alpha}{2}$.	Для угла, равного α, строим его биссектрису.
$\frac{180° - \alpha}{2}$.	Для угла, равного $180° - \alpha$, строим его биссектрису.
$\frac{\alpha}{2} + \frac{180° - \alpha}{2}$.	Показываем на рисунке дужкой угол, получаемый при сложении найденных половинок. Это угол между биссектрисами.
$\frac{\alpha}{2} + \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\alpha}{2} = 90°$.	Делаем вывод о том, что угол между биссектрисами смежных углов равен $90°$.

Краткую запись задачи и словесную запись решения делать нецелесообразно. Достаточно ограничиться выполнением рисунка и записью ответа. В целом задача решается в устной форме при участии всех учащихся.

22, *а*. Данная задача — одна из типичных обязательных задач на вертикальные углы.

При отыскании ее решения акцент надо сделать на анализ текста задачи, выполнение рисунка и анализ рисунка. Осмысленное восприятие задачи сразу делает ее легкой. Задача может быть решена устно.

23, *а*. Ответ задачи можно предсказать и сразу заметить, что искомые смежные углы равны $60°$ и $120°$. Проверкой убеждаемся в том, что величины углов найдены правильно — все условия задачи выполняются. Более деликатным и непривычным для учащихся вопросом (а такие вопросы, безусловно, надо ставить перед учащимися) является: «Нет ли в задаче лишних данных?» Ответ на этот вопрос можно найти только в процессе решения задачи. Решая, замечаем, что можно составить два уравнения: $x+(x+60°)=180°$ и $x+2x=180°$. Обращаем внимание на то, что уже одного из этих уравнений достаточно для того, чтобы решить задачу. Поэтому приходим к выводу, что одно из условий задачи лишнее. Эти условия не противоречат друг другу, так как, решая оба эти уравнения, приходим к одним и тем же ответам. Далее составляем две задачи, которые не содержат лишнего данного.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 19, б; 21.
Индивидуальное задание: оставшиеся задачи из номеров 18—23.

19, *б*. Задача предназначена для самостоятельного выполнения, подготовлена предыдущей работой, поэтому она предлагается для домашнего задания.

21. Задачу можно рекомендовать учащимся для устного решения, при этом достаточно выполнить рисунок. В тетради записывается только ответ.

Занятие 7. Смежные и вертикальные углы: «не совсем очевидное и не совсем вероятное»

1. Методические комментарии к решению задач в классе

1.1. Разбор задач из домашнего задания.
1.2. Решение задач 24, а; 24, в; 26, а; 26, в; 28, а; 28, б.

24, *а*. Дан прямой угол AOB, $\angle AOC=\frac{1}{3}\angle AOB$. Требуется вычислить угол COD, у которого луч OD является дополнительным к лучу OA (луч OC проходит между сторонами угла AOB). Какой из рисунков 149, *а—в* соответствует условию задачи?

Учащиеся должны дать не только правильный ответ, но и объяснить, почему рисунки *а* и *в* не соответствуют условию задачи, и только рисунок *б* соответствует условию задачи. Последовательность действий такова. Читаем задачу по частям, выделяя каждое условие по отдельности, и проверяем, выполняется ли оно на рисунке. Условие «В задаче дан прямой угол AOB» выполняется на всех трех рисунках. Условие «$\angle AOC = \frac{1}{3}\angle AOB$» также выполняется на всех трех рисунках. Условие «луч OD является дополнительным к лучу OA» выполняется только на рисунке *б*. Последнее условие «луч OC проходит между сторонами угла AOB» также выполняется на рисунке *б*. Значит, условию задачи удовлетворяет только рисунок *б*. Вычисления:

$$\angle COD = \angle BOD + \angle BOC = 90^\circ + \frac{2}{3}\angle BOA = 90^\circ + \frac{2}{3}\cdot 90^\circ = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

26, *а*. Требуется доказать, что угол между биссектрисами двух вертикальных углов равен 180°.

Задача вырабатывает навык оперирования с величинами, заданными в общем виде, причем необходимо предварительно эту величину задать. В качестве указания учащимся (см. пособие для учащихся) рекомендуется величину одного из вертикальных углов обозначить α. После этого необходимо суметь выразить через α искомый угол. Целесообразно дать возможность учащимся завершить решение задачи самостоятельно.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 24, б; 25, а; 26, б.

Индивидуальное задание: оставшиеся задачи из номеров 24—26 (две-три задачи на выбор).

24, *б*. Последовательность решения задачи. Задача читается по частям и проверяется, выполняется ли это условие на данных трех рисунках. Необходимо заметить, что уже первое условие «Из вершины развернутого угла AOB в одну полуплоскость проведены лучи OC и OD» для рисунка *б* не выполняется. Для рисунков *а* и *в* все условия задачи выполняются. Можно считать, что рисунок *в* — тот же, что и рисунок *а*, только иначе расположенный на плоскости.

Ответ: $\angle COD = 20^\circ$.

25, *а*. Из вершины O развернутого угла AOB проведены лучи OC и OD. Чему равен угол COD, если $\angle AOC = 50°$, $\angle AOD = 70°$?

Задача предполагает обучение анализу текста задачи и выполняемого рисунка (с точки зрения выявления возможных случаев решения задачи). Задачу можно увязать с задачей 24, б, а можно рассмотреть как самостоятельную (от этого проблемность задачи повысится). Если данную задачу рассматривать как самостоятельную, то при выполнении рисунка необходимо обратить внимание на то, что лучи OC и OD могут располагаться как в одной полуплоскости относительно прямой AB, так и в разных полуплоскостях, поэтому необходимо рассмотреть оба этих случая.

Занятие 8. Центральный угол окружности. Почему центральный угол окружности может быть больше 180°?

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Центральный угол окружности может быть больше 180°. Если дуга, на которую опирается центральный угол окружности, равна, например, 240 дуговым градусам, то центральный угол равен 240°.

1.2. *Примеры решения задач*. Рекомендуется разобрать решения двух задач, приведенных в пособии для учащихся.

1.3. *Измерение углов на местности*. Возможно ограничиться краткой справкой на эту тему, пользуясь информацией, приведенной в пособии для учащихся. При этом важно подчеркнуть, что описываемые угломерные инструменты измеряют центральные углы окружности.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Решение задач: 30, б; 31, а.

30, *б*. Точки A, B и C делят окружность на три дуги, которые относятся как $2 : 5 : 4$. Найдите дуговые градусные меры этих дуг.

Задача решается письменно. Полезно напомнить, как решались аналогичные задачи для отрезков. По аналогии записать дуговые градусные меры искомых дуг через x: $2x$, $5x$ и $4x$. Далее составляется уравнение

$2x+5x+4x=360$ (дуг. град.). Приходим к ответу: $\frac{720}{11}$ дуговых градусов, $\frac{1800}{11}$ дуговых градусов, $\frac{1440}{11}$ дуговых градусов.

Проверка:

$$\frac{720}{11}+\frac{1800}{11}+\frac{1440}{11}=\frac{720+1800+1440}{11}=\frac{3960}{11}=360 \text{ (дуг. град.)}.$$

31, *а*. Какой больший центральный угол окружности составляют минутная и часовая стрелки в 4 часа дня?

Угол, составленный стрелками часов, может быть математизирован двояко: как обычный угол и как центральный угол окружности. Поэтому соответствующее указание в тексте задачи является существенным. Задача может решаться по-разному. Возможно, учащиеся вначале найдут меньший центральный угол. Он равен $30 \cdot 4 = 120$ (дуг. град.). Тогда больший центральный угол окружности равен $360 - 120 = 240$ (дуг. град.). Возможно непосредственное вычисление искомого угла: $30 \cdot 8 = 240$ (дуг. град.).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 29, а, б; 31, б.

29, *а*. Даются точки A и B, которые делят окружность на две дуги, одна из которых равна 60 дуговым градусам. Требуется найти, чему равна другая дуга.

Задача может быть решена устно, но в целях контроля за выполнением домашнего задания должна быть сделана необходимая запись: $360 - 60 = 300$ (дуг. град.).

29, *б*. Даются точки A и B, делящие окружность на две дуги, которые относятся как 3 : 4. Требуется найти дуговые градусные меры этих дуг.

Эта задача хорошо подготовлена решением более сложной задачи 29, г, рассмотренной в классе.

31, *б*. Какой меньший центральный угол окружности составляют минутная и часовая стрелки в 4 ч 20 мин дня?

Проблемный характер задачи: эта задача сложнее задачи 31, а, так как за 20 мин часовая стрелка не будет находиться на делении, соответствующем 4 ч, она повернется на некоторый угол. Какой?

Замысел решения. Для ответа на этот вопрос необходимо учесть, что часовая стрелка за 60 мин поворачивается на 30°.

Ответ: 10°.

Занятие 9. Метод равных треугольников — исторически первый геометрический метод

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

1.1. *Понятие о методе равных треугольников*. Основными в данном пункте являются понятие равных треугольников и понятие о методе равных треугольников.

Дается определение равных треугольников и приводится символическая запись этого определения.

Далее разъясняем идейное содержание данного понятия. Следует отметить, что равенство треугольников имеет большое значение в геометрии. Использование признаков равенства треугольников, к рассмотрению которых мы приступаем, представляет собой один из наиболее важных методов школьной геометрии, называемый ***методом равных треугольников***. Суть этого метода состоит в следующем.

1. Допустим, что, исходя из условия теоремы или задачи, требуется доказать равенство двух отрезков (углов). Для этого эти отрезки (углы) включаем в некоторые треугольники.

$\downarrow$

2. Доказывается равенство этих треугольников.

$\downarrow$

3. Из равенства треугольников делается вывод о равенстве отрезков (углов).

Хотелось бы обратить внимание учителя на то, что раннее введение понятия о методе равных треугольников, с р а з у после определения равных треугольников, имеет существенное методическое значение. Такое введение позволяет учащимся более целенаправленно и осознанно воспринимать последующий материал, повышает их самостоятельность в решении задач.

Первые применения метода равных треугольников связаны с доказательством признаков равенства треугольников.

1.2. *Признаки равенства треугольников*. Особенность предложенного построения состоит в том, что в качестве аксиомы принят признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Аксиома о равенстве треугольников (1-й признак равенства треугольников). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого, то такие треугольники равны.*

2-й признак равенства треугольников является теоремой. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого, то такие треугольники равны.*

В пособии для учащихся применяются различные методические приемы, способствующие повышению доступности первых доказательств. Прокомментируем их на примере доказательства 2-го признака.

Текст из пособия для учащихся	Методические приемы
Замысел доказательства. Достаточно доказать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$. (Почему достаточно?)	Приведение замысла доказательства. Активизация мышления.
Выполним следующие рассуждения. **I. Применим метод от противного** 1) Может ли $AB \neq A_1B_1$? Если допустить, что $AB \neq A_1B_1$, то к каким выводам можно прийти?	Явное выделение метода от противного, придание методу от противного более естественной формы (с точки зрения психологии восприятия).
2) Отложим $A_1B_2 = AB$. Получим треугольник $A_1B_2C_1$. **II. Далее воспользуемся методом равных треугольников**	Обозначение перспективы доказательства, акцент на применяемом далее методе равных треугольников.
3) На основании 1-го признака равенства двух треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_2C_1$. 4) Отсюда на основании предыдущего следствия $\angle C = \angle A_1C_1B_2$. 5) $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$.	Структурированное изложение доказательства, наглядно представляющее последовательность рассуждений, логику доказательства.

Текст из пособия для учащихся	Методические приемы
III. Получаем противоречие 6) Пришли к противоречию: углы $A_1C_1B_2$ и $A_1C_1B_1$ равны между собой и не совпадают (!), что противоречит аксиоме откладывания угла.	Четкое выделение двух противоречащих друг другу предложений.
IV. Вывод 7) Следовательно, допущение неверно, и поэтому $AB = A_1B_1$. 8) Тогда по 1-му признаку равенства треугольников: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.	Подчеркивание неизбежности окончательного вывода.

1.3. *Примеры применения метода равных треугольников.* В этом пункте приводится с решением восемь задач. Задачу 1 рекомендуется разобрать на факультативном занятии, остальные предложить в качестве домашнего задания для подготовки следующего занятия в форме урока-конференции.

2. Домашнее задание

Подготовить урок-конференцию с выступлениями учащихся по решению задач методом равных треугольников.

Программа конференции

1. Понятие о методе равных треугольников. Признаки равенства треугольников (один выступающий).

2. Примеры применения метода равных треугольников: а) задачи 2—3; б) задачи 4—5; в) задачи 6—7 (решение задач и обсуждение решений: три ученика выступают с сообщениями, остальные участвуют при обсуждении решений).

3. Исторические сведения о развитии геометрии (двое выступающих).

Занятие 10. Решение задач методом равных треугольников (урок-конференция по приведенному выше плану)

1. Проведение конференции

1. *Понятие о методе равных треугольников. Признаки равенства треугольников* (один выступающий). Примерный перечень вопросов к выступающему:

• Какие треугольники называются равными?

• Как записать определение равенства треугольников с помощью символов?

• Как продолжить предложение «В равных треугольниках против равных сторон...»?

• В чем состоит суть метода равных треугольников?

• Как формулируется аксиома о равенстве треугольников?

• Как формулируются 2-й и 3-й признаки равенства треугольников?

• Какие методы используются при доказательстве этих признаков равенства треугольников?

• Какое противоречие получается при доказательстве 2-го признака равенства треугольников?

2. *Примеры применения метода равных треугольников*: задачи 2—3 (один выступающий). Примерный перечень вопросов к выступающему:

• Объясни второй шаг решения задачи 2: «Тогда $\Delta ABD = \Delta CBE$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CB$, $AD = CE$, $\angle A = \angle C$)». Почему $AB = CB$? Почему $AD = CE$? Почему $\angle A = \angle C$?

• Объясни первый шаг решения задачи 3: «$\Delta ABC = \Delta CDA$ по стороне и двум прилежащим углам (AC — общая сторона, $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle BCA = \angle DAC$)». Почему $\angle BAC = \angle DCA$? Почему $AD = CE$? Почему $\angle BCA = \angle DAC$?

3. *Примеры применения метода равных треугольников*: задачи 4—5 (один выступающий). Примерный перечень вопросов к выступающему:

• Объясни первый шаг решения задачи 4: $\Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2$ по трем сторонам ($O_1A_2 = O_1B$, $AO_2 = BO_2$, O_1O_2 — общая сторона)». Почему $O_1A_2 = O_1B$? Почему $AO_2 = BO_2$?

• O_1O_2 — общая сторона каких треугольников?

4. *Примеры применения метода равных треугольников*: задача 6 — два способа решения (один выступающий). Примерный перечень вопросов к выступающему:

• Какой отрезок называется медианой треугольника?

- Какие треугольники рассматриваются в первом способе решения?
- Почему они равны?
- Какой вывод следует из равенства этих треугольников?
- Какие треугольники рассматриваются во втором способе решения?
- Почему они равны?
- Какой вывод следует из равенства этих треугольников?

5. *Примеры применения метода равных треугольников*: задача 7 — два способа решения (один выступающий). Примерный перечень вопросов к выступающему:

- Какой отрезок называется биссектрисой треугольника?
- Какие треугольники рассматриваются в первом способе решения?
- Почему они равны?
- Какой вывод следует из равенства этих треугольников?
- Какие треугольники рассматриваются во втором способе решения?
- Почему они равны?
- Какой вывод следует из равенства этих треугольников?

Замечание. Вторые способы решения задач 6 и 7, которые не приведены в пособии для учащихся, могут быть записаны в тетрадях.

6. *Исторические сведения о развитии геометрии* (двое выступающих).

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 32.
Индивидуальное задание: 33, а.

32. В пособии для учащихся приводится необходимая помощь для самостоятельного решения данной задачи: сделана краткая запись, приведен подробный план решения.

Ответ: указанных на рисунке 152 данных оказалось достаточно для доказательства равенств 1—3.

Занятие 11. Решение задач методом равных треугольников

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Решение задач: 35, а—в; 36; 38, а; 40, в; 41.

35, *а—в*. Предлагается цепочка связанных друг с другом задач. В задаче а (она рекомендуется для письменного решения) дана окружность с центром O, хорда AB этой окружности и точка M — середина хорды AB. Требуется доказать, что $\Delta AOM = \Delta BOM$. Данная задача является одной из содержательных задач начала курса геометрии. При необходимости на занятии может быть использовано приводимое к этой задаче указание: воспользуйтесь третьим признаком равенства треугольников.

36. Дана окружность с центром O, хорда AB и точка M — середина хорды AB. Через точку M проведен перпендикуляр к хорде AB. Докажите, что этот перпендикуляр пройдет через центр O.

Замысел решения. Необходимо воспользоваться результатом задачи 35, б.

Запись доказательства в структурированном виде.

1) Пусть через точку M провели перпендикуляр a к хорде AB;

2) учтем еще, что $OM \perp AB$ (см. задачу 35, б);

3) в силу единственности прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной к AB, прямая a совпадет с прямой OM;

4) это означает, что перпендикуляр, проведенный через точку M к хорде AB, пройдет через центр O окружности.

38, *а*. Задача может быть решена устно с выполнением рисунка на классной доске. При необходимости может быть использовано указание: воспользуйтесь первым признаком равенства треугольников.

40, *в*. Данная задача выражает собой один из признаков равнобедренного треугольника. Особенность доказательства состоит в том, что на один треугольник надо посмотреть как на два обозначенных по-разному треугольника и убедиться в том, что $\Delta ABC = \Delta CBA$ (по 2-му признаку). Из равенства этих треугольника получаем, что $AB = CB$.

41. В задаче дается пятиугольная звезда, изображенная на рисунке 156, в которой $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ и $AB = CD$. Требуется доказать, что $AE = ED$.

Данная задача относится к числу задач повышенной (возможно, олимпиадной) сложности. По этой причине ее целесообразно рассмотреть именно на классном занятии. К ней дается краткое указание: воспользуйтесь задачей 40, в.

Наводящие вопросы для поиска решения:

• В какой треугольник можно включить AE и DE?

• Что достаточно доказать для того, чтобы выпонялось равенство $AE = ED$?

• Что достаточно доказать для того, чтобы выполнялось равенство $\angle EAD = \angle EDA$?

• Что достаточно доказать для того, чтобы выполнялось равенство $\angle BAD = \angle CDA$?

• В свою очередь, что для этого достаточно доказать?

• Каким условием задачи мы еще не пользовались? (И т. д.)

Решение задачи рекомендуется записать в структурированном виде.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 37; 39, а, б; 40, а, б.

Индивидуальные задания: 41, б; 43.

37. Дан треугольник, две стороны которого равны, сумма углов, прилежащих к третьей стороне, равна α. Требуется найти эти углы.

Задача решается устно, поэтому запись может быть предельно краткой: углы, прилежащие к третьей стороне, равны между собой (как углы при основании равнобедренного треугольника); так как сумма их равна α, то каждый из них равен $\frac{\alpha}{2}$.

39, *а*. Вначале предлагается на рисунке 154, *в* соединить отрезками точки A и D, C и B. Затем требуется доказать, что $\angle CAD = \angle ADB = \angle DBC = \angle BCA$.

Заметим, что для решения данной задачи не требуется теорема о вписанном угле окружности, опирающемся на диаметр. Эта теорема появится в школьном курсе только через два года. Оказывается, что задачу можно решить достаточно просто, пользуясь свойством углов при основании равнобедренного треугольника. Такое указание имеется в пособии для учащихся. Это обеспечивает доступность задачи для учащихся, выбравших факультативные занятия по математике.

39, *б*. Дан треугольник ABC, у которого $AB = BC = CA$ и $AA_1 = BB_1 = CC_1$ (см. рис. 155). Требуется доказать, что в треугольнике $A_1B_1C_1$ $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$.

Задача привлекательна не только в содержательном плане, но и эстетичностью рисунка (на что полезно обратить внимание учащихся). Довольно интересна геометрическая ситуация, в которой применяется метод равных треугольников. Эта задача показывает, каким образом с помощью одного равностороннего треугольника можно построить целую серию таких треугольников.

Замысел решения задачи. Достаточно воспользоваться 1-м признаком равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

40, *а*. Дана окружность с центром O. По разные стороны от точки A, принадлежащей окружности, построены две равные хорды AB и AC. Требуется доказать, что луч AO является биссектрисой угла BAC.

К задаче дается указание: соедините точку O с точками A, B и C отрезками. Это указание и место данной задачи как одной из заключительных задач первой темы пособия для учащихся делают данную задачу своего рода критерием качества формирования навыка в применении метода равных треугольников.

40, *б*. Дана окружность с центром O. По разные стороны от точки A, принадлежащей окружности, построены две равные хорды AB и AC. Требуется доказать, что биссектриса угла BAC пройдет через центр O.

Задача приучает при решении задач пользоваться результатами ранее решенных задач. Дети довольно быстро доказывают, что углы BAO и CAO равны, но, делая сразу вывод о том, что биссектриса угла BAC пройдет через центр O, допускают ошибку. Ошибка состоит в подмене данной задачи ей обратной, т. е. задачей «Дана окружность с центром O». По разные стороны от точки A, принадлежащей окружности, построены две равные хорды AB и AC. Требуется доказать, что AO — биссектриса угла BAC. Учитывая это, необходимо на следующем факультативном занятии разобрать эту задачу и исправить ошибку, если она допущена.

ТЕМА 2 КАК МЕТОД РАВНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРИМЕНЯЕТСЯ ПРИ ИЗЛОЖЕНИИ ВОПРОСОВ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Занятие 12. Метод равных треугольников и перпендикулярные прямые

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Единственность прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой. В школьном курсе не всегда доказываются теоремы о единственности. Часто они специально не выделяются и используются неявно. Некоторые из этих теорем являются достаточно очевидными, например, единственность середины отрезка, биссектрисы угла, центра окружности и т. д. Справедливость первых двух утверждений следует соответственно из аксиомы откладывания отрезка и аксиомы откладывания угла. Третье утверждение доказывается несколько сложнее, с использованием теоремы, к изучению которой мы сейчас приступаем. Мотивировать необходимость теорем о единственности исходя из внутренних потребностей построения математики учащимся данного возраста затруднительно. На помощь могут прийти некоторые дидактические приемы (см. пособие для учащихся, с. 53).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть на занятии задачи, приводимые в § 1, п. 1.1 с решением. Решения первых двух задач можно разобрать устно, приводя рисунки на классной доске. Задача 3 предназначена для письменного решения, с записью решения и выполнением необходимых построений с помощью циркуля и линейки. На примере данной задачи осуществляется знакомство учащихся (в опережающем порядке) с решением задач на построение с помощью циркуля и линейки по полной схеме: анализ, построение, доказательство, исследование. Понятие геометрического места точек пока не вводится.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 45; 46, а, б.
Индивидуальное задание: 44.

44. Даны прямые a и AB. Требуется построить на данной прямой a точку X, принадлежащую прямой b, которая проходит через точку A и перпендикулярна к прямой AB. (Прямые a и AB предлагается выбрать самим учащимся.)

Задачу рекомендуется решить с помощью чертежного треугольника. Учитывая это, доступность данной достаточно простой задачи еще больше повышается, что существенно для домашнего задания. Цель данной задачи — поддержать конструктивное мышление в активном состоянии, подготовить учащихся к изучению заключительной темы, посвященной задачам на построение.

45. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Стороны BC и B_1C_1 продолжили соответственно за вершины C и C_1 и на продолжении в первом случае отложили отрезок $CK = CB$, а во втором случае — отрезок $C_1K_1 = C_1B_1$. Требуется доказать, что $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$.

Задача предназначена для письменного решения. Однако вначале необходимо реализовать ряд общеучебных умений: в устной форме провести анализ текста задачи, выполнить рисунок, наметить ход решения задачи.

Замысел решения задачи. Необходимо воспользоваться признаками равенства треугольников. Возможны различные способы решения задачи, в зависимости от того, какие признаки будут использованы.

Вначале доказываем равенство четырех треугольников: ABC, $A_1B_1C_1$, ACK и $A_1C_1K_1$. Затем доказываем равенство $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$. Оно может быть доказано с помощью любого из трех признаков равенства треугольников. Это обстоятельство, безусловно, повышает вероятность самостоятельного решения данной задачи.

Для записи решения рекомендуется использовать структурированную запись.

46, *а.* Дан треугольник ABC, причем $AB = BC$, M — середина стороны AC, луч BT — продолжение стороны AB за точку B, BK — биссектриса угла CBT. Требуется доказать, что $BM \perp BK$.

Решение задачи сводится к использованию свойства медианы равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию (эта медиана является биссектрисой треугольника), и результату ранее решенной задачи об угле между биссектрисами смежных углов (см. задачу 21, а). Соответствующее указание учащимся приводится в пособии для учащихся. Задача рекомендуется для письменного выполнения.

46, *б.* Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Точки K и K_1 — середины соответственно сторон AC и A_1C_1. Требуется доказать, что $BK = B_1K_1$.

Решение задачи сводится к применению 1-го признака равенства треугольников. Решение ее призвано продемонстрировать освоение учащимися обязательных требований по овладению ими методом равных треугольников.

Занятие 13. Метод равных треугольников и перпендикулярные прямые (занятие по решению задач)

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Решение задач: 47, а, б; 48, а, б; 51, а.

47, *а.* Дан угол с вершиной O. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, пересекает стороны угла в точках A и B. Пусть M — произвольная точка биссектрисы. Требуется доказать, что $MA = MB$.

Задачу рекомендуется решить письменно, предварительно в устной форме, наметив план ее решения. Задачу можно решить, пользуясь только признаками равенства треугольников. Однако более простое решение получится, если воспользоваться свойством серединного перпендикуляра к отрезку. В рассмотрение необходимо ввести точку C — точку пересечения данного перпендикуляра и биссектрисы угла. С помощью 1-го признака равенства треугольников устанавливается равенство треугольников OCA и OCB. Из их равнства получаем равенство отрезков CA и CB. Тогда биссектриса является серединным перпендикуляром к отрезку AB, и на основании свойства точек серединного перпендикуляра к отрезку $MA = MB$.

47, *б.* Дан угол с вершиной O и биссектриса угла, проведены две прямые, перпендикулярные к биссектрисе и пересекающие ее в точках T и M (T лежит между O и M). Эти прямые пересекают одну сторону угла соответственно в точках A и B, а вторую сторону — соответственно в точках C и P. Требуется доказать, что луч MT — биссектриса угла AMC, а луч TM — биссектриса угла BTP.

Задача предназначена для формирования еще одного достаточно важного общеучебного умения, относящегося к решению задач, — использования результатов ранее решенных задач. В самом деле, на основании предыдущей задачи $MA = MC$. Тогда высота MT равнобедренного треугольника AMC является также его биссектрисой. Отсюда луч MT — биссектриса угла AMC. Точно так же доказывается, что луч TM — биссектриса угла BTP.

48, *а*. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что $AB \perp O_1O_2$.

Для решения задачи возможно использование признаков равенства треугольников. Более рациональным решение окажется, если воспользоваться признаком принадлежности точки серединному перпендикуляру к отрезку. В самом деле, так как $O_1A = O_1B$, то точка O_1 принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB. Аналогично точка O_2 принадлежит этому же серединному перпендикуляру, поэтому $O_1O_2 \perp AB$.

48, *б*. Дана прямая a и точка O, не принадлежащая этой прямой. С центром в точке O провели окружность, пересекающую прямую a в точках A и B. Пусть M — середина хорды AB. Докажите, что $OM \perp AB$.

Замысел решения. Рассмотрите отрезок AB и серединный перпендикуляр к этому отрезку. Выясните, принадлежат ли точки O и M этому перпендикуляру.

51, *а*. Дано (см. рис. 157): $AO \perp OB$, $CO \perp OD$, OM — биссектриса угла AOD. Докажите, что OM является биссектрисой угла COB.

Рекомендуется начать с выяснения замысла решения: достаточно доказать, что $\angle BOM = \angle COM$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что $\angle BOD = \angle COA$.

1-й способ. Для этого заметим, что если от прямых углов AOB и COD отнимем их общую часть — угол AOD, то оставшиеся части ($\angle BOD$ и $\angle COA$) будут равны. Итак, $\angle BOD = \angle COA$. Отсюда $\angle BOM = \angle COM$ и, значит, OM является биссектрисой угла COB.

2-й способ. Равенство углов BOD и COA можно доказать с помощью вычислений. Для этого меру угла BOD обозначим через α. Тогда $\angle DOA = 90° - \alpha$, $\angle COA = \angle DOC - \angle DOA = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Поэтому $\angle BOD = \angle COA$, так как эти углы имеют равные градусные меры. Как и выше, делаем вывод о том, что $\angle BOM = \angle COM$ и, значит, OM является биссектрисой угла COB.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 48, в; 49; 51, б.
Индивидуальное задание: 51, в, г.

48, *в*. Дана окружность с центром O и радиусом OA. По разные стороны от точки A построены хорды AB и AC, равные радиусу окружности. Требуется доказать, что $BC \perp AO$.

Замысел решения. Достаточно установить, что точки B и C равноудалены от концов отрезка AO и, значит, принадлежат серединному перпендикуляру к этому отрезку. Отсюда $BC \perp AO$.

49. Требуется доказать, что диагонали квадрата перпендикулярны.

Задача решается аналогично предыдущей и поэтому рекомендуется для самостоятельного решения.

51, *б*. Дана окружность с центром O и диаметром AB. К радиусам OA и OB через их середины проведены перпендикулярные прямые. Эти прямые пересекают одну полуокружность в точках P и K, а другую — соответственно в точках M и T. Докажите, что: 1) $\Delta OAP = \Delta OAM = \Delta OBK = \Delta OBT$; 2) хорды PT и KM являются диаметрами; 3) $PK = MT$.

Замысел решения. Равенство треугольников устанавливается с помощью 3-го признака. Предварительно необходимо еще раз воспользоваться свойством точек серединного перпендикуляра к отрезку.

Для доказательства второго утверждения задачи необходимо доказать, что углы AOP и BOT — вертикальные. Для этого достаточно учесть, что эти углы равны и их стороны OA и OB являются дополнительными лучами. Аналогично доказывается, что хорда KM являются диаметром.

Третье утверждение может быть доказано с помощью 1-го признака равенства треугольника.

51, *в*. Дан квадрат $ABCD$, M и K — середины соответственно сторон AD и BC. Требуется доказать, что $MK \perp AD$ и $MK \perp BC$.

Замысел решения. Установите вначале, что MK является серединным перпендикуляром к AD, затем — к BC.

51, *г*. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, требуется доказать, что $AC = A_1C_1$.

Замысел решения. Достаточно рассмотреть треугольники ADC и $A_1D_1C_1$ и воспользоваться 1-м признаком равенства треугольников.

Занятие 14. Как признаки помогают отличить одно понятие от другого: признаки параллельных прямых. Четырехугольник Саккери. Аксиома параллельных прямых. Свойства параллельных прямых

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

План изложения теоретического материала.

1. Накрест лежащие и односторонние углы.
2. Признаки параллельных прямых.
3. Четырехугольник Саккери, аксиома параллельных прямых, свойства параллельных прямых.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Разбираются решения задач, приводимых в пособии для учащихся с решением. К задачам приводится рисунок, краткая запись задачи, замысел доказательства, структурированная запись решения. Этой помощи достаточно для того, чтобы предложить учащимся вначале разобрать задачи самостоятельно, а затем коллективно — на классной доске.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 58; 59, а, б; 60, а.
Индивидуальное задание: 60, б.

58. Задачи 58, а, б предназначены для закрепления понятия накрест лежащих и односторонних углов. Для этого предлагается учащимся выполнить необходимые построения с помощью линейки и транспортира.

Задача 58, в может быть решена устно и кратко записана. Для этого достаточно установить, что если накрест лежащие углы одной пары равны и они дополняют накрест лежащие углы другой пары до развернутых углов, то накрест лежащие углы другой пары также равны. В данном случае здесь используется следующее арифметическое положение: если две суммы равны и в них есть по одному равному слагаемому, то другие слагаемые, входящие в эти суммы, также равны.

59, *а.* Даны меры двух углов: $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = \angle 100°$. Спрашивается, могут ли прямые AB и CD быть параллельными?

Задача полезна тем, что формирует общеучебное умение, относящееся к решению задач: она приучает учащихся к мысли о том, что решение задачи часто предполагает рассмотрение нескольких случаев, без рассмотрения всех возможных случаев задача не может считаться решенной правильно. В пособии для учащихся данная задача относится к группе задач, помещенных под общим заголовком «Все ли возможные случаи рассмотрены?». Этот заголовок призван обратить внимание учащихся на указанную особенность задачи. С помощью линейки и транспортира вначале строится $\angle ABC = 70°$. Затем от луча CB откладывается $\angle BCD = 100°$. Построение угла при помощи транспортира и приведенный выше заголовок помогают обнаружить возможность выполнения двух различных рисунков, удовлетворяющих условию задачи. Однако произойти это может по-разному.

При решении задачи учащиеся не всегда сразу замечают все возможные случаи. Построив углы ABC и BCD односторонними, они, возможно, утверждают, что прямые AB и CD не могут быть параллельными, и считают решение задачи законченным. Ответ правильный, но обоснование его неполное. На основе одного рассмотренного случая нельзя делать общий вывод. Углы ABC и BCD могут быть накрест лежащими (условие задачи допускает это). Вдруг в этом случае прямые AB и CD окажутся параллельными?! Поэтому необходимо убедиться, что и в этом случае прямые не могут быть параллельными. После этого делаем общий вывод.

1-й случай: $\angle ABC$ и $\angle BCD$ — односторонние. Тогда:
1) $\angle ABC + \angle BCD = 70° + 100° = 170° \neq 180°$;
2) поэтому $AB \nparallel CD$.

2-й случай: $\angle ABC$ и $\angle BCD$ — накрест лежащие. Тогда:
1) $\angle ABC \neq \angle BCD$;
2) поэтому и в этом случае $AB \nparallel CD$.

Вывод: прямые AB и CD не могут быть параллельными.

59, *б.* Всегда ли прямые AB и CD, о которых говорится в задаче 59, а, не параллельны? Какие случаи должны быть рассмотрены?

Если задача 59, а решена правильно, то ответ к данной задаче может быть дан сразу: если прямые AB и CD не могут быть параллельными, то эти прямые всегда не параллельны.

60, *а.* Даны меры двух углов: $\angle ABC = 80°$, $\angle BCD = 100°$. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными?

Возможны различные ситуации. Если, например, учащиеся начали с рассмотрения углов ABC и BCD как односторонних, то сразу обнаруживается, что $AB \parallel CD$. Поэтому на поставленный вопрос дается утвердительный ответ: «Прямые AB и CD могут быть параллельными».

Если начали с рассмотрения углов ABC и BCD как накрест лежащих, то прямые в этом случае не будут параллельными. Однако торопиться давать отрицательный ответ нельзя. Выясните, как еще могут располагаться углы ABC и BCD, какой ответ следует дать в этом случае. Только после этого можно сделать общий вывод. Возможна и третья ситуация, когда учащиеся сразу видят оба случая и дают общий ответ.

60, *б*. Всегда ли прямые AB и CD, о которых говорится в задаче 60, а, параллельны?

Важно формировать у учащихся общеучебное умение: строить ответ (по форме) с учетом того, как поставлен вопрос. В ответе на данный вопрос ключевым является одно из слов: «всегда», «не всегда». Если предыдущая задача решена правильно, то ответ дается сразу: прямые AB и CD параллельны не всегда.

Занятие 15. Аксиома параллельных прямых и ее трудный путь становления. Четырехугольник Саккери. Свойства параллельных прямых: нужна аксиома параллельности! Разрешимость проблемы Саккери (занятие по решению задач)

1. Методические комментарии к изучению теоретического материала

План изложения теоретического материала.

1. О роли аксиомы параллельных прямых.

2. Формулирование и доказательство теорем о свойствах параллельных прямых.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Решение задач: 61, а; 62, б; 63; 64, в; 67, а. (Два последних номера рекомендуются для письменного выполнения, предыдущие — для устного.)

61, *а*. Накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c равны α и $180° - \alpha$. Могут ли прямые a и b быть параллельными?

Постепенно учащихся необходимо обучать оперировать не только числовыми данными, но и величинами, заданными в общем виде. В задаче 61, а величины углов задаются именно в общем виде, с помощью букв. Это означает, что уровень общности выше, нежели в задачах с числовыми данными. В этом состоит одна из ценных особенностей задачи. Кроме того, с самого начала необходимо сформировать у учащихся понимание, в каких ситуациях используются признаки, а в каких — свойства параллельных прямых.

Поиск решения. На первый взгляд (выполните рисунок) кажется, что накрест лежащие углы α и $180° - \alpha$ не могут быть равными. На самом деле углы α и $180° - \alpha$ при некотором значении α оказываются равными. Как в этом можно убедиться?

Указанное значение α найдем, решив уравнение $\alpha = 180° - \alpha$. Корень этого уравнения: $\alpha = 90°$.

Решение. Если $\alpha = 90°$, то накрест лежащие углы α и $180° - \alpha$ равны между собой и, следовательно, $a \parallel b$ (воспользовались признаком параллельности прямых). На вопрос задачи уже можно давать утвердительный ответ: прямые a и b могут быть параллельными.

Дополнительное исследование. Если $\alpha \neq 90°$, то накрест лежащие углы α и $180° - \alpha$ не равны и, значит, $a \nparallel b$ (это предложение является противоположным к первоначальному, оно равносильно обратной теореме, т. е. соответствующему свойству параллельных прямых. Это означает, что обоснование справедливости утверждения «если $\alpha \neq 90°$, то накрест лежащие углы α и $180° - \alpha$ не равны и, значит, $a \nparallel b$» предполагает использование свойства параллельных прямых).

62, *б*. Пусть $AB \parallel CD$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите угол BCD.

Поиск решения. По содержанию задачи можно сразу определить, какую теорему необходимо использовать (признак параллельных прямых или свойство параллельных прямых). Если в условии задачи даны параллельные прямые, то на первый план выходит свойство параллельных прямых. Существенно также решить еще один вопрос: подразумевает ли задача рассмотрение различных случаев? Если подразумевает, то какие случаи необходимо рассмотреть? Для ее решения необходимо рассмотреть случаи, когда углы ABC и BCD являются: а) накрест лежащими, б) односторонними.

Решение. Если углы ABC и BCD являются накрест лежащими, то $\angle BCD = \alpha$. Если углы ABC и BCD являются односторонними, то $\angle BCD = 180° - \alpha$.

Обращение к проблеме. Подводя итог решения задач данной серии, еще раз обращаемся к поставленной перед этими задачами проблеме и закрепляем установку: решение многих задач ведется через рассмотрение отдельных случаев; это решение является полным и, следовательно, правильным, если рассмотрены все возможные случаи; в противном случае его нельзя считать правильным.

63. Даны два диаметра окружности *AB* и *CD*. Требуется доказать, что четырехугольник *ACBD* является прямоугольником.

Задача предполагает совместное применение признака и свойства параллельных прямых: вначале необходимо воспользоваться признаком, затем свойством параллельных прямых.

64, *в.* Дан угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны проходят через концы диаметра. Требуется доказать, что этот угол — прямой.

Важной составной частью обучения решению задач является формирование следующей установки: при решении задач могут использоваться не только сведения из изученного теоретического материала, но и результаты ранее решенных задач. Нетрудно видеть, что утверждение данной задачи непосредственно вытекает из утверждения предыдущей задачи.

67, *а.* Докажите, что биссектрисы накрест лежащих углов при параллельных прямых — параллельны. Используются ли при решении данной задачи признаки и свойства параллельных прямых? В какой последовательности?

Поиск решения задачи всегда предполагает использование (явное или неявное) определенного эвристического правила. В задачу учителя входит систематическое ознакомление учащихся с этими правилами. По мере приобретения опыта учащиеся должны понимать, что анализ текста задачи часто подсказывает способ ее решения или хотя бы начало решения. В данном случае в задаче даны параллельные прямые, поэтому естественно попытаться начать с применения свойства параллельных прямых. Обнаружение замысла решения задачи (а не сообщение его в готовом виде) позволяет сделать весь поиск более целенаправленным и осознанным.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 64, а, б; 66.

Индивидуальное задание: 61, б, в: 62, а; 65; 68; 69 (три задачи на выбор).

64, *а*. Предлагается построить отрезки AD и CB (см. рис. 195, *в*). Требуется доказать, что $\angle CAD = \angle ADB = \angle DBC = \angle BCA = 90°$. Спрашивается, как называется четырехугольник $ADBC$? Нельзя ли воспользоваться результатом задачи 63, б?

Данная задача, разумеется, является задачей 63, б, только сформулированной в иной форме. Такого рода дублирование задач (в различных словесных формулировках) не является бесполезным, напротив, оно учит детей распознавать задачи, активнее обращаться к ранее решенным задачам, сравнивать их, пользоваться при решении одной задачи результатом ранее решенной задачи и т. д.

64, *б*. Задача предлагается на готовом рисунке (см. рис. 158), на котором $AB \perp CD$. Требуется доказать, что все углы этого четырехугольника — прямые. Спрашивается, равны ли его стороны? Предлагается вспомнить, как называется такой четырехугольник.

Замысел решения. Данная задача развивает подход, обозначенный при решении предыдущей задачи. Для ее решения вначале необходимо воспользоваться результатом решения задачи 64, а.

66. На рисунке 160 $AB \parallel TK$, $BC \parallel MT$, $AM = CK$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta KTM$.

К задаче приводится указание: воспользуйтесь свойством параллельных прямых и 2-м признаком равенства треугольников. Какие-либо дополнительные построения для решения задачи не требуются.

Занятие 16. Геометрические взаимосвязи: связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых (занятие по решению задач)

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Решение задач: 71 (устно); 72; 73 (устно), 74 (устно); 75, б (письменно).

71. (*Логическая задача.*) В задаче предлагается прочитать схему, приведенную на рисунке 161. Спрашивается, могут ли прямые, расположенные в одной плоскости, одновременно и не пересекаться и не быть параллельными?

Задача ориентирована на обучение учащихся чтению классификационных схем. На этой схеме рассматриваются прямые, расположенные в одной плоскости. Примерный вариант чтения:

«Две прямые могут иметь общие точки или не иметь общих точек.

Если две прямые имеют общие точки, причем только одну, то прямые, пересекаются.

Если прямые имеют общие точки, причем более одной, то они совпадают.

Совпавшие прямые и прямые, не имеющие общих точек, — непересекающиеся прямые. Эти прямые называются параллельными».

На поставленный в задаче вопрос следует дать отрицательный ответ: схема показывает, что если прямые не пересекаются, то они параллельны. Поэтому прямые, расположенные в одной плоскости, одновременно и не пересекаться и не быть параллельными не могут.

72. С помощью той же классификационной схемы (см. рис. 161) учащимся предлагается установить, что если прямые, расположенные в одной плоскости, не пересекаются, то они параллельны, и наоборот, если прямые параллельны, то они не пересекаются.

Оба утверждения справедливы, они следуют непосредственно из определения параллельных прямых.

73. (*Новый признак параллельности двух прямых.*) Требуется доказать, что если все прямые, пересекающие прямую a, пересекают прямую b, то $a \parallel b$.

Доказательство проводится методом от противного. Допустим, что $a \nparallel b$. Тогда прямые a и b пересекаются. Возьмем прямую c, совпадающую с прямой b (приведите рисунок). Имеем: прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b. Это противоречит условию теоремы. Следовательно, допущение неверно. Отсюда $a \parallel b$.

74. Доказать, что если в четырехугольнике Саккери три угла прямые, то четвертый угол тоже прямой.

В пособии для учащихся доказывалось, что «верхние» углы в четырехугольнике Саккери равны между собой. Поэтому если один из них прямой (что следует из условия), то другой угол тоже прямой.

75, *б*. Доказать, что в четырехугольнике Саккери все четыре угла прямые.

Вначале доказывается, что «верхние» углы в четырехугольнике Саккери равны между собой (можно сослаться на ранее решенную задачу). Затем пользуемся свойством односторонних углов при параллельных прямых и секущей.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 75, а (устно); 76, а, б; 77.

75, *а*. Задача предлагается на готовом рисунке (см. рис. 162). 1) На нем $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$ и показаны некоторые перпендикулярные прямые. Требуется указать другие перпендикулярные прямые. 2) На рисунке отмечены некоторые перпендикулярные прямые. Требуется указать параллельные прямые.

Ответ: 1) так как $AD \parallel BC$ и $BH \perp AD$, то, пользуясь теоремой о связи между перпендикулярностью и параллельностью прямых, делаем вывод, что $BH \perp BC$. Аналогично делаем вывод в других случаях.

76, *а*. Требуется построить параллелограмм, считая данными три его вершины. Разрешается пользоваться линейкой, чертежным треугольником и циркулем.

По двум данным вершинам строим две стороны параллелограмма, затем для одной из сторон строим ей параллельную прямую (с помощью линейки и чертежного треугольника), на построенной параллельной прямой циркулем откладываем отрезок, равный используемой стороне параллелограмма, получаем искомую четвертую вершину.

76, *б*. Требуется доказать, что если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то он является квадратом.

1-й способ. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Рассмотрим треугольники AOB и AOD. Из их равенства получим, что $AB = AD$...

2-й способ. Можно воспользоваться свойством точек, принадлежащих серединному перпендикуляру к отрезку.

77. (*Задача на развитие пространственного представления*.) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Требуется доказать, что четырехугольник AB_1C_1D — параллелограмм.

Указание. Воспользуйтесь тем, что в пространстве, как и на плоскости, выполняется следующее предложение: если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой. С помощью этого предложения докажите, что $AD \parallel B_1C_1$. По определению параллельных прямых эти прямые лежат в одной плоскости. Далее необходимо учесть, что отрезки AD и B_1C_1 не только параллельны, но и равны друг другу... . Завершите решение.

Занятие 17. Теорема Фалеса — пик применений метода равных треугольников

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Разобрать решения задач 1—3 из § 6.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: разобрать решение задачи 4 из § 6.

Занятие 18. Теорема Фалеса — пик применений метода равных треугольников (занятие по решению задач)

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Решение задачи: 78.

78. Дана точка M — середина стороны BC треугольника ABC и точка K, которая делит отрезок AM в отношении $3 : 1$ считая от вершины A. Спрашивается, в каком отношении прямая BK делит сторону AC? Какие дополнительные построения необходимо выполнить?

Указание. Разделите отрезок AM (см. рис. 229) на четыре равные части и проведите прямые, параллельные BK. Убедитесь, что сторона AC разбивается на равные части.

Ответ: $3 : 2$ считая от точки A.

Дополнительное задание. В условиях предыдущей задачи требуется найти, в каком отношении прямая CK делит сторону AB. Задача решается аналогично предыдущей. Ответ: $3 : 2$ считая от точки A.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 77, а, б.
Индивидуальное задание: 80; 81 (три задачи на выбор).

79, *а*. Дана точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Известно, что точка T делит сторону AB в отношении $5:1$ считая от вершины A. Спрашивается, в каком отношении прямая CT делит отрезок AM? Какие дополнительные построения необходимо выполнить?

Указание. Задача аналогична задаче 78. Ответ: $10:1$ считая от точки A.

79, *б*. Дан треугольник ABC, известно, что точки A_1 и B_1 являются серединами соответственно сторон BC и AC, точка O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Спрашивается, в каком отношении прямая CO делит сторону AB?

Указание. Для решения задачи необходимо выполнить дополнительные построения, аналогичные тем, которые выполнялись при решении задач 78, а и 79, а. Найдите вначале, в каком отношении точка O делит отрезок AA_1.

Ответ: $1:1$.

80, *а*. 3) Требуется доказать, что биссектрисы односторонних углов при параллельных прямых — перпендикулярны.

Указание. 1-й способ. Данную задачу, разумеется, можно решить, используя теорему о сумме углов треугольника. Но эта теорема будет рассматриваться в данном курсе только в следующей теме. Тем не менее полезно рассмотреть этот способ решения, используя его в целях мотивации последующего введения теоремы о сумме углов треугольника. Для этого рассмотрим треугольник, который образуется при пересечении биссектрис односторонних углов. Установим, что сумма двух его острых углов равна 90°. После этого остается применить теорему о сумме углов треугольника (в зависимости от обстоятельств эта теорема либо сообщается впервые, либо напоминается). Полезно уточнить, при выполнении каких шагов решения задачи использовали свойство параллельных прямых (а значит, косвенно и аксиому параллельных прямых), а где теорему о сумме углов треугольника (которая также доказывается с помощью аксиомы параллельных прямых). Возможно, что в основном курсе теорема о сумме углов треугольника уже изучена, тогда данная задача будет играть роль не средства мотивации введения теоремы о сумме углов треугольника, а средства мотивации ее изучения путем демонстрации возможностей применения данной теоремы при решении задач.

2-й способ. А можно ли решить данную задачу, не используя теорему о сумме углов треугольника? Нельзя ли ограничиться теоретическими сведениями, известными в данном курсе на данный момент? Оказывается, можно. Для этого надо рассмотреть не только односторонние, но и накрест лежащие углы. Проведем в одном из таких углов биссектрису. Нетрудно заметить биссектрисы двух смежных углов. Эти биссектрисы перпендикулярны (ранее решенная задача). Кроме того, биссектрисы накрест лежащих углов параллельны. Остается воспользоваться теоремой: если одна из параллельных прямых перпендикулярна к некоторой прямой, то и вторая прямая также перпендикулярна к этой прямой. Как видно, без теоремы о сумме углов треугольника мы обошлись, но провести доказательство, не используя свойства параллельных прямых (и следовательно, не используя аксиому параллельных прямых) оказалось невозможным. Попутно мы установили правомерность помещения задачи в данной теме.

80, *а*. 4) Требуется доказать обратное утверждение для утверждения из задачи 80, *а*, 3).

Указание. Как видно, обратное утверждение не дается в готовом виде, его надо сформулировать. По тому, справятся или не справятся учащиеся с решением данной задачи, можно судить о степени сформированности указанного умения. Итак, вначале формулируем обратное предложение: если биссектрисы односторонних углов при данных двух прямых перпендикулярны, то эти прямые параллельны.

Для доказательства необходимо рассмотреть треугольник, который использовался при решении предыдущей задачи первым способом. По условию один его угол прямой. Значит, сумма двух других углов равна 90°. А чему равна сумма односторонних углов? В итоге решения данной задачи формулируется и доказывается еще один признак параллельности прямых.

80, *в*. Докажите, что два угла с соответственно перпендикулярными сторонами в сумме дают 180°, если один из них острый, а другой — тупой.

Указание. Самый простой способ решения — воспользоваться результатом предыдущей задачи.

81, *а*. Даны две параллельные хорды окружности и диаметр, который проходит через середину одной из них. Докажите, что этот диаметр перпендикулярен ко второй хорде.

Указание. Воспользуйтесь тем, что диаметр, проходящий через середину хорды окружности, перпендикулярен к этой хорде.

81, *б*. Требуется доказать, что прямая, проходящая через середины двух параллельных хорд окружности, проходит через центр окружности.

Указание. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

ТЕМА 3 ТРЕУГОЛЬНИК — ОСНОВНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА

Занятие 19. Необходимость доказательства теорем. Знаменитая теорема о сумме углов треугольника. Внешний угол треугольника

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

1.1. *Необходимость доказательства теорем.* Выше мы убедились в том, что теорема о сумме углов треугольника упрощает решения многих задач. А как доказать эту теорему? Воспитание потребности в доказательстве — длительный процесс. Рекомендуем сделать соответствующие пояснения учащимся при изучении теоремы о сумме углов треугольника. Сделать это можно так, как изложено на с. 80 пособия.

1.2. *Доказательство теоремы.* Далее рассматривается теорема и ее доказательство.

> **Теорема 1** (*о сумме углов треугольника*). Сумма углов треугольника равна 180°.

Замысел доказательства. Он подсказывается описанным выше опытом. Сложим все три угла треугольника при одной из его вершин. Доказательство опирается на **свойства параллельных прямых** (и значит, на аксиому параллельных прямых!)

2. Методические рекомендации к решению задач в классе

Разбираются решения задач 1—3, приведенных в пособии.

3. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: разобрать решения задач 4, 5, приведенных в пособии для учащихся; 82, а—в.

82, *а*. Требуется составить задачи по рисункам 163, *а*, *б*. Спрашивается: все ли правильно изображено на этих рисунках?

Вопросительные знаки, имеющиеся на рисунке, подсказывают, что по известным углам требуется найти неизвестные углы треугольника. На рисунках *а*, *б* изображено все правильно.

82, *б*. (*Логическая задача.*) Допущена ли ошибка на рисунках 164, *а*, *б*? Какими могут быть углы треугольника? Заметим, что x считается положительным.

На рисунке *а* неправильно указаны величины углов. Исправить ошибку можно, изменив величину одного из данных углов.

Для углов, изображенных на рисунке *б*, должны выполняться равенства: $x + (x + 150°) + (2x - 50°) = 180°$, $4x + 100° = 180°$, $4x = 80°$, $x = 20°$. Тогда $2x - 50° = 40° - 50° < 0$. Для угла треугольника этого быть не может. Следовательно, выражения, задающие величины углов, указаны неверно. Далее учащимся предлагается подобрать эти выражения правильно.

Для углов, изображенных на рисунке *б*, должны выполняться равенства: $30° + (x + 60°) + (x + 90°) = 180°$, $2x + 180° = 180°$, $2x = 0°$, $x = 0°$. Для угла треугольника этого быть не может. Следовательно, выражения, задающие величины углов, указаны неверно. Далее учащимся, как и выше, предлагается подобрать эти выражения правильно.

82, *в*. Может ли быть в треугольнике: 1) два тупых угла; 2) тупой и прямой углы; 3) тупой и два острых; 4) два прямых угла?

Занятие 20. Необходимость доказательства теорем. Знаменитая теорема о сумме углов треугольника. Внешний угол треугольника (занятие по решению задач)

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 83, а, б; 84, а; 85.

83, *а*. Может ли больший угол треугольника быть меньше 60°?

Задача предназначена для устного выполнения. Если в треугольнике больший угол меньше 60°, то другие углы тоже меньше 60°. Получаем, что все три угла меньше 60° и, значит, сумма углов треугольника меньше 180°. Этого быть не может (противоречит теореме о сумме углов треугольника). Поэтому на вопрос задачи следует дать ответ: «Больший угол треугольника не может быть меньше 60°».

83, *б*. Может ли меньший угол треугольника быть больше 60°?

Задача, как и предыдущая, предназначена для устного выполнения.

84, *а*. Сумма мер двух углов в треугольнике равна мере третьего угла. Требуется доказать, что в треугольнике имеется прямой угол.

Задача рекомендуется для устного выполнения.

85. В задаче известно (см. рис. 165, *а*), что $AC \parallel BD$, $\angle DAB = \angle BDA$, $\angle CAD = 25°$. Спрашивается, какие из следующих утверждений можно доказать на основе этих данных, а какие нельзя: 1) $\angle ADB = 25°$; 2) $\angle BAD = 25°$; 3) луч AD делит $\angle CAB$ пополам; 4) $\angle B = 130°$; 5) $AB = 5$ см; 6) $\angle CAB + \angle DBA = 180°$; 7) $\angle ACD = 130°$.

Решение задачи можно осуществить, придерживаясь следующей таблицы.

Таблица

Утверждения	Обоснования
1) $\angle ADB = 25°$ — можно доказать:	
$\left.\begin{array}{l}\angle ADB = \angle CAD,\\ \angle CAD = 25°\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ADB = 25°;$	как накрест лежащие углы при параллельных AC и BD и секущей AD;
2) $\angle BAD = 25°$ — можно доказать:	
$\left.\begin{array}{l}\angle BAD = \angle ADB,\\ \angle ADB = 25°\end{array}\right\} \Rightarrow \angle BAD = 25°;$	по условию;
3) $\angle CAD = \angle BAD$ — можно доказать:	
$\left.\begin{array}{l}\angle CAD = \angle ADB,\\ \angle ADB = \angle BAD\end{array}\right\} \Rightarrow \angle CAD = \angle BAD;$	по ранее доказанному; как накрест лежащие углы;
4) $\angle B = 130°$ — можно доказать:	
$\angle DAB + \angle ADB + \angle B = 180°,$	по теореме о сумме углов треугольника;
$\angle DAB = \angle ADB = 25°,$	по условию;
$\angle B = 180° - 50° = 130°;$	по ранее доказанному;
5) $AB = 5$ см — доказать нельзя;	выполните рисунок, показывающий, что все данные можно сохранить, а длину отрезка AB — изменять как угодно. Отрезок AB может равняться, например, 70 см, 5 м, 1 км и т. д. Это означает, что утверждение 5 нельзя доказать на основании данных задачи;

Утверждения	Обоснования
6) $\angle CAB + \angle DBA = 180°$ — можно доказать: $\angle CAB = \angle CAD + \angle BAD = 25° + 25° = 50°$, $\angle DBA = 130°$, $\angle CAB + \angle DBA = 50° + 130° = 180°$;	по ранее доказанному;
7) $\angle ACD = 130°$ — доказать нельзя.	выполните рисунок, показывающий, что все данные можно сохранить, а положение точки C — изменить. Значит, данные задачи не дают возможности зафиксировать положение точки C и, следовательно, величину угла ACD. Поэтому на основании данных нельзя доказать, что $\angle ACD = 130°$.

Таблицу необходимо разобрать с учащимися и дать им возможность самостоятельно привести рисунки, подтверждающие, что утверждения 5 и 7 доказать нельзя на основании имеющихся данных задачи.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 83, в; 84, б, в; 86, а.
Индивидуальное задание: 85, б.

83, *в*. В задаче сообщается, что один из углов треугольника равен 90°. Спрашивается, могут ли два других его угла быть равными? Чему они равны?

84, *б*. В задаче спрашивается, имеется ли в треугольнике прямой угол, если его углы относятся как 1 : 2 : 3?

Указание. Необходимо найти углы треугольника и затем дать ответ на вопрос задачи.

84, *в*. Два угла треугольника относятся как 3 : 7, причем один из них больше другого на 40°. Найдите углы треугольника.

Указание. Необходимо найти вначале те углы, отношение которых известно.

86, *а*. Дано (рис. 165, *б*): $AB \parallel CD$, $\angle C = 40°$, $\angle COD = 70°$. Найдите углы треугольников ABO и COD.

Вначале находим углы треугольника OCD, затем — углы треугольника OAB, при этом используем свойство накрест лежащих углов при параллельных прямых.

Занятие 21. Необходимость доказательства теорем. Знаменитая теорема о сумме углов треугольника. Внешний угол треугольника

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 86, б—д; 87, в.

86, *б*. В задаче дано (см. рис. 165, *в*): $AB \parallel CD$, $\angle C = \alpha$, $\angle D = \beta$. Требуется найти остальные углы треугольников ABO и COD.

Задача является обобщением задачи 86, а. Она учит учащихся оперировать величинами, заданными в общем виде. Рассуждения проводятся такие же, как и при решении предыдущей задачи.

86, *в*. Требуется сравнить углы треугольников ABO и COD в задачах 86, а, б. Спрашивается: достаточно ли для равенства двух треугольников равенство всех трех соответственных углов?

Рассмотренные задачи и рисунки к ним подтверждают, что для равенства двух треугольников равенства всех трех соответственных их углов недостаточно.

86, *г*. Дано (рис. 166, *а*): $AB \parallel CD$, $CO = OB$. Равны ли треугольники AOB и DOC? Чем отличаются данные в этой задаче от данных в задачах 86, а, б?

В этом случае указанные треугольники оказываются равными по 2-му признаку (по стороне и двум прилежащим углам).

86, *д*. (*Логическая задача*.) Дано (рис. 166, *б*): $\angle BAC = 70°$, $\angle ABC = 50°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Найдите углы треугольника DBE. Есть ли в этой задаче лишнее данное?

В задаче указываются величины трех углов треугольника ABC. Достаточно задать только два таких угла, третий находится с помощью теоремы о сумме углов треугольника. Можно посчитать, что задание угла в 50° избыточно и эту часть условия задачи можно исключить. Для дальнейшего решения задачи более рациональным будет использование свойства внешнего угла треугольника. На основании этого свойства: $\angle 1 = \angle 2 = 70° : 2 = 35°$, $\angle 3 = \angle 4 = 60° : 2 = 30°$. Тогда искомые углы равны: 35°, 30°, 50° + 35° + 30° = 115°.

Проверка: 35° + 30° + 115° = 180°.

87, *в*. Требуется доказать, что $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (см. рис. 166, *г*).

Указание. Проведите какую-либо диагональ четырехугольника и дважды воспользуйтесь теоремой о сумме углов треугольника.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 87, а, б.
Индивидуальное задание: 87, г.

87, *а*. Доказать теорему: «Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна ... градусам».

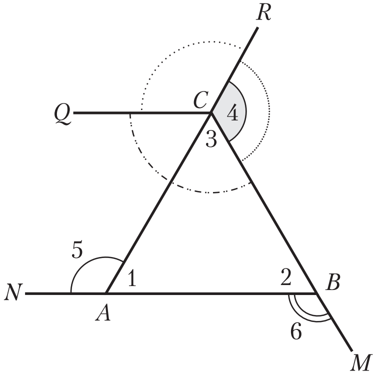


Рис. 3

Задача предлагается на готовом рисунке 3, но без обозначений. Поэтому решение начинается с того, что делаются обозначения, затем вычисления искомой суммы, и в завершении дается полная формулировка данного утверждения.

Поиск закономерности. Выполняем рисунок 3, анализируем его, устанавливаем, что в теореме речь идет о сумме углов 4, 5 и 6. Выскажем догадку относительно величины этой суммы. Для этого попытаемся мысленно «оторвать» углы 4, 5 и 6 и сложить их при вершине *C*. В действительности никакого отрывания углов проводить не будем, а проведем $CQ \parallel BA$. Наблюдение подсказывает, что $\angle QCR = \angle 5$, $\angle QCB = \angle 6$. Тогда

$$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle RCB + \angle QCB + \angle QCR = 360°.$$

В результате высказываем догадку: «Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°».

Доказательство. 1-й способ. Докажем, например, что $\angle QCR = \angle 5$. Для этого воспользуемся параллельностью прямых CQ и AN, а значит, равенством накрест лежащих углов QCA и 1:

$$\left.\begin{aligned} &\angle 5 = 180^\circ - \angle 1, \\ &\angle QCR = 180^\circ - \angle QCA = 180^\circ - \angle 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle QCR = \angle 5.$$

Аналогично доказываем, что $\angle QCB = \angle 6$.

Тогда $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = \angle RCB + \angle QCB + \angle QCR = 360^\circ$.

2-й способ. Запишем суммы смежных углов при каждой вершине:

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ, \quad \angle 2 + \angle 6 = 180^\circ, \quad \angle 1 + \angle 5 = 180^\circ.$$

Сложим левые и правые части этих равенств:

$$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 540^\circ,$$

$$180^\circ + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 540^\circ, \quad \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

3-й способ. Воспользуемся тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним:

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2, \quad \angle 5 = \angle 2 + \angle 3, \quad \angle 6 = \angle 1 + \angle 3.$$

Сложим левые и правые части этих равенств:

$$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2\,(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3), \quad \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Итак, сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

87, *б*. Чему равен угол между биссектрисами смежных внутреннего и внешнего углов треугольника?

Указание. Вначале выскажите догадку относительно величины этой суммы, а затем постарайтесь доказать или опровергнуть ее. При этом самое рациональное состоит в том, чтобы не забыть ранее решенную задачу, утверждающую, что угол между биссектрисами смежных углов равен 90°. Задача рекомендуется для устного решения.

87, *г*. Известно, что в треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, $\angle B = \beta$, биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Требуется найти угол AOC. Спрашивается: не имеется ли в задаче лишнего данного?

Более простая цепочка вычислений:

$$\angle AOC = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\beta = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta.$$

Существенное замечание. Как видно из решения задачи, мы не пользовались тем, что $\angle A = \angle C$. Это условие задачи является лишним и его можно исключить.

Занятие 22. Неутомимые труженики в геометрии: равнобедренный и равносторонний треугольники

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Рассматриваются решения задач 1—3, приводимых в пособии для учащихся.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 88, а—в.
Индивидуальное задание: 90.

88, *а*. Построены две окружности одинакового радиуса с центрами A и B. Точка C — одна из точек пересечения этих окружностей. Постройте треугольник ABC и установите его вид.

Задача предполагает выполнение геометрических построений, их осмысление и анализ, выполнение рассуждений. В тетради выполняется чертеж, в устной форме проводятся рассуждения, записывается ответ: треугольник ABC — равнобедренный.

88, *б*. Выполните те же построения, что и в предыдущей задаче, только радиусы окружностей возьмите равными отрезку AB. Постройте треугольник ABC и установите его вид.

Решение задачи проводится по аналогичной схеме.

88, *в*. На каждой стороне равностороннего треугольника ABC отложены (по направлению часовой стрелки) равные отрезки: $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Точки A_1, B_1 и C_1 соединены отрезками. Установите вид треугольника $A_1B_1C_1$.

Задача предлагается для письменного решения. Замысел приводится в такой форме: сравним стороны треугольники $A_1B_1C_1$. Для этого рассмотрим треугольники A_1AB_1, B_1BC_1, C_1CA_1.

В структурированной форме с использованием логико-математической символики приводится решение задачи. В дополнение к этому материалу учитель может составить перечень вопросов, с помощью которых можно организовать поиск решения. Этот перечень может быть следующим.

№ п/п	Поиск решения	Решение
1—3	Какие элементы треугольников A_1AB_1, B_1BC_1, C_1CA_1 удобно сравнить? Какие их стороны и углы?	1) $CA_1 = AB_1 = BC_1$ (по условию); 2) $B_1B = C_1C = A_1A$ (если от равных сторон отнимем равные отрезки, то полученные отрезки будут равны); 3) $\angle A = \angle B = \angle C$ (свойство углов равностороннего треугольника);
4	Каким признаком равенства треугольников удобно воспользоваться?	4) п. 1—3 $\Rightarrow \Delta A_1AB_1 = \Delta B_1BC_1 = \Delta C_1CA_1$ (по двум сторонам и углу между ними);
5	Что следует из равенства этих треугольников?	5) п. 4 $\Rightarrow A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$; 6) п. 5 $\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1$ — равносторонний.

90. (*Практическая задача.*) В задаче приводится следующий прием измерения на местности: чтобы измерить на местности расстояние между точками A и B, между которыми нельзя пройти (!), выполняют построения, указанные на рисунке 167, и измеряют расстояние DE (вместо AB). Спрашивается: почему так поступают?

Начинаем с вопроса задачи «Почему так поступают?». Вероятно, потому, что $DE = AB$. Как это доказать? Так как задача приводится на готовом чертеже, то дальнейшие рассуждения можно провести устно.

В заключение учащимся полезно подчеркнуть практический характер задачи: такие задачи встречаются при проведении измерений на местности; построения и измерения на местности являются предметом рассмотрения специальной дисциплины — геодезии, а люди, выполняющие такие построения и измерения, — геодезистами.

Занятие 23. Неутомимые труженики в геометрии: равнобедренный и равносторонний треугольники

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 89, а, б; 92, а, в; 93, а.

89, *а*. Доказать равенство медиан равностороннего треугольника.

89, *б*. Доказать равенство медиан равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам. Предлагается найти два способа решения.

Задачи 89, а, б предоставляют хорошую возможность для формирования навыков применения метода равных треугольников. Они носят определенный теоретический характер, существенно дополняя теоретический материал данной темы. Безусловно, они относятся к обязательному уровню знаний. Прежде всего замечаем, что эти задачи связаны друг с другом: вторая задача является обобщением первой. Действительно, если будет доказано указанное свойство медиан для равнобедренного треугольника, то оно будет справедливым и для частного случая — равностроннего треугольника. Поэтому нет смысла решать обе задачи, достаточно решить только вторую. Кроме того, учтем, что задача 89, б решена в теоретической части пособия для учащихся (см. задачу 6 из § 7.4). С учетом сказанного работу над данной задачей рекомендуется организовать следующим образом. Основное внимание уделить поиску решения задачи, затем найденное решение закрепить чтением текста пособия для учащихся (без записи в тетрадях).

Задача. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

Поиск решения	Решение
1-й способ. Требуется доказать, что $AA_1 = CC_1$. Нельзя ли рассмотреть медианы AA_1 и CC_1 как стороны некоторых равных треугольников?	*1-й способ*. 1) Пусть треугольник ABC — равнобедренный, $AB = BC$ (рис. 44), AA_1 и CC_1 — медианы, проведенные к боковым сторонам. Требуется доказать, что $AA_1 = CC_1$. Рассмотрим медианы AA_1 и CC_1 как стороны треугольников AA_1C и CC_1A;

Поиск решения	Решение
Какие треугольники вы предлагаете рассмотреть? Рассмотрим треугольники AA_1C и CC_1A. Будут ли эти треугольники равны? Почему?	2) так как AC — общая сторона этих треугольников, $\angle ACA_1 = \angle CAC_1$ (по свойству углов равнобедренного треугольника) и $CA_1 = AC_1$ (как половины равных сторон CB и AB), то $\Delta ACA_1 = \Delta CAC_1$ (по 1-му признаку равенства треугольников); 3) если $\Delta ACA_1 = \Delta CAC_1$, то $AA_1 = CC_1$. Это и требовалось доказать.
2-й способ. Нельзя ли найти другую пару равных треугольников?	*2-й способ*...

92, *а*. Один из углов равнобедренного треугольника равен 70°. Требуется найти остальные его углы.

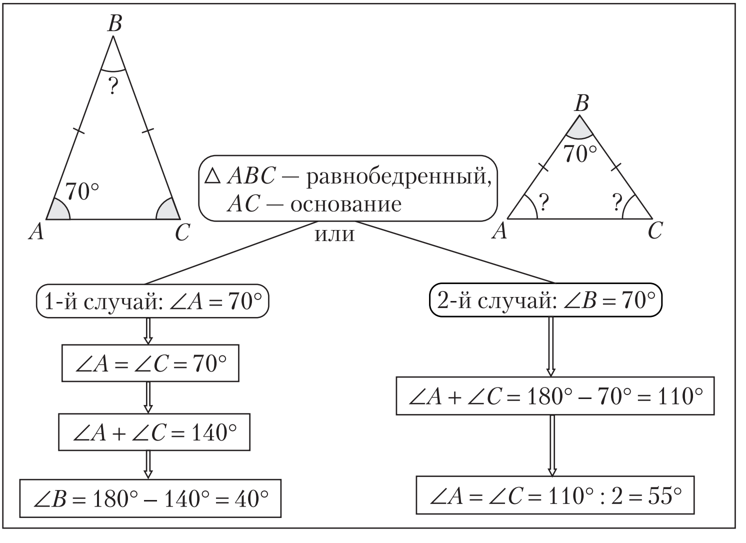


Рис. 4

Решение. Возможны два случая:

а) если угол в 70° — угол при основании равнобедренного треугольника, то углы при основании равны 70°, а угол при вершине равен $180° - (70° + 70°) = 40°$;

б) если угол в 70° — угол при вершине равнобедренного треугольника, то углы при основании равны (180° – 70°) : 2 = 55°.

Эти рассуждения полезно (в целях наглядности) сопроводить следующей логико-структурной схемой (рис. 4).

92, *в*. Один из углов треугольника равен 50° (равен α). В задаче спрашивается, при каком условии этот треугольник будет равнобедренным.

Указание. *1-й случай*: угол равен 50°. Задача может быть предложена для устного решения, ограничиваясь при этом выполнением рисунка и записью ответа. Треугольник окажется равнобедренным, если его углы равны 50°, 65° и 65° или 50°, 50° и 80°.

2-й случай: угол равен α. Эта задача является обобщением предыдущей. За счет этого она выполняет дополнительную развивающую функцию. Треугольник окажется равнобедренным, если его углы равны α, $90° - \frac{\alpha}{2}$ и $90° - \frac{\alpha}{2}$ или α, α и $180° - 2\alpha$.

93, *а*. Угол между биссектрисами двух углов равнобедренного треугольника равен 130°. Требуется найти углы этого треугольника. Предлагается рассмотреть различные варианты выбора биссектрис.

Указание. Уточним понятие угла между биссектрисами треугольника. Пусть O — точка пересечения биссектрис углов A и B. Под углом между этими биссектрисами будем понимать угол AOB.

1-й случай: проводим биссектрисы углов при основании AC (рис. 5).

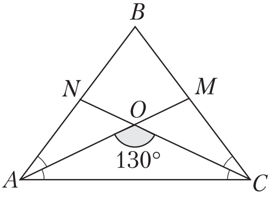


Рис. 5

Краткая запись задачи:
ΔABC — равнобедренный,
$AB = BC$,
AM, CN — биссектрисы углов A и C,
$\angle AOC = 130°$.

$\angle A, \angle B, \angle C = ?$

Поиск решения (синтетическим методом).

1) Рассмотрим треугольник, в который входит угол AOC, — треугольник AOC;

2) так как $\angle A = \angle C$, то что можно сказать о половинах этих углов, т. е. об углах OAC и OCA? (Они равны.)

3) нельзя ли, зная угол AOC, найти углы OAC и OCA?

4) как после этого найти углы A, B и C?

Запись решения.

1) Найдем $\angle OAC = \angle OCA$ (по теореме о сумме углов треугольника):

$$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180° - 130°}{2} = 25°;$$

2) найдем угол A, учитывая, что он в 2 раза больше угла OAC: $\angle A = \angle C = 25° \cdot 2 = 50°$;

3) найдем угол B (по теореме о сумме углов треугольника):

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 50° \cdot 2 = 80°.$$

2-й случай: проводим биссектрисы углов при боковой стороне (рис. 6).

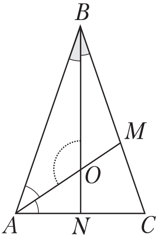


Рис. 6

Краткая запись задачи:
ΔABC,
$AB = BC$,
AM, BN — биссектрисы,
$\angle AOB = 130°$.

$\angle A, \angle B, \angle C = ?$

Замысел решения. Выделим треугольник AON и найдем его угол OAN.

Запись решения.

1) Найдем угол AON, учитывая, что он является смежным с углом AOB: $\angle AON = 180° - 130° = 50°$;

2) найдем угол ONA. Так как треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$), то биссектриса BN является его высотой. Поэтому $\angle ONA = \angle BNA = 90°$;

3) найдем угол OAN (по теореме о сумме углов треугольника): $\angle AON = 180° - (50° + 90°) = 40°$;

4) найдем углы A и C: $\angle A = \angle C = 40° \cdot 2 = 80°$;

5) найдем угол B (по теореме о сумме углов треугольника):

$$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - 80° \cdot 2 = 20°.$$

Ответ: 1) $\angle A = \angle C = 50°$, $\angle B = 80°$; 2) $\angle A = \angle C = 80°$, $\angle B = 20°$.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 89, в, г; 95, а, б.
Индивидуальное задание: 91.

89, *в*. Доказать равенство биссектрис равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам.

89, *г*. Доказать равенство высот равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам.

В пособии для учащихся дается указание к задачам 89, в, г: «Воспользуйтесь 2-м признаком равенства треугольников». Обе эти задачи подготовлены решением задачи 89, б и потому предлагаются для домашнего выполнения. Задача 89, в приведена с решением.

95, *а*. Доказать, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

Задача выражает интересную геометрическую закономерность. Полезно, чтобы на стадии выполнения рисунка учащиеся убедились в справедливости утверждения задачи. Они вначале должны выполнить следующий рисунок: нарисовать равнобедренный треугольник, внешний угол при его вершине (эта вершина лежит против основания), провести биссектрису этого угла и заметить указанную в задаче закономерность. В пособии для учащихся к этой задаче дается следующее указание: «Обозначьте угол при основании равнобедренного треугольника через α и воспользуйтесь тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним». Ценность данной задачи и домашнего задания в целом возрастают в связи с тем, что учащимся в следующей задаче предлагается сформулировать и доказать обратное утверждение.

95, *б*. (*Логическая задача.*) Сформулировать и доказать утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи.

Обратное утверждение: если из вершины равнобедреннего треугольника проведен луч, параллельный основанию треугольника, то этот луч является биссектрисой внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника.

Как и выше, обозначим угол при основании равнобедренного треугольника через α. Осталось выразить через α весь внешний угол и его части.

Занятие 24. Неутомимые труженики в геометрии: равнобедренный и равносторонний треугольники

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 92, б, в; 93, б, в; 94, а.

92, *б*. Дан один из углов равнобедренного треугольника, он равен α. Требуется найти остальные его углы.

В задаче не сказано, является данный угол углом при основании или углом при вершине равнобедренного треугольника. Поэтому необходимо рассмотреть эти два случая. Задача предлагается для устного решения.

92, *в*. Известен один из внешних углов треугольника, он равен 130° (равен α). Спрашивается: при каком условии этот треугольник окажется равнобедренным? Может ли он быть равносторонним?

Для угла, равного 130°, задача может быть решена устно. Если внешний угол равен 130°, то внутренний угол треугольника равен 50°. Если угол в 50° является углом при основании, то треугольник окажется равнобедренным при условии, что два других угла равны 50° и 80°. Если угол в 50° является углом при вершине, то треугольник окажется равнобедренным при условии, что два других угла равны 65° и 65°. В равностороннем треугольнике внешний угол не может равняться 130°. Поэтому данный треугольник может быть равнобедренным, но не может быть равносторонним. Для угла, равного α, задачу рекомендуется решить письменно.

93, *б*. (*Задача на исследование.*) Составить и решить задачу, аналогичную задаче 93, а, положив угол между биссектрисами равным 120°. Спрашивается: можно ли этот угол выбирать равным 20°, 45°, 67°, 83°, 87°? В каких границах он может изменяться?

Составление задачи. По аналогии с задачей 93, а составляем следующую задачу: угол между биссектрисами двух углов равнобедренного треугольника равен 120°. Найдите углы этого треугольника. Можно ли этот угол выбирать равным 20°, 45°, 67°, 83°, 87°? В каких границах изменяется этот угол? Задача рекомендуется для письменного решения.

Решение.

1-й случай: проводим биссектрисы углов при основании AC (рис. 7, *а*).

2-й случай: проводим биссектрисы углов при боковой стороне AB (рис. 7, *б*).

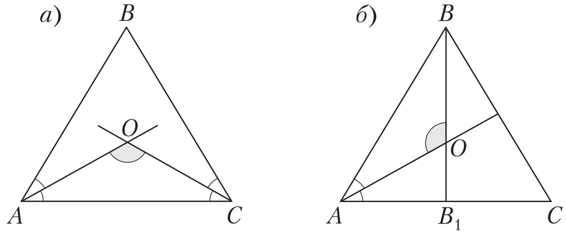


Рис. 7

1-й случай.

а) Пусть $\angle AOC = 120°$. В этом случае:

$$\angle OAC = \angle OCA = (180° - 120°) : 2 = 30°;$$

$$\angle A = \angle C = 2 \cdot \angle OAC = 30° \cdot 2 = 60°;$$

$$\angle B = 180° - (60° + 60°) = 60°.$$

Таким образом, если в равнобедренном треугольнике $\angle AOC = 120°$, то все углы треугольника равны $60°$.

б) Выясним, в каких границах изменяется угол AOC. Для этого выразим этот угол через угол B. Положим $\angle B = \alpha$. Тогда

$$\angle A + \angle C = 180° - \alpha \Rightarrow \angle A = \angle C = (180° - \alpha) : 2 = 90 - \frac{\alpha}{2};$$

$$\angle OAC = \angle OCA = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) : 2 = 45° - \frac{\alpha}{4};$$

$$\angle AOC = 180° - \left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot 2 = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{4}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Далее проведем следующие рассуждения:

$$0° < \alpha < 180°, \quad 0° < \frac{\alpha}{2} < 90°,$$

$$90° < 90° + \frac{\alpha}{2} < 180°, \quad 90° < \angle AOC < 180°.$$

Поэтому угол AOC не может равняться $20°$, $45°$, $67°$, $83°$, $87°$.

2-й случай.

а) Пусть $\angle AOB = 120°$. В этом случае:

$$\angle AOB_1 = 180° - 120° = 60°;$$

$$\angle OAB_1 = 180° - (60° + 90°) = 30°;$$

$$\angle A = \angle C = 30° \cdot 2 = 60°;$$

$$\angle B = 180° - 60° \cdot 2 = 60°.$$

Таким образом, если $\angle AOB = 120°$, то, как и в первом случае, все углы треугольника ABC равны 60°.

б) Выясним, в каких границах изменяется угол AOB. Пусть $\angle B = \alpha$. Тогда $PA = \frac{180° - \alpha}{2}$:

$$2 = 90° - \frac{\alpha}{2}; \quad \angle OAB = \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) : 2 = 45° - \frac{\alpha}{4};$$

$$\angle OAB + \angle OBA = \left(45° + \frac{\alpha}{4}\right) + \frac{\alpha}{2} = 45° + \frac{\alpha}{4};$$

$$\angle AOB = 180° - \left(45° + \frac{\alpha}{4}\right) = 135° - \frac{\alpha}{4}.$$

Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 0° < \alpha < 180°, \\ \angle AOB = 135° - \frac{\alpha}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 90° < \angle AOB < 135°.$$

Поэтому угол AOB и в этом случае не может равняться 20°, 45°, 67°, 83°, 87°.

93, *в*. В произвольном треугольнике ABC AA_1 и CC_1 — биссектрисы, O — точка пересечения биссектрис. Докажите, что $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle B + 90°$.

В разделе «Ответы и указания к задачам» дается такое указание: проведите луч BO, воспользуйтесь свойством внешнего угла треугольника, введите обозначения величин углов. Указания и готового рисунка вполне достаточно для самостоятельного письменного решения данной задачи. Задачу можно решить, также используя только теорему о сумме углов треугольника.

94, *а*. Построить равносторонний треугольник по его медиане.

При решении задачи достаточно ограничиться анализом (поиском решения) и построением. Строится вначале прямоугольный треугольник по стороне и двум прилежащим углам. Построение углов, равных 90° и 30°, осуществляется с помощью транспортира.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 94, б, в; 95, в, г;
Индивидуальное задание: 96—98 (три задачи на выбор).

94, *б*. Предлагается построить равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

Задача сводится к построению треугольника по трем сторонам. Построения выполняются с помощью линейки и циркуля.

95, *в*. Вершины равнобедренного треугольника лежат на окружности. Требуется доказать, что высота, проведенная к основанию (или продолжение этой высоты), проходит через центр окружности.

В разделе «Ответы и указания к задачам» дано следующее указание: воспользуйтесь свойством точек, равноудаленных от концов отрезка. Этой помощи достаточно для дальнейшего самостоятельного решения задачи.

95, *г*. Дан треугольник ABC, биссектрисы AA_1 и CC_1 которого пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная стороне AC. Эта прямая пересекает сторону AB в точке T, а сторону BC — в точке K. Требуется доказать, что $AT + KC = TK$.

К задаче дается следующее указание: воспользуйтесь накрест лежащими углами при параллельных прямых, найдите на рисунке равнобедренные треугольники. Этого указания достаточно для самостоятельного решения задачи (учитывая наличие определенного опыта в проведении доказательств).

Занятие 25. Что такое средняя линия треугольника

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

План изложения теоретического материала.

1. Занятие начинается с краткого обзора теоретического материала.
2. Разбираются решения трех задач, приводимых в § 3.

2. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 101, а, б; 102.

101, *а*. Дан угол и внутри него точка M. Постройте прямую, проходящую через точку M, так, чтобы отрезок ее, заключенный между сторонами угла, делился в точке M пополам.

В пособии для учащихся приводится полное решение задачи по схеме: анализ решения задачи, построение, доказательство, исследование. На усмотрение учителя предлагаем два варианта: воспользоваться полной схемой решения задачи на построение или только первыми двумя этапами. Анализ рекомендуем провести устно, при коллективном участии учащихся. Построение параллельной прямой можно выполнить с помощью линейки и чертежного треугольника. Рекомендуется краткая структурированная запись построений. Остальные этапы рекомендуется провести в устной форме. При этом полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что если угол развернутый, то задача не имеет решения. Доказательство единственности решения возможно одним из предлагаемых ниже способов.

101, *б*. Даны три точки P, H и M, которые являются серединами сторон треугольника ABC. Требуется построить треугольник ABC.

Задача сравнительно простая и рекомендуется для самостоятельного решения. Параллельные прямые можно проводить с помощью линейки и чертежного треугольника и ограничиться двумя этапами: анализом и пострением.

102. Доказать, что если в треугольнике две медианы равны, то этот треугольник равнобедренный.

Указание. Рассмотрите параллелограмм, одной стороной которого является одна из данных медиан, а другой — средняя линия треугольника; при этом получится треугольник, две стороны которого равны медианам данного треугольника.

3. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 99, а, б; 100.

Индивидуальное задание: исследовательская работа на тему «Теорема Фалеса и обратная теорема». Основное ее содержание может составить рассмотрение различных способов доказательства теоремы Фалеса и самостоятельное решение задач с применением этих теорем. Начальной базой работы могут послужить задачи по данной теме, приводимые в пособии для учащихся.

99, *а*. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного.

99, *б*. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 5 : 6. Найдите средние линии треугольника, если его периметр равен 80 см.

Рекомендуется составить план решения задачи:

1) вначале необходимо выразить через x стороны треугольника: $5x$, $5x$ и $6x$;

2) затем составить равенство для периметра данного треугольника;

3) с его помощью найти стороны треугольника;

4) найдя стороны треугольника, найти его средние линии.

Занятие 26. Дальнейшее развитие метода равных треугольников — равенство прямоугольных треугольников. Первые геометрические неравенства (крупноблочное изложение теоретического материала)

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

1.1. *Прямоугольный треугольник: признаки равенства.* Вводится определение прямоугольного треугольника и признаки равенства прямоугольных треугольников.

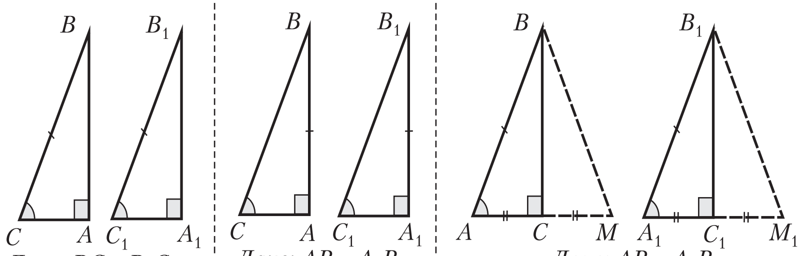
При изучении признаков равенства прямоугольных треугольников можно воспользоваться таблицей (рис. 8).

1.2. *Две замечательные теоремы: о катете, лежащем против угла в 30°, и медиане, проведенной к гипотенузе.*

При изучении этих теорем можно воспользоваться другой таблицей (рис. 9).

1.3. *Геометрические неравенства: неравенства треугольника.* Знакомим с теоремами *о соотношениях между сторонами и углами треугольника* и неравенствах треугольника. При изучении первой теоремы можно воспользоваться таблицей, приведенной на рисунке 10.

1-й признак	2-й признак	3-й признак



Дано: $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$	*Дано*: $AB = A_1B_1$, $\angle C = \angle C_1$	*Дано*: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$

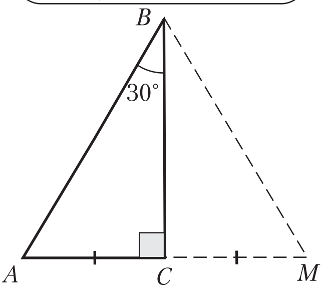
Доказать: $\Delta ABC = A_1B_1C_1$

Замыслы доказательств:

Воспользуйтесь теоремой о сумме углов треугольника	Воспользуйтесь дополнительными построениями, показанными на рисунке

Рис. 8

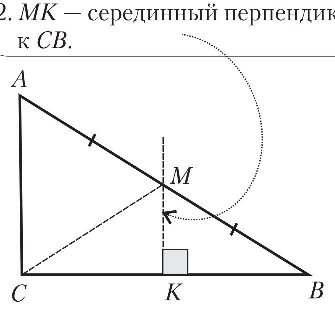
1. $AB = 2AC$?
2. Какого вида треугольник ABM?



Дано: AC — катет, $\angle B = 30°$.

Доказать: $AC = \frac{1}{2}AB$.

1. MK — средняя линия;
2. MK — серединный перпендикуляр к CB.



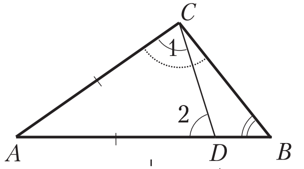
Дано: AB — гипотенуза, CM — медиана.

Доказать: $CM = \frac{1}{2}AB$.

Замыслы доказательств

Пристройте к треугольнику ABC треугольник MCB. Выясните, не будет ли треугольник ABM равносторонним.	Проведите среднюю линию MK. Выясните, не будет ли KM являться серединным перпендикуляром к отрезку BC.

Рис. 9



В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. *Дано*: $AB > AC$. *Доказать*: $\angle C > \angle B$.	Наоборот, против большего угла лежит большая сторона. *Дано*: $\angle C > \angle B$. *Доказать*: $AB > AC$.
Дополнительное построение: строим $AD = AC$.	
Доказательства:	
$\left.\begin{array}{l}\angle C > \angle 1,\\ \angle 1 = \angle 2,\\ \angle 2 > \angle B\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C > \angle B.$	Метод от противного 1-е допущение: $AB = AC$ $\Downarrow$ $\angle B = \angle C$ (противоречит условию); 2-е допущение: $AB < AC$ $\Downarrow$ $\angle C = \angle B$ (противоречит условию). Вывод: так как $AB \neq AC$ и $AB \not< AC$, то $AB > AC$.

Рис. 10

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: разобрать решения задач, приводимых в § 4—6 темы 3.

Занятие 27. Дальнейшее развитие метода равных треугольников — равенство прямоугольных треугольников

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 105, а—в.

105, *а*. Будут ли равны прямоугольные треугольники, если: 1) катеты одного треугольника равны катетам другого; 2) острые углы одного из них равны острым углам другого, 3) гипотенузы треугольников равны?

При необходимости к задаче можно привести такие указания:

1) воспользуйтесь признаком равенства треугольников;

2) рассмотрите треугольники с общим прямым углом и параллельными гипотенузами;

3) рассмотрите различные треугольники с общим прямым углом и равными гипотенузами.

105, *б*. На рисунке 168, *а* $\angle 1 = \angle 2$, $BD = CE$, $\angle D = \angle E = 90°$. Спрашивается: нет ли ошибки на этом рисунке?

105, *в*. На рисунке 168, *б* $\angle A = \angle D = 90°$, $BA = CD$. Спрашивается: какие задачи можно составить по этому рисунку?

Задачи 105, б, в предназначены для устного решения.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 106; 107, а—в.

106. Дано, что перпендикуляры, проведенные из внутренней точки K данного угла к его сторонам, равны. Спрашивается: можно ли доказать, что точка K лежит на биссектрисе этого угла?

Задача относится к задачам обязательного уровня. С ее помощью отрабатывается навык применения признаков равенства треугольников.

107, *а*. Требуется построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

107, *б*. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

107, *в*. Построить прямоугольный треугольник по катету и прилежащему углу.

При решении задач 107, а—в рекомендуется ограничиться выполнением только двух этапов: анализа и построений.

Занятие 28. Прямоугольный треугольник: признаки равенства — дальнейшее развитие метода равных треугольников

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 108—111.

110. (*Задача олимпиадного уровня.*) Вначале надо установить, что треугольник OKK_2 (см. рис. 181) — равносторонний и в нем $ON = KK_1 =$

$= TM$. Для решения задачи необходимо установить также, что $\Delta CPK =$ $= \Delta CTK$ и $CP = CT$.

Задача не требует сложных вычислений, особенность ее состоит в правильном выполнении довольно сложного чертежа и в проведении его анализа, выделения на нем целого ряда геометрических закономерностей.

При работе в классе рекомендуется провести поиск решения и закрепление решения задачи. Сделать это можно следующим образом.

Вопросы для поиска решения задачи	Вопросы для закрепления решения задачи
1) Нельзя ли углы PCK и TCK сравнить с половинками данного угла AOB?	1) Почему $\angle PCK = \angle TCK = 30°$? (Воспользуйтесь равенством двух острых углов с соответственно перпендикулярными сторонами.)
2) Что можно сказать о треугольнике OKK_2? Нельзя ли найти его углы?	2) Почему треугольник OKK_2 — равносторонний? (Рассмотрите углы прямоугольного треугольника KK_1K_2.)
3) Можно ли сравнить отрезки ON, KK_1 и TM?	3) Почему $ON = KK_1 = TM$? (Примените свойство высот равностороннего треугольника.)
4) Нельзя ли сравнить треугольники CPK и CTK и с их помощью — отрезки CP и CT?	4) Почему $CP = CT$? (Треугольники CPK и CTK имеют общую гипотенузу и острые углы по 30°; поэтому они равны; из их равенства следует, что $CP = CT$.)
5) Как теперь можно получить искомое равенство $ON = CM - CP$?	5) Как теперь можно получить искомое равенство $ON = CM - CP$?

111. (*Задача олимпиадного уровня.*) Как и в предыдущей задаче, вначале надо рассмотреть углы и найти углы, равные 30° и 120°.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 112, а—в.

112, *а*. В задаче спрашивается, будут ли равны прямоугольные треугольники по: 1) катету и медиане, проведенной к этому катету; 2) катету и медиане, проведенной к другому катету; 3) острому углу и биссектрисе этого угла; 4) острому углу и биссектрисе другого острого угла.

Указание. Решение данных задач рекомендуется распределить между четырьмя группами учащихся. Доказательства попытайтесь связать с построением вспомогательных прямоугольных треугольников.

112, *б*. Как построить серединный перпендикуляр к отрезку, середина которого недоступна?

Указание. Построение выполните с помощью циркуля и линейки. С помощью циркуля постройте четыре точки, равноудаленные от концов данного отрезка. Две из них лежат по одну сторону от недоступной части рисунка, две — по другую сторону.

112, *в*. Одна прямая пересекает две противоположные стороны квадрата в точках E и K. Другая прямая перпендикулярна к первой и пересекает две другие стороны квадрата в точках F и L. Докажите, что $EK = FL$.

Вопросы для поиска решения задачи:

1) Нельзя ли построить два прямоугольных треугольника, гипотенузами которых являлись бы соответственно EK и FL (см. рис. 182)?

2) Нельзя ли воспользоваться тем, что два острых угла с соответственно перпендикулярными сторонами равны?

3) Каким признаком равенства прямоугольных треугольников далее следует воспользоваться?

Занятие 29. Прямоугольный треугольник: признаки равенства — дальнейшее развитие метода равных треугольников. Две замечательные теоремы: о катете, лежащем против угла в 30°, и медиане, проведенной к гипотенузе. Геометрические неравенства: неравенства треугольника

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 117; 118, а.

117. (*Задача с межпредметным содержанием.*) Санки скользят по ледяной горке (см. рис. 169). Угол наклона траектории санок к горизонтальной плоскости равен 30°, а скорость движения $v = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Вычислите вертикальную скорость санок ($v_{\text{в}}$).

Указание. Вертикальная скорость — скорость, с которой санки «снижаются» в вертикальном направлении. Данная задача — с физическим содержанием. Вначале необходимо перевести ее на математический язык (заметим, что такие задачи знакомят учащихся с методом математического моделирования).

Краткая запись задачи:

$v = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\alpha = 30°$.

$v_{\text{в}} = ?$

Решение. 1) Перевод на математический язык. Решение данной задачи сводится к решению прямоугольного треугольника, в котором v — гипотенуза, $v_{\text{г}}$, $v_{\text{в}}$ — катеты, угол между v и $v_{\text{г}}$ равен 30°;

2) вычисления:

$$v_{\text{в}} = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right);$$

это равенство записано на основании свойства катета, лежащего против угла в 30°.

118, *а*. Дан параллелограмм $ABCD$, на сторонах AB и BC которого во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABM и BCK. Требуется доказать, что треугольник MKD — равносторонний.

Вопросы для поиска решения задачи:

1) Что дано в задаче?

2) Что требуется доказать в задаче?

3) Что достаточно установить для доказательства того, что треугольник MKD — равносторонний?

4) В какие треугольники входят стороны треугольника MKD? (Рассматриваются треугольники BMK, CDK и AMD (см. рис. 183).)

5) Каким признаком равенства треугольников можно воспользоваться? (Воспользуемся первым признаком равенства треугольников.)

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 118, б—д.
Индивидуальное задание: 119—121 (три задачи на выбор).

118, *б*. Дан треугольник ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, CC_1 — высота, $AC_1 = 1$. Требуется найти BC_1.

Указание. Необходимо дважды воспользоваться теоремой о катете, лежащем против угла в 30°.

Ответ: 3.

118, *в*. Дан треугольник ABC: $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$, CC_1 — высота, $AC_1 = 8$. Требуется найти BC.

Указание. Рассмотрите прямоугольные треугольники. Какие они?

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle C = 90°$, $AB = 8$, $\angle B = 30°$
(рис. выполните самостоятельно).

$AC = ?$

Решение. По свойству катета, лежащего против угла в 30°:

$$AC = \frac{1}{2}AB = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

118, *г*. (*Геодезическая задача*.) В задаче приводится способ измерения высоты холма. Для измерения высоты холма (см. рис. 170) отходят от него по прямой и отмечают точку D, из которой вершина холма видна под $\angle ADB = 30°$, и точку C, из которой вершина холма видна под $\angle ACB = 15°$. Спрашивается, какое расстояние осталось измерить, чтобы найти высоту холма.

Указание. Так как $CD = 2AB$ (почему?), то, измерив CD, найдем AB (см. рис. 211).

118, *д*. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом при вершине B, равным 36°, проведена биссектриса AA_1. Требуется доказать, что биссектриса AA_1 равна основанию треугольника.

Указание. Рассмотрите углы треугольников.

119, *а.* Можно ли построить прямоугольный треугольник, у которого: 1) катет $a = 5$, гипотенуза $c = 4$; 2) катет $a = 5$, гипотенуза $c = 7$?

Ответ: 1) нельзя. Это устанавливается построениями. На стороне прямого угла откладываем от его вершины $a = 5$. Затем проводим окружность с радиусом, равным 4 (как?). Так как эта окружность не пересекает другую сторону угла, то построить такой прямоугольный треугольник невозможно; 2) можно, что устанавливается аналогичными построениями.

Приводимый ниже цикл задач формирует умения и навыки применения неравенства треугольника в ситуациях, связанных с окружностью. Здесь используется принцип от простого к сложному. Первые две задачи более простые, следующие — сложнее. В задаче 120, а дано прямое указание воспользоваться неравенством треугольника, тогда, как в задаче 120, в, об этом нужно догадаться.

120, *а.* Сравнить хорду CD, не проходящую через центр окружности, с диаметром AB (см. рис. 171, а—г).

Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника.

Краткая запись задачи:
CD — хорда, не проходящая через центр,
AB — диаметр.

Сравнить CD и AB.

Мотивация дополнительных построений. Для того чтобы воспользоваться неравенством треугольника, необходимо построить треугольник. Для этого соединим центр окружности O с концами хорды C и D. Получим треугольник COD.

Решение. Из неравенства треугольника имеем:

$$CD < CO + OD = AB \Rightarrow CD < AB.$$

Полученное неравенство выполняется для всех четырех случаев.

120, *б.* Верно ли, что диаметр окружности есть наибольшая из хорд этой окружности?

Решение. Если хорда проходит через центр O, то она является диаметром и тогда $CD = AB$. Если хорда CD не проходит через центр, то она меньше диаметра AB: $CD < AB$ (см. предыдущую задачу). Объединив эти два случая получим, что $CD \le AB$. Это и означает, что диаметр AB есть наибольшая хорда окружности.

120, *в*. Из точки B (см. рис. 171, *д* из пособия для учащихся), взятой вне окружности, проведена прямая BM, проходящая через центр окружности, и прямая BN, не проходящая через ее центр. Точки K и C (ближайшие к точке B) — точки пересечения этих прямых с окружностью. Предлагается сравнить отрезки BK и BC. Какое дополнительное построение надо выполнить?

Решение (при помощи анализа Паппа). Чем можно воспользоваться для сравнения отрезков BK и BC? (Неравенством треугольника.) Попытаемся построить подходящий треугольник. Проведем, например, радиус OC, получим треугольник BCO. Запишем для этого треугольника неравенство: $BO < BC + CO$. Сторону BO заменим суммой отрезков BK и KO: $BK + KO < BC + CO$. Учтем, что KO и CO равны (как радиусы окружности). Если от двух величин ($BK + KO$ и $BC + CO$) вычтем равные величины (KO и CO), то большая величина останется большей, а меньшая — меньшей. Поэтому $BK > BC$.

Структурированная запись решения:

$$\left.\begin{matrix} OK + AK = OA, \\ OB < OC + BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} OK + BK < OC + BC, \\ OK = OC = R \end{matrix}\right\} \Rightarrow BK < BC.$$

121, *а*. Из отрезков a, b и c можно построить треугольник. Требуется доказать, что из отрезков ka, kb и kc $(k > 0)$ также можно построить треугольник.

Указание. Установите, что если для отрезков a, b и c выполняются неравенства треугольника, то они будут выполняться и для отрезков ka, kb и kc $(k > 0)$, а значит, из этих отрезков можно построить треугольник.

121, *б*. При каком натуральном n из отрезков n, $n + 1$, $n + 2$ можно построить треугольник?

Связь данной задачи с алгеброй: задачу следует рассматривать как пропедевтику неравенств, систематически изучаемых в курсе алгебры.

Решение. Должны выполняться неравенства треугольника:

$$\begin{cases} 2n+1 > n+2, \\ 2n+2 > n+1, \\ 2n+3 > n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n > 1, \\ n > -1, \\ n > -3. \end{cases}$$

Одновременно эти неравенства выполняются при $n > 1$.

Ответ: $n > 1$.

Занятие 30. Заключительные планиметрические аксиомы — аксиомы площади

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуется организовать краткий обзор теоретического материала с последующим самостоятельным изучением темы по пособию для учащихся.

План изучения нового материала.

1.1. *Определения и аксиомы.* Ознакомиться с определениями ломаной, длиной ломаной, многоугольником, аксиомами площади. Более детально можно остановиться на понятии площади по Жордану и формуле Пика.

1.2. *Метод площадей — новый геометрический метод.* Рекомендуется вначале охарактеризовать суть метода площадей, затем перейти к его применениям: к выводу формул площади прямоугольника и прямоугольного треугольника, к решению задач 1 и 2 из § 7.

1.3. *Теорема Пифагора и обратная теорема.* Вводятся теоермы и рассматривается их доказательство.

1.4. *Теорема Пифагора как пример нового вычислительного метода в геометрии.*

Подчеркивается, что до сих пор задачи на вычисление решались путем составления уравнения на основе тех соотношений, которые давались в условии задачи, т. е. алгебраическим методом. Геометрического же метода вычислений не было. Теорема Пифагора дает первый такой метод. Понятие расстояния вводилось уже на первых страницах этой книги. Теорема Пифагора, по существу, дает формулу вычисления расстояния между двумя точками. Эта формула определяет метрику геометрии. В неевклидовой геометрии есть свои формулы, по-своему вводится метрика, и по тому, какие это формулы, какой вид они имеют, определяется сам характер геометрии, ее «неевклидовость». Все это указывает на центальное место теоремы Пифагора в элементарной геометрии. Введение квадратного корня носит пропедевтический характер.

1.5. *Задачи на прямоугольный треугольник.* Разбираются решения задач 1—4 из § 8.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: разобрать задачи 5—7 из § 8 (задачи на равнобедренный и произвольный треугольники).

Индивидуальное задание: исследовательская работа «Некоторые задачи, связанные с пифагоровыми тройками чисел». На основе задач 1—5 из § 9 ознакомиться с проблемой пифагоровых троек чисел, существованием различных систем таких чисел. Цель задания состоит в расширении приводимого материала, составлении и решении новых задач.

Занятие 31. Заключительные планиметрические аксиомы — аксиомы площади

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 122, а, д, е; 123, а; 124, а, б.

122, *а*. Дана площадь прямоугольного треугольника, равная 12. Известен также один из катетов, равный 5. Требуется найти второй катет.

Указание. Достаточно воспользоваться таблицей «Пифагоровы тройки чисел», приводимой в пособии для учащихся.

122, *д*. Проверьте, справедлива ли формула Пика для невыпуклого многоугольника.

Указание. Рассмотрите несколько невыпуклых многоугольников на клетчатой бумаге. Вершины многоугольников должны лежать в узлах сетки.

122, *е*. Проверьте, справедлива ли формула Пика для прямоугольника, квадрата (в том числе и для единичного квадрата).

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

123, *а*. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что: 1) $S_{ABD} = S_{DCA}$; 2) $S_{ABC} = S_{DCB}$; 3) $S_{BOC} = S_{AOD}$; 4) $S_{AOB} = S_{DOC}$; 5) $S_{AOB} = S_{AOD}$; 6) $S_{AOB} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Указание. Задача предназначена для устного решения.

124, *а*. В произвольном треугольнике ABC высота CC_1 делит сторону AB на части $AC_1 = m$ и $C_1B = n$. Найдите отношение площадей треугольников ACC_1 и BCC_1.

Указание. Задача может решаться устно, и лишь в случае затруднения учащихся — письменно. Ответ: $m : n$.

124, *б*. В произвольном треугольнике ABC высота CC_1 делит сторону AB на части так, что $AC_1 : C_1B = m : n$. Площадь треугольника ACC_1 равна 3. Найдите площадь треугольника BCC_1.

Указание. Учащиеся должны составить и объяснить следующие равенства:

$$\frac{S_x}{3} = \frac{n}{m} \Rightarrow S_x = \frac{3n}{m}.$$

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 122, б—г, 124 (из оставшихся задач две на выбор).

122, *б*. Площадь прямоугольного треугольника равна 9. Один из катетов в 2 раза больше другого. Найдите катеты.

Указание. Обозначим меньший катет через x, далее выразим через x площадь прямоугольного треугольника, составим и решим уравнение.

Ответ: 3 и 6.

122, *в*. Основание равнобедренного треугольника равно a, высота, проведенная к этому основанию, равна h. Найдите площадь треугольника.

Указание. Достаточно воспользоваться формулой площади прямоугольного треугольника.

122, *г*. В прямоугольнике одна сторона равна a. Диагональ образует с этой стороной угол в 45°. Найдите площадь прямоугольника.

Указание. Главное — заметить, что данный прямоугольник является квадратом.

124, *в*. В прямоугольном треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = a$, CC_1 — высота. Докажите, что площадь треугольника ACC_1 в 3 раза больше площади треугольника BCC_1.

Указание. Найдите отрезки BC_1 и AC_1, их отношение (пользуемся результатом задачи 124, а).

124, *г*. В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, через середину M гипотенузы AB проведен к ней серединный перпендикуляр, пересекающий катет BC в точке K. Известно, что $S_{AKC} = 5$. Найдите S_{ABC}.

Указание. Установите, что данный треугольник состоит из трех равных прямоугольных треугольников.

Занятие 32. Главные геометрические теоремы: теорема Пифагора и обратная теорема (урок по решению задач)

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 126, а, 1); 126, б, 1); 126, в, 1); 126, г; 127, а; 128, а.

126, *а.* 1) В прямоугольном треугольнике гипотенуза и катет соответственно равны 13 и 5. Найдите второй катет.

126, *б.* 1) В прямоугольном треугольнике катеты равны 8 и 15. Найдите гипотенузу.

126, *в.* 1) Установите вид треугольника, стороны которого равны 6, 8 и 10.

Указание. Рассматрим приведенные выше три задачи одновременно. Выясняем, что в первых двух задачах необходимо воспользоваться теоремой Пифагора, а в третьей — теоремой, обратной теореме Пифагора. При решении первых двух задач пользуемся таблицей «Пифагоровы тройки чисел». При решении третьей задачи возможны устные вычисления. В итоге все три задачи решаются устно.

Более детально работу над задачей 126, *в.* 1) можно организовать следующим образом.

Высказывание догадки и ее обоснование. Высказать нужную догадку помогли бы построения треугольника с данными сторонами, но это обременительно по времени. Целесообразнее для проверки догадки применить теорему, обратную теореме Пифагора. В этом случае «кандидатом» на гипотенузу является сторона, равная 10, так как катеты должны быть меньше гипотенузы. Составляем равенство $10^2 = 6^2 + 8^2$, убеждаемся в его верности, делаем вывод, что данный треугольник — прямоугольный.

Обобщение. Если требуется установить вид треугольника, то целесообразно попробовать применить теорему, обратную теореме Пифагора.

126, *г.* Приведите примеры целочисленных значений сторон прямоугольного треугольника таким образом, чтобы гипотенуза на 1 была больше большего катета.

Указание. Пользуясь таблицей «Пифагоровы тройки чисел», можно составить следующие примеры:

$c_1 = 5$,	$b_1 = 4$,	$a_1 = 3$,
$c_2 = c_1 + 8 = 13$,	$b_2 = b_1 + 8 = 12$,	$a_2 = a_1 + 2 = 5$,
$c_3 = c_1 + 20 = 25$,	$b_3 = b_1 + 20 = 24$,	$a_3 = a_1 + 4 = 7$,
$c_4 = c_1 + 36 = 41$,	$b_4 = b_1 + 36 = 40$,	$a_4 = a_1 + 6 = 9$,
....	....	....

127, *а*. Будет ли треугольник прямоугольным, если его стороны равны 5, 6 и 7?

Указание. Задачу рекомендуется предложить учащимся для самостоятельного решения.

128, *а*. Известны боковые стороны треугольника: $a = 13$ см, $b = 20$ см. Высота $h_c = 12$ см. Найдите основание c.

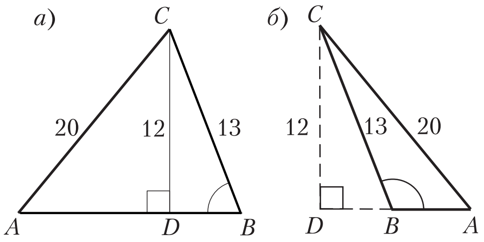


Рис. 11

Краткая запись задачи:
ΔABC, $a = 13$ см,
$b = 20$ см, $h_c = 12$ см.

$c = ?$

Дидактическая цель. Подкрепление установки на необходимость рассмотрения всех возможных случаев решения задачи, контроль усвоения ранее изученного теоретического материала о прямоугольном и равнобедренном треугольниках.

Решение. *1-й случай* (рис. 11, *а*).

Вначале учащимся предлагаем самостоятельно составить план решения задачи, затем провести необходимые вычисления:

1) из треугольника BDC:

$$BD = \sqrt{a^2 - h_c^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{1 \cdot 25} = 5 \text{ (см)};$$

2) из треугольника ADC:

$$AD = \sqrt{b^2 - h_c^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{8 \cdot 32} = 16 \text{ (см)};$$

3) тогда $c = BD + AD = 5 + 16 = 21$ (см).

2-й случай (рис. 11, *б*).

$$c = AD - BD = 16 - 5 = 11 \text{ (см)}.$$

Ответ: 21 см, 11 см.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 126—128 (из оставшихся задач четыре на выбор).

Индивидуальное задание: исследовательская работа «Задачи на теорему Пифагора». На основе задач 131—139 ознакомиться с применениями теоремы Пифагора и обратной теоремы к решению задач. Цель задания состоит в стимулировании поиска различных способов решения задач.

126, *в*. 2) Установите вид треугольника, стороны которого равны: 13, 12 и 5.

Указание. Заметим, что таблицей «Пифагоровы тройки чисел» можно пользоваться как применяя теорему Пифагора, так и теорему, обратную ей. Поэтому задачи с номером 126 могут быть решены устно.

127, *б*. Один из катетов равен a, гипотенуза равна c. Найдите второй катет.

Указание. Задача формирует первоначальный навык оперирования с аналитическим выражением, соответствующим теореме Пифагора.

127, *в*. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 40. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

Указание. Задача решается в два шага: вначале находим гипотенузу, затем медиану, проведенную к ней.

128, *б*. В треугольнике больший угол при основании равен 45°, а высота делит основание на части, равные 8 м и 15 м. Найдите большую боковую сторону.

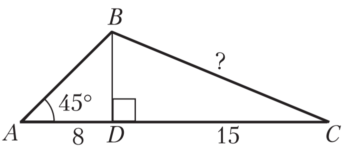


Рис. 12

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle A = 45°$, $AD = 8$ м, $DC = 15$ м, BD — высота.

$BC = ?$

Анализ условия задачи и выполнение рисунка. При первоначальном ознакомлении с текстом задачи возможен неточный рисунок, на котором, например, окажется, что $AC < BC$. С целью его уточнения полезно провести повторный, более углубленный анализ. Так как больший угол при основании AC треугольника равен 45°, то сумма углов при основании меньше 90°. Значит, третий угол (угол B) больше 90° и треугольник оказывается тупоугольным. Естественно предположить, что против большего угла треугольника лежит большая сторона. Тупой угол B является большим углом треугольника ABC, значит, AC — большая сторона этого треугольника. После этого выполняем уточненный рисунок 12, на котором $AB < BC < AC$, угол B — тупой.

Решение (синтетическим методом).

1) Рассмотрим треугольник ABD. Он прямоугольный и $\angle A = 45°$. Значит, $\angle ABD = 45°$;

2) следовательно, треугольник ABD — равнобедренный;

3) тогда $AD = BD = 8$ (м);

4) сторону BC найдем из прямоугольного треугольника BDC по теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17 \text{ (м)}.$$

ТЕМА 4 КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ: ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Занятие 33. Основные задачи на построение

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

План изучения нового материала.

1.1. *Новые задачи — новое мышление. Схема решения задач на построение*. Учащиеся знакомятся с особенностями задач на построение и общей схемой их решения.

1.2. *Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя параллельными прямыми*. Вводятся соответствующие определения и рассматривается следствие.

1.3. *Общие точки окружности и прямой*. Учащиеся закомятся с определением касательной к окружности и следствием.

1.4. *Основные задачи на построение*: построение равных треугольников, угла, равного данному углу, треугольника по основным заданным его элементам, серединного перпендикуляра к отрезку и биссектрисы угла. При необходимости может быть (в напоминание и повторение основного курса) проведен краткий обзор учебного материала данной темы, выборочно рассмотрены отдельные вопросы.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Решение задач: 142, а; 143.

Индивидуальное задание: исследовательские работы на тему «Задачи конструктивной геометрии». Основой таких работ может быть решение задач 142—150 с дополнением о решении задач на построение ограниченными средствами (одной линейкой, одним циркулем, одним чертежным треугольником и т. д.). Самостоятельная часть исследования может состоять в решении одних и тех же задач различными чертежными инструментами.

142, *а*. Построить прямоугольный треугольник по медиане, проведенной к гипотенузе, и острому углу.

Указание. Задача сводится к построению искомого треугольника по гипотенузе и острому углу.

143. Построить прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к гипотенузе.

Указание. Задача сводится к построению искомого треугольника по катету и гипотенузе. Ее можно рассматривать как своего рода дидактический признак (критерий) достижения учащимися обязательного уровня в решении задач на построение.

Занятие 34. Примеры более сложных задач на построение. Пример задачи, не разрешимой с помощью циркуля и линейки (занятие по решению задач)

1. Методические рекомендации к решению задач в классе

Решение задач: 151, а; 152, а, б; 153, а.

151, *а*. Постройте треугольник по двум сторонам a, b и углу A.

Общее указание. Задачу рекомендуется решить по полной схеме: анализ, построение, доказательство, исследование. Для этого воспользуйтесь методом геометрических мест точек. Особый интерес представляет проведение исследования: установите, когда задача: не имеет решения, имеет одно решение, имеет два решения.

Вопросы для поиска решения задачи:

1) Рассмотрим чертеж-набросок с изображенным на нем треугольником ABC, который требуется построить, зная его элементы a, b и угол A (выполните его сами). Построение искомого треугольника можно начать с построения угла A или с построения стороны AC. Что вы предлагаете?

2) Допустим, мы построили данный угол A. Какую вершину искомого треугольника можно сразу построить? (Вершину C.)

3) Какую вершину искомого треугольника осталось построить? (Вершину B.)

4) Мы подошли к самому ответственному этапу в решении задачи. Выясним, какими двумя свойствами обладает вершина B (пользуемся методом геометрических мест точек). Итак, назовите первое наиболее очевидное свойство этой вершины. (Она лежит на стороне угла A.)

5) Каким еще свойством обладает эта вершина? (Она лежит на окружности с центром в точке C и радиусом, равным a.)

6) Значит, вершина B находится как точка пересечения указанной окружности со стороной угла. Решение задачи найдено.

7) Обратим внимание на то, что окружность и луч могут не пересекаться, пересекаться в одной точке, двух точках.

152, *а*. Даны прямые a и b. Постройте точку O так, чтобы перпендикуляры, проведенные из этой точки к данным прямым, равнялись бы данным (!) отрезкам m и n.

Общее указание. Задача предполагает рассмотрение двух случаев: данные прямые пересекаются, они параллельны. В первом случае задача имеет четыре решения, а во втором случае решений либо нет, либо их бесконечное множество. Эти обстоятельства говорят о том, что задача является сложной.

Вопросы для поиска решения задачи:

1) Основной вопрос: если точка удалена от прямой на заданое расстояние, то на какой прямой она лежит? (На прямой, параллельной данной прямой и отстоящей от данной прямой на данное расстояние.)

2) Пусть a и b пересекаются и точка O удалена от данной прямой a на расстояние m. Покажите прямую (или прямые), на которой (на которых) она лежит. (На чертеже-наброске показываются эти прямые.)

3) Пусть a и b пересекаются и точка O удалена от данной прямой b на расстояние n. Покажите прямую (или прямые), на которой (на которых) она лежит. (На чертеже-наброске показываются эти прямые.)

4) Итак, если a и b пересекаются, то сколько искомых точек можно построить? (Четыре.)

5) Самостоятельно рассмотрите случай, когда a и b параллельны.

152, *б*. Внутри данного угла постройте точку так, чтобы перпендикуляры, проведенные из этой точки к сторонам угла, были бы равны данному отрезку h.

*Указание.*Обратите внимание на связь данной задачи с предыдущей задачей.

153, *а*. Постройте треугольник по стороне a, медиане m_a и высоте h_a.

2. Методические рекомендации к решению задач домашнего задания

Общее задание: 151, б; 153, б, в.

Индивидуальное задание: исследовательские работы на тему «Задачи конструктивной геометрии». Основу таких работ могут составить решения задач 151—155 с дополнением о решении задач на построение ограниченными средствами (одной линейкой, одним циркулем, одним чертежным треугольником и т. д.). Самостоятельная часть исследования может состоять в решении одних и тех же задач различными чертежными инструментами, в рассмотрении задач, не разрешимых одними чертежными инструментами и разрешимых другими чертежными инструментами.

151, *б*. Даны две окружности с общим центром. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на большей окружности, а две другие — на меньшей.

Указание. Задача повышенной сложности, поэтому к ней приводится детализированное указание (см. пособие для учащихся). Пусть вершины A и C искомого треугольника лежат на меньшей окружности, а вершина B — на большей окружности. Проведите диаметр большей окружности, выходящий из точки B. Воспользуйтесь тем, что этот диаметр лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC и $\angle OBA = 30°$ (O — центр данных окружностей). Представляет интерес исследование: задача может не иметь решения, иметь одно решение, иметь два решения. Целесообразно привести соответствующие рисунки.

153, *б*. Постройте треугольник, зная b, $a - c$ и угол C.

Указание. Важно правильно воспользоваться ранее знакомым приемом — ввести в чертеж-набросок все данные элементы, включая и отрезок, равный $a - c$. Учащимся необходимо пояснить, что сами отрезки a и c неизвестны, известна только их разность. Ввести $a - c$ надо стремиться таким образом, чтобы получился вспомогательный треугольник, который по данным элементам может быть построен. Хорошо было бы, если в этом треугольнике данный угол был бы его углом, а данные отрезки заключали бы этот угол. После этого остается установить два ГМТ, которым принадлежит вершина B.

153, *в*. Постройте треугольник по данной стороне, медиане, проведенной из конца этой стороны, и углу между ними.

Указание. Задача средней сложности и ее решение может служить критерием достигнутого уровня навыков в решении задач на построение (средний уровень, ниже среднего).

Занятие 35. Примеры более сложных задач на построение. Пример задачи, не разрешимой с помощью циркуля и линейки (в форме математической конференции)

Тема конференции: решение задач на построение различными чертежными инструментами

Примерные варианты сообщений

(Материал приводится по статье А. А. Нейматова — учителя математики, — опубликованной в журнале «Математика в школе. 1985. № 1, форзац».) Сообщения 1—6 носят реферативный характер, сообщение 7 посвящено самостоятельному решению задач.

Сообщение 1. Построения с помощью чертежного треугольника (угольника): задача об удвоении отрезка.

Среди задач на построение встречаются такие, которые можно решить с помощью только одного чертежного инструмента. Они вызывают особый интерес. Рассмотрим некоторые из них, те, где применяется только угольник, т. е. модель треугольника с углом в 90°. Величины других углов при построениях не используются и могут принимать любые допустимые значения. На сторонах такой модели масштабных отметок нет. Размеры угольника предполагаются достаточно большими (по сравнению с чертежом), чтобы не стеснять его возможностей. Угольник позволяет: а) провести все построения, выполнимые одной линейкой; б) через данную точку плоскости провести прямую, перпендикулярную некоторой данной прямой; в) установить, содержит ли данная фигура Ф точку, из которой данный отрезок AB виден под углом в 90°, и, если такая точка существует, построить ее.

В предлагаемых ниже задачах стороны чертежного угольника, образующие прямой угол, будем для удобства называть катетами, а третью сторону модели — гипотенузой.

Задача. Удвоить данный отрезок, пользуясь только угольником.

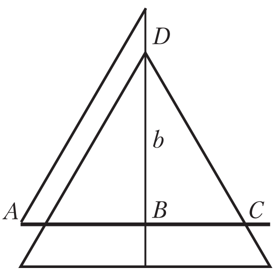


Рис. 13

Решение. Пусть дан отрезок AB. Через точку B проводим перпендикуляр b к прямой AB, затем передвигаем угольник по прямой b до тех пор, пока его гипотенуза не пересечет данный отрезок в точке A. При этом положении угольника фиксируем на чертеже точку, в которой гипотенуза пересекает прямую b (точку D). Поворачиваем угольник на 180° вокруг прямой b как оси и отмечаем точку C пересечения гипотенузы угольника, находящегося в новом положении, с прямой AB, продолженной за точку B. Отрезок AC — искомый (рис. 13).

Сообщение 2. Задача о делении отрезка пополам.

Задача. С помощью угольника разделить данный отрезок пополам.

Решение. Пусть дан отрезок AB (рис.14). Проведем к нему перпендикуляры в концах A и B. Через произвольную точку C одного из этих

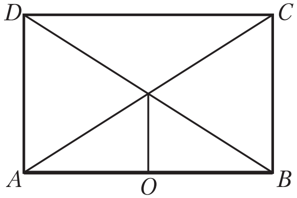


Рис. 14

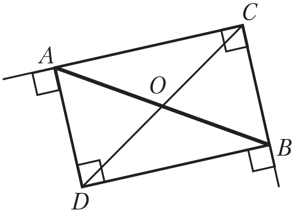


Рис. 15

перпендикуляров проводим прямую CD, перпендикулярную прямым AC и BD. В полученном прямоугольнике перпендикуляр к AB, опущенный из точки пересечения его диагоналей, делит отрезок AB пополам.

Этот способ изложен в книге Б. И. Аргунова и М. Б. Балка «Геометрические построения на плоскости» (М. : Учпедгиз, 1955. С. 24). Познакомившись с этим способом, учащиеся А. А. Нейматова предложили иное решение. Укажем его. Наложим угольник на отрезок AB так, чтобы катеты угольника проходили через точки A и B (рис. 15). Точкой C отметим на чертеже положение вершины прямого угла угольника и проведем прямые AC и BC. Через точки A и B проведем перпендикуляры к прямым AC и BC соответственно. Эти перпендикуляры пересекутся в точке D. Воспользовавшись свойством диагоналей прямоугольника, утверждаем, что O — точка пересечения отрезков AB и CD — делит отрезок AB пополам.

Сообщение 3. Задача об удвоении данного угла.

Задача. Пользуясь угольником, удвоить данный угол.

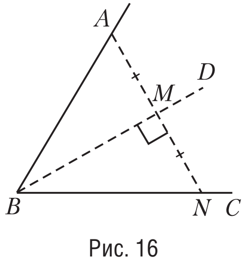


Рис. 16

Решение. Пусть дан угол DBC (рис. 16). Отметим на одном из его лучей, например на луче BD, произвольную точку M. Через точку M проведем прямую, перпендикулярную лучу BD, она пересечет другой луч угла в точке N. На прямой NM отложим отрезок MA, равный отрезку MN (см. задачу 1). Проведем луч BA. Угол ABC — искомый.

Сообщение 4. Задача о нахождении центра окружности.

Задача. Дана окружность, центр которой неизвестен. Найти ее центр, используя из всех чертежных инструментов один угольник.

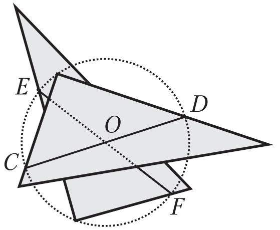


Рис. 17

Решение. Приложим угольник к окружности так, чтобы вершина его прямого угла лежала на окружности, а катеты пересекали окружность (рис. 17). Отметим точки C и D пересечения катетов с окружностью и соединим их. Отрезок CD — диаметр окружности. Аналогично строим второй диаметр EF. Точка пересечения отрезков CD и EF — искомый центр окружности.

Сообщение 5. Задача о проведении касательной к окружности.

Задача. Пользуясь угольником, провести к окружности касательную через данную вне ее точку.

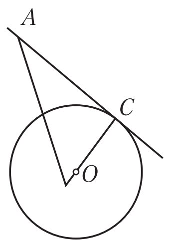


Рис. 18

Решение. Наложим угольник на чертеж так, чтобы вершина его прямого угла находилась на окружности, один из катетов проходил через точку A, а другой — через центр окружности O (рис. 18). Отметим на чертеже буквой C положение вершины прямого угла при описанном расположении угольника. Соединим теперь точки A и C, прямая AC — искомая касательная.

Сообщение 6. Задача о построении отрезка, равного данному.

Задача. Данная прямая a проходит через конец M отрезка MN. Построить на прямой a отрезок, равный отрезку MN.

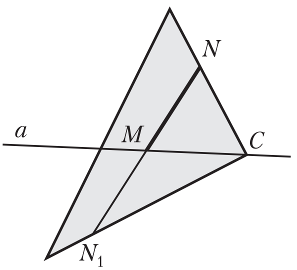
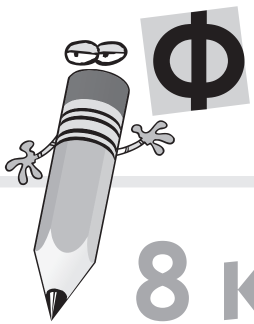


Рис. 19

Решение. Продолжим отрезок MN за точку M и отложим на этом продолжении отрезок $N_1M = MN$ (см. задачу 1). Расположим теперь наш угольник так, чтобы вершина его прямого угла находилась на прямой a, а катеты проходили через точки N_1 и N (рис. 19). Отметив на прямой точку C — положение вершины прямого угла, построим треугольник N_1NC. Точка M есть центр окружности, описанной около треугольника N_1NC. Отметим теперь отрезок MC — медиану к гипотенузе треугольника N_1NC. Отрезки MN и MC равны как радиусы описанной окружности.

Сообщение 7. Задачи для самостоятельного решения.

а) С помощью угольника постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой. б) С помощью угольника постройте биссектрису данного угла. в) С помощью угольника постройте перпендикуляр, проходящий через данную точку к данной прямой, если этот перпендикуляр частично «проходит» через недоступную область чертежа. г) С помощью угольника постройте равнобедренный прямоугольный треугольник. д) С помощью угольника постройте угол, равный 45°. е) С помощью угольника постройте параллелограмм, если даны три его вершины.



8 класс

ТЕМА 1 ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ: СОДРУЖЕСТВО ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ. НАЧАЛА МЕТОДА ПОДОБИЯ

Занятие 1. Теорема Пифагора и расстояния

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Какие расстояния существуют? При крупноблочном изложении данного пункта (объяснении, закреплении) полезно воспользоваться конспектом, представляющим различные срезы учебного материала (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Решение задач: 1, а; 2, а.

2, *а*.

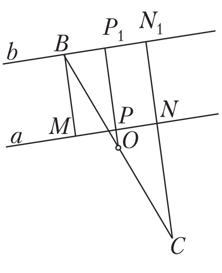


Рис. 1

Краткая запись задачи:
B и C лежат по разные стороны от a,
$BM \perp a$, $CN \perp a$, $BM = 5$ см, $CN = 7$ см,
O — середина BC, $OP \perp a$.

$OP = ?$

Замысел решения. Наводящие ассоциации: а) «O — середина отрезка BC» — возможно, в связи с этим полезно рассмотреть среднюю линию треугольника, одним из концов которой является точка O; б) «$BM \perp a$, $CN \perp a$, $OP \perp a$» — возможно, предполагаемый треугольник должен быть прямоугольным. Итак, попытаемся нахождение расстояния OP связать со средней линией прямоугольного треугольника (какого?).

Дополнительные построения. Через точку B проведем $b \parallel a$ (рис. 1), пусть N_1 — точка пересечения CN и b, P_1 — точка пересечения OP и b.

Нетрудно видеть, что ΔBCN_1 — прямоугольный и OP_1 средняя линия этого треугольника.

Вычисления.

1) $CN_1 = CN + NN_1 = CN + BM = 7 + 5 = 12$ (см);

2) $OP_1 = \frac{1}{2}CN_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см);

3) $OP = OP_1 - PP_1 = OP_1 - PM = 6 - 5 = 1$ (см).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 1—2 (три задачи на выбор)[1]. В классе могут быть устно составлены планы решения некоторых таких задач.

Индивидуальное задание: 3.

3.

Краткая запись задачи:
ΔABC — равнобедренный ($AB = AC$), $M \in BC$,
$MP \perp AB$, $MK \perp AC$, BB_1 — высота (рис. 2).

Доказать: $MP + MK = BB_1$.

Задача допускает различные способы решения методом равных треугольников. Три таких способа можно найти с помощью данных рисунков.

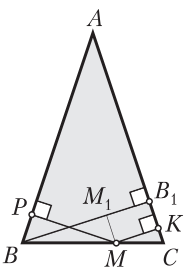


Рис. 2

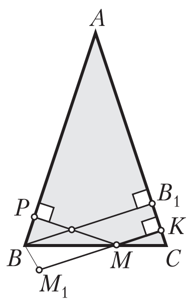


Рис. 3

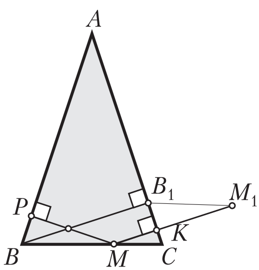


Рис. 4

На рисунке 2 $M_1B_1 = MK$, на рисунке 3 $M_1K = BB_1$, на рисунке 4 $MM_1 = BB_1$. Предлагаем учителю (совместно с учениками) завершить предлагаемые решения данной задачи.

---

[1] Здесь и далее имеются в виду задания из пособия для учащихся «Геометрия. 8 класс. Многообразие идей и методов».

Занятие 2. Свойства биссектрисы угла. Касательная к окружности

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Можно ограничиться формулировкой свойств биссектрисы угла, отсылая за доказательствами к основному учебнику. Важно при этом подчеркнуть, что в данных теоремах мы имеем дело с расстоянием от точки до луча.

При введении понятия касательной полезно воспользоваться эвристической беседой, которая в краткой форме представлена в пособии для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 1—3 из теоретической части пособия для учащихся, приводимые с решением.

12.

Краткая запись задачи:
a, b — катеты, c — гипотенуза,
r — радиус вписанной окружности (рис. 5).

Доказать: $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Замечание. Данную формулу полезно запомнить, она может пригодиться при решении других задач.

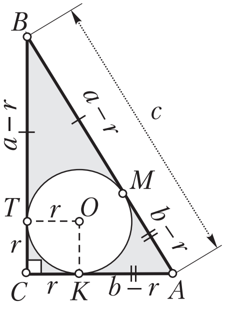


Рис. 5

Поиск решения. Для вписанной окружности, как правило, на рисунке надо показать центр окружности, точки касания, радиус окружности, проведенный из центра в точку касания (возможно, не один). Обозначим искомый радиус через r. В результате выполняется рисунок (рис. 5). Далее выясняем, нельзя ли воспользоваться свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. В итоге выражаем гипотенузу c через катеты и r. Отсюда находим r.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 5—7.
Индивидуальное задание: 4—11 (три задачи на выбор).

Дополнительная задача. (*Обратная задаче 9.*)

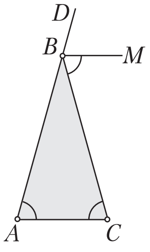


Рис. 6

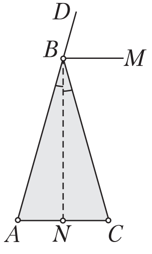


Рис. 7

Краткая запись задачи:
ΔABC, $AB = BC$,
$\angle DBC$ — внешний угол ΔABC,
BM — биссектриса $\angle DBC$.

Доказать: $BM \parallel AC$.

1-й способ. Замысел доказательства. Чтобы доказать, что $BM \parallel AC$, достаточно доказать равенство накрест лежащих углов CBM и BCA (рис. 6).

План решения и вычисления.

1) обозначим $\angle C$ через α и найдем внешний угол DBC:

$$\angle DBC = \angle A + \angle C = 2\alpha;$$

2) найдем угол CBM:

$$\angle CBM = \frac{1}{2}\angle DBC = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha = \alpha;$$

3) сравниваем углы CBM и C и приходим к выводу:

$$\angle CBM = \angle C \Rightarrow BM \parallel AC.$$

2-й способ. Замысел доказательства. Воспользуемся другим признаком параллельности прямых: если две прямые перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.

Дополнительное построение. Проведем биссектрису BN ΔABC (рис. 7).

План доказательства и доказательство.

1) Докажем, что $AC \perp BN$:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC \text{ — равнобедренный,} \\ BN \text{ — биссектриса } \angle B \end{array}\right\} \Rightarrow BN \text{ — высота} \Rightarrow AC \perp BN;$$

2) докажем, что $BM \perp BN$:

$$\left.\begin{array}{l} \angle B \text{ и } \angle CBD \text{ — смежные,} \\ BN \text{ и } BM \text{ — биссектрисы этих углов} \end{array}\right\} \Rightarrow BM \perp BN;$$

3) вывод:

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BN, \\ BM \perp BN \end{array}\right\} \Rightarrow BM \parallel AC.$$

Занятие 3. Виды четырехугольников. Параллелограмм

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуется воспользоваться крупноблочным изложением учебного материала — методом срезов, опираясь на конспект (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть три задачи из п. 3.1, приведенные в теоретической части пособия для учащихся с решением.

Задача 1. В прямоугольнике $ABCD$ известны стороны: $AB = 3$, $BC = 4$. Найдите расстояние от вершины B до диагонали AC.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется найти?

Выполним рисунок к задаче, сделаем краткую запись.

Проверьте, правильно ли выполнен рисунок, все ли данные и искомые величины на нем показаны правильно.

Нам надо найти расстояние от вершины B до диагонали AC. Как на рисунке показать это расстояние?

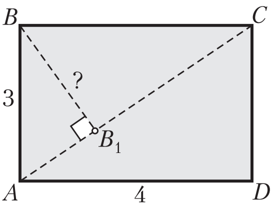


Рис. 8

Итак, рисунок выполнен правильно: BB_1 — перпендикуляр, проведенный из вершины B к диагонали AC, и его требуется найти (рис. 8).

Думаем, как найти перпендикуляр BB_1. Какие предложения будут? Нельзя ли BB_1 связать с некоторым треугольником?

Чем является BB_1 для треугольника ABC? Правильно: высотой, проведенной к гипотенузе.

И самый главный вопрос: не помните ли вы формулу высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе?

Вспоминаем эту формулу, после чего можно считать, что поиск закончен и решение задачи найдено.

Задача 2. Докажите, что в параллелограмме $ABCD$ вершины B и D равноудалены от диагонали AC.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется найти?

Выполним рисунок к задаче, сделаем краткую запись.

Проверьте, правильно ли выполнен рисунок, все ли данные и искомые величины на нем показаны правильно.

Нам надо доказать, что вершины B и D равноудалены от диагонали AC. Что значит «вершины B и D равноудалены от диагонали AC»? (Это значит, что расстояния от точек B и D до диагонали AC равны между собой.) Как на рисунке показать эти расстояния?

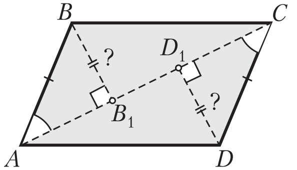


Рис. 9

Итак, рисунок выполнен правильно: BB_1 и DD_1 — перпендикуляры, проведенные соответственно из вершин B и D к диагонали AC, и требуется доказать, что $BB_1 = DD_1$ (рис. 9).

Думаем, как доказать, что $BB_1 = DD_1$. Какие предложения будут? Нельзя ли применить метод равных треугольников?

И самые главные вопросы: какие треугольники надо рассмотреть, как доказать их равенство?

Учащиеся отвечают на эти вопросы, после чего можно считать, что поиск закончен и решение задачи найдено.

Задача 3. Докажите, что если в параллелограмме равны высоты, проведенные из одной вершины к двум его сторонам, то этот параллелограмм является ромбом.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

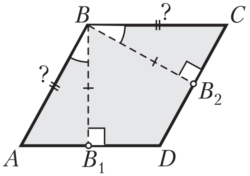


Рис. 10

Что дано в задаче? Что требуется найти?

Выполним рисунок к задаче (рис. 10), сделаем краткую запись.

Проверьте, правильно ли выполнен рисунок, все ли данные и искомые величины на нем показаны правильно. Правильно ли показаны на рисунке высоты BB_1 и BB_2? Удовлетворяют ли они условию $BB_1 = BB_2$? Выполните рисунок таким образом, чтобы это условие выполнялось!

Нам надо доказать, что параллелограмм $ABCD$ является ромбом. Что для этого достаточно доказать? (Равенство сторон параллелограмма.) Равенство каких двух сторон параллограмма достаточно доказать? (AB и BC.)

Думаем, как доказать, что $AB = BC$. Какие предложения будут? Нельзя ли применить метод равных треугольников?

И самый главный вопрос: какие треугольники надо рассмотреть, как доказать их равенство?

Учащиеся отвечают на эти вопросы, после чего можно считать, что поиск закончен и решение задачи найдено.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: три задачи из п. 3.3 (приведены в теоретической части пособия для учащихся с решением); 13—19 (одну-две задачи на выбор).

14.

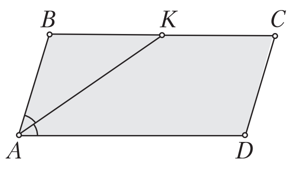


Рис. 11

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм,
AK — биссектриса угла A,
$BK = KC$ (рис. 11).

Сравнить AD и AB.

Поиск решения.

Нельзя ли вначале сравнить AB и BK?

Какого вида ΔABK?

Что можно сказать об углах, прилежащих к стороне AK? И т. д.

15. Найдите неизвестные углы параллелограмма, если один из его углов равен 50° (рис. 12).

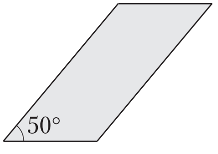


Рис. 12

Решение (проводится устно). Имеем:

а) $\angle C = \angle A = 50°$, $\angle B = \angle D = 180° - 50° = 130°$;

б) $\angle B = \angle D = 140°$, $\angle A = \angle C\ 180° - 140° = 40°$;

в) $\angle D = \angle B = 60° + 40° = 100°$, $\angle A = \angle C = 180° - 100° = 80°$;

г) $\alpha + (\alpha + 90°) = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$, $\angle A = \angle C = 45°$, $\angle B = \angle D = 135°$;

д) $\alpha + \beta = 2\alpha = 120° \Rightarrow \alpha = 60°$, $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 180° - 60° = 120°$.

Занятие 4. Прямоугольник. Ромб. Квадрат

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Систематизируем теоретический материал, относящийся к прямоугольнику, ромбу и квадрату.

Если доказательства ранее были рассмотрены (в основном курсе), то здесь их опускаем.

В целях уточнения знаний учащихся выясняем следующие вопросы.

- Является ли квадрат ромбом, прямоугольником, параллелограммом?
- Является ли прямоугольник параллелограммом?
- Является ли ромб параллелограммом?
- Что является общей частью множества параллелограммов и множества ромбов, множества параллелограммов и множества прямоугольников, множества прямоугольников и множества ромбов?

Цель постановки вопросов. Эти вопросы ставятся непосредственно после ознакомления учащихся с определениями различных четырехугольников. С их помощью закрепляются эти определения и устанавливаются новые взаимосвязи между различными четырехугольниками.

Предварительные вопросы.

1) Какую геометрическую фигуру называют четырехугольником? выпуклым четырехугольником?

2) Какие виды четырехугольников вы знаете?

3) Какой четырехугольник называется параллелограммом, прямоугольником, квадратом, ромбом?

4) Что общего можно заметить между квадратом и ромбом; квадратом и прямоугольником?

При ответе на поставленные вопросы даем учащимся возможность воспользоваться специальной схемой (рис. 13), на которой показаны первоначальные связи между понятиями, установленные при их определении.

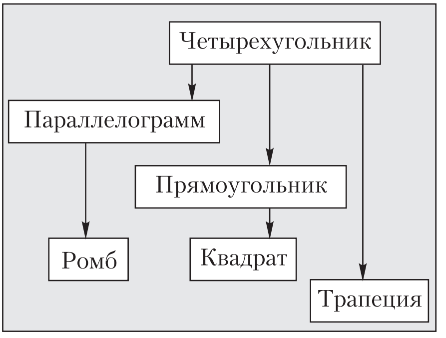


Рис. 13

Методическая схема решения.

а) *Разделение вопросов на две группы.* Выясняем, что среди вопросов есть такие, ответы на которые можно дать сразу, пользуясь определениями различных четырехугольников (схемой на рис. 13). С помощью этой схемы получаем следующие ответы: квадрат является прямоугольником, ромб — параллелограммом. Дать ответы на остальные вопросы при помощи этой схемы затруднительно, требуются некоторые новые знания.

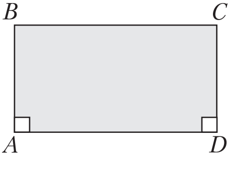


Рис. 14

б) *Поиск дополнительных связей между четырехугольниками.* Зададимся вопросом: «Что необходимо доказать, чтобы выяснить, является ли квадрат ромбом?» Схема показывает кратчайший путь: необходимо доказать, что прямоугольник является параллелограммом. В самом деле: пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. 14). Докажем, что он является параллелограммом. Углы A и D — односторонние при прямых AB и CD и секущей AD. Так как $\angle A = \angle D = 90°$, то $\angle A + \angle D = 180°$. Отсюда $AB \parallel CD$. Аналогично: $AD \parallel BC$. Следовательно, прямоугольник $ABCD$ является параллелограммом.

Затем получаем, что квадрат является ромбом. В итоге первоначальная схема наращивается новыми связями между четырехугольниками. На рисунке 15 они показаны пунктирными стрелками.

в) *Ответы на оставшиеся вопросы.* С помощью второй схемы (см. рис. 15) нетрудно дать остальные ответы. Приведем их. Так как:

• ромб является параллелограммом, то общей частью множества параллелограммов и множества ромбов является множество ромбов;

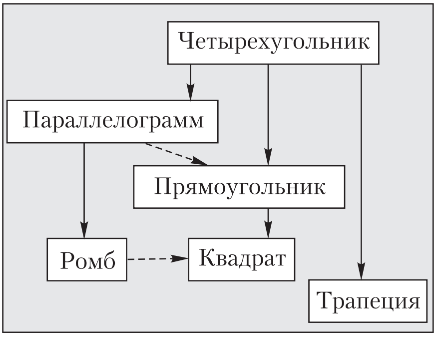


Рис. 15

• прямоугольник является параллелограммом, то общей частью множеств параллелограммов и прямоугольников является множество прямоугольников;

• из всех ромбов прямоугольниками являются только квадраты, то общей частью множества прямоугольников и множества ромбов является множество квадратов.

В заключение отметим, что развивающая сторона данной задачи состоит в том, что дети учатся не только читать готовые схемы связей между понятиями, но и составлять их, анализировать с определенной целью. В итоге складывается более четкое представление о системе понятий.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 1—4 из п. 4.2, приведенные в теоретической части пособия для учащихся с решением.

Задача 1. Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ (рис. 16), треугольник ABO — равносторонний. Найдите сторону BC, если $AB = a$.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.
Что дано в задаче? Что требуется найти?
Выполним рисунок к задаче, сделаем краткую запись.

Проверьте, правильно ли выполнен рисунок, все ли данные и искомые величины на нем показаны правильно. Правильно ли показан на рисунке равносторонний треугольник ABO? Выполните рисунок таким образом, чтобы это условие выполнялось! Не удобнее ли построение прямоугольника начать именно с построения этого равностороннего треугольника?

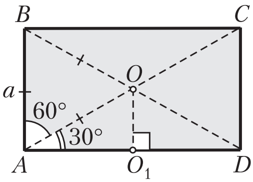


Рис. 16

Нам надо найти сторону BC (см. рис. 16). Задача допускает различные способы решения. Как догадаться до более простого решения? Будем считать более простым то из них, которое не требует дополнительных построений. В какой треугольник входит отрезок BC? (В треугольник ABC.)

Думаем, как найти BC. Какие предложения будут? Как воспользоваться треугольником ABC?

После ответа на этот вопрос можно считать, что поиск закончен и решение задачи найдено.

Задача 2. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от всех его сторон.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

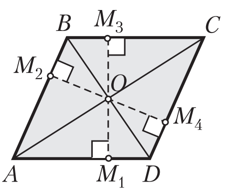


Рис. 17

Что дано в задаче? Что требуется доказать?

Выполним рисунок к задаче, сделаем краткую запись.

Проверьте, правильно ли выполнен рисунок 17, все ли данные на нем показаны правильно. Правильно ли показаны на рисунке расстояния от точки O до сторон угла? Как их показать? Выполните рисунок таким образом, чтобы это условие выполнялось! Задача допускает различные способы решения. Как догадаться до более простого решения? Будем считать более простым то из них, в котором используется одно свойство (чего?), непосредственно относящееся к диагонали AC.Чем является диагональ AC для угла A? (Биссектрисой.)

Думаем, каким свойством биссектрисы удобно воспользоваться. Какие предложения будут? Вспомните, что в задаче речь идет о расстояниях!

После ответа на этот вопрос можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 3. Докажите, что если в параллелограмме точка пересечения диагоналей равноудалена от всех его сторон, то такой параллелограмм является ромбом.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется доказать? Чем отличается данная задача от предыдущей? (Данная задача является обратной по отношению к предыдущей задаче.)

Воспользуемся рисунком 17, сделаем краткую запись.

Имеются различные признаки ромба, поэтому задача допускает различные способы решения: любым из них можно воспользоваться. Назовите некоторые признаки ромба.

Думаем, каким признаком ромба удобно воспользоваться. Какие предложения будут? Обратите вниание на то, что чертеж к данной задаче остался такой же, как и для предыдущей задачи. В предыдущей задаче мы пользовались свойством ромба, а теперь надо воспользоваться признаком... (Приходим к выводу, что надо доказать, что диагональ AC является биссектрисой угла A.) Как доказать, что диагональ AC является биссектрисой угла A? После ответа на этот вопрос можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 4. Постройте квадрат по сумме стороны и диагонали.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

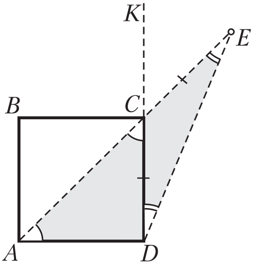


Рис. 18

Допустим, что искомый квадрат $ABCD$ построен. В нем $AC + CD = s$ — данному отрезку.

Попытаемся включить отрезок s в некоторый треугольник, связанный с квадратом. Как это сделать?

(Возможный вариант построений (рис. 18): продолжим диагональ AC и на продолжении отложим отрезок $CE = CD$, получим отрезок $AE = AC + CD$ (пусть он равен s).)

Построили отрезок AE, но он пока не включен в какой-либо треугольник! Надо побыстрее это сделать. Как именно? (Построим отрезок DE. Получим треугольник ADE.)

Какие свойства этого треугольника можно заметить? (В этом треугольнике: $AE = s$, $\angle EAD = 45°$, $\angle AED = \frac{1}{2}\angle ACD = \frac{45°}{2}$.)

Можно ли по этим данным построить треугольник ADE? (Его можно построить по стороне и двум прилежащим углам.) Построив сторону AD квадрата, построим квадрат $ABCD$.

После выяснения этих вопросов можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 20—23 (три задачи на выбор). В разделе «Ответы и указания» пособия для учащихся приведены подробные указания или решения.

20. Докажите, что если вершины параллелограмма лежат на окружности, то он является прямоугольником.

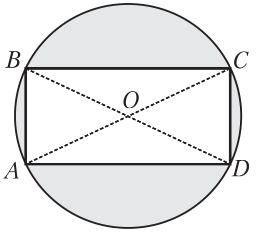


Рис. 19

Поиск решения. Докажем, что углы данного параллелограмма прямые. Для этого достаточно доказать, что углы, прилежащие к одной его стороне, равны между собой. Соединим центр окружности с вершинами параллелограмма. Получим четыре равнобедренных треугольника (рис. 19). Нет ли среди этих треугольников равных?

Решение.

1) Так как треугольники, прилежащие к противоположным сторонам параллелограмма, равны (по трем сторонам) и они равнобедренные, то

$$\angle OAD = \angle ODA = \angle OBC = \angle OCB$$

$$\text{и} \quad \angle OAB = \angle OBA = \angle OCD = \angle ODC;$$

2) отсюда следует, что $\angle A = \angle D$;

3) так как эти углы равны и их сумма равна 180°, то каждый из них — прямой;

4) отсюда следует, что данный параллелограмм является прямоугольником.

Занятие 5. Трапеция

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Систематизируются теоретические сведения (определения, свойства средней линии трапеции, следствия).

Структурированный рисунок к доказательству теоремы 7:

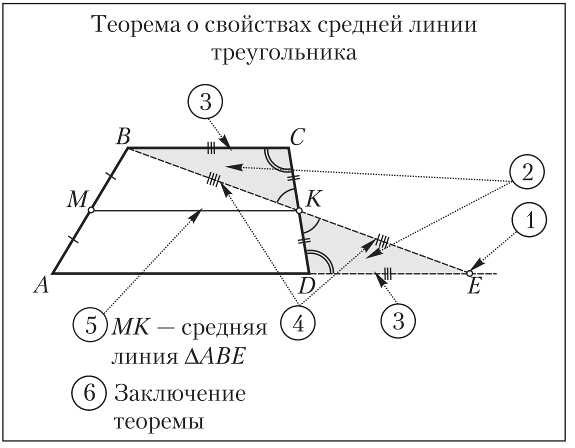


Рис. 20

Структурированное доказательство:

1) Пусть E — точка пересечения прямых BK и AD (рис. 20);

2) имеем: $\Delta BCK = \Delta EDK$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам);

3—4) из равенства этих треугольников следует, что $BC = DE$, $BK = KE$;

5) поэтому MK — средняя линия треугольника ABE;

6) значит, $MK \parallel AE$, $MK \parallel AD$, $MK \parallel BC$;

7) далее: $MK = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{AD + DE}{2} = \dfrac{AD + BC}{2}$.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется разобрать решения задач, приводимые в теоретической части пособия для учащихся.

Задача 1. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB разделена точками M_1, M_2 и M_3 на четыре равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции и пересекающие другую боковую сторону соответственно в точках K_1, K_2 и K_3. Найдите отрезки M_1K_1, M_2K_2 и M_3K_3, если $AD = a$, $BC = b$.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

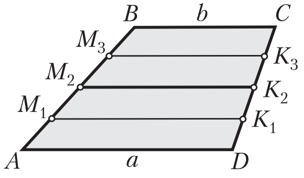


Рис. 21

Что дано в задаче? Что требуется найти?

Выполним рисунок (рис. 21), сделаем краткую запись.

Вспомните тему урока. Какую фигуру мы изучаем? Что мы знаем о трапеции?

Можно ли сразу найти какой-либо из искомых отрезков? (Не можем / Можем.)

Так можем или не можем? (Замечаем, что M_2K_2 — средняя линия трапеции $ABCD$. Поэтому мы ее можем найти сразу.) Как это сделать? (Воспользоваться свойством средней линии трапеции.)

Допустим, что мы нашли M_2K_2. Как дальше будем решать задачу? После ответа на этот вопрос можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ M и N — середины соответственно оснований AD и BC. Докажите, что отрезок MN является высотой трапеции.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

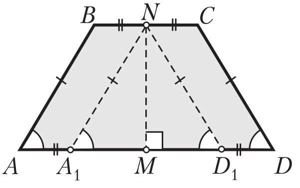


Рис. 22

Что дано в задаче? Что требуется доказать?

Выполним рисунок, сделаем краткую запись.

Вспомните тему урока. Какую фигуру мы изучем? Какая трапеция называется равнобедренной?

На рисунке 22 провели $NA_1 \parallel AB$, $ND_1 \parallel CD$. Это большая подсказка! Как ею воспользоваться? Какой треугольник полезно рассмотреть? Как вы думаете, к чему сводится решение данной задачи? (Доказать, что MN — высота этого треугольника.)

Как это сделать? (Воспользоваться свойством медианы равнобедренного треугольника.). После ответа на этот вопрос можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ точки M и N — середины соответственно оснований AD и BC, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что отрезок MN проходит через точку O.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется доказать?

Выполним рисунок, сделаем краткую запись.

Какая трапеция называется равнобедренной?

Нам надо доказать, что отрезок MN проходит через точку O.

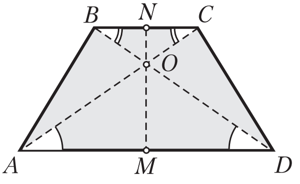


Рис. 23

Возможно, неожиданно, но поступим следующим образом: через точку O проведем биссектрисы вертикальных углов AOD и BOC (они лежат на одной прямой!) и докажем, что они проходят соответственно через точки M и N (рис. 23).

Объясните, почему этого достаточно для решения задачи.

Какие треугольники надо рассмотреть? Чем являются проведенные биссектрисы для этих треугольников? После ответа на эти вопросы можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. Найдите высоту трапеции, если $AD = a$, $BC = b$. Выразите высоту через среднюю линию данной трапеции.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется доказать?

Выполним рисунок, сделаем краткую запись.

Какая трапеция называется равнобедренной?

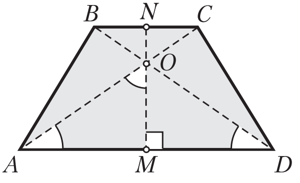


Рис. 24

Нам надо найти высоту трапеции. Очень важно, каким образом мы ее построим (высот трапеции ведь можно построить сколько угодно!). На приводимом рисунке 24 высота MN проведена через точку пересечения диагоналей. Подумайте, что дает такое построение? Подумайте еще вот над чем: на рисунке не проведена средняя линия. Оказывается можно обойтись без ее построения (хотя обычно советуют: все, о чем говорится в задаче, надо показывать на рисунке! Оказывается, есть и исключения из этого правила!)

Какие треугольники надо рассмотреть? Чем являются отрезки OM_1 и ON для этих треугольников? После ответа на эти вопросы можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 24—26.
Индивидуальное задание: 27—28 (одну задачу на выбор).

Занятие 6. Новые применения метода площадей: основные формулы площади

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Вначале вспоминаем известные из предыдущего класса формулы площади прямоугольника и прямоугольного треугольника, далее проводим ознакомление с новыми сведениями о площадях многоугольников.

Рекомендуем воспользоваться конспектом (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется разобрать решения задач, приводимые в теоретической части пособия для учащихся.

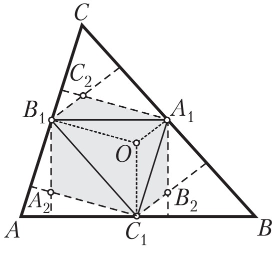


Рис. 25

Задача 1. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника проведены перпендикуляры на две другие стороны (рис. 25). Найдите площадь Q ограниченного ими шестиугольника, если площадь треугольника равна S.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется найти? Выполним рисунок, сделаем краткую запись. Какая фигура получилась в результате построения перпендикуляров? Необычность задачи состоит в том, что требуется найти площадь шестиугольника. Каких-либо формул на этот случай у нас нет. Как быть? Естественный выход из этой ситуации — разбить построенный шестиугольник на части, площади которых мы можем найти. Как это сделать?

Нам даны середины сторон. Может быть, провести средние линии треугольника?

А может быть, провести серединные перпендикуляры к сторонам данного треугольника?

А может, провести и то, и другое? Давайте выполним такие построения. Подумайте, что они дают?

Воспользуйтесь тем, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. После ответа на эти вопросы можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 2. Диагональ прямоугольной трапеции равна ее боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 4, а боковая сторона 5.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется найти?
Выполним рисунок, сделаем краткую запись.
Нельзя ли воспользоваться формулой площади трапеции?

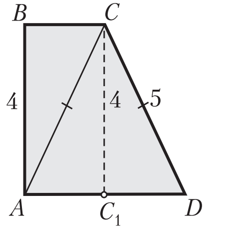


Рис. 26

Для этого достаточно найти основания трапеции. Почему достаточно? (Потому что высота трапеции известна.)

Итак, давайте подумаем, как найти основания трапеции. Мы провели диагональ трапеции (рис. 26). Рассмотрите треугольники, которые при этом получились! Вспомните египетский треугольник. Он вам пригодится. После выполнения этих советов можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 3. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 4 и 6.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется найти?
Выполним рисунок, сделаем краткую запись.

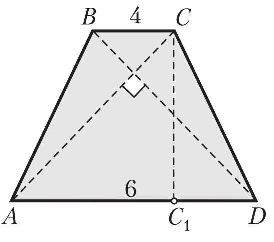


Рис. 27

Нельзя ли воспользоваться формулой площади трапеции?

Для этого достаточно найти высоту трапеции. Почему достаточно? (Потому что основания трапеции известны.)

Итак, давайте подумаем, как найти высоту трапеции.

Высоту равнобедренной трапеции часто удобно провести через точку пересечения ее диагоналей (рис. 27). Посмотрим, не поможет ли этот прием при решении данной задачи. После выполнения этих советов можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

Задача 4. Пусть a, b и c — соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника, h — высота, проведенная к гипотенузе. Существует ли треугольник со сторонами h, $c+h$ и $a+b$? Если да, то установите вид этого треугольника и найдите его площадь.

Поиск решения: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Что дано в задаче? Что требуется установить и найти? Сделаем краткую запись.

Прежде чем искать площадь треугольника, естественно, нужно установить его вид (как это и требуется в задаче).

Прежде всего надо установить, не является ли данный треугольник прямоугольным, равносторонним, равнобедренным. С чего начнем? (Попробуем начать с прямоугольного треугольника.)

Итак, проверим, не является ли данный треугольник прямоугольным.

Как это проверить? Не забыли ли вы теорему, обратную теореме Пифагора? Очень полезная теорема! Какой из отрезков — h, $c+h$ или $a+b$ — будем испытывать в качестве гипотенузы (надо из этих трех отрезков взять самый большой)? Убеждаемся в том, что

$$(a+b)^2+h^2=(c+h)^2\dots .$$

После выполнения этих советов можно считать, что поиск закончен и решение задачи в основном найдено.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 29—30.

29. Пусть $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$), O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что треугольники ABO и CDO — равновеликие.

30. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD. Докажите, что $S_{ABO}=S_{CDO}$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

Первая из этих двух задач решается достаточно просто: необходимо воспользоваться равновеликими треугольниками ABD и ACD.

Сложнее выявить логическую связь этих задач. Первая задача является частью второй задачи и поэтому остается доказать утверждение: если $S_{ABO}=S_{CDO}$, то $BC \parallel AD$. Для этого достаточно доказать равновеликость треугольников ABD и ACD.

Занятие 7. Новые применения метода площадей: основные формулы площади (решение задач)

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи из пункта 6.3 пособия для учащихся.

Рекомендуется рассмотреть также часть задач из связки 31—35. Эти задачи могут быть разобраны в устной форме.

31. Найдите площадь четырехугольника, диагонали которого перпендикулярны и равны 6 см и 8 см.

Указание. Задача может быть решена, если рассмотреть данный четырехугольник как четырехугольник, состоящий из двух треугольников. Обозначьте часть одной диагонали через x.

32. Решите задачу 31, рассмотрев данный четырехугольник как четырехугольник, состоящий из четырех прямоугольных треугольников.

Указание. Решается аналогично: как и выше, обозначьте часть одной диагонали через x.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 33.
Индивидуальное задание: 34; 35.

33. Решите задачу 31 иначе: замените данный четырехугольник равновеликим прямоугольником. Рассмотрите различные варианты такой замены.

Указание. Рассмотрите два треугольника с общей стороной AC. Каждый из этих треугольников можно заменить равновеликим прямоугольником со стороной AC и высотой, в два раза меньшей высоты соответствующего треугольника. В итоге нахождение площади данного четырехугольника может быть сведено к нахождению площади полученного прямоугольника.

34. Решите задачу 31 иначе: нельзя ли воспользоваться прямоугольником, стороны которого параллельны диагоналям данного четырехугольника?

Указание. Можно, в этом случае площадь данного четырехугольника в два раза больше площади построенного прямоугольника.

35. Решите задачу 31 иначе: нельзя ли данный четырехугольник заменить равновеликим треугольником? Рассмотрите различные варианты такой замены.

Указание. Проведите через вершину C прямую, параллельную другой диагонали. Переместите вершины B и D параллельно прямой AC. Замените треугольники ABC и ADC равновеликими треугольниками, образующими один треугольник.

Занятие 8. Парад математических методов: обобщенная теорема Фалеса и новый геометрический метод — метод подобия

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Основным в данном параграфе является ознакомление учащихся с определением и признаками подобия треугольников. Доказательства признаков опираются на обобщенную теорему Фалеса (ОТФ). Это обстоятельство подчеркивает роль ОТФ как одной из узловых (ключевых) теорем курса планиметрии. Примечательно, что сама ОТФ доказывается чрезвычайно просто благодаря применению метода площадей. Поэтому этот параграф являет собой своего рода парад различных математических методов! Однако это не просто красивая демонстрация математических методов — важно, что такое содружество методов служит решению трудной задачи — упрощению и рационализации школьного курса геометрии.

Теоретический материал рекомендуется изложить методом срезов, используя соответствующий конспект (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 1 из пункта 7.3 пособия для учащихся (с решением).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 2; 3 из пункта 7.3 пособия для учащихся (приведены с решением).

Индивидуальное задание: 36 (приведены подробные указания в разделе «Ответы» пособия для учащихся).

Занятие 9. Парад математических методов: обобщенная теорема Фалеса и новый геометрический метод — метод подобия (решение задач)

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть следующие задачи: 37—39 (приведены подробные указания в разделе «Ответы» пособия для учащихся).

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 40; 41.
Индивидуальное задание: 42.

42. См. задачу 3 и ее краткую запись.

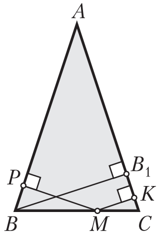


Рис. 28

Поиск решения. После выполнения рисунка 28 замечаем, что на нем имеется ряд прямоугольных треугольников с равными острыми углами. Следовательно, эти треугольники подобны. Естественно напрашивается предположение: нельзя ли решить данную задачу методом подобия...

Решение.

1) В прямоугольных треугольниках MKC, MPB, BB_1C углы равны (пользуемся тем, что данный треугольник равнобедренный);

2) поэтому $\Delta MKC \backsim \Delta MPB \backsim \Delta BB_1C$;

3) $\Delta MKC \backsim \Delta BB_1C \Rightarrow \dfrac{MK}{BB_1} = \dfrac{MC}{BC}$;

4) $\Delta MPB \backsim \Delta BB_1C \Rightarrow \dfrac{MP}{BB_1} = \dfrac{MB}{BC}$;

5) п. 3) и 4) $\Rightarrow MK = \dfrac{MC}{BC} \cdot BB_1,\ MP = \dfrac{MB}{BC} \cdot BB_1$;

6) $$MK + MP = \frac{MC}{BC} \cdot BB_1 + \frac{MB}{BC} \cdot BB_1 = \frac{MC \cdot BB_1 + MB \cdot BB_1}{BC} =$$
$$= \frac{(MC + MB)BB_1}{BC} = \frac{BC \cdot BB_1}{BC} = BB_1.$$

ТЕМА 2 КООРДИНАТНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ МЕТОДЫ — ОКНО В МИР СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Занятие 10. Первые применения координатного метода: основные формулы координатной геометрии

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Учащимся напоминаются понятия, относящиеся к системе координат, и выводятся координатные формулы середины отрезка и расстояния. Рекомендуется воспользоваться конспектами (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 43; 44 (приводятся с решением в разделе «Ответы» в пособии для учащихся).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—4, приведенные с решением в пункте 1.3 данной темы в пособии для учащихся; 45.

Индивидуальное задание: 45—49 (одну задачу на выбор).

45.

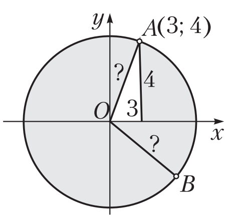


Рис. 29

Краткая запись задачи:
O — начало координат,
$OB = OA$,
$A(3; 4)$.

Найти: OB.

Поиск решения.

Выполняется рисунок 29, на котором показываются условия задачи и ее требование. Неизвестные величины помечены вопросительными знаками. Выясняется, что нахождение OB сводится к нахождению OA.

Проводятся вычисления. Рисунок подсказывает, что точка B может быть любой точкой окружности $(O, 5)$. Поэтому ее координаты не определяются. Можно указать только границы, в которых изменяются эти координаты: $-5 \le x \le 5$, $-5 \le y \le 5$.

Решение.

$$OB = OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Ответ: $OB = 5$. Координаты точки B не определяются.

46. Смотрите решение задачи 5, приводимое в пункте 2.2 пособия для учащихся.

47. Решение задачи сводится к решению уравнения $(x - 1)^2 + 25 = (x - 6)^2 + 1$.

48. Воспользуйтесь египетским треугольником.

49.

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — четырехугольник,
E — середина AC,
M — середина BD.

Доказать: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EM^2$.

Замысел решения. Запишем координаты точек и найдем соответствующие расстояния.

Решение.

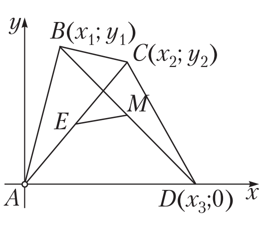


Рис. 30

1) Расположим систему координат так, как показано на рисунке 30. Пусть $A(0; 0)$; $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$, $D(x_3; 0)$;

2) тогда середины диагоналей имеют координаты:

$$E\left(\frac{x_2}{2}; \frac{y_2}{2}\right), \quad M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1}{2}\right);$$

3) можно записать:

$$+\begin{array}{l} AB^2 = x_1^2 + y_1^2, \\ BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \\ CD^2 = (x_3 - x_2)^2 + y_2^2, \\ AD^2 = x_3^2 \end{array}$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = \ldots = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + y_1y_2);$$

4) Аналогично:

$$\begin{array}{rl} & AC^2 = x_2^2 + y_2^2, \\ + & BD^2 = (x_3 - x_1)^2 + y_1^2, \\ & 4EM^2 = (x_1 + x_3 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ \hline \end{array}$$

$$AC^2 + BD^2 + 4EM^2 = \ldots =$$

$$= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2) - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + y_1 y_2);$$

5) поэтому $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EM^2$.

Занятие 11. Уравнения прямой и окружности

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуется воспользоваться конспектом, приведенным в Приложении 1.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Общее задание: 50; 51, а, б.
Индивидуальное задание: 51, в.

50, *а*. 1). Запишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если: $A(1; 2)$, $B(2; 0)$.

Указание. Пусть M — произвольная точка серединного перпендикуляра, обозначим ее координаты через x и y. Так как точка M равноудалена от точек A и B, то $MA = MB$. Остается записать это равенство в координатах и упростить его.

Пример из п. 2.1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 3)$ и $B(1; -5)$.

Замысел решения. Воспользуемся тем, что если прямая проходит через некоторую точку, то координаты точки удовлетворяют уравнению этой прямой (обращают уравнение прямой в верное числовое равенство).

Решение.

1) Так как прямая проходит через точки A и B, то

$$A(-2) + B \cdot 3 + C = 0, \quad A \cdot 1 + B(-5) + C = 0;$$

2) из первого равенства выразим A:

$$A = \frac{3}{2}B + \frac{1}{2}C$$

и, подставив во второе равенство, найдем

$$B = \frac{3}{7}C;$$

3) выразим также через C коэффициент A:

$$A = \frac{8}{7}C;$$

4) полученные выражения для A и B подставим в общее уравнение прямой:

$$\frac{8}{7}Cx + \frac{3}{7}Cx + C = 0 \Rightarrow 8x + 3y + 7 = 0$$

(это — искомое уравнение прямой AB).

50, *б.* 1) Запишите уравнение прямой, проходящей через точки: $A(1; 2)$, $B(5; 4)$.

Решается по аналогии с образцом.

51, *б.* Даны уравнения двух прямых. Требуется установить, пересекаются эти прямые или они параллельны. В случае пересечения найдите координаты их общей точки: 1) $5x + 4y + 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$.

Указание. Решение задачи сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + 4y + 3 = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

51, *в.*

Краткая запись задачи
T равноудалена от точек A и B,
$A(1; 0)$, $B(3; 7)$, T лежат на прямой $x - y - 9 = 0$.

Найти координаты точки T.

Указание. Координаты точки T, лежащей на данной прямой, имеют вид: $T(x; x - 9)$. Остается переписать в координатах равенство $TA = TB$ и упростить его:

$$(x - 1)^2 + (x - 9 - 0)^2 = (x - 3)^2 + (x - 9 - 7)^2.$$

Решив это уравнение, найдем абсциссу точки T, затем ординату (учитывая, что ордината равна $x - 9$).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: ключевые задачи 1—5, приведенные с решением в п. 2.2 пособия для учащихся.

Занятие 12. Уравнения прямой и окружности (решение задач)

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется решить задачи 52; 53.

53, *а*.

Краткая запись задачи:
(C, R) — окружность, $C(-4; 3)$, $A(-1; -1) \in (C, R)$.

Проходит ли окружность через начало координат?

Замысел решения. 1-й способ. Задача может быть решена аналитически: записано уравнение окружности, затем проверить, удовлетворяют ли координаты начала этому уравнению.

2-й способ. Полезно вначале представить данную ситуацию геометрически, на рисунке. Далее находим радиус CA окружности и сравниваем его с расстоянием CO. Если $CA = CO$, то данная окружность проходит через начало координат.

53, *б*.

Краткая запись задачи:
AB — диаметр окружности, $A(2; 0)$, $B(-2; 6)$.

Записать уравнение этой окружности и найти координаты точек пересечения ее с осями координат.

Решение.

1) Пользуясь формулой координат середины отрезка, находим координаты центра окружности: $C(0; 3)$;

2) находим квадрат радиуса окружности:

$$R^2 = CA^2 = (2-0)^2 + (0-3)^2 = 13;$$

3) записываем уравнение окружности:

$$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 13, \quad \text{или} \quad x^2 + (y-3)^2 = 13;$$

4) находим точки пересечения окружности с осью абсцисс (полагаем $y = 0$):

$$x^2 + (0-3)^2 = 13 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2;$$

5) находим точки пересечения окружности с осью ординат (полагаем $x = 0$):

$$0^2 + (y-3)^2 = 13 \Rightarrow y^2 - 6y - 4 = 0 \Rightarrow y = 3 \pm \sqrt{13}.$$

54.

Краткая запись задачи:
окружность OAB,
O — начало координат, $A(2;\,0)$, $B(2;\,5)$.

Доказать, что OB является диаметром окружности, и записать ее уравнение.

Решение.

1) Так как угол OAB прямой, то он опирается на диаметр окружности;

2) тогда центр C окружности является серединой отрезка OB и $C\left(1;\,\dfrac{5}{2}\right)$;

3) находим квадрат радиуса:

$$R^2 = OC^2 = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4};$$

4) записываем уравнение окружности:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}.$$

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 54; 55, а.
Индивидуальное задание: 55, б—д.

55, *д*.

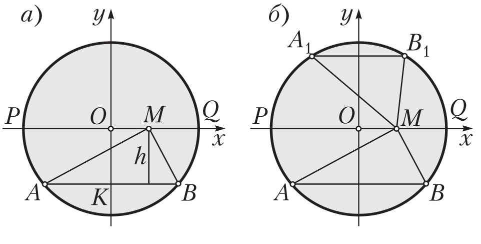


Рис. 31

Краткая запись задачи:
PQ — диаметр,
$M \in PQ$, $AB \parallel PQ$.

Доказать, что сумма $MA^2 + MB^2$ — постоянна.

1-й способ. Замысел решения. Запишем координаты точек M, A и B. Составим выражение для $MA^2 + MB^2$ и убедимся, что оно не зависит от h, где h — расстояние от точки M до хорды AB.

Решение.

1) Пусть $M(m; 0)$, $-R \le m \le R$ (рис. 31, *а*);

2) для отыскания координат точек A и B выразим AK (K — середина AB) через R и h:

$$AK = \sqrt{R^2 - h^2};$$

3) тогда $A\left(-\sqrt{R^2 - h^2}; -h\right)$; $B\left(\sqrt{R^2 - h^2}; -h\right)$;

4) имеем:

$$MA^2 + MB^2 =$$

$$= \left(m + \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2 + h^2 + \left(m - \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2 + h^2 = \ldots = 2m^2 + 2R^2;$$

5) как видно, полученная сумма от h не зависит и является постоянной, так как m — некоторое фиксированное значение абсциссы точки M, а R — радиус окружности.

2-й способ. Замысел решения. Возьмем две хорды AB и A_1B_1, параллельные диаметру PQ, и сравним выражения $MA^2 + MB^2$ и $MA_1 + MB_1^2$ (рис. 31, *б*).

Решение.

1) Пусть $B(x_1; y_1)$, $A(-x_1; y_1)$, $B_1(x_2; y_2)$, $A_1(-x_2; y_2)$, $M(m; 0)$;

2) тогда

$$MA^2 = (m + x_1)^2 + y_1^2, \quad MB^2 = (m - x_1)^2 + y_1^2,$$

$$MA_1^2 = (m + x_2)^2 + y_2^2, \quad MB_1^2 = (m - x_2)^2 + y_2^2;$$

3) отсюда

$$MA^2 + MB^2 = (m^2 + 2mx_1 + x_1^2 + y_1^2) + (m^2 - 2mx_1 + x_1^2 + y_1^2) =$$

$$= 2m^2 + 2R^2,$$

так как $x_1^2 + y_1^2 = R^2$;

4) аналогично:

$$MA_1^2 + MB_1^2 = (m^2 + 2mx_2 + x_2^2 + y_2^2) + (m^2 - 2mx_2 + x_2^2 + y_2^2) =$$

$$= 2m^2 + 2R^2,$$

так как $x_2^2 + y_2^2 = R^2$;

5) следовательно, $MA^2 + MB^2 = MA_1^2 + MB_1^2$.

Занятие 13. Знакомимся с новым математическим методом: понятие вектора, равенство векторов

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуем воспользоваться методом срезов, применяя конспекты 1—2, приведенные в Приложении 1 данного методического пособия. Главное — обеспечить понимание вводимого учебного материала: учитель дает необходимые разъяснения, все вводимые понятия иллюстрируются рисунками, с помощью конспекта проводится формирование соответствующей данной теме математической речи.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 56, а—в (решаются устно).

Эти задачи предназначены для усвоения первых понятий векторной алгебры: направление (задача 56, а), равные, одинаково направленные, противоположно направленные векторы (задача 56, б). Отрабатывается также первый признак равенства векторов (задача 56, в).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 57.
Индивидуальное задание: 58; 59.

В целях овладения векторной символикой предлагаемые задачи рекомендуется выполнить письменно. Корректная форма записи может быть различной. Например:

57, *а*. 1) $(A(2;5), B(4;3)) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2;-2)$.

57, *б*. 1) $\overrightarrow{AB}(2;-2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

57, *в*. 1) $(\overrightarrow{AB}(2;-2), A(2;5), B(x;y)) \Rightarrow (x-2=2, y-5=-2) \Rightarrow x=4$, $y=3$.

57, *г*. 1) $(\overrightarrow{AB}(2;-2), B(4;3), A(x;y)) \Rightarrow (4-x=2, 3-y=-2) \Rightarrow x=2$, $y=5$.

57, *д*. Длины векторов $\vec{a}(x;y)$ и $\vec{b}(-x;-y)$ сравниваются с помощью вычислений: $(|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{(-x)^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}) \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$.

58, *а*. Найти координаты вершины C параллелограмма $ABCD$ с вершинами $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $D(5; 0)$ можно двумя способами: использовать либо равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, либо равенство $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

58, *б*. Требуется в условиях предыдущей задачи найти координаты точки O — точки пересечения диагоналей параллелограмма. Для этого достаточно воспользоваться либо ранее известной формулой координат середины отрезка, либо равенством векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$. Можно рассмотреть оба способа и убедиться в том, что они приводят к одному и тому же ответу.

1-й способ. Так как $O(x; y)$ — середина отрезка AC, то

$$x = \frac{0+6}{2} = 3, \quad y = \frac{0+3}{2} = 1{,}5.$$

2-й способ. Так как $O(x; y)$ — середина отрезка AC, то $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. Запишем и приравняем одноименные координаты этих векторов:

$$(\overrightarrow{AO}\,(x; y), \overrightarrow{OC}(6-x; 3-y)) \Rightarrow (x = 6-x, y = 3-y) \Rightarrow x = 3, y = 1{,}5.$$

59. В задаче сообщается, что $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $A(4; 0)$, луч AB образует с положительной полуосью оси x угол в $45°$. Требуется найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Спрашивается, сколько решений имеет задача?

Указание. Вначале необходимо выполнить рисунок, заметить, что вектор $\overrightarrow{AB}$ может располагаться как выше оси абсцисс, так и ниже оси абсцисс. Координаты этого вектора могут быть найдены сразу из геометрических соображений.

Занятие 14. Сложение и вычитание векторов

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуется воспользоваться крупноблочным изложением учебного материала — методом срезов, опираясь на конспект (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Основная цель данных задач состит в том, чтобы учащиеся научились строить сумму и разность векторов в различных ситуациях.

Задача 1. В этой задаче требуется построить сумму двух коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющих: а) одинаковые направления; б) противоположные направления.

а) Для решения данной задачи применим определение суммы векторов (правило треугольника). Пусть коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют одинаковые направления. Для построения суммы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ в этом случае также пользуемся правилом треугольника (определением суммы двух векторов): от конца B первого вектора отложим вектор $\overrightarrow{CD}$, получим вектор $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CD}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AK}$ — искомая сумма двух данных векторов: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AK}$.

б) Применим снова определение суммы векторов (правило треугольника). Пусть коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположные направления (см. рис. 74 из пособия для учащихся). Выполнив аналогичные построения, получим: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AK}$.

В итоге решения данных задач подчеркивается общность построений: как бы ни располагались два вектора, их сумма строится по одному и тому же правилу.

Задача 2. В данной задаче требуется построить разность двух коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, имеющих: а) одинаковые направления; б) противоположные направления.

Решение задачи преследует аналогичные цели — при построении разности двух векторов охватить все случаи расположения векторов, обеспечить полноту навыка.

а) Пусть $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$, и эти векторы имеют одинаковые направления (см. рис. 75 из пособия для учащихся). Воспользуемся следствием 1 (равенством: $\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MK}$). Отложим данные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ от одной точки (для простоты отложим их от точки A). Для этого достаточно отложить от точки A вектор $\overrightarrow{CD}$ (вектор $\overrightarrow{AB}$ уже отложен!). При откладывании вектора $\overrightarrow{CD}$ получим вектор $\overrightarrow{AK}$. По следствию 1

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{KB}.$$

б) Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют противоположные направления, то разность этих векторов строится аналогично (см. рис. 76 из пособия для учащихся):

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{KB}.$$

В следующей задаче построение суммы и разности двух векторов связывается с наиболее типичной фигурой в векторной алгебре — параллелограммом. Построение суммы двух векторов естественно выполнить при помощи правила параллелограмма. Задачи 3—5 могут быть решены устно с использованием рисунка на классной доске.

Задача 3. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Требуется построить векторы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Решение.

а) Сумму $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ строим по правилу параллелограмма (рис. 77): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$;

б) Разность $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ строим, пользуясь следствием 1 (см. рис. 77): $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

Задача 4. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$. (Докажите самостоятельно.)

Задача 5. Убедитесь в том, что вектор $\overrightarrow{AB}$ можно представить в виде суммы двух векторов, причем не единственным образом.

Решение. В самом деле (рис. 78 из пособия для учащихся), по правилу треугольника: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{AC_2}+\overrightarrow{C_2B}=\ldots$

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 60; 61.
Индивидуальное задание: 62—68 (две-три задачи на выбор).

Задачи общего задания в основном связаны с физическими ситуациями. Хотя эти ситуации несложные, однако они предполагают правильное осмысление физического смысла задачи и последующую правильную ее математизацию.

В индивидуальное задание полезно включить ряд задач на вычисление.

63, *б*. В данной задаче для самолета, находящегося в полете, указаны две скорости: $\vec{v}_1$ — скорость самолета в безветренную погоду и $\vec{v}_2$ — скорость самолета относительно Земли (рис. 32). Спрашивается, разностью каких скоростей является скорость ветра? Требуется построить соответствующий вектор.

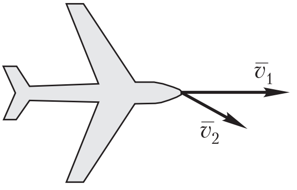


Рис. 32

Учащиеся должны догадаться, что $\vec{v}_2$ — это скорость, с которой самолет летит в действительности, в реальном пространстве с его воздушными потоками, вихрями и т. д. Она отличается от скорости самолета в безветренную погоду потому, что самолет «сдувается» ветром. Отсюда нетрудно догадаться о направлении ветра и о построении на рисунке скорости ветра. И только после этого можно дать ответ, разностью каких скоростей является скорость ветра.

65, *а*. (*Занимательная задача.*) Сообщается, что в XVII в. в одной из книг была напечатана такая задача. Вокруг Земли по экватору построили мост, совершенно одинаковый по материалу на всем протяжении, равный по весу в любой его равной части и имеющий в точности форму окружности. Затем из-под моста одновременно удалили все опоры. Спрашивается, что произойдет при этом? Обрушится ли мост? Можно ли им будет пользоваться для практических целей?

Понятно, что задача не претендует на историческую достоверность, приведенный сюжет имеет исключительно занимательный характер. При всей занимательности задача сама по себе имеет серьезное физическое содержание, кроме того, она предполагает не менее ответственный этап в ее решении — математизацию физической ситуации средствами векторной алгебры.

Занятие 15. Умножение вектора на число

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Определение произведения вектора на число дается в пособии для учащихся в структурированном виде с применением символических обозначений. При ознакомлении с этим определением можно воспользоваться приемом «двукратного чтения»: один раз определение читается в таком виде, в каком оно есть в пособии для учащихся, с использованием символики, другой раз — в словесной форме (каждое чтение сопровождается показом на рисунках).

Формулировка из пособия для учащихся

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* k называется вектор $k\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;

2) $k\vec{a} \parallel \vec{a}$;

3) если $k > 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены; если $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены;

4) если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то $k\vec{a} = \vec{0}$.

Словесная формулировка

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* k называется вектор $k\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина вектора $k\vec{a}$ равна длине вектора $\vec{a}$, умноженной на модуль числа k;

2) вектор $k\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) если $k > 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены; если $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены;

4) если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то $k\vec{a}$ есть нулевой вектор.

Определение. Теоремы 1—5

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* k (рис. 33) называется вектор $k\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;

2) $k\vec{a} \parallel \vec{a}$;

3) если $k > 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены; если $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно направлены;

4) если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то $k\vec{a} = \vec{0}$.

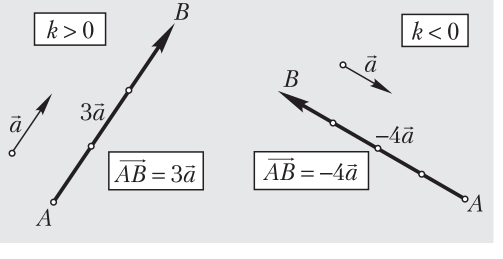


Рис. 33

На рисунке 33 показываются произведения вектора $\vec{a}$ на положительные и отрицательные числа: на числа 3 и –4. Пользуясь определением, выясняем правильность выполнения рисунка, т. е. что для векто-

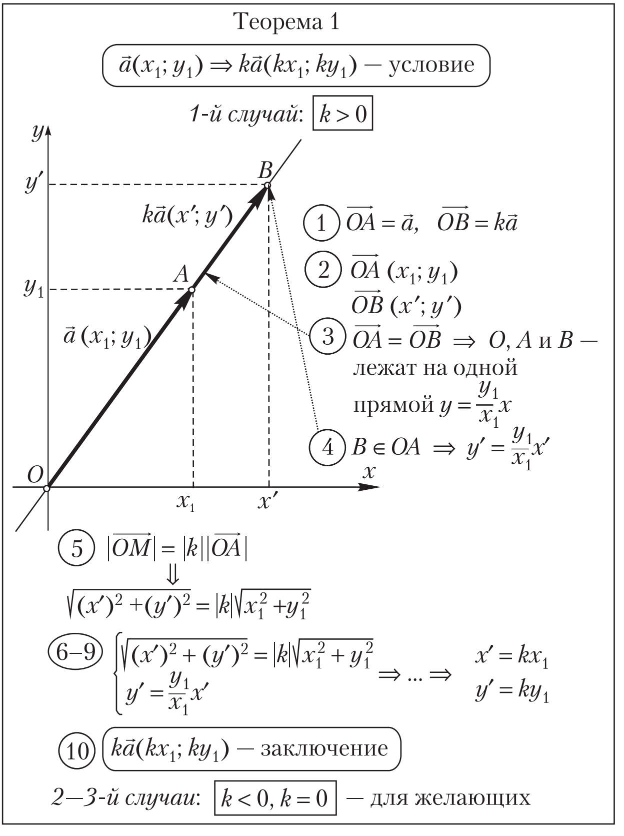


Рис. 34

ров $3\vec{a}$ и $-4\vec{a}$ выполняются все признаки произведения вектора на число. Далее можно перейти к формулированию наиболее важных свойств умножения вектора на число. Дефецит времени не позволяет рассмотреть все эти свойства с доказательствами. На занятии можно рассмотреть доказательство первой теоремы (рис. 34), остальные доказательства оставить желающим для самостоятельного ознакомления. При изложении учебного материала на занятии можно воспользоваться конспектом.

1. (*Умножение вектора на число в координатах.*) Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1 и y_1, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты kx_1 и ky_1:

$$\vec{a}(x_1; y_1) \Rightarrow k\vec{a}(kx_1; ky_1).$$

2. а) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; б) $(-k)\vec{a}=-(k\vec{a})$.
3. $k(p\vec{a})=(kp)\vec{a}$.
4. $(k+p)\vec{a}=k\vec{a}+p\vec{a}$.
5. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

Доказательство теоремы 1.

Доказательство можно провести с помощью структурированного рисунка 34.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуются следующие задачи: 69, а—в (устно); 70, а, б.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—5 из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Индивидуальное задание: 70, в; 71; 72 (три задачи на выбор).

Занятие 16. Признак коллинеарности двух векторов. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

В данной теме рассматривается ряд новых понятий (единичный вектор, координатные векторы, или орты, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам) и теоремы 1—3. В доказательствах встречаются моменты, непривычные учащимся. Поэтому можно рекомендовать воспользоваться на уроке лекцией с элементами эвристической беседы. Можно ограничиться доказательством только теоремы 1. Рассмотрение необходимости в доказательстве теоремы 1 рекомендуется предварить двумя подготовительными задачами.

Задача 1. Пусть $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$. Докажите, что

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}.$$

Доказательство.

1) Так как $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} > 0$, то $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

2) из п. 1) и условия $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ следует, что $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи докажите, что

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = \vec{a}.$$

Доказательство. Так как векторы, стоящие в обеих частях доказываемого равенства, одинаково направлены (задача 1), то векторное равенство будет доказано, если докажем равенство длин этих векторов. Имеем:

$$\left| \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} \right| = \left| \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|.$$

Если длины векторов равны и они одинаково направлены, то такие векторы равны.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 73—76.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—4 из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Индивидуальное задание: 77—81 (две задачи на выбор).

Занятие 17. Скалярное произведение двух векторов

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Определение скалярного произведения формулируется в пособии для учащихся при помощи координат: скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ называется число $x_1x_2 + y_1y_2$. Записывают:

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

Например, в системе координат x_1y_1 (см. рис. 93 из пособия для учащихся) $\overrightarrow{AB}(5;1), \overrightarrow{AC}(1;6), \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\cdot1+1\cdot6=11$; в системе координат x_2y_2 $\overrightarrow{AB}(-5;2), \overrightarrow{AC}(-1;6), \vec{a}\vec{b}=-5\cdot(-1)+1\cdot(6)=11$. Как видно, в разных системах координат координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ изменяются, но скалярное произведение этих векторов остается постоянным. Это говорит о том, что скалярное произведение векторов является одной из наиболее глубоких (коренных) характеристик понятия вектора.

Необходимо обратить внимание учащихся на то обстоятельство, что равенство $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ является первым примером возможности геометрической характеристики скалярного произведения векторов. В данном случае оно выражается через длину вектора. Можно воспользоваться структурированной записью доказательства этого равенства:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=x_1\cdot x_1+y_1\cdot y_1=x_1^2+y_1^2\\&|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{a}^2=|\vec{a}|^2.$$

При изучении скалярного произведения векторов необходимо провести аналогию с произведением чисел. Скалярное произведение векторов обладает многими свойствами, которые имеют место для чисел (этим и объясняется название «скалярное произведение векторов»). Доказательства этих свойств несложные и могут быть проведены самими учащимися (при помощи учителя).

При записи доказательств можно воспользоваться приемом структуризации.

Запись доказательства переместительного свойства:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2\\&\vec{b}\vec{a}=x_2x_1+y_2y_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}.$$

Запись доказательства распределительного свойства

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}: \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}(x_1;y_1),\vec{b}(x_2;y_2),\vec{c}(x_3;y_3),\\&(\vec{a}+\vec{b})(x_1+x_2;y_1+y_2),\\&(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=(x_1+x_2)x_3+(y_1+y_2)y_3,\\&\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}=(x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3)\end{aligned}\right\}\Rightarrow(1).$$

Доказательство свойства $\vec{a}\vec{0}=0$ можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}(x_1; y_1), \vec{0}(0; 0),\\ &\vec{a}\cdot\vec{0} = x_1\cdot 0 + y_1\cdot 0 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{0} = 0.$$

Отметим, что для применения скалярного произведения к решению геометрических задач существенное значение имеет векторный признак перпендикулярности двух прямых (теорема 1, рис. 35). Этот признак, в частности, свидетельствует о том, что скалярное произведение двух векторов оказывается связанным с понятием угла.

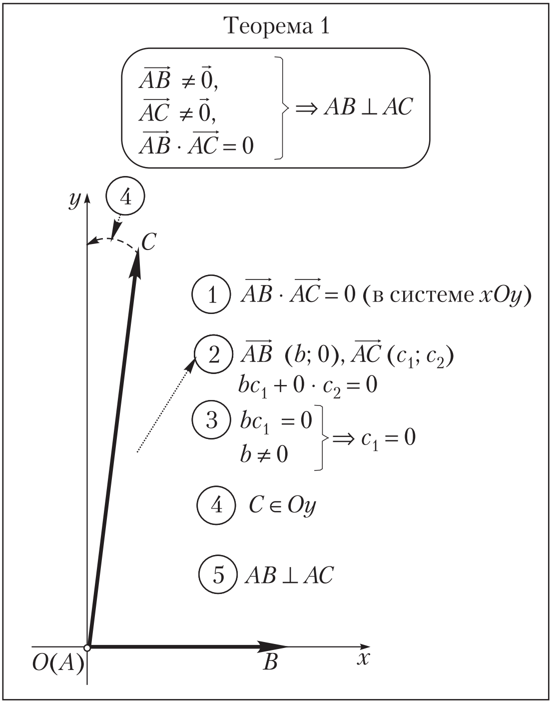


Рис. 35

При изучении доказательств теорем 1—2 целесообразно воспользоваться приемом приведения общего замысла доказательства. Для теоремы 1 его можно сформулировать следующим образом: пусть $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$. Для доказательства перпендикулярности прямых AC и AB (см. рис. 93 из пособия для учащихся) расположим оси координат так, как показано на этом рисунке, и докажем, что точка C принадлежит оси ординат. (Почему этого достаточно?)

Необходимо вырабатывать у учащихся навык самостоятельного нахождения общего замысла доказательства. С этой целью полезно предложить им самостоятельно придумать, например, замысел доказательства теоремы 2.

Как и выше, наглядность и доступность доказательств может быть усилена с помощью «структурированного геометрического чертежа». Интерактивные свойства этого чертежа повышаются, если часть записей на нем представить с пропусками.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 82; 83.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—6 из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Занятие 18. Скалярное произведение двух векторов

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 84, а—г. В разделе «Ответы» пособия для учащихся приводятся необходимые указания и решения.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 84.
Индивидуальное задание: 85—87.

В разделе «Ответы» пособия для учащихся также приводятся необходимые указания и решения.

Занятие 19. Применение векторного и координатного методов при решении задач

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть три-четыре задачи из номеров 88—91.

Начать занятие можно с разъяснения сути *векторного метода* решения геометрических задач. Она состоит в том, что вначале эти задачи переводятся на векторный язык, затем проводятся алгебраические вычисления с векторами, наконец, полученное векторное решение переводится на геометрический язык.

Далее можно перейти к решению указанных задач (указания или решения этих задач приведены в разделе «Ответы» пособия для учащихся).

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1—4 из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Индивидуальное задание: 92—94 (одну-две задачи на выбор).

ТЕМА 3 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД: РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Занятие 20. Координаты и тригонометрические функции

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуем воспользоваться конспектом (см. Приложение 2).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи: 95, а—в для фронтального решения; 95, г, д для самостоятельного решения.

95, *а*.

Методическая схема выполнения задания. 1) Новизна темы предполагает более усиленное внимание к задачам с дидактическими функциями. Полезно приготовить и использовать таблицу с краткими записями определений тригонометрических функций и алгоритмом графического нахождения их значений.

Приведем этот алгоритм:

а) постройте систему координат и полуокружность единичного радиуса;

б) при помощи транспортира постройте угол α;

в) найдите координаты x и y точки пересечения стороны угла с полуокружностью;

г) запишите ответы: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

2) для сравнения точности и для контроля параллельно можно записать значения тригонометрических функций, найденные при помощи микрокалькулятора.

Запись решения. Полученные значения сведем в следующую таблицу:

α	$\cos\alpha$		$\sin\alpha$		$\mathrm{tg}\,\alpha$		$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
	гр.	МК	гр.	МК	гр.	МК	гр.	МК
120°	–0,5	–0,5000	0,86	0,8660	–1,72	–1,7320	–0,58	–0,5774

95, *б.*

Указание. Надо проверить, лежит ли точка T_α на единичной окружности $x^2+y^2=1$.

Решение.

1) Проверяем:

$$\left(\frac{8}{17}\right)^2+\left(\frac{15}{17}\right)^2=\frac{64}{289}+\frac{225}{289}=\frac{289}{289}=1.$$

Поэтому точка T_α лежит на данной единичной окружности;

2) зная координаты точки T_α, можно записать значения тригонометрических функций угла α:

$$\cos\alpha=x=\frac{8}{17};\quad \sin\alpha=y=\frac{15}{17};\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{15}{17}:\frac{8}{17}=\frac{15\cdot17}{17\cdot8}=\frac{15}{8};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{8}{17}:\frac{15}{17}=\frac{8\cdot17}{17\cdot15}=\frac{8}{15}.$$

95, *г.*

Решение.

1) Нужно найти координаты точки T_α. Абсцисса этой точки известна, она равна $\frac{7}{25}$. Как, зная, что точка T_α лежит на единичной окружности и ее абсцисса равна $\frac{7}{25}$, найти ординату этой точки? Надо воспользоваться уравнением единичной окружности и подставить в него то, что известно:

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2+y^2=\frac{49}{625}+y^2=1.$$

Отсюда

$$y^2=1-\frac{49}{625}=\frac{625-49}{625}=\frac{576}{625},\quad y=\pm\sqrt{\frac{576}{625}}=\pm\frac{24}{25};$$

2) учитывая, что для углов в первой и второй четвертях (рассматриваем ведь полуокружность!) $y\geq0$, получаем, что $y=\frac{24}{25}$;

3) теперь можно записать значения тригонометрических функций угла α:

$$\cos\alpha = x = \frac{7}{25};\ \sin\alpha = y = \frac{24}{25};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{24}{25} : \frac{7}{25} = \frac{24\cdot 25}{25\cdot 7} = \frac{24}{7};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{7}{25} : \frac{24}{25} = \frac{7\cdot 25}{25\cdot 24} = \frac{7}{24}.$$

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 96, а—в.
Индивидуальное задание: 96, г—и (три задачи на выбор).

Занятие 21. Главное в данной теме — формулы, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуем воспользоваться конспектом (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 1—3 из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 4—9 из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Задача 8. Дана окружность с центром O. Из точки A проведена касательная AK к этой окружности (K — точка касания). Найдите косинус $\angle OAK$ и приближенное значение этого угла, если $AO = 25$, $AK = 24$.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

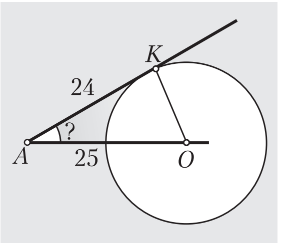


Рис. 36

Дано: $AO = 25$, $AK = 24$.

Найти: $\cos\angle A$, $\angle A$.

Если дана касательная к окружности, то на рисунке надо показать точку касания, радиус окружности, проведенный в точку касания. В результате построений получается треугольник AOK (рис. 36). Что это за треугольник? Каким свойством обладает касательная? (Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.)

Как найти косинус угла A полученного прямоугольного треугольника? В итоге находим решение данной задачи:

$$\cos\angle A = \frac{AK}{AO} = \frac{24}{25}, \quad \angle A \approx 16{,}3°.$$

(Угол A находим по таблицам или с помощью микрокалькулятора.)

Задача 9. Найдите тангенс угла наклона прямой $y = 2x + 3$ к оси абсцисс.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

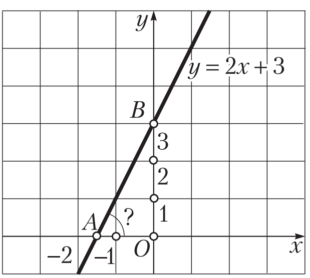


Рис. 37

Дано: $y = 2x + 3$, $\angle A$ — угол наклона этой прямой к оси Ox.

Найти: $\operatorname{tg} A$.

Давайте наметим план решения задачи. Конечно, надо построить рисунок. Рисунок построили (рис. 37). Что делать дальше? Рассмотрим рисунок внимательнее. Нет ли на нем прямоугольного треугольника? В итоге находим прямоугольный треугольник AOB, в котором $OA = 1{,}5$; $OB = 3$. Тогда

$$\operatorname{tg} A = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{1{,}5} = 2.$$

Замечаем, что $\operatorname{tg} A = 2$ равен угловому коэффициенту прямой $y = 2x + 3$.

Занятие 22. Главное в данной теме — формулы, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи: 98, а; 99; 100, в.

100, *в*. С помощью тригонометрического метода решите ранее рассмотренную задачу 3, в.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

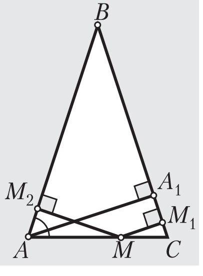


Рис. 38

Ранее эта задача уже решалась с помощью метода равных треугольников, метода площадей и подобия треугольников. Ее можно решить и с помощью тригонометрии. Применение тригонометрического метода подсказывается наличием на рисунке нескольких прямоугольных треугольников с равным острым углом.

Давайте наметим план решения задачи.

Конечно, надо построить рисунок.

Рисунок построили (рис. 38). Что делать дальше?

Рассмотрим рисунок внимательнее.

Нет ли на нем прямоугольных треугольников, из которых можно выразить длины интересующих нас отрезков?

В итоге находим прямоугольные треугольники AMM_2, CMM_1, ACA_1, в которых содержатся отрезки MM_2, MM_1, AA_1. Выражаем эти отрезки через тригонометрические функции угла A. Положим, что $\angle A = \angle C = \alpha$... .

Решение.

1) Из треугольника AMM_2 имеем, что $MM_2 = AM \sin\alpha$;

2) из треугольника CMM_1 имеем, что $MM_1 = MC \sin\alpha$;

3) из треугольника ACA_1 имеем, что $AA_1 = AC \sin\alpha$;

4) $MM_2 + MM_1 = AM\sin\alpha + MC\sin\alpha = (AM + MC)\sin\alpha = AC\sin\alpha = AA_1$.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 97; 100, а.

Индивидуальное задание: 100, б.

Занятие 23. Развитие тригонометрического метода требует новых формул: основное тригонометрическое тождество, формулы приведения

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуем воспользоваться конспектом (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 101; 102.

101.

Решение.

1) Так как $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

2) так как $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

3) так как $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ (убедитесь в этом!), то

$$\mathrm{tg}\,120° = \mathrm{tg}(180° - 60°) = -\mathrm{tg}\,60° = -\sqrt{3};$$

4) так как $\mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$ (проверьте это!), то

$$\mathrm{ctg}\,120° = \mathrm{ctg}(180° - 60°) = -\mathrm{ctg}\,60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

102, *а.*

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм, $\cos A = 0{,}1$.

$\cos B = ?$
$\cos C = ?$
$\cos D = ?$

Решение.

1) $\cos C = \cos A = 0{,}1;$

2) $\cos B = \cos (180° - A) = -\cos A = -0,1$;
3) $\cos D = \cos B = -0,1$.

102, *б*.

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм, $\cos A = 0,2$.

$\sin A = ?$
$\sin B = ?$
$\sin C = ?$
$\sin D = ?$

Решение.
1) Так как $\cos A = 0,2 > 0$, то угол $A \in$ I-й четверти, поэтому

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-0,2^2} = \sqrt{1-0,04} = \sqrt{0,96} \approx 0,9798;$$

2) $\sin C = \sin A = \sqrt{0,96} \approx 0,9798$;
3) $\sin B = \sin (180° - A) = \sin A = \sqrt{0,96} \approx 0,9798$;
4) $\sin D = \sin B = \sqrt{0,96} \approx 0,9798$.

Обратим внимание на то, что синусы всех углов параллелограмма равны между собой.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Индивидуальное задание: 103.

Занятие 24. Применение тригонометрического метода при решении прямоугольных треугольников (основные случаи)

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуем воспользоваться конспектом (см. Приложение 1).

Максимально компактную форму изложенные сведения получают с помощью блок-схемы (рис. 39).

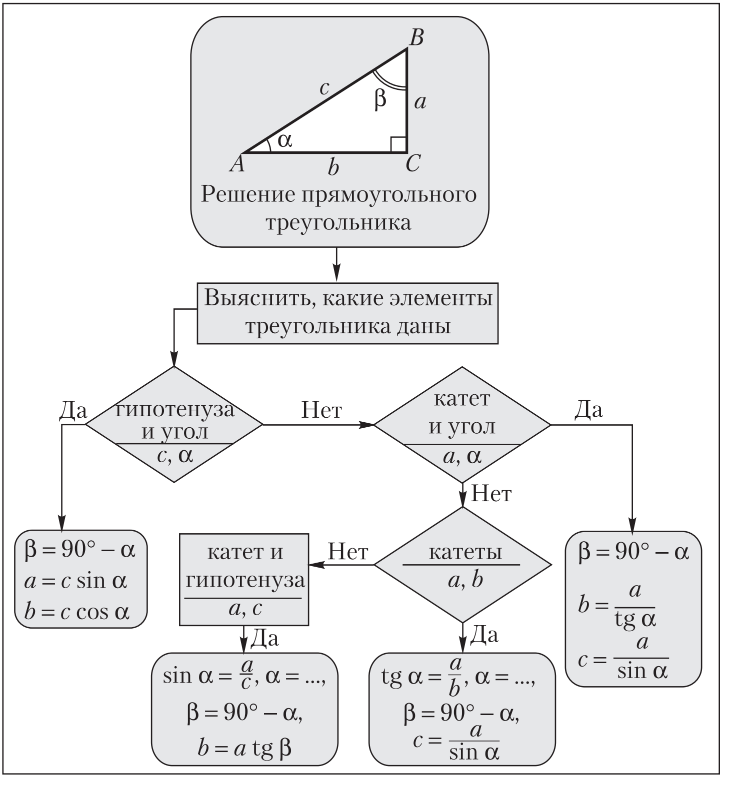


Рис. 39

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи из теоретической части пособии для учащихся (приведены с решением).

Задача 1. Найдите неизвестные стороны и углы прямоугольного ΔABC, зная его площадь S и острый $\angle A = \alpha$.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Давайте наметим план решения задачи.

Конечно, надо построить рисунок.

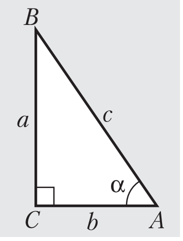


Рис. 40

Рисунок построили (рис. 40). Что делать дальше?

Нельзя ли какое-либо искомое найти сразу? (Сразу можно найти угол B.)

Чему равен этот угол? ($\angle B = 90° - \angle A = 90° - \alpha$.)

Перейдем теперь к нахождению сторон данного прямоугольного треугольника. Надо найти все три его стороны. Как будем искать их? Начнем с катетов. Можно ли их выразить друг через друга?

$$\left(\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} A} = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}.\right)$$

Понятно, что надо использовать данную площадь треугольника. Она равна S. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a \cdot \dots .$$

Можно ли теперь найти a? Как? ($a = \sqrt{2S \operatorname{tg} \alpha}$.)

Итак, знаем угол α и a. Можем теперь найти остальные строны. Каким образом?

Задача 2. В прямоугольном ΔABC $a = 10$, $\angle A = \alpha$. Найдите высоту h_c.

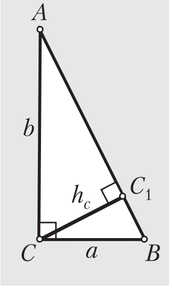


Рис. 41

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Давайте наметим план решения задачи. Конечно, надо построить рисунок. Рисунок построили (рис. 41). Что делать дальше?

Посмотрим, стороной каких треугольников является h_c. (Треугольников ACC_1 и BCC_1.) Наверное, каждый из этих треугольников может быть использован для нахождения искомой высоты.

1-й способ. Обратимся к верхнему треугольнику. Что в нем известно? ($\angle A = \alpha$.) Найти бы еще b, тогда бы нашли h_c. Доведите решение до конца.

$$\left(\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow b = a \operatorname{ctg} \alpha = 10 \operatorname{ctg} \alpha;\right.$$

$$\left.\frac{h_c}{b} = \sin \alpha \Rightarrow h_c = b \sin \alpha = 10 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha = 10 \cos \alpha.\right)$$

2-й способ. Обратимся к нижнему треугольнику. Что в нем известно? (Гипотенуза a. Угол B неизвестен, но его легко найти: $\angle B = 90° - \alpha$.)

Доведите решение до конца. $\left(\frac{h_c}{a} = \sin B \Rightarrow h_c = a\sin(90° - \alpha) = 10\cos\alpha.\right)$

Сравните ответы.

Задача 3. В прямоугольном ΔABC проведена биссектриса CL из вершины прямого угла, $\angle A = 30°$, катет $AC = 15$. Найдите отрезок AL (рис. 42).

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

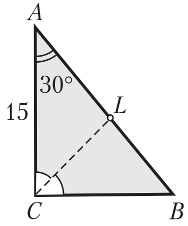


Рис. 42

Давайте наметим план решения задачи. Зная катет и острый угол прямоугольного треугольника, можно найти две другие его стороны. AL можно попытаться найти, составив отношение AL к LB. Каким свойством биссектрисы треугольника можно воспользоваться? Итак,

$$a = \ldots; \quad c = \ldots; \quad \frac{AL}{LB} = \ldots; \quad \frac{AL}{AB - AL} = \ldots .$$

Задача 4. На рисунке дано поперечное сечение канала, имеющее форму равнобедренной трапеции. Найдите угол наклона боковой стороны к отрезку, изображающему поверхность воды (рис. 43).

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

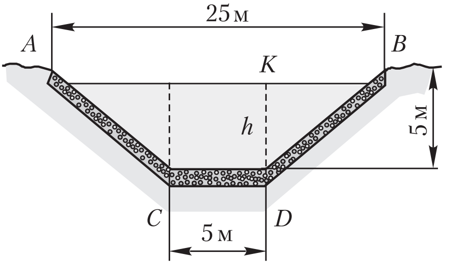


Рис. 43

Давайте наметим план решения задачи.

1) Пусть $h = 5$ — высота трапеции. Требуется найти $\angle KBD$.

2) Рассмотрим ΔKBD. В нем $KD = h = 5$.

3) Найдем BK: $BK = \ldots$ (м).

4) Тогда $\operatorname{tg} \angle KBD = \dfrac{KD}{KB} = \ldots$, $\angle KBD = \ldots$.

Задача 5. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите тангенс угла B_1DB и приближенное значение этого угла (рис. 44).

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

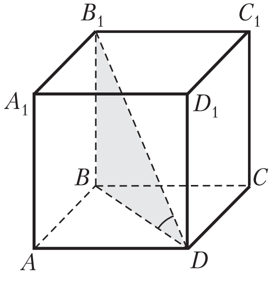


Рис. 44

Давайте наметим план решения задачи.

1) В кубе боковое ребро перпендикулярно ко всем прямым, лежащим в плоскости основания куба. Поэтому треугольник B_1BD — прямоугольный.

2) Главное теперь — воспользоваться этим прямоугольным треугольником;

3) Какие стороны треугольника необходимо знать для того, чтобы найти тангенс B_1DB?

4) Тогда $\operatorname{tg} \angle B_1DB = \ldots$;

5) $\angle B_1DB = \ldots$.

6) Как быть с ребром куба?

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 104, а—е (три задачи на выбор).

Занятие 25. Применение тригонометрического метода к решению более сложных задач

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи

Задача 1. Даны гипотенуза c и один из острых углов α. Найдите высоты данного треугольника (рис. 45).

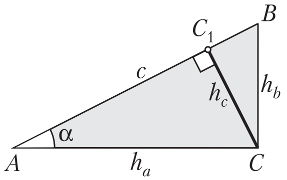


Рис. 45

Давайте наметим план решения задачи.

1) Не забудем, что двумя высотами прямоугольного треугольника являются его катеты.

2) Как мы можем найти эти две высоты?

3) Как теперь найти высоту h_c? (Основной вопрос для решения данной задачи.)

4) Нельзя ли воспользоваться другим прямоугольным треугольником? Каким?

Задача 2. Даны гипотенуза c и один из острых углов α. Из вершины прямого угла C проведена высота CC_1. Найдите длины отрезков AC_1 и BC_1. Сделайте проверку правильности решения задачи.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Давайте наметим план решения задачи.

1) Воспользуемся предыдущим рисунком.

2) Если мы найдем один из искомых отрезков, то сразу может быть найден второй. Каким образом?

3) Из какого треугольника можно найти AC_1? (Основной вопрос для решения данной задачи.)

4) Осталось завершить решение задачи.

5) Как проверить правильность решения?

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 105; 106.

Занятие 26. Применение тригонометрического метода к решению более сложных задач

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Общее задание: 107, а—в.
Индивидуальное задание: 107, г.

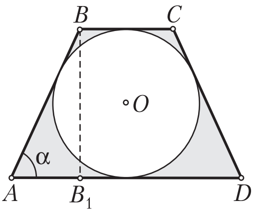


Рис. 46

107, *а*. Около окружности описана равнобедренная трапеция с периметром $2p$ и острым углом α. Найдите площадь этой трапеции (рис. 46).

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Замысел решения. Самое главное: воспользуемся тем, что суммы противоположных сторон описанного четырехугольника равны между собой.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 107, д.

Занятие 27. Применение тригонометрического метода к решению более сложных задач

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи: 108, а—в.

108, *а*.

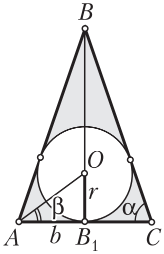


Рис. 47

Краткая запись задачи: ΔABC, $AB = BC$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$.
Найти радиус вписанной окружности.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Наметим план решения задачи.

1) Хорошей подсказкой является приведенный рисунок 47.

2) Из какого треугольника будем находить r?

3) Что в этом треугольнике известно?

4) Чему равен острый угол этого треугольника? (Основной вопрос для решения данной задачи.)

5) Где мы пользовались тем, что данный треугольник является равнобедренным?

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 108, г, д.

Занятие 28. Геометрический смысл скалярного произведения двух векторов

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Рекомендуем воспользоваться конспектом (см. Приложение 1).

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи из теоретической части пособия для учащихся (приведены с решением).

Задача 2. Дан квадрат $ABCD$, точка K — середина стороны AD, точка M делит сторону CD в отношении $1:2$ считая от вершины C. Найдите: а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$; б) приближенное значение этого угла.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

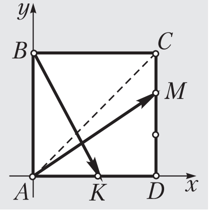


Рис. 48

Наметим план решения задачи.

1) Воспользуемся системой координат. Для удобства расположим ее так, как показано на рисунке 48.

2) Сторону квадрата положим равной a.

3) Теперь можно записать координаты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$. Как это сделать?

4) Как найти косинус угла между этими векторами?

5) Как найти приближенное значение искомого угла?

6) Можно ли систему координат выбрать иначе?

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 109, а.

109, *а*.

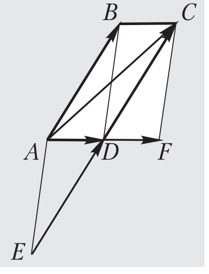


Рис. 49

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм (рис. 49).

Доказать: $AC^2 - BD^2 = 4AB \cdot AD\cos A$.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Наметим план решения задачи.

1) Надо доказать, что $AC^2 - BD^2 = 4AB \cdot AD\cos A$.

2) Попытаемся левую часть этого равенства преобразовать в правую;

3) Как можно представить в векторной форме $AC^2 - BD^2$?

4) $AC^2 - BD^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})\,(...) = ...$.

5) Какими векторами можно заменить результаты действий над векторами, стоящими в скобках?

6) $AC^2 - BD^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})(...) = \overrightarrow{EC} \cdot ...$.

7) Осталось воспользоваться геометрической формой скалярного произведения двух векторов... .

Занятие 29. Геометрический смысл скалярного произведения двух векторов

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи: 109, б—д.

109, *б.*

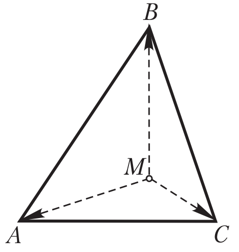


Рис. 50

Краткая запись задачи:
M — точка пересечения медиан ΔABC (рис. 50).
$BC \cdot \overrightarrow{MA} + AC \cdot \overrightarrow{MB} + AB \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Установить вид ΔABC.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Наметим план решения задачи (рис. 50).

1) Воспользуемся равенством, в котором участвуют все четыре вектора: $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\vec{0}$.

2) Вспомним такое равенство: ($\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$).

3) Попробуем из только что записанного равенства выразить вектор $\overrightarrow{MC}$ и подставить его в равенство, данное в условии задачи.
($BC \cdot \overrightarrow{MA} + AC \cdot \overrightarrow{MB} + AB(-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$.)

4) Приведем подобные: ... $= \vec{0}$.

5) Обратим внимание на то, что сумма двух неколлинеарных векторов не может равняться нулевому вектору, кроме того, векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$ — неколлинеарные. Почему же в правой части получается нулевой вектор? (Основной вопрос.)

6) Выяснение этого вопроса приводит к завершению решения задачи.

109, *г.*

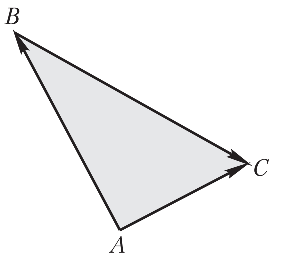


Рис. 51

Краткая запись задачи:
В ΔABC $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}^2 = 0$ (рис. 51).

Доказать: $\angle A = 90°$.

Поиск решения задачи: развиваем речь, мышление, находим решение задачи.

Наметим план решения задачи.

1) Подумаем, каким образом можно преобразовать левую часть равенства. Самое простое, но полезное преобразование:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

2) Работаем с левой частью. С ней можно сделать только одно. Что именно?

3) $\overrightarrow{AB}\,(...) = 0$.

4) Еще раз обратимся к последнему равенству: $\overrightarrow{AB}\,(...) = 0$.

5) Почему угол A получается прямым?

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 109, е.

ПОВТОРЯЕМ, СИСТЕМАТИЗИРУЕМ, ОБНОВЛЯЕМ

Занятие 30. Решение нестандартных задач различными математическими методами (в форме математической конференции)

Доклады 1—5. Метод равных треугольников. Применение теоремы о сумме углов треугольника и признаков равнобедренного треугольника при решении задач.

Самостоятельно решенные задачи.

Пример задачи для самостоятельного решения.

Задача. В двух треугольниках равны соответственно две стороны и медиана, выходящие из одной вершины. Докажите равенство этих треугольников.

Занятие 31. Решение нестандартных задач различными математическими методами (в форме математической конференции)

Доклады 1—5. Применение свойств катета, лежащего против угла в 30°, окружности, касающейся сторон треугольника, и теоремы Пифагора к решению задач.

Самостоятельно решенные задачи. Пример задачи для самостоятельного решения.

Задача. Окружность касается сторон треугольника в их серединах. Докажите, что треугольник равносторонний.

Занятие 32. Решение нестандартных задач различными математическими методами (в форме математической конференции)

Доклады 1—5. Использование свойств и признаков четырехугольников при решении задач. Метод площадей.

Самостоятельно решенные задачи. Пример задачи для самостоятельного решения.

Задача. В треугольнике ABC точки A_1 и C_1 делят соответственно стороны BC и AB в одном и том же отношении:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BC}{C_1A} = \frac{1}{2}.$$

Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMC, если площадь треугольника ABC равна S.

Занятие 33. Решение нестандартных задач различными математическими методами (в форме математической конференции)

Доклады 1—5. Алгебраический метод решения геометрических задач.

Самостоятельно решенные задачи. Пример задач для самостоятельного решения.

Задача 1. В условиях предыдущей задачи (см. занятие 32) найдите площади всех четырех частей, на которые данный треугольник разбивается отрезками AA_1 и CC_1.

Задача 2. В условиях опять той же самой задачи найдите, в каком отношении точка M делит отрезки AA_1 и CC_1.

Занятие 34. Решение нестандартных задач различными математическими методами (в форме математической конференции)

Доклады 1—5. Координатный и векторный методы решения геометрических задач.

Самостоятельно решенные задачи. Пример задач для самостоятельного решения.

Задача. Пусть $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 0)$ — координаты вершин треугольника ABC. Точка A_1 делит сторону BC в отношении $3 : 1$ считая от точки B. Точка C_1 делит сторону AB в отношении $2 : 1$ считая от точки A. Точка M — точка пересечения прямых AA_1 и CC_1. Найдите площадь треугольника AMC_1.

Занятие 35. Решение нестандартных задач различными математическими методами (в форме математической конференции)

Доклады 1—5. Равновеликость и равносоставленность фигур.
Теорема Стюарта.
Самостоятельно решенные задачи.

Ф

9 класс

ТЕМА 1 ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ. НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА: РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Занятие 1. Центроид треугольника. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Ортоцентр треугольника

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь крупноблочным изложением учебного материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 1.2 теоретической части пособия для учащихся[1].

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5—7 из п. 1.2 теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: задачи 8; 9 из п. 1.2 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 2. Центроид треугольника. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Ортоцентр треугольника

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь крупноблочным изложением учебного материала.

[1] Здесь и далее имеется в виду пособие для учащихся «Геометрия. 9 класс. Многообразие идей и методов».

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 1—5 из раздела «Задания для самостоятельной работы».

Прием поиска решения задачи: применение анализа Паппа. Во многих случаях для поиска решения задачи и составления плана решения удобно воспользоваться анализом Паппа. В анализе Паппа начинают с требования задачи и выясняют, что достаточно знать для того, чтобы ответить на вопрос задачи.

1 (*1-й уровень сложности*).

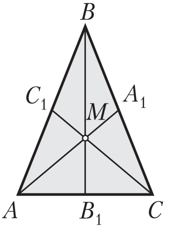


Рис. 1

Краткая запись задачи:
ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$,
AA_1 — медиана, M — центроид,
1) $AA_1 = 7$; 2) $AA_1 = m_a$ (рис. 1).

1) Доказать, что ΔAMC — равнобедренный.
2) Найти AM и CM.

Поиск решения и решение (с помощью анализа Паппа).

1) Для доказательства того, что ΔAMC — равнобедренный, достаточно доказать равенство его сторон AM и CM;

2) для доказательства равенства сторон AM и CM достаточно учесть, что M — центроид ΔABC, и значит, AM и CM — части медиан, проведенных из вершин A и C. Каждая из этих частей равна $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы;

3) поэтому для выполнения равенства $AM = CM$ достаточно равенства медиан, проведенных к боковым сторонам равнобедренного ΔABC;

4) медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны. Это утверждение было доказано ранее;

5) значит, $AM = CM$ и ΔAMC — равнобедренный;

6) перейдем к вычислениям:

$$AM = CM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}m_a;$$

7) если $AA_1 = 7$, то

$$AM = CM = \frac{2}{3}m_a = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3}.$$

Ответ: 1) $\frac{14}{3}$. 2) $\frac{2}{3}m_a$.

Прием поиска решения задачи: иногда для решения задачи достаточно актуализировать ранее известные знания.

2 (*1-й уровень сложности*).

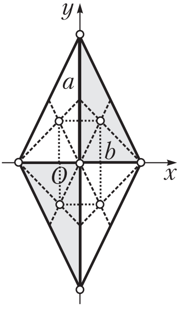


Рис. 2

Краткая запись задачи:
ΔABC — прямоугольный, $BC = a$,
BC лежит на оси y, $AC = b$,
AC лежит на оси x, M — центроид ΔABC (рис. 2).

Найти координаты точки M.

Актуализация знаний. Из курса геометрии 9 класса знаем, что координаты центроида треугольника равны среднему арифметическому одноименных координат вершин треугольника.

Выделение случаев. Условие задачи не определяет конкретно, в какой координатной четверти располагается треугольник. Поэтому возможны четыре случая.

Решение.

1-й случай. ΔABC лежит в первой четверти. В этом случае $A(b; 0)$, $B(0; a)$, $C(0; 0)$. Тогда

$$M\left(\frac{b+0+0}{3}; \frac{0+a+0}{3}\right), \text{ или } M\left(\frac{b}{3}; \frac{a}{3}\right).$$

2-й случай. ΔABC лежит во второй четверти. В этом случае $A(-b; 0)$, $B(0; a)$, $C(0; 0)$. Тогда

$$M\left(\frac{-b+0+0}{3}; \frac{0+a+0}{3}\right), \text{ или } M\left(-\frac{b}{3}; \frac{a}{3}\right).$$

Остальные случаи ученики могут рассмотреть самостоятельно.

Прием поиска решения задачи: часто при решении задач на вычисление полезно некоторую величину обозначить через x.

3 (*2-й уровень сложности*).

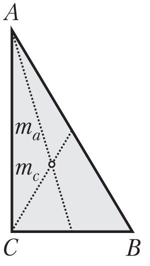


Рис. 3

Краткая запись задачи:
m_a и m_c — медианы прямоугольного ΔABC (рис. 3).

$AB = ?$
$AC = ?$
$BC = ?$

Поиск решения. Сразу можно найти гипотенузу: $AB = 2m_c$. Далее естественно воспользоваться теоремой Пифагора. Однако, зная гипотенузу и медиану, проведенную к катету, сразу найти какой-либо катет не удается. Возникает предположение о необходимости введения вспомогательной величины. Например, положим, что $CA_1 = x$. Какое уравнение, содержащее x, можно составить? Приходим к выводу о том, что катет AC один раз можно выразить через x с помощью теоремы Пифагора из ΔABC, другой раз — из ΔAA_1C. Приравняв полученные выражения, составим уравнение относительно x. Решив его, найдем CA_1, затем BC и AC.

Прием поиска решения задачи: иногда поиск решения задачи начинается с подсказки или указания, которые даются в тексте задачи или с помощью приводимого к задаче рисунка.

4 (*2-й уровень сложности*).

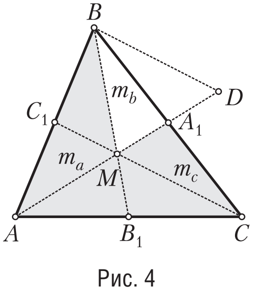


Рис. 4

Краткая запись задачи:
M — центроид ΔABC, m_a, m_b, m_c — медианы, D принадлежит продолжению медианы AA_1 за точку A_1, $A_1D = A_1M$ (рис. 4).

Найти стороны ΔMBD.

Поиск решения. Поиск решения подсказывается рисунком, приводимым в учебнике к этой задаче. Замечаем, что стороны ΔMBD сравнительно несложно выразить через медианы данного ΔABC. Вначале находим BM, затем замечаем, что $MD = AM$ и $BD = MC$.

Прием поиска решения задачи: часто решение задачи подсказывается ранее решенной задачей.

5 (*2-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
m_a, m_b, m_c — медианы ΔABC (см. рис. 4).

Доказать, что выполняются неравенства:
$m_a + m_b > m_c, m_a + m_b > m_c, m_a + m_b > m_c$.

Поиск решения. Поиск решения подсказывается предыдущей задачей и ее рисунком. Для ΔMBD (как для каждого треугольника) неравенства треугольника выполняются:

$$BM + BD > MD, \quad BM + BD > MD, \quad BM + BD > MD.$$

Осталось выразить стороны этого треугольника через медианы данного (что сделано при решении предыдущей задачи).

Часто решение задачи подсказывается заголовком параграфа, заголовком, приводимым в пособии для учащихся к группе задач. Необходимо вырабатывать у учащихся установку начинать решать задачу, задаваясь вопросом: «Какой математический метод можно применить?» Например: «Нельзя ли воспользоваться тригонометрией? Нельзя ли воспользоваться методом равных треугольников?» и т. д.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 6—10 (три задачи на выбор).
Индивидуальное задание: 11—13 (одну задачу на выбор).

6 (*2-й уровень сложности*).

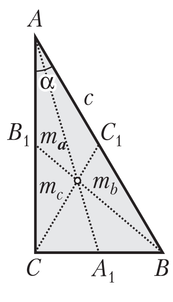


Рис. 5

Краткая запись задачи:
ΔABC — прямоугольный,
$AB = c$, $\angle A = \alpha$ (рис. 5).

$m_a = ?$
$m_b = ?$
$m_c = ?$

Поиск решения. Без использования тригонометрии сразу можно найти медиану m_c (она равна половине данной гипотенузы). Остальные медианы будем искать с помощью тригонометрии. Выясняем, что предварительно необходимо найти стороны треугольника.

Прием поиска решения задачи: начинать решение задачи не с некоторых деталей, а с выяснения общего замысла решения. На уроке надо чаще обращаться к учащимся с вопросом: «Какой замысел или план решения вы предложите?»

7 (*3-й уровень сложности*).

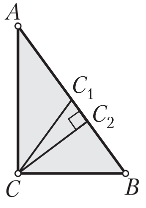


Рис. 6

Краткая запись задачи:
ΔABC — прямоугольный,
h_c и m_c — высота и медиана (рис. 6).

Найти стороны ΔABC.

Поиск решения. Сразу можно найти гипотенузу: $AB = 2m_c$. Далее возникает затруднение.

Вспоминаем, не известна ли нам формула, которая связывает между собой высоту h_c и стороны прямоугольного треугольника. Из курса 8-го класса знаем, что высота, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу. Пусть $CC_1 = m_c$ — медиана, $CC_2 = h_c$ — высота прямоугольного ΔABC. Положим, $AC = x$, тогда

$$h_c = \frac{x \cdot \sqrt{4m_c^2 - x^2}}{2m_c}.$$

Получили уравнение с одним неизвестным. Итак, замысел решения сводится к составлению и решению записанного выше уравнения. Далее на первый план выдвигается алгебра. Возводим обе части равенства в квадрат, получаем биквадратное уравнение. Решая его, находим, что

$$x = \sqrt{2m_c \cdot \left(m_c \pm \sqrt{m_c^2 - h_c^2}\right)},$$

$$BC = \sqrt{4m_c^2 - x^2} = \sqrt{2m_c\left(m_c \mp \sqrt{m_c^2 - h_c^2}\right)}.$$

Приходим к следующим ответам:

$$AB = 2m_c, \quad AC = \sqrt{2m_c \cdot \left(m_c + \sqrt{m_c^2 - h_c^2}\right)},$$

$$BC = \sqrt{2m_c \cdot \left(m_c - \sqrt{m_c^2 - h_c^2}\right)}.$$

Прием поиска решения задачи: часто решение задачи подсказывается ранее решенной задачей. Этот прием является довольно распространенным. Поэтому полезно при решении данной задачи проверять, не встречалась ли ранее задача с аналогичным условием.

8 (*3-й уровень сложности*).

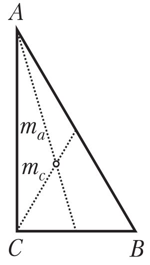


Рис. 7

Краткая запись задачи: m_a и m_c — медианы прямоугольного ΔABC (рис. 7).
Найти $\sin A$.

Поиск решения. Для нахождения $\sin A$ достаточно знать противолежащий катет и гипотенузу. Итак, решение задачи сводится к нахождению сторон прямоугольного треугольника. Задача достаточно сложная. Нельзя ли найти простое решение задачи? Не встречалась ли вам задача с таким же условием? Смотрите задачу 3. При решении этой задачи были получены такие ответы:

$$2m_c, \quad 2\sqrt{\frac{m_a^2 - m_c^2}{3}}, \quad 2\sqrt{\frac{4m_c^2 - m_a^2}{3}}.$$

Дальнейшее решение становится очевидным.

Прием поиска решения задачи: анализ особенностей чертежа, выделение на нем характерных фигур (равных, подобных и т. д.). В данном случае на чертеже можно выделить целый ряд подобных треугольников.

9 (*3-й уровень сложности*).

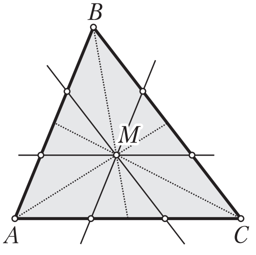


Рис. 8

Краткая запись задачи:
через центроид ΔABC проведены прямые, параллельные его сторонам.

Доказать, что сторона треугольника делится этими прямыми на три равные части.

Поиск решения. Чтобы не загромождать чертеж (рис. 8), строим только одну медиану и на ней центроид треугольника. Через центроид проводим три прямые, о которых говорится в условии задачи.

Какое свойство прямой, параллельной основанию треугольника, мы знаем? Вспоминаем, что прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Рассмотрим пока одну такую прямую. Выделяем подобные треугольники. Обозначим основание данного треугольника через a. С помощью подобия треугольников устанавливаем, что центроид делит отрезок, параллельный основанию, на части, равные $\frac{a}{3}$. После этого нетрудно завершить решение задачи. Для двух других сторон отдельное рассуждение проводить не нужно.

10 (*2-й уровень сложности*).

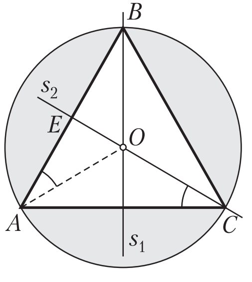


Рис. 9

Краткая запись задачи:
ΔABC — равносторонний,
OC — радиус описанной окружности.

$\angle OCA = ?$

Построения. Возьмем произвольный равносторонний ΔABC. Построим центр описанной около него окружности. Для этого проведем серединные перпендикуляры s_1 и s_2 соответственно к сторонам AC и AB. Точка O — точка пересечения s_1 и s_2 — является центром описанной около ΔABC окружности (рис. 9).

Проведем окружность (O, OA). Эта окружность пройдет через все три вершины ΔABC. В задании требуется выяснить, можно ли найти $\angle OCA$.

Высказывание предположения. С чего начать поиск ответа на поставленный вопрос? Естественно учесть, что углы равностороннего треугольника равны 60°. Что подсказывает рисунок? Он подсказывает, что $\angle OCA = \frac{1}{2}\angle C$. Если это так, то искомый угол оказался бы равным 30°. Как проверить высказанное предположение?

Обоснование предположения.

Воспользуемся синтетическим методом:

1) центр O описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам ΔABC;

2) в равностороннем треугольнике медианы, высоты и биссектрисы совпадают и лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника;

3) поэтому CO — биссектриса $\angle C$ и $\angle OCA = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Обращение к проблеме. Высказанное предположение оправдалось. Величину $\angle OCA$ можно найти, не указывая сторону равностороннего треугольника. В итоге составлена и решена следующая задача: «Найдите угол между стороной равностороннего треугольника и радиусом описанной окружности, проведенным к вершине треугольника».

11 (*2-й уровень сложности*).

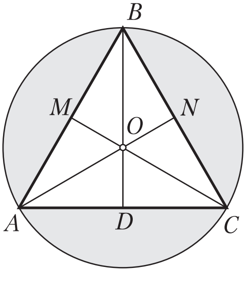


Рис. 10

Краткая запись задачи:
ΔABC — равносторонний,
BD — медиана,
R — радиус описанной окружности.

$OD = ?$
$BC = ?$

Выполнение задания. Применим метод обобщения полученных ранее знаний: можно сделать вывод о том, что центр окружности, описанной около равностороннего треугольника, совпадает с его центроидом (рис. 10). Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} R = \frac{2}{3}BD, \\ OD = \frac{1}{3}BD \end{array}\right\} \Rightarrow OD = \frac{1}{2}R \Rightarrow BD = R + \frac{1}{2}R = \frac{3}{2}R.$$

По теореме Пифагора, применяя ее к ΔBDC, получим (полагая $BC = x$, $DC = \frac{x}{2}$):

$$x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Rightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{9R^2}{4}, \quad x^2 = 3R^2, \quad x = R\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$OD = \frac{1}{2}R, \quad BC = R\sqrt{3}.$$

В частности, если $R = 5$ см, то $OD = 2{,}5$ см, $BC = 5\sqrt{3}$ см.

Обращение к проблеме. В итоге составлена и решена следующая задача: «Найдите сторону равностороннего треугольника и длину перпендикуляра, проведенного из центра описанной окружности на сторону этого треугольника, если радиус окружности равен R (например, $R = 5$ см)».

13. 1) (*2-й уровень сложности*).

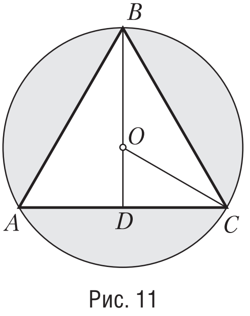


Рис. 11

Краткая запись задачи:
ΔABC — равносторонний,
$BD = h$ — высота.

$R = ?$

Замысел решения. В двух предыдущих задачах, зная радиус R описанной окружности, находили высоту BD $\left(BD = \frac{3}{2}R\right)$. В данной задаче требуется решить обратную задачу: по известной высоте BD найти R. Естественно воспользоваться полученной формулой для высоты BD (рис. 11).

Вычисления.

$$\left.\begin{aligned} BD &= \frac{3}{2}R, \\ BD &= h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}R = h \Rightarrow R = \frac{2h}{3}.$$

Занятие 3. Центроид треугольника. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник. Ортоцентр треугольника

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь крупноблочным изложением учебного материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Рекомендуется рассмотреть задачи 14—18.

14. 1) (*2-й уровень сложности*).

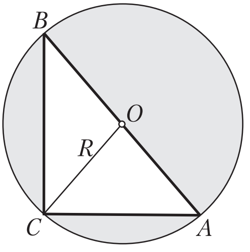


Рис. 12

Краткая запись задачи:
ΔABC — прямоугольный,
$\angle C = 90°$,
$AC = 12$ см,
$CB = 16$ см.

$R = ?$

План решения и вычисления. Найдем (рис. 12):
1) гипотенузу AB по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ см};$$

2) $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ (см).

15 (*2-й уровень сложности*).

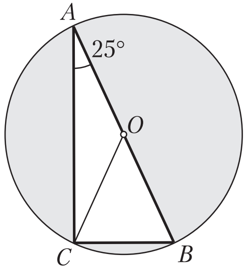


Рис. 13

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 25°$.

$\angle AOC = ?$
$\angle COB = ?$

Замысел решения. $\angle AOC$ можно найти из ΔAOC, воспользовавшись теоремой о сумме углов треугольника; для нахождения $\angle BOC$ учесть, что этот угол является смежным к $\angle AOC$ (рис. 13).

План решения и вычисления. Найдем:

1) $\angle ACO$ из равнобедренного ΔACO ($AO = OC$ как радиусы описанной окружности): $\angle ACO = 25°$;

2) $\angle AOC = 180° - (\angle A + \angle ACO) = 180° - 2 \cdot 25° = 130°$;

3) $\angle COB = 180° - 130° = 50°$.

Прием поиска решения задачи: решение задачи часто подсказывает точный чертеж, особенно такой чертеж необходим в задачах на комбинацию треугольника и окружности.

16 (*3-й уровень сложности*).

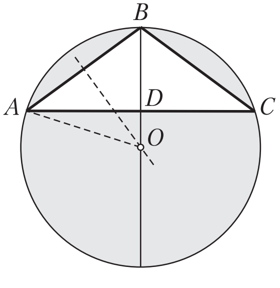


Рис. 14

Краткая запись задачи:
ΔABC, $AB = BC$, $\angle B = 100°$.

$\angle ABO = ?$
$\angle OAB = ?$

Выполнение рисунка. При выполнении рисунка необходимо учесть, что данный треугольник тупоугольный, а значит, центр описанной окружности находится вне треугольника. Кроме того, серединный перпендикуляр к стороне AC пройдет через центр O окружности и вершину B. Значит, высота BD лежит на радиусе BO (рис. 14).

План решения и вычисления. Найдем:

1) $\angle ABO$: ΔABC — равнобедренный $\Rightarrow$ высота BD — биссектриса $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\cdot 100° = 50°;$$

2) $\angle OAB$: $OA = OB \Rightarrow \Delta AOB$ — равнобедренный $\Rightarrow \angle OAB = \angle ABO =$ $= 50°$.

17 (*3-й уровень сложности*).

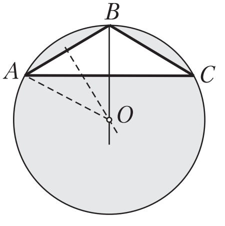


Рис. 15

Краткая запись задачи:
ΔABC,
$AB = BC = 2$ см,
$\angle B = 120°$.

$d = ?$

Замысел решения. Так как $d = 2R$, то решение задачи сводится к нахождению R. Воспользуемся аналогией между данной и предыдущей задачами (рис. 15).

Решение.

1) $\angle ABO = \angle BAO \Rightarrow \angle AOB = 60° \Rightarrow \Delta AOB$ — равносторонний;

2) $BO = AO = R = AB = 2$ см $\Rightarrow d = 2R = 2AB = 4$ (см).

18 (*3-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
a, c, R.

Построить: ΔABC.

Поиск решения. Допустим, что ΔABC удовлетворяет условию задачи. В нем: $BC = a$, $AB = c$, $OA = OB = OC = R$. Выясним, какими свойствами обладают вершины A, B, C. Все три вершины лежат на окружности данного радиуса, причем одну из них, например вершину B, можно взять на этой окружности произвольно. Для построения вершин A и C учтем, что они удалены от вершины B соответственно на расстояния c и a, т. е. вершина A лежит на окружности (B, c), а вершина C — на окружности (B, a). Это означает, что вершина A — точка пересечения окружностей (O, R) и (B, c), а точка C — точка пересечения окружностей (O, R) и (B, a).

Построение:

1) (O, R);
2) $B \in (O, R)$;
3) (B, c);
4) $A = (O, R) \bigcap (B, c)$;
5) (B, a);
6) $C = (O, R) \bigcap (B, a)$;
7) ΔABC — искомый (рис. 16).

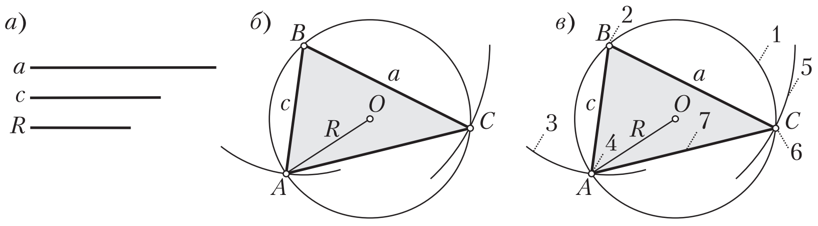


Рис. 16

Доказательство ввиду его простоты можно провести устно.

Исследование.

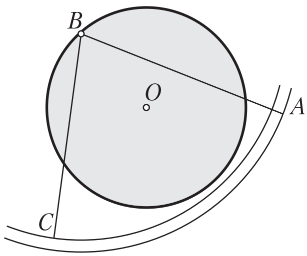


Рис. 17

1) Задача не имеет решения, если $a > 2R$ или $c > 2R$ (стороны вписанного треугольника не могут быть больше диаметра окружности, рис. 17);

2) ΔABC не будет существовать и в случае, когда $a = c = 2R$. В этом случае он вырождается в отрезок.

Итак, ΔABC невозможно построить, если $a > 2R$, или $c > 2R$, или $a = c = 2R$. В остальных случаях ΔABC может быть построен.

Если $a = c < 2$ и $a < 2R$, $c = 2R$, то задача имеет одно решение. Если $a < 2R$, $c < 2R$ и $a \neq c$, то задача имеет два решения (рис. 18). Ими являются, например, треугольники ABC и A_1BC. (Напомним, что за разные решения считаются лишь неравные фигуры.)

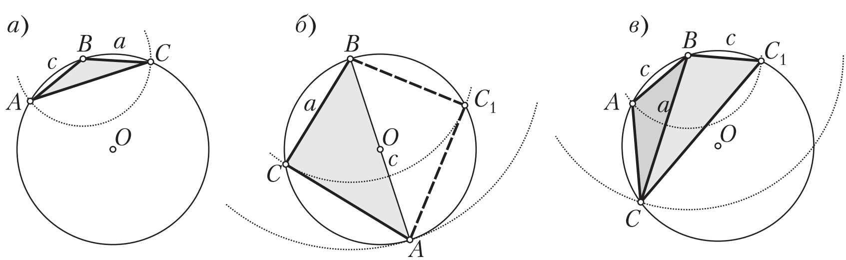


Рис. 18

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 19—23.
Индивидуальное задание: 24—28 (две задачи на выбор).

19 (*1-й уровень сложности*).

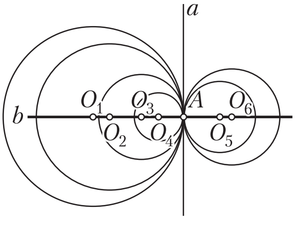


Рис. 19

Краткая запись задачи:
O_1, O_2, O_3, ... — центры окружностей, касающихся прямой a в точке A.

Какую фигуру образуют точки O_1, O_2, O_3, ...?

Подготовительная работа. Вспомним:

а) Что значит: окружность касается данной прямой в данной точке?

б) Какие виды касания окружностей существуют? В итоге выполняем рисунок 19, необходимый для решения задачи.

Решение. По свойству касательной: $AO_1 \perp a$, $AO_2 \perp a$, $AO_3 \perp a$, ...

В силу единственности перпендикуляра, проведенного через точку A к прямой a, прямые AO_1, AO_2, AO_3, ... совпадают.

Поэтому точки O_1, O_2, O_3, ... лежат на одной прямой b, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a.

Ясно, что любая точка прямой b, кроме точки A, может быть центром одной из данных окружностей.

Поэтому центры этих окружностей образуют фигуру, которой является прямая b с удаленной из нее точкой A.

20 (*1-й уровень сложности*).

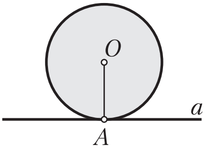


Рис. 20

Краткая запись задачи:
$O \notin a$.

Построить окружность с центром O, касающуюся прямой a.

Наводящие вопросы. Нельзя ли построить радиус искомой окружности, точку касания? Как это сделать? Нельзя ли воспользоваться результатом предыдущей задачи (рис. 20)?

21 (*2-й уровень сложности*).

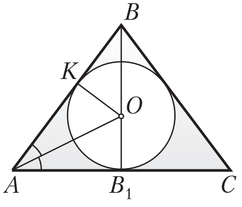


Рис. 21

Краткая запись задачи:
$b = 30$ см — основание равнобедренного треугольника, $h_b = 20$ см.

$r = ?$

1-й способ. Пусть O — центр вписанной окружности в ΔABC, $OB_1 = r$. Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника (рис. 21). Поэтому для решения задачи необходимо вспомнить, какими свойствами обладает биссектриса треугольника. Учтем, что AO — биссектриса угла A, и воспользуемся свойством биссектрисы:

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{AB_1}{AB} \Rightarrow \frac{r}{20 - r} = \frac{15}{25} \Rightarrow r = \frac{15}{2}.$$

2-й способ. Задачу можно решить иначе, если применить теорему Пифагора к ΔOBK, в котором $OK = r$, $BK = AB - AK = 10$, $BO = 20 - r$.

Прием поиска решения задачи: при решении задач, связанных с вписанной окружностью, часто полезно рассматривать отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки.

22 (*2-й уровень сложности*).

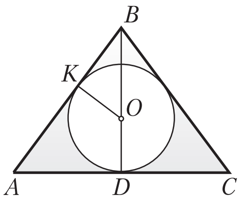


Рис. 22

Краткая запись задачи:
ΔABC, $AB = BC$, $h_b = 10$ см,
$AC : AB = 4 : 3$.

Можно ли по этим данным найти радиус вписанной окружности?

Проверка возможности. Рассмотрим прямоугольный треугольник (рис. 22), образованный боковой стороной, высотой и половиной основания данного треугольника. Для него можно записать равенство $9x^2 - 4x^2 = 100$. Отсюда находим стороны прямоугольного, затем данного треугольников. С помощью неравенств треугольника проверяем, существует ли треугольник со сторонами $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$, $8\sqrt{5}$. После этого даем утвердительный ответ на вопрос задачи.

Вычисления. Обозначив искомый радиус через x и воспользовавшись теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника BOK, составим уравнение $(10-x)^2 = x^2 + (2\sqrt{5})^2$, откуда $x = 4$.

23, *а* (*2-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
a, b, c, r — катеты, гипотенуза и радиус вписанной окружности (см. рис. к задаче 22).

Доказать, что $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$.

Замысел решения. Воспользуемся свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Вначале рассмотрим отрезки касательных на катетах прямоугольного треугольника (они равны r, $a-r$; r, $b-r$), затем отрезки касательных на гипотенузе. Какое равенство для гипотенузы можно записать?

23, *б* (*2-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
$c = 26$ см, $r = 4$ см — гипотенуза и радиус вписанной окружности (см. рис. к задаче 22).

$p = ?$

Замысел решения. Если находить отдельно a и b, то задача окажется довольно сложной. Оказывается, проще найти $a + b$, а главное, этого достаточно для решения задачи. Воспользуйтесь тем же самым приемом: рассмотрите отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки.

23, *в* (*2-й уровень сложности*).

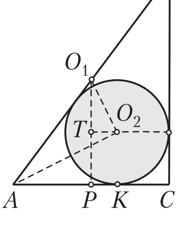


Рис. 23

Краткая запись задачи:
3 и 4 — катеты.

Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

Замысел решения. 1-й способ. Поиск решения удобнее проводить на точном чертеже, построенном с помощью циркуля и линейки (рис. 23). Пусть O_1 и O_2 — центры соответственно описанной и вписанной окружностей. Требуется найти расстояние O_1O_2. Для этого необходимо включить отрезок O_1O_2 в некоторый треугольник. Как построить этот треугольник? Построение такого треугольника подсказывается тем, что сравнительно нетрудно найти расстояния, на которых находятся центры окружностей от катета AC.

2-й способ. Нельзя ли воспользоваться координатной формулой расстояния между двумя точками?

Решение.

1-й способ. Пусть O_2K — радиус вписанной окружности, $O_2K = 1$ (по формуле радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник), $O_1P \perp AC$, $O_2T \perp O_1P$. Тогда в прямоугольном ΔO_1O_2T:

$$O_2T = CP - CK = \frac{1}{2}AC - CK = \frac{1}{2}\cdot 3 - 1 = \frac{1}{2},$$

$$O_1T = O_1P - TP = \frac{1}{2}BC - TP = 2 - 1 = 1.$$

По теореме Пифагора

$$O_1O_2 = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

2-й способ (с помощью системы координат). Ось x направим по катету CA, а ось y — по катету CB. Тогда $A(3;\,0)$, $B(0;\,4)$, $O_1\left(\frac{3}{2};\,2\right)$, $O_2(1;\,1)$

$$\text{и}\ \ O_1O_2 = \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Прием поиска решения задачи: часто оказывается возможным неизвестную величину включить в различные треугольники, причем заранее неизвестно, какой из них окажется более удобным для решения задачи. В таком случае желательно рассмотреть оба способа решения и после этого определиться с выбором: оба способа дают простое решение или один из них можно опустить ввиду его сложности. Форма ответа в различных способах решения может быть различной.

24, *а* (*2-й уровень сложности*).

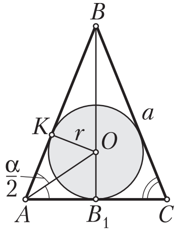


Рис. 24

Краткая запись задачи:
В ΔABC $AB = BC = a$,
$\angle A = \alpha$ (рис. 24).

Найти радиус вписанной окружности.

Замысел решения. 1-й способ: радиус x вписанной окружности можно попытаться найти из ΔABB_1, пользуясь свойством биссектрисы треугольника.

2-й способ: радиус x вписанной окружности можно попытаться найти из ΔBOK, предварительно найдя BK.

3-й способ: радиус r вписанной окружности можно попытаться найти, пользуясь формулой

$$r = \frac{S}{p},$$

где S — площадь треугольника, p — его полупериметр.

Решение.

1-й способ. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{AB_1}{AB} \Rightarrow \frac{x}{a\sin\alpha - x} = \frac{a\cos\alpha}{a} \Rightarrow x = \ldots \frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)}.$$

2-й способ. Воспользуемся тангенсом угла KBO:

$$\frac{x}{BK} = \operatorname{tg}\angle KBO \Rightarrow \frac{x}{a(1-\cos\alpha)} = \operatorname{tg}(90° - \alpha) \Rightarrow x = a(1-\cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha.$$

3-й способ. Находим вначале площадь ΔABC, затем его полупериметр. Ответ получается в такой форме, как и в первом способе.

24, *б* (*2-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
В ΔABC $AB = BC$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$
(см. рис. 24).

Найти радиус вписанной окружности.

Замысел решения. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи:

$$r = \frac{a\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = \ldots = \frac{b\sin 2\alpha}{4\cos\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

25. 1) (*3-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
ΔABC — равнобедренный, $AB = BC$,
O — центр вписанной окружности,
K — точка касания, $\frac{BK}{KA} = \frac{7}{5}$
(см. рис. 24).

$\frac{AB}{AC} = ?$

Эвристический прием. Если дано отношение двух отрезков

$$\frac{BK}{KA} = \frac{7}{5},$$

то это отношение можно обеспечить, положив $BK = 7x$, $KA = 5x$.

Решение.

Выразим через x сторону AB : $AB = 12x$. Так как $KA = AD$, то $AD = 5x$, $AC = 2AD = 10x$. Поэтому искомое отношение

$$\frac{AB}{AC} = \frac{12x}{10x} = \frac{6}{5}.$$

26, *а* (*3-й уровень сложности*).

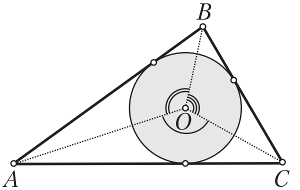


Рис. 25

Краткая запись задачи:
В ΔABC $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 7$.

Найти углы, под которыми стороны треугольника видны из центра вписанной окружности.

Замысел решения. Найдите вначале углы треугольника (рис. 25).

26, *б* (*3-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
В ΔABC $AB = BC$,
$BB_1 = 16$ см — высота,
$AB : AC = 4 : 3$ (см. рис. к задаче 24, а).

Найти расстояния от центра вписанной окружности до вершин треугольника.

Замысел решения. Найдите вначале стороны треугольника и радиус вписанной окружности. После нахождения сторон треугольника для нахождения радиуса вписанной окружности можно воспользоваться результатом задач 24, а или 24, б.

27, *б* (*1-й уровень сложности*). Какова особенность расположения ортоцентра: остроугольного; прямоугольного; тупоугольного треугольника (рис. 26)?

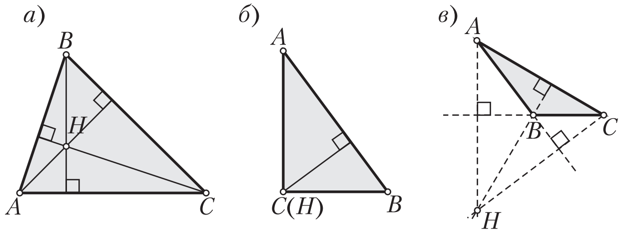


Рис. 26

Индуктивное обобщение. Выполняя построения, приходим к выводу: а) если треугольник остроугольный, то ортоцентр лежит внутри треугольника; б) если треугольник прямоугольный, то ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла; в) если треугольник тупоугольный, то ортоцентр лежит вне треугольника.

27, *в* (*1-й уровень сложности*). Докажите, что если ортоцентр треугольника лежит вне треугольника, то треугольник тупоугольный.

Замысел решения. Воспользуйтесь методом от противного и результатом решения задач 27, а—б.

28, *а* (*2-й уровень сложности*).

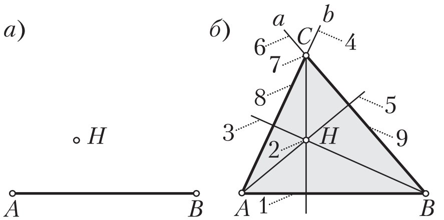


Рис. 27

Краткая запись задачи:
AB — сторона ΔABC,
H — ортоцентр ΔABC.

Построить AC, BC.

Анализ. Сделаем чертеж-набросок, считая, что на нем по данным AB и H построен ΔABC. Решение задач сводится к построению вершины C.

Выясняем, какими свойствами обладает эта вершина. Замечаем, что сразу можно построить прямые AH и BH. Далее вершина C лежит на прямой $b \perp BH$ и на прямой $a \perp AH$. Следовательно, вершина C определяется как точка пересечения прямых a и b. После этого строится ΔABC (рис. 27).

Построение:

1) AB;
2) $H \notin AB$;
3) BH;
4) b: $A \in b$, $b \perp BH$;
5) AH;
6) a: $B \in a$, $a \perp AH$;
7) $C = a \cap b$;
8) AC;
9) BC.

Доказательство несложно и состоит в проверке того, что H — ортоцентр треугольника ABC.

Исследование. Так как $H \notin AB$, то все построения выполнимы и приводят к единственному ΔABC.

28, *б* (*2-й уровень сложности*). У пластинки, имеющей форму остроугольного треугольника, отломали кусок вместе с одной вершиной. Можно ли на пластинку нанести часть высоты, проведенной к стороне, противолежащей «отломанной» вершине?

Решение.

1-й случай: ортоцентр H находится на оставшейся части пластины. Построим $HE \perp AC$. Прямая HE пройдет через вершину B. Следовательно, KE — искомая часть высоты (рис. 28, *а*).

2-й случай: ортоцентр H находится на отломанной части, причем на оставшейся части пластины имеются углы A и C. На оставшейся части пластины, по-видимому, трудно провести какие-либо построения. Поэтому поступим следующим образом: к стороне AC пристроим

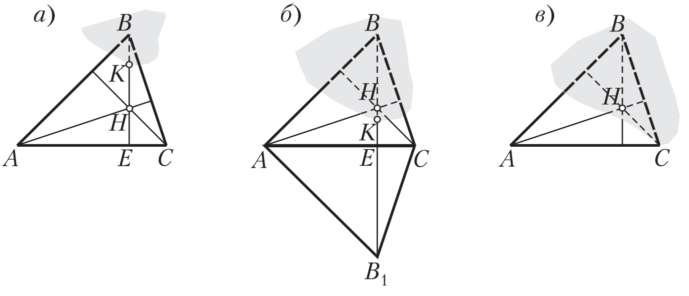


Рис. 28

$\Delta ACB_1 = \Delta ACB$ и выполним некоторые дополнительные построения на ΔACB_1 (какие?). ΔACB_1 строим так, чтобы $\angle CAB_1 = \angle A$, $\angle ACB_1 = \angle C$. Замечаем, что $BB_1 \perp AC$ (установите это!). Значит, высота BE и ее часть KE лежат на отрезке BB_1. Отсюда: 1) $B_1E \perp AC$; 2) K — точка пересечения прямой B_1E с краем отломанной пластины. Отрезок KE — искомая часть высоты (рис. 28, *б*).

3-й случай: ортоцентр H находится на отломанной части, причем на отломанной части находится и сторона BC (на оставшейся части сохранилась лишь точка C). Восстановить «копию» ΔABC по стороне AC и одному только углу A нельзя. Треугольник не определяется такими данными. Следовательно, задача в этом случае решения не имеет (рис. 28, *в*).

Занятие 4. Вписанные и описанные четырехугольники

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь крупноблочным изложением учебного материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—5 из теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 6—9 из теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 29—34 (две задачи на выбор).

Возможно использование карточки-консультанта.

29 (*2-й уровень сложности*). Воспользуйтесь свойством противолежащих углов вписанного четырехугольника.

30 (*2-й уровень сложности*). Обозначьте длины получившихся шести дуг.

31 (*2-й уровень сложности*). Учтите, что $\cup AB = \cup AC$.

32 (*2-й уровень сложности*). Пусть биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке X. Соедините точку X с точкой C и докажите, что CX — биссектриса внешнего угла при вершине C данного четырехугольника.

33 (*2-й уровень сложности*). Докажите вначале, что

$$\angle A + \angle D = \angle B + \angle C.$$

34 (*2-й уровень сложности*). Обозначьте точки касания и отрезки касательных.

Занятие 5. Теоремы косинусов и синусов

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь крупноблочным изложением учебного материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5—8 из теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 35—40 (три задачи на выбор).

35 (*1-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
1) $a = 2$, $b = 3$, $\angle C = 45°$ (рис. 29, *а*);
2) $a = 4{,}1$, $c = 5{,}2$, $\angle B = 120°$ (рис. 29, *б*);
3) $b = 2{,}5$, $c = 2{,}7$, $\angle A = 20°$ (рис. 29, *в*).

Найти неизвестную сторону ΔABC.

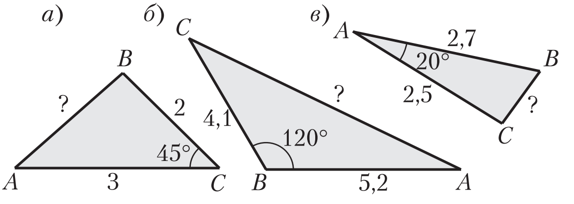


Рис. 29

Замысел решения. Зная две стороны треугольника и угол между ними, по теореме косинусов найдем третью сторону (рис. 29).

Вычисления. По теореме косинусов:

1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} =$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cos 45°} = \sqrt{13 - 6\sqrt{2}};$$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} =$

$= \sqrt{4{,}1^2 + 5{,}2^2 - 2\cdot 4{,}1\cdot 5{,}2\cos 120°} = \sqrt{16{,}81 + 27{,}04 + 21{,}32} = \sqrt{65{,}17};$

3) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} =$

$$= \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}7^2 - 2\cdot 2{,}5\cdot 2{,}7\cos 20°} \approx \sqrt{6{,}25 + 7{,}29 - 12{,}68} = 0{,}9.$$

36, *а* (*2-й уровень сложности*).

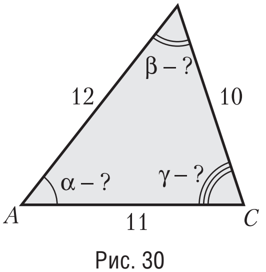


Рис. 30

Краткая запись задачи:
$a = 10$, $b = 11$, $c = 12$ (рис. 30).

$\alpha = ?$
$\beta = ?$
$\gamma = ?$

Замысел решения. Воспользуемся следствиями из теоремы косинусов:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Вычисления.

а) $\cos \alpha = \dfrac{11^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 11 \cdot 12} = \dfrac{165}{264} \approx 0{,}625$; откуда $\alpha \approx 51{,}3°$;

б) $\cos \beta = \dfrac{10^2 + 12^2 - 11^2}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \dfrac{123}{240} = 0{,}5125$; откуда $\beta \approx 59{,}2°$;

в) $\cos \gamma = \dfrac{10^2 + 11^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 11} = \dfrac{77}{220} \approx 0{,}35$; откуда $\gamma \approx 69{,}5°$.

Контрольное вычисление. $\alpha + \beta + \gamma \approx 51{,}3° + 59{,}2° + 69{,}5° = 180°$.

37 (*3-й уровень сложности*).

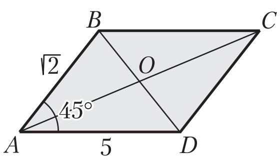


Рис. 31

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм,
$AB = \sqrt{2}$ см, $AD = 5$ см, $\angle A = 45°$.

$AC = ?$
$BD = ?$

План решения. По теореме косинусов найдем (рис. 31): 1) BD из ΔABD; 2) AC из ΔABC.

Решение.

1) $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 45°} =$

$$= \sqrt{2 + 5^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 + 25 - 10} = \sqrt{17} \text{ (см)};$$

2) $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 45° = 135°$,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B} = ... = \sqrt{37} \text{ (см)}.$$

39 (*2-й уровень сложности*).

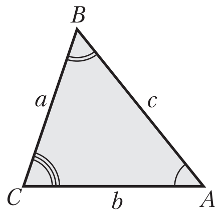


Рис. 32

Краткая запись задачи:
$a \approx 370{,}0$, $\angle B \approx 86°30'$,
$\angle C \approx 50°50'$.

Найти неизвестные стороны и углы треугольника.

Замысел решения. Попытаемся использовать теоремы косинусов и синусов, а в вычислениях — математические таблицы или микрокалькуляторы (рис. 32).

Осуществление замысла решения.

$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C) \approx 180° - (86{,}5° + 50{,}8°) = 42{,}7°,$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow b = \frac{a\sin B}{\sin A} \approx \frac{370{,}0 \cdot \sin 86{,}5°}{\sin 42{,}7°} \approx \frac{370{,}0 \cdot 0{,}9981}{0{,}6782} \approx 544{,}5;$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow c = \frac{a\sin C}{\sin A} \approx \frac{370{,}0 \cdot \sin 50{,}8°}{\sin 42{,}7°} \approx \frac{370{,}0 \cdot 0{,}7749}{0{,}6782} \approx 422{,}8.$$

Контрольные вычисления. Проверим выполнимость равенства $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$:

$$\frac{\sin B}{b} \approx \frac{\sin 86{,}5°}{544{,}5} \approx \frac{0{,}9981}{544{,}5} \approx 0{,}0018;$$

$$\frac{\sin C}{c} \approx \frac{\sin 50{,}8°}{422{,}8} \approx \frac{0{,}7749}{422{,}8} \approx 0{,}0018.$$

40 (*3-й уровень сложности*).

Докажите формулу синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, где $2\alpha \le 180°$.

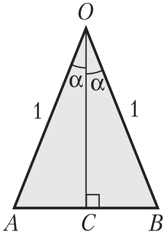


Рис. 33

Замысел доказательства. Воспользуемся методом площадей. Пусть в ΔAOB $OA = OB = 1$ и $\angle O = 2\alpha$, OC — высота этого треугольника. Запишем равенство $S_{AOB} = S_{AOC} + S_{BOC}$ с помощью тригонометрических функций (рис. 33).

Осуществление замысла доказательства.

1) Из ΔAOB: $S_{AOB} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$;

2) из ΔAOC: $AC = \sin\alpha$, $OC = \cos\alpha$;

3) $S_{AOC} = \frac{1}{2}AC \cdot OC = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha$;

4) $S_{AOB} = 2S_{AOC} = \sin\alpha\cos\alpha$;

5) п. 1)—2) $\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Замечание. Если $\alpha = 0°$; $180°$, то формула $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ выполняется очевидным образом. Полученная формула называется *формулой синуса двойного угла.*

Занятие 6. Новые формулы площади треугольника

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь крупноблочным изложением учебного материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 41; 42.

41, *а*. Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{a^3 \sin\beta \sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha}$;

3) $\dfrac{a^3 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha}$;

2) $\dfrac{a\cdot \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha}$;

4) $\dfrac{a^3 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$.

41, *б*. Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{a\sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$,

2) $\dfrac{a^2 \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$;

4) $\dfrac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

42, *а* (*1-й уровень сложности*).

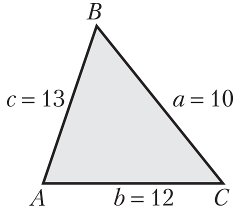


Рис. 34

Краткая запись задачи:
$a = 10$, $b = 12$, $c = 13$ (рис. 34).

$S = ?$

Решение. Воспользуемся формулой Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Находим:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{10+12+13}{2}=\frac{35}{2},\quad S=\sqrt{\frac{35}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}}=\frac{15}{4}\sqrt{231}.$$

Контрольное вычисление (решение задачи другим способом).

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{12^2 + 13^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 13} = \frac{213}{312},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{213}{312}\right)^2} = \frac{15\sqrt{231}}{312}.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 \cdot \frac{15\sqrt{231}}{312} = \frac{15\sqrt{231}}{4}.$

Ответ: $S = \frac{15}{4}\sqrt{231}.$

42, *б*. 1) (*1-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
$a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

Найти меньшую и большую высоты треугольника.

Замысел решения. Воспользуемся методом площадей и учтем, что наименьшая (наибольшая) высота та, которая проведена к наибольшей (наименьшей) стороне.

Осуществление замысла. С учетом сказанного h_c — наименьшая, а h_a — наибольшая высота. Дважды выразим площадь треугольника и приравняем полученные выражения:

$$\frac{1}{2} c h_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Отсюда

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{15}\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 11{,}2.$$

Тогда

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{13} \cdot 84 = 12\frac{12}{13}.$$

42, *в* (*1-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
a, b, c — стороны треугольника.

$R = ?$
$r = ?$

Решение. Выбор нужных формул:

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{S}{p},\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подстановка в формулы, запись ответов:

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(h-a)(p-b)(p-c)}};\quad r=\frac{1}{p}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 43.

Индивидуальное задание: 44 (две задачи на выбор).

Полезно прибегать к использованию тестовой формы ответа. Приведем примеры таких ответов (номер правильного ответа подчеркивается чертой).

Приведем примеры тестовой формы ответа (номер правильного ответа подчеркивается чертой).

43, *а* (*2-й уровень сложности*). Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{c}{2\sin(\alpha-\beta)}$;

2) $\dfrac{c}{\sin(\alpha+\beta)}$;

$\underline{3}$) $\dfrac{c}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

4) $\dfrac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}$.

43, *б* (*2-й уровень сложности*). Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

$\underline{2}$) $\dfrac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

3) $\dfrac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

4) $\dfrac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}, \dfrac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

43, *в* (*2-й уровень сложности*). Укажите правильный ответ:

$\underline{1}$) $\dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

2) $\dfrac{c^2\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

3) $\dfrac{c^2\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

4) $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

43, *г* (*2-й уровень сложности*). Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$;

$\underline{2}$) $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$;

3) $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)}$;

4) $\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}$.

43, *д* (*2-й уровень сложности*). Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{n}{\sin\alpha+\sin\beta}$; 3) $\dfrac{3n}{2(\sin\alpha+\sin\beta)}$;

2) $\dfrac{n}{2(\sin\alpha-\sin\beta)}$; 4) $\dfrac{n}{2(\sin\alpha+\sin\beta)}$.

43, *е* (*2-й уровень сложности*). Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{a\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$; 3) $\dfrac{b\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$;

2) $\dfrac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$; 4) $\dfrac{\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$.

44, *а* (*3-й уровень сложности*).

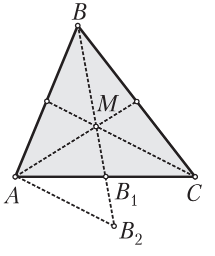


Рис. 35

Краткая запись задачи:
m_a, m_b, m_c — медианы треугольника.

$S = ?$

Решение. Площадь ΔAMB_2 составляет $\dfrac{1}{3}$ площади ΔABC (рис. 35). Поэтому площадь ΔABC можно выразить через площадь ΔAMB_2. Воспользуемся формулой Герона:

$$p=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(m_a+m_b+m_c)=\frac{1}{3}(m_a+m_b+m_c),$$

$$p-\frac{2}{3}m_a=\frac{1}{3}(m_b+m_c-m_a), \quad p-\frac{2}{3}m_b=\frac{1}{3}(m_a+m_c-m_b),$$

$$p-\frac{2}{3}m_c=\frac{1}{3}(m_a+m_b-m_c),$$

$$S_{AMB_2}=\frac{1}{9}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)};$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}.$$

44, *б* (*3-й уровень сложности*).

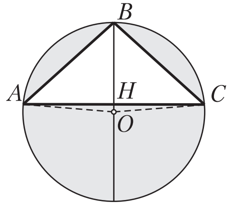


Рис. 36

Краткая запись задачи:
ΔABC — равнобедренный,
$AB = BC = 6$, $h_b = 4$ (рис. 36).

$R = ?$

1-й способ. Выбор нужных формул:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad AH^2 = AB^2 - BH^2.$$

Вычисления. Покажем, что этих формул достаточно для решения задачи.

1) Из ΔABH:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{36-16} = 2\sqrt{5} \Rightarrow b = 4\sqrt{5};$$

2) для ΔABC:

$$p = \frac{6+6+4\sqrt{5}}{2} = 6+2\sqrt{5}; \quad S = \sqrt{(6+2\sqrt{5})(2\sqrt{5})^2(6-2\sqrt{5})} = 8\sqrt{5};$$

3) тогда

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6\cdot 6\cdot 4\sqrt{5}}{4\cdot 8\sqrt{5}} = 4{,}5.$$

2-й способ. 1) Из прямоугольного ΔABH:

$$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

2) по следствию из теоремы синусов:

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{1}{2R} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{6}{2\cdot\frac{2}{3}} = 4{,}5.$$

3-й способ. Для этого способа имеет значение тот факт, что $\angle B$ — тупой. В самом деле:

$$\sin A = \frac{2}{3} \Rightarrow \angle A = \angle C \approx 42° \Rightarrow \angle B \approx 180° - 84° = 96°.$$

С учетом этого запишем стороны ΔAHO и применим теорему Пифагора:

$$AH = \frac{b}{2} = 2\sqrt{5}; \quad HO = BO - BH = R - h_b = R - 4; \quad AO = R.$$

Тогда

$$AH^2 + HO^2 = AO^2 \Rightarrow (2\sqrt{5})^2 + (R-4)^2 = R^2 \Rightarrow 20 + R^2 - 8R + 16 = R^2,$$

$$8R = 36, \quad R = 4{,}5.$$

44, *в* (*3-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
a, b — стороны треугольника,
S — площадь.

$c = ?$

Решение. Воспользуемся формулой площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow \sin C = \frac{2S}{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos C = \pm\sqrt{1-\sin^2 C} = \pm\sqrt{1-\frac{4S^2}{a^2b^2}} = \pm\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2-4S^2}.$$

Тогда по теореме косинусов:

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\left(\pm\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2-4S^2}\right)} = \sqrt{a^2+b^2 \mp 2\left(\sqrt{a^2b^2-4S^2}\right)}.$$

Занятие 7. Дальнейшее развитие тригонометрического метода: решение произвольных треугольников

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Воспользуйтесь крупноблочным изложением учебного материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—5 из теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 6—10 из теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 45 (две задачи на выбор).

45 (*1-й уровень сложности*).

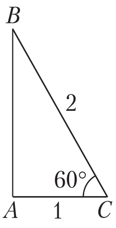


Рис. 37

Краткая запись задачи:

а) $a = 2$, $b = 1$, $\angle C = 60°$. Найти c, $\angle A$, $\angle B$;

б) $a = 5$, $b = 7$, $c = 8$. Найти $\angle B$;

в) $c = 2$, $b = 3\sqrt{2}$, $\angle A = 45°$. Найти m_a;

г) $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$, $\angle B = 135°$. Найти c, $\sin A$, $\sin C$;

д) $a = 2$, $b = 1$, $\angle C = 60°$.

Найти R.

Решение.

а) *План решения* (рис. 37).

1) По теореме косинусов

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C};$$

2) по теореме синусов

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c};$$

3) зная $\sin A$, найдем $\angle A$;

4) $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.

Вычисления.

1) Найдем сторону c:

$$c^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 5 - 4\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3};$$

2) $\sin A = \dfrac{2\sin 60°}{\sqrt{3}} = 1;$

3) $\angle A = 90°$;

4) $\angle B = 180° - (60° + 90°) = 30°$.

Ответ: $c = \sqrt{3}$, $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$.

Контрольные вычисления. Проверим выполнимость равенства $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sin B}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

б) *План решения* (рис. 38).

1) По теореме косинусов

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

2) по косинусу угла B найдем угол B.

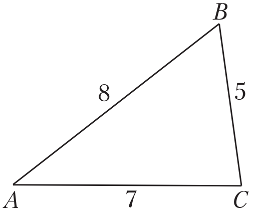


Рис. 38

Вычисления. 1) $\cos B = \dfrac{25 + 64 - 49}{80} = \dfrac{1}{2}$; 2) $\angle B = 60°$.

Ответ: $\angle B = 60°$.

в) *План решения.* Достаточно воспользоваться формулами (рис. 39, *а*):

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Ответ (в тестовой форме):

Укажите правильный ответ:

1) $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{31}}{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

г) *Ответ* (в тестовой форме):

Укажите правильный ответ:

1) $\sqrt{35}, \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{35}}, \dfrac{2}{\sqrt{35}}$; 2) $\sqrt{35}, \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{35}}, \dfrac{2}{\sqrt{35}}$; 3) $\sqrt{35}, \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{35}}, \dfrac{1}{\sqrt{35}}$;

4) треугольника с такими данными не существует.

Комментарий к задаче 45, г (рис. 39, *б*). Задача поможет учащимся более внимательно относиться к условию задачи. Не всегда следует торопиться проводить вычисления. В данном случае нетрудно показать, что треугольника с такими данными не существует. К такому выводу можно прийти и без рисунка. В треугольнике угол B как тупой угол — самый больший. Тогда сторона, лежащая против этого угла, также должна быть самой большей. Это условие не выполняется: $2\sqrt{2} < 3$.

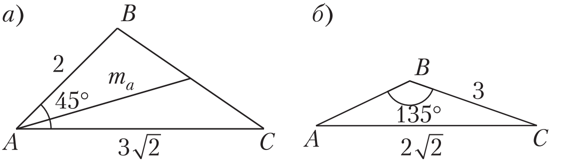


Рис. 39

д) *Комментарий к задаче* 45, д. Задача также предполагает более внимательное отношение к условию. В данном случае для нахождения радиуса описанной окружности нет необходимости прибегать к формулам

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{1}{2R}, \quad \frac{\sin B}{b} = \frac{1}{2R}, \quad \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

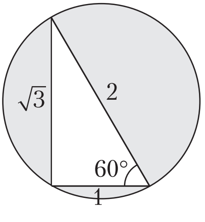


Рис. 40

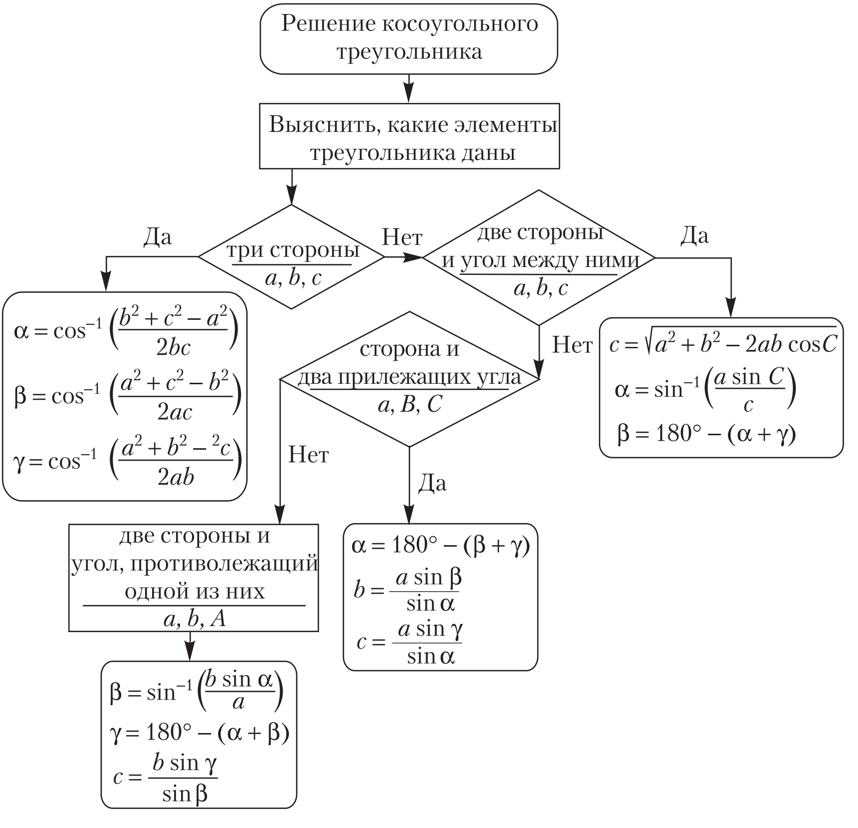
Как было установлено при решении задачи 45, а, данный треугольник прямоугольный с прямым углом A (рис. 40). Поэтому радиус описанной окружности равен половине гипотенузы:

$$R = \frac{a}{2} = 1.$$

Занятие 8. Дальнейшее развитие тригонометрического метода: решение произвольных треугольников

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

При решении косоугольных треугольников можно использовать следующую блок-схему, которая по усмотрению учителя либо предлагается в готовом виде, либо составляется вместе с учащимися:



Задачи 46; 47.

46. Найдите медиану m_a, биссектрису l_a и высоту h_a треугольника, указанного в задаче 45 (см. рис. 37).

Методический комментарий. Конечно, для решения задачи можно воспользоваться формулами для произвольного треугольника. Для вычисления медиан — формулой

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Для вычисления биссектрис — формулой

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Для нахождения высот можно воспользоваться площадью треугольника и с ее помощью найти высоту:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C; \quad h_a = \frac{2S}{a}.$$

Однако необходимо учесть, что данный треугольник является прямоугольным и все вычисления можно провести по более простым формулам.

47, *а* (*2-й уровень сложности*).

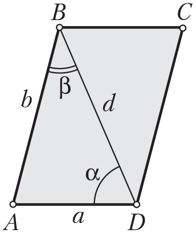


Рис. 41

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм,
$BD = d$, $\angle BDA = \alpha$,
$\angle ABD = \beta$ ($d = 1$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$).

Найти стороны и углы параллелограмма.

Два варианта поиска решения. Рекомендуется вначале решить задачу в общем виде, затем подставить числовые значения (рис. 41).

1) Прежде всего нетрудно установить, что $\angle B = \alpha + \beta$. После этого находим остальные углы параллелограмма. Для нахождения сторон параллелограмма рассмотрим треугольник ABD. В нем известна сторона BD и два прилежащих угла (а значит, и третий угол). Стороны этого треугольника можно найти с помощью теоремы синусов;

2) можно попытаться воспользоваться методом площадей, выразив дважды площадь треугольника ABD и сравнив ее с площадью данного параллелограмма.

Решение.

1-й способ. Пусть $AD = a$, $AB = b$. Тогда:

1) $\angle B = \angle D = \alpha + \beta$, $\angle A = \angle C = 180° - (\alpha + \beta)$;

2) $\dfrac{\sin\alpha}{b} = \dfrac{\sin(180° - (\alpha+\beta))}{d} \Rightarrow b = \dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$;

3) $\dfrac{\sin\beta}{a} = \dfrac{\sin(180° - (\alpha+\beta))}{d} \Rightarrow a = \dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

2-й способ. Используем метод площадей:

1) $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}bd\sin\beta$;

2) $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}ad\sin\alpha$;

3) $S_{BCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}ab\sin(\alpha+\beta)$;

4) приравнивая выражения для площади из равенств 1 и 2, 1 и 3, будем иметь:

$$\frac{1}{2}bd\sin b = \frac{1}{2}ab\sin(a+b) \Rightarrow a = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$\frac{1}{2}ad\sin a = \frac{1}{2}ab\sin(a+b) \Rightarrow b = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

47, *в* (*2-й уровень сложности*).

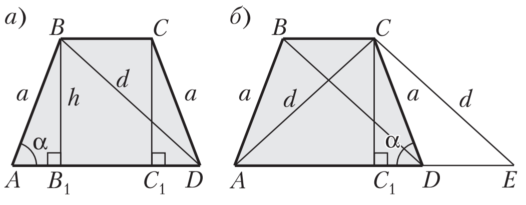


Рис. 42

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — равнобедренная трапеция,
$AB = CD = a$, $\angle D = \alpha$,
$BD = d$ ($a = 5$, $d = 8$,
$\alpha = 60°$).

$S = ?$

Эвристический прием. Задачу рекомендуется решить вначале в общем виде. Рассмотрим три способа решения задачи, в основе которых лежит общий эвристический прием: для нахождения площади трапеции не всегда нужно стремиться находить основания трапеции по отдельности, более рациональным может оказаться построение на рисунке и вычисление отрезка, равного полусумме или сумме оснований (рис. 42).

1-й способ. С помощью решения прямоугольных треугольников.

План решения.
1) Находим высоту трапеции из прямоугольного ΔABB_1;
2) доказываем, что полусумма оснований трапеции равна B_1D;
3) находим B_1D из ΔBB_1D;
4) находим искомую площадь.

Вычисления.

$$\frac{h}{a} = \sin\alpha \Rightarrow h = a\sin\alpha;$$

$$\frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(B_1C_1 + B_1C_1 + 2DC_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(2B_1C_1 + 2DC_1) = B_1C_1 + DC_1 = B_1D;$$

$$B_1D = \sqrt{BD^2 - BB_1^2} = \sqrt{d^2 - a^2\sin\alpha};$$

$$S = B_1D \cdot h = a\sin\alpha\sqrt{d^2 - a^2\sin\alpha}.$$

2-й способ. Выполним дополнительное построение, приводящее к треугольнику, одна из сторон которого равна сумме оснований трапеции. Для этого построим параллелограмм $DBCE$. Тогда в ΔACE $AC = CE = d$, $AE = AD + BC$. Высота CC_1 трапеции в этом треугольнике является медианой. Поэтому

$$AC_1 = \frac{1}{2}AE.$$

Так как

$$AC_1 = B_1D = \sqrt{d^2 - a^2\sin\alpha}$$

(см. решение первым способом), то

$$S = AC_1 \cdot h = a\sin\alpha \cdot \sqrt{d^2 - a^2\sin\alpha}.$$

3-й способ. С помощью решения косоугольного треугольника ACE. Применим теорему косинусов к этому треугольнику. Для этого вначале найдем косинус угла CAE:

$$\cos\angle CAE = \sqrt{1 - \sin^2\angle CAE} = \sqrt{1 - \left(\frac{a\sin\alpha}{d}\right)^2} = \frac{1}{d}\sqrt{d^2 - a^2\sin^2\alpha}.$$

Тогда

$$d^2 = d^2 + AE^2 - 2d \cdot \frac{1}{d}\sqrt{d^2 - a^2\sin^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE^2 - 2AE\sqrt{d^2 - a^2\sin^2\alpha} = 0 \Rightarrow AE = 2\sqrt{d^2 - a^2\sin^2\alpha}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} AE \cdot h = a \sin\alpha \sqrt{d^2 - a^2 \sin^2 \alpha}.$$

47, *г* (*2-й уровень сложности*).

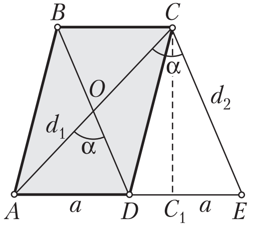


Рис. 43

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм,
$AC = d_1$, $BD = d_2$, $AD = a$
($d_1 = 6$, $d_2 = 4$, $a = 4$).

$S = ?$

Четыре способа решения задачи. Задачу рекомендуется решить вначале в общем виде (рис. 43).

1) Воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha,$$

найдя $\cos\alpha$ по теореме косинусов (а значит, и $\sin\alpha$);

2) применим формулу Герона к треугольнику ACE со сторонами $2a$, d_1 и d_2, который равновелик данному параллелограмму;

3) найдем площадь треугольника AOD по формуле Герона и, увеличив ее в 4 раза, получим искомую площадь параллелограмма;

4) попробуем найти высоту треугольника AOD или треугольника ACE.

Форма ответа зависит от способа решения.

1-й способ. По следствию из теоремы косинусов

$$\cos\alpha = \frac{d_1^2 + d_2^2 - 4a^2}{2d_1 d_2}.$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{2d_1 d_2}\sqrt{4d_1^2 d_2^2 - (d_1^2 + d_2^2 - 4a^2)^2}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \frac{1}{2d_1 d_2}\sqrt{4d_1^2 d_2^2 - (d_1^2 + d_2^2 - 4a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2 d_2^2 - (d_1^2 + d_2^2 - 4a^2)^2}.$$

2-й способ. Пусть p — полупериметр ΔACE. Тогда

$$p=\frac{d_1+d_2-2a}{2},$$

$$p-d_1=\frac{2a+d_2-d_1}{2},$$

$$p-d_2=\frac{2a+d_1-d_2}{2},$$

$$p-2a=\frac{d_1+d_2-2a}{2};$$

$$S=\sqrt{\frac{2a+d_1+d_2}{2}\cdot\frac{2a-(d_1-d_2)}{2}\cdot\frac{2a+d_1-d_2}{2}\cdot\frac{d_1+d_2-2a}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left((d_1+d_2)^2-4a^2\right)\left(4a^2-(d_1-d_2)^2\right)}.$$

3-й способ аналогичен второму (примените этот способ самостоятельно).

4-й способ. Найдем высоту CC_1 ΔACE. Пусть $C_1=x$. Тогда

$$d_1^2-x^2=d_2^2-(2a-x)^2 \Rightarrow x=\frac{1}{4a}(d_1^2-d_2^2+4a^2).$$

Поэтому

$$h=\sqrt{d_1^2-\frac{(d_1^2-d_2^2+4a^2)^2}{16a^2}}=\frac{1}{4a}\sqrt{16a^2d_1^2-(d_1^2-d_2^2+4a^2)^2}.$$

Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{1}{4a}\sqrt{16a^2d_1^2-(d_1^2-d_2^2+4a^2)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{16a^2d_1^2-(d_1^2-d_2^2+4a^2)^2}.$$

47, *д* (*2-й уровень сложности*).

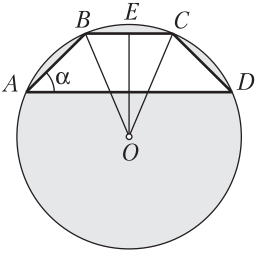


Рис. 44

Краткая запись задачи (рис. 44):
$ABCD$ — трапеция,
$AB=BC=CD=a$,
$\angle A=\alpha$ ($a=2$, $\alpha=60°$).

$S=?$
$R=?$

1-й способ.

Замысел решения:

• *первой части задачи*

Для нахождения площади трапеции можно стремиться найти ее основания и высоту, а можно воспользоваться результатом задачи 50, в, при этом достаточно найти диагональ d трапеции. Осуществим второй путь;

• *второй части задачи*

Проведем высоту OE ΔBOC, получим прямоугольный ΔBOE, в котором $BE = \frac{a}{2}$, $\angle BOE = \frac{1}{2}\angle BOC = \ldots$.

Таким образом, задача сводится к нахождению угла BOC.

Вычисления.

Применяя теорему косинусов к ΔABC, получим

$$d^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos(180° - \alpha) = 2a^2 - 2a^2 \cos\alpha.$$

Тогда по формуле из задачи 50, в

$$S = a\sin\alpha\sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\alpha - a^2\sin^2\alpha} =$$
$$= a^2\sin\alpha\sqrt{2 + 2\cos\alpha - \sin^2\alpha} = a^2\sin\alpha\sqrt{\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1} =$$
$$= a^2\sin\alpha|\cos\alpha + 1| = a^2\sin\alpha(\cos\alpha + 1).$$

Имеем:

$$\angle A = \alpha \Rightarrow \cup BCD = 2\alpha \Rightarrow \cup BC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = \alpha \Rightarrow \angle BOE = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\frac{BE}{BD} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow BD = R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

2-й способ (нахождения площади трапеции). Найдем высоту трапеции: $h = a\sin\alpha$. Выразим нижнее основание через верхнее:

$$AD = 2a\cos\alpha + a = a(1 + 2\cos\alpha).$$

Тогда полусумма оснований

$$\frac{AD + BC}{2} = \frac{2a\cos\alpha + 2a}{2} = a(\cos\alpha + 1).$$

Следовательно, $S = a^2\sin\alpha(\cos\alpha + 1)$.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 48; 49.

Индивидуальное задание: 50; 51 (две задачи на выбор).

48, *а* (*2-й уровень сложности*).

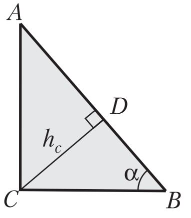


Рис. 45

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle C = 90°$,
h_c — высота, $\angle B = \alpha$
($\alpha = 30°$, $h_c = 5$).

$S = ?$

Замысел решения. Проще ограничиться формулами для решения прямоугольного треугольника, найдя вначале катеты, затем искомую площадь (рис. 45).

Вычисления.

$$\frac{h_c}{BC} = \sin\alpha \Rightarrow BC = \frac{h_c}{\sin\alpha};$$

$$\frac{h_c}{AC} = \sin(90° - \alpha) \Rightarrow AC = \frac{h_c}{\cos\alpha};$$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_c}{\sin\alpha} \cdot \frac{h_c}{\cos\alpha} = \frac{h_c^2}{\sin 2\alpha}.$$

(В последнем преобразовании учтена задача 47, а.)

48, *б* (*2-й уровень сложности*).

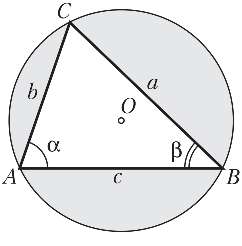


Рис. 46

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$,
R — радиус описанной окружности.

$S = ?$

Выбор подходящих формул. Воспользуемся формулами:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R} \quad \text{и} \quad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Вычисления. По следствию из теоремы синусов находим (рис. 46):

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{1}{2R} \Rightarrow b = 2R\sin\beta; \quad \frac{\sin(180° - (\alpha + \beta))}{c} = \frac{1}{2R} \Rightarrow c = 2R\sin(\alpha + \beta).$$

Тогда

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\beta\, 2R\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta).$$

48, *в* (*2-й уровень сложности*).

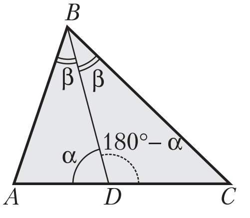


Рис. 47

Краткая запись задачи:
ΔABC, BD — биссектриса (рис. 47).

$\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}$.

Замысел решения. Применим теорему синусов к треугольникам ABD и CBD.

Решение.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin\beta}{AD}=\frac{\sin\alpha}{AB}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\\&\frac{\sin\beta}{DC}=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{BC}\Rightarrow\frac{DC}{BC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$

48, *г* (*2-й уровень сложности*).

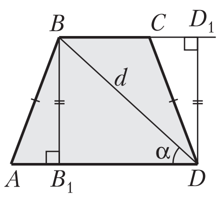


Рис. 48

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — трапеция, $AB=CD$,
$\angle BDA=\alpha$, $BD=d$ (рис. 48).

$S=?$

Решение.

1) Пусть $BB_1\perp AD$ и $DD_1\perp BC$ (продолжению BC);

2) $BB_1=d\sin\alpha$;

3) $B_1D=\sqrt{d^2-d^2\sin^2\alpha}=d\cos\alpha$;

4) $S_{ABCD}=S_{B_1BD_1D}=BB_1\cdot B_1D=d^2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}d^2\sin2\alpha$ (учли, что $\Delta ABB_1=\Delta CD_1D$).

49, *а* (*2-й уровень сложности*).

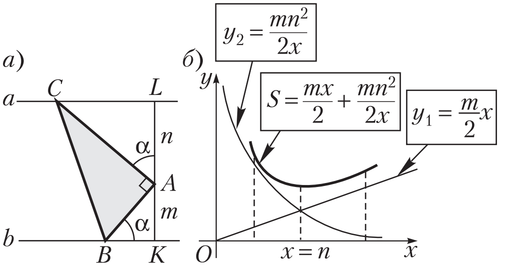


Рис. 49

Краткая запись задачи:
$a \parallel b$, A лежит между a и b, $AK = m$ и $AL = n$ — расстояния от A до прямых a и b, $\angle BAC = 90°$, $B \in b$, $C \in a$.

$S = f(\alpha) = ?$
$S_{\min} = ?$

1-й способ. Замысел решения. Воспользуемся формулами решения прямоугольного треугольника. Для этого введем вспомогательный угол: $\angle ABK = \angle CAL = \alpha$ (рис. 49). Параметры m, n и α определяют некоторый прямоугольный ΔABC. Выразим площадь этого треугольника через m, n и α.

Решение. Из прямоугольных треугольников BKA и ALC:

$$BA = \frac{m}{\sin\alpha}, \quad CA = \frac{n}{\cos\alpha}.$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\sin\alpha} \cdot \frac{n}{\cos\alpha} = \frac{mn}{\sin 2\alpha}.$$

Отсюда $S_{\min} = mn$, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е. $\alpha = 45°$.

2-й способ. Замысел решения. Прямоугольный ΔABC можно задать указанием отрезка $CL = x$. Выразим S_{ABC} через x, m и n.

Решение. Имеем: $AB^2 = x^2 + n^2$; пусть $BK = y$. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle BAK = \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{y}{m} = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{n}{x} \Rightarrow \frac{y}{m} = \frac{n}{x} \Rightarrow y = \frac{mn}{x}.$$

Отсюда

$$AC^2 = m^2 + \frac{m^2 n^2}{x^2} = \frac{m^2}{x^2}(x^2 + n^2),$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + n^2} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{x^2}(x^2 + n^2)} = \frac{mx}{2} + \frac{mn^2}{2x}.$$

На рисунке 49, *б* показан график функции

$$S = \frac{mx}{2} + \frac{mn^2}{2x},$$

полученный сложением графиков функций

$$y_1 = \frac{mx}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{mn^2}{2x}.$$

$S_{\min}$ наступает при условии, что $y_1 = y_2$, т. е. при условии

$$\frac{mx}{2} = \frac{mn^2}{2x} \Rightarrow x = n.$$

Тогда

$$S_{\min} = \frac{mx}{2} + \frac{mn^2}{2n} = \frac{2mn^2}{2n} = m \cdot n.$$

Замечание. Укажем еще один способ нахождения наименьшего значения функции $S(x) = \frac{mx}{2} + \frac{mn^2}{2x}$.

На основании известного неравенства

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

можно утверждать, что сумма неотрицательных слагаемых, произведение которых постоянно, принимает наименьшее значение, когда слагаемые равны. Произведение данных слагаемых постоянно:

$$\frac{mx}{2} \cdot \frac{mn^2}{2x} = \frac{m^2 n^2}{4}.$$

Приравнивая слагаемые друг к другу, найдем условие, при котором сумма $S(x)$ принимает наименьшее значение:

$$\frac{mx}{2} = \frac{mn^2}{2x} \Rightarrow 2mx^2 = 2mn^2, \quad x = n.$$

Поэтому наименьшее значение

$$S(n) = \frac{mn}{2} + \frac{mn^2}{2n} = \frac{2mn^2}{2n} = mn.$$

49, *б* (*2-й уровень сложности*).

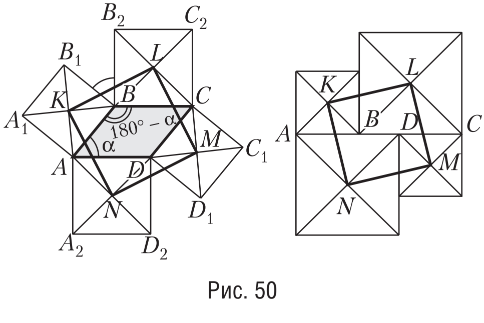


Рис. 50

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — параллелограмм;
AA_1B_1B, BB_2C_2C, CC_1D_1D и DD_2A_2A — квадраты;
K, L, M, N — их центры;
$AB = a$, $AD = b$, $\angle A = \alpha$ (рис. 50).

1) Доказать: $KLMN$ — квадрат.
2) Найти S_{KLMN}.

Решение.

1) $\Delta NAK = \Delta LBK = \Delta MCL = \Delta MDN$ (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства этих треугольников следует: ($\angle AKB = 90°$ и $\angle AKN = \angle BKL$) $\Rightarrow \angle NKL = 90°$. Аналогично $\angle L = \angle M = \angle N = \angle K = 90°$. Следовательно, четырехугольник $KLMN$ — квадрат;

2) применим теорему косинусов:

$$S_{KLMN} = KL^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\cos(90°+\alpha) =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2} + ab\sin\alpha.$$

Это значение окажется минимальным, если $\alpha = 0°$. В этом случае

$$S_{\min} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0°$ параллелограмм оказывается вырожденным.

49, *в* (*2-й уровень сложности*).

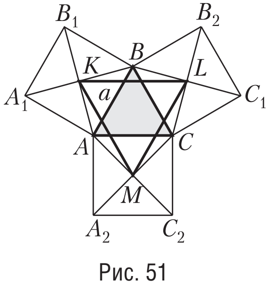


Рис. 51

Краткая запись задачи:
ΔABC; $AB = BC = AC = a$;
AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A — квадраты;
K, L, M — их центры (рис. 51).

1) Доказать: ΔKLM — равносторонний.
2) Найти S_{KLM}.

Решение.

1) $\Delta KBL = \Delta LCM = \Delta MAK$ (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон: $KL = LM = MK \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta KLM$ — равносторонний;

2) применим формулу площади равностороннего треугольника и теорему косинусов:

$$\left.\begin{aligned} S_{KLM} &= \frac{\sqrt{3}}{4}KL^2, \\ KL^2 &= \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cos 150° \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{KLM} = \frac{a^2(2\sqrt{3}+3)}{8}.$$

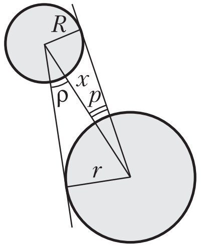


Рис. 52

50, *а* (*2-й уровень сложности*). Приведем несколько задач с астрономическим содержанием: 1) найдите радиус r небесного светила, зная радиус Земли R и углы p и ρ; 2) вычислите радиус Луны, если $\rho \approx 15'$, $p \approx 57'$, $R \approx 6370$ км; 3) найдите расстояние от Земли до Луны; 4) найдите расстояние от Земли до Солнца, если $p \approx 8{,}8''$ (рис. 52).

Решение. Обозначим расстояние между центрами небесных тел через x. Тогда

$$\frac{r}{x} = \sin\rho, \quad \frac{R}{x} = \sin p, \quad \frac{r}{R} = \frac{\sin\rho}{\sin p}.$$

Отсюда находим радиус Луны:

$$r = \frac{\sin\rho}{\sin p}R = \frac{\sin 15'}{\sin 57'}\cdot 6370 \approx \frac{0{,}0044}{0{,}0166}\cdot 6370 \approx 1680 \text{ (км)}.$$

Расстояние x между центрами Земли и Луны найдем из равенства $\frac{R}{x} = \sin p$:

$$x = \frac{R}{\sin p} \approx \frac{6370}{\sin 57'} \approx \frac{6370}{0{,}0166} \approx 380\ 000 \text{ (км)}.$$

Для нахождения расстояния от Земли до Солнца учтем, что для углов, выраженных в секундах, в астрономии часто применяют следующее приближенное равенство: $\sin p'' \approx p'' \sin 1'' \approx \frac{p''}{206\ 265}$. С помощью этого равенства найдем расстояние l от Земли до Солнца:

$$l = \frac{R}{\sin p''} \approx \frac{R\cdot 206265}{8{,}8} \approx \frac{6370\cdot 206265}{8{,}8} \approx 150\cdot 10^6 \text{ (км)}.$$

50, *б*. 1) (*2-й уровень сложности*). Найдите длину равнодействующей двух данных сил, образующих между собой угол α.

Решение.

а) Пусть $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{R}$. Так как квадрат длины вектора $\vec{R}$ равен скалярному квадрату вектора, то для решения задачи достаточно найти скалярный квадрат вектора $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$:

$$\vec{R}^2 = (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)^2 = \vec{P}_1^2 + \vec{P}_2^2 + 2\vec{P}_1\vec{P}_2 = \vec{P}_1^2 + \vec{P}_2^2 + 2\left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{P}_2\right|\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left|\vec{P}_1\right|^2 + \left|\vec{P}_2\right|^2 + 2\left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{P}_2\right|\cos\alpha}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи этой формулы:

а) $\alpha = 0° \Rightarrow \cos 0° = 1 \Rightarrow \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{P}_1\right| + \left|\vec{P}_2\right|$;

б) $\alpha = 90° \Rightarrow \cos 90° = 0 \Rightarrow \left|\vec{R}\right| = \sqrt{\left|\vec{P}_1\right|^2 + \left|\vec{P}_2\right|^2}$;

в) $\alpha = 180° \Rightarrow \cos 180° = -1 \Rightarrow \left|\vec{R}\right| = \left|\left|\vec{P}_1\right| - \left|\vec{P}_2\right|\right|$.

51. Мы знаем, что около треугольника всегда можно описать окружность. Эта закономерность не распространяется уже на четырехугольники: существуют четырехугольники, около которых нельзя описать окружность. В этой связи полезно рассмотреть две задачи:

а) около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°;

б) в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны.

ТЕМА 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ — НОВЫЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Занятие 9. Движение. Преобразование подобия. Основные виды движений

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект теоретического материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Новизна темы, своеобразие геометрического мышления, отсутствие подготовительной работы в предшествующих классах объясняют то внимание, которое уделяется (особенно вначале темы) задачам с дидактическими функциями.

Задачи: 1—3 из теоретической части пособия для учащихся; 52, а—в.

52, *а* (*1-й уровень сложности*). Сделаем предварительное замечание: при решении данной и ряда следующих задач можно в целях экономии времени обойтись без их краткой записи. При решении данной задачи выполняем рисунок, соответствующий условию задачи, и записываем:

$$A \to A_1 \to A_2, \quad B \to B_1 \to B_2, \quad C \to C_1 \to C_2 \ldots$$

Делаем вывод: получили соответствие между точками плоскости, при котором каждой точке плоскости соответствует единственная точка этой плоскости ($A \to A_2$, $B \to B_2$, $C \to C_2$, ...), и наоборот, каждая точка (A_2, B_2, C_2, ...) оказывается соответствующей только одной точке плоскости. Значит, это соответствие является геометрическим преобразованием плоскости.

52, *б* (*1-й уровень сложности, устно*). Одна сторона квадрата, равная a, переходит в сторону прямоугольника, равную $2a$: $a \neq 2a$. Если преобразование изменяет длину хотя бы одного отрезка, то оно не является движением.

52, *в* (*1-й уровень сложности*). Выполняем рисунок, соответствующий условию задачи, и проводим следующие рассуждения. Дана окружность

(O, OA), которая при движении переходит в некоторую фигуру. Что это за фигура? Пусть $A, B, C, \ldots$ — точки данной окружности и $O \to O_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, ... Так как преобразование является движением, то

$$\left.\begin{array}{l} O_1A_1 = OA, \\ O_1B_1 = OB = OA, \\ O_1C_1 = OC = OA, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = \ldots$$

Это значит, что точки A_1, B_1, C_1, ... лежат на окружности (O_1, O_1A_1). Вместе с этим очевидно, что в каждую точку окружности (O_1, O_1A_1) переходит некоторая точка данной окружности. Отсюда следует требуемый вывод: при движении окружность переходит в окружность.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 52, г—ж; 53, а—в (четыре задачи на выбор).
Индивидуальное задание: 53, г—и; 54 (одну-две задачи на выбор).

52, *г* (*1-й уровень сложности, устно*). При решении предыдущей задачи установлено, что при движении окружность переходит в окружность равного радиуса. Поэтому, если геометрическое преобразование переводит окружность радиуса R в окружность радиуса $3R$, то это преобразование не является движением.

52, *д* (*1-й уровень сложности*). На отрезке A_1B_1 нужно отложить отрезок $A_1C_1 = AC$.

52, *е* (*1-й уровень сложности*). Коэффициент преобразования подобия $k = 2$. Поэтому должно выполняться равенство $A_1C_1 = 2AC$. Отсюда построение: на отрезке A_1B_1 от точки A_1 последовательно откладываем два раза отрезок AC, получаем искомую точку C_1.

52, *ж* (*1-й уровень сложности*). Геометрическое преобразование, приведенное в задаче 52, а, является движением и преобразованием подобия. Воспользуйтесь свойствами параллелограмма.

53, *а* (*2-й уровень сложности, устно*). Движение и преобразование подобия не изменяют величину угла. Поэтому прямой угол перейдет в этих преобразованиях в прямой угол, а значит, перпендикулярные прямые — в перпендикулярные прямые.

53, *б* (*2-й уровень сложности, устно*). Верно. См. предыдущую задачу. Проследите также за изменением сторон.

53, *в* (*2-й уровень сложности, устно*). Для этого необходимо, чтобы угол в $60°$ переходил в угол, равный $90°$, чего при движении и преобразовании подобия быть не может. Следовательно, в указанных преобразованиях правильный треугольник не может перейти в прямоугольный треугольник.

53, *г* (*2-й уровень сложности, устно*). Проведите рассуждения, аналогичные выполненным при решении задачи 52, в.

53, *д* (*2-й уровень сложности*). Проведите $MK \perp AB$, $K \in AB$. Пусть $K \to K_1$, $M \to M_1$. Постройте вначале точку K_1, а затем точку M_1. Желательно все построения выполнить, непосредственно начиная с построения треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

53, *е* (*2-й уровень сложности*). Выполняется аналогично предыдущей задаче (с учетом того, что $K_1M_1 = 2KM$). Проделайте все необходимые построения.

53, *ж* (*2-й уровень сложности*). Это задание конкретизирует два предыдущих. Проделайте все необходимые построения.

53, *з* (*2-й уровень сложности*). С помощью свойств параллелограмма устанавливаем, что данное преобразование является движением. После этого, на основании свойств движений, даем ответы. В данном движении: а) точка переходит в точку; б) прямая — в прямую; в) луч — в луч; г) отрезок — в отрезок; д) угол — в угол; е) треугольник — в треугольник.

53, *и* (*2-й уровень сложности, устно*). Получится треугольник, равный данному треугольнику.

54, *а* (*3-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
1) $M(x; y) \to M_1(2x; y)$;
2) $M(x; y) \to M_1(x + 5; y + 5)$;
3) $M(x; y) \to M_1(3x; 3y)$;
4) $M(x; y) \to M_1(x; -y)$;
5) $M(x; y) \to M_1(kx; ky)$.

Какие из этих преобразований являются движением (преобразованием подобия)?

Замысел решения. Возьмем две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Пусть при указанном преобразовании эти точки переходят соответственно в точки A_1 и B_1. Запишем координаты точек A_1 и B_1, найдем и сравним расстояния AB и A_1B_1 (или квадраты этих расстояний). Квадрат расстояния AB можно записать сразу: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Решение.

1) Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(2x_1; y_1), \\ B_1(2x_2; y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (A_1B_1)^2 = (2x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$$

$$= 4(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда $A_1B_1 \neq AB$ и $A_1B_1 \neq kAB$. Следовательно, данное преобразование не является движением и не является преобразованием подобия.

2) Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(x_1 + 5; y_1 + 5), \\ B_1(x_2 + 5; y_2 + 5) \end{array}\right\} \Rightarrow (A_1B_1)^2 = (x_2 + 5 - x_1 - 5)^2 + (y_2 + 5 - y_1 - 5)^2 =$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = AB^2.$$

Отсюда $A_1B_1 = AB$. Следовательно, данное преобразование является движением и вместе с этим — преобразованием подобия.

3) Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(3x_1; 3y_1), \\ B_1(3x_2; 3y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (A_1B_1)^2 = (3x_2 - 3x_1)^2 + (3y_2 - 3y_1)^2 =$$

$$= 9[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = 9AB^2.$$

Отсюда $A_1B_1 = 3AB$. Следовательно, данное преобразование является преобразованием подобия с коэффициентом $k = 3$.

4) Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(x_1; -y_1), \\ B_1(x_2; -y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (A_1B_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 =$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = AB^2.$$

Отсюда $A_1B_1 = AB$. Следовательно, данное преобразование является движением (и преобразованием подобия).

5) Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} A_1(kx_1; ky_1), \\ B_1(kx_2; ky_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (A_1B_1)^2 = (kx_2 - kx_1)^2 + (ky_2 - ky_1)^2 =$$

$$= k^2(x_2 - x_1)^2 + k^2(y_2 - y_1)^2 = k^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = k^2AB^2.$$

Отсюда $A_1B_1 = kAB$. Следовательно, данное преобразование является преобразованием подобия. При $k = 1$ оно окажется движением.

54, *б* (*3-й уровень сложности*). В какую линию переведут прямую $y = x$ преобразования, указанные в предыдущем задании (рис. 53)?

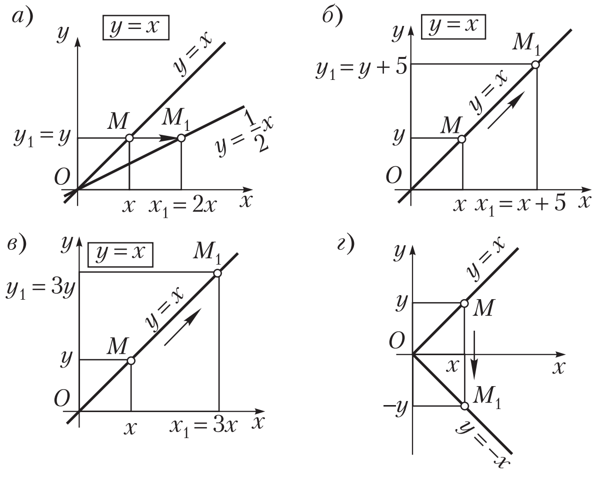


Рис. 53

Замысел решения. Пусть $M(x; y) \to M_1(x_1; y_1)$ (рис. 53). Для того чтобы установить, в какую линию переходит прямая $y = x$, необходимо найти связь между координатами x_1 и y_1. Если, например, эта связь выражается равенством вида $y_1 = kx_1 + b$, то это означает, что координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению прямой $y = kx + b$, а значит, данная линия переходит в прямую.

Решение.

1) Пусть $M(x; y) \to M_1(x_1 = 2x; y_1 = y)$. Найдем связь между координатами x_1 и y_1 точки M_1:

$$y_1 = y = x = \frac{1}{2}x_1.$$

Это означает, что координаты x_1 и y_1 точки M_1 удовлетворяют уравнению $y = \frac{1}{2}x$, которое является уравнением прямой. Следовательно, прямая $y = x$ в данном преобразовании переходит в прямую $y = \frac{1}{2}x$;

2) так как $x = y$, то $x + 5 = y + 5$, или $x_1 = y_1$. Это означает, что координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению $y = x$. Значит, прямая $y = x$ переходит сама в себя (рис. 53, *б*);

3) так как $x = y$, то $3x = 3y$, или $x_1 = y_1$. Это означает, что координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению $y = x$. Следовательно, в указанном преобразовании прямая $y = x$ переходит сама в себя (рис. 53, *в*);

4) пусть $M(x; y) \to M_1(x_1 = x; y_1 = -y)$. Найдем связь между координатами x_1 и y_1: $y_1 = -y = -(x) = -(x_1) = -x_1$; поэтому прямая $y = x$ в данном преобразовании переходит в прямую $y = -x$ (рис. 53, *г*);

5) пусть $M(x; y) \to M_1(x_1 = kx; y_1 = ky)$. Найдем связь между координатами x_1 и y_1: $y_1 = ky = kx = x_1$. Равенство $y_1 = x_1$ означает, что координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению прямой $y = x$. Значит, прямая $y = x$ в данном преобразовании переходит сама в себя.

Занятие 10. Движение. Преобразование подобия. Основные виды движений

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект теоретического материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из теоретической части пособия для учащихся на осевую и центральную симметрию; 1—3 — на параллельный перенос и поворот.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5—10 из теоретической части пособия для учащихся на осевую и центральную симметрию; 4—6 — на параллельный перенос и поворот.

Индивидуальное задание: 55—57 (две задачи на выбор).

55, *а*. Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии.

Докажем это. Пусть s_1 — ось симметрии отрезка AC: $s_1(A) = C$. Тогда s_1 — серединный перпендикуляр отрезка AC. Так как $BA = BC$ (в силу условия), то $B \in s_1$. Поэтому $s_1(AB) = CB$, $s_1(CB) = AB$, $s_1(AC) = CA$. Следовательно, s_1 — ось симметрии равностороннего треугольника. Аналогично серединные перпендикуляры s_2 и s_3 соответственно сторон AB и BC также являются осями симметрии равностороннего треугольника (рис. 54).

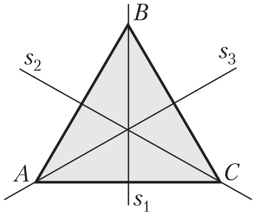


Рис. 54

55, *б* (*1-й уровень сложности*). Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью.

Замысел решения. Докажем вначале, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он равносторонний.

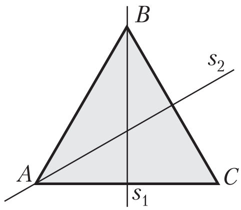


Рис. 55

Решение. Пусть s_1 и s_2 — оси симметрии треугольника ABC (рис. 55). Ось s_1 возьмем как ось симметрии точек A и C: $s_1(A) = C$, при этом точка B должна перейти сама в себя; отсюда $BA = BC$. Аналогично рассуждая в отношении оси симметрии s_2 точек B и C, получим, что $AB = AC$. Тогда из равенств $BA = BC$ и $AB = AC$ следует, что треугольник ABC равносторонний. Равносторонний треугольник, как было установлено при решении задачи 55, в, имеет три оси симметрии. Итак, если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось симметрии.

56, *а* (*2-й уровень сложности*).

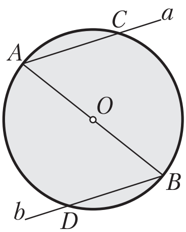


Рис. 56

Краткая запись задачи:
O — центр, AB — диаметр окружности,
AC и BD — хорды, $AC \parallel BD$.

$O(AC) = BD$.

Замысел решения. Задача сводится к установлению симметричности точек C и D относительно центра O. Для этого рассмотрим точку C как точку пересечения прямой a и окружности. Тогда точка, симметричная точке C относительно центра O, должна лежать на фигурах, симметричных указанным (рис. 56).

Решение. Так как AB — диаметр, то точки A и B симметричны относительно центра O. Осталось доказать, с учетом замысла решения, симметричность точек C и D. Так как при центральной симметрии прямая переходит в параллельную прямую, то прямая a при центральной симметрии с центром O перейдет в прямую, проходящую через точку B и параллельную a, но такой прямой является прямая b. Следовательно, $O(a) = b$. Далее: данная окружность при указанной центральной симметрии перейдет в себя, поэтому точка, в которую переходит точка C, должна лежать одновременно на прямой b и на окружности. Но такой точкой является точка D. Следовательно, $O(C) = D$. Поэтому

$$\left.\begin{array}{l} A \to B, \\ C \to D \end{array}\right\} \Rightarrow O(AC) = BD.$$

56, *б* (*2-й уровень сложности*).

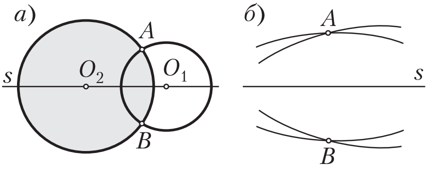


Рис. 57

Краткая запись задачи:
A и B — точки пересечения двух окружностей, s — линия центров (рис. 57, *а*).

$s(A) = B$.

Замысел решения. Если точка A (рис. 57, *б*) — точка пересечения двух линий l и m, а точка B — точка пересечения линий l_1 и m_1, симметричных соответственно l и m относительно оси s, то точки A и B симметричны относительно оси s.

Решение. Данные окружности при симметрии относительно линии центров s переходят каждая в себя. Так как точка A — общая точка окружностей, то симметричная ей точка должна принадлежать как одной, так и другой окружности. Но такой точкой является точка B. Следовательно, $s(A) = B$.

57, *а* (*1-й уровень сложности*).

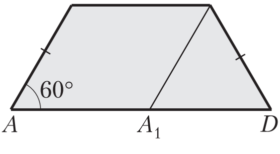


Рис. 58

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AB = DC = 8$ см, $AD = 20$ см, $\angle A = 60°$ (рис. 58).

$BC = ?$

Замысел решения. Подвергнем сторону AB параллельному переносу на вектор $\overrightarrow{BC}$. Пусть при этом она перейдет в A_1C. Получили треугольник A_1CD. Рассмотрим его.

Решение.

1) Пусть $BC = x$. Так как параллельный перенос есть движение, то $A_1C = AB = 8$ см. При параллельном переносе отрезок переходит в параллельный отрезок: $AB \parallel A_1C$. Тогда $\angle CA_1D = \angle A = 60°$;

2) в треугольнике A_1CD имеем:

а) $A_1D = 20 - x$;

б) $\angle A_1 = \angle D = \angle A_1CD = 60° \Rightarrow \Delta A_1CD$ — равносторонний;

в) поэтому $A_1D = DC$, или $20 - x = 8$; отсюда $x = 12$.

57, *б* (*1-й уровень сложности*).

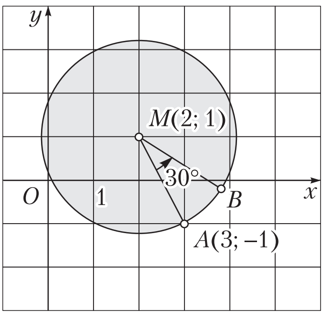


Рис. 59

Краткая запись задачи:
Поворот с центром $M(2; 1)$ на угол $\alpha = 30°$, $A(3; -1) \to B$ (рис. 59).

$AB = ?$

Замысел решения. Применим теорему косинусов к ΔAMB:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos\alpha.$$

Решение. Имеем:

$$MA^2 = MB^2 = (3-2)^2 + (-1-1)^2 = 1 + 4 = 5; \quad MA = MB = \sqrt{5};$$

$$AB^2 = 5 + 5 - 2\sqrt{5}\sqrt{5}\cos 30° = 10 - 5\sqrt{3}; \quad AB = \sqrt{10 - 5\sqrt{3}}.$$

Занятие 11. Гомотетия как пример преобразования подобия

1. Методические рекомендации к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект теоретического материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5—8 из теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 58.

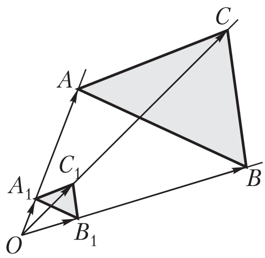


Рис. 60

58, *а* (*1-й уровень сложности*). Даны произвольные точки A, B и C, центр гомотетии O и коэффициент гомотетии $k = \frac{1}{4}$. Постройте точки A_1, B_1 и C_1, гомотетичные соответственно точкам A, B и C (рис. 60).

Замысел решения. Воспользуемся равенствами:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}.$$

Построения. Строим отрезок $OA_1 = \frac{1}{4}OA$, получим точку A_1. Аналогично строятся точки B_1 и C_1.

58, *б* (*1-й уровень сложности*).

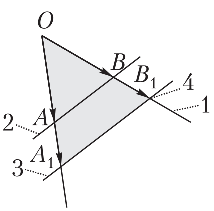


Рис. 61

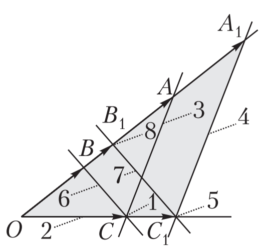


Рис. 62

Краткая запись задачи:
O — центр гомотетии,
A и A_1 — гомотетичные точки,
1) $B \notin AA_1$.
2) $B \in AA_1$.

Построить точку B_1, гомотетичную точке B.

1) *Замысел решения.* Воспользуемся тем, что искомая точка B_1 должна принадлежать лучу OB и $A_1B_1 \parallel AB$. Построения показаны на рисунке 61.

2) *Замысел решения.* Воспользуемся точкой $C \notin AA_1$. Построим вначале точку C_1, гомотетичную точке C, а затем — точку B_1, гомотетичную точке B. Построения показаны на рисунке 62.

Занятие 12. Метод геометрических преобразований

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—6 из п. 11.1 теоретической части пособия для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 7—10 из п. 11.1 теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 59, а—в (две задачи на выбор).

59, *а* (*2-й уровень сложности*).

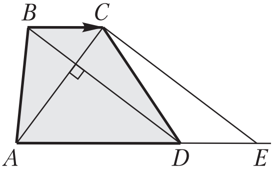


Рис. 63

Краткая запись задачи:
$ABCD$ — трапеция, $AC \perp BD$,
$AC = d_1$, $BD = d_2$ (рис. 63).

$AD + BC = ?$

Замысел решения. Продублируем прием, примененный в решении задачи 57, а.

Выполнение рисунка. Построение трапеции $ABCD$ лучше начать с диагонали CA, затем проводим боковую сторону AB, диагональ BD (перпендикулярно AC) и, наконец, основания AD и BC (рис. 63).

Решение. Перенесем диагональ BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. Получим треугольник ACE с прямым углом C и гипотенузой AE, равной сумме оснований.

На основании теоремы Пифагора:

$$AC^2 + CE^2 = AE^2 \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = (AD + BC)^2.$$

Поэтому

$$AD + BC = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}.$$

59, *б* (*2-й уровень сложности*). Площадь данного треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, сторонами которого являются медианы данного.

Построение. Пусть ΔABC — данный треугольник (рис. 64), AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы. Построим ΔBB_1C_2, составленный из медиан данного треугольника. Как построить этот треугольник? Выполним параллельный перенос медианы CC_1 на вектор $\overrightarrow{C_1B}$. Медиана CC_1 перейдет в некоторый

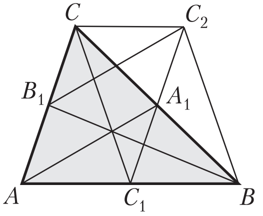


Рис. 64

отрезок C_2B. Осталось выяснить, не окажется ли сторона B_1C_2 треугольника BB_1C_2 равной медиане AA_1. Из построений следует, что четырехугольник C_1BC_2C — параллелограмм. Точка A_1 — середина диагонали BC — является точкой пересечения диагоналей параллелограмма. Поэтому вторая диагональ C_1C_2 проходит через точку A_1. Отсюда следует: $A_1C_2 = A_1C_1 = AB_1$ и $A_1C_2 \parallel A_1C_1 \parallel AB_1$. Поэтому четырехугольник $AA_1C_2B_1$ — параллелограмм и $B_1C_2 = AA_1$. Итак, ΔBB_1C_2 составлен из медиан ΔABC.

Вычисления. Перейдем к нахождению площади ΔBB_1C_2. Попытаемся сравнить площадь ΔBB_1C_2 с площадью ΔABC. Для этого достаточно сравнить половины площадей этих треугольников — площади треугольников BB_1R и BB_1C.

Так как высоты этих треугольников, проведенные из вершины B_1, равны, то площади треугольников относятся как их основания:

$$\frac{x}{S} = \frac{BR}{BC} = \frac{\frac{3}{4}BC}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}S.$$

59, *в* (*2-й уровень сложности*). Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. На этой прямой постройте точку P такую, чтобы сумма отрезков AP и PB оказалась наименьшей.

Решение. Воспользуемся методом симметрии-спрямления. Сумма отрезков AP и PB оказывается наименьшей, если точка P строится как точка пересечения отрезка AB_1 и прямой a, где B_1 — точка, симметричная точке B относительно прямой a.

Занятие 13. Метод геометрических преобразований

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—5 из п. 11.2 теоретической части пособия для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 6—10 из п. 11.2 теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: задачи 1—4 из п. 11.3 теоретической части пособия для учащихся.

Занятие 14. Равенство и подобие фигур. Подобие треугольников. Свойства подобных многоугольников. Пропорциональные отрезки в круге

1. Методические комментарии к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект теоретического материала.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—3 из п. 13.2 теоретической части пособия для учащихся; 60, а—г.

60, *а* (*1-й уровень сложности*).

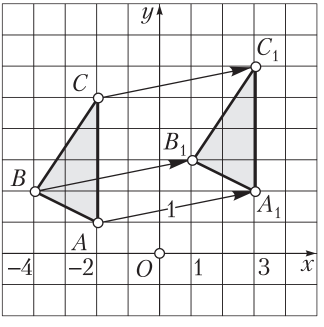


Рис. 65

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $A(-2; 1)$, $B(-4; 2)$, $C(-2; 5)$, $A_1(3; 2)$, $B_1(1; 3)$, $C_1(3; 6)$ (рис. 65).

1) Доказать, что ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ могут быть совмещены параллельным переносом.
2) Найти вектор параллельного переноса.

Замысел решения. Для доказательства возможности совмещения ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ параллельным переносом сравним векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$. Для этого найдем координаты этих векторов.

Решение. Имеем:

$$\overrightarrow{AA_1}\ (3+2; 2-1),\quad \overrightarrow{BB_1}\ (1+4; 3-2),\quad \overrightarrow{CC_1}\,(3+2; 6-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1}\,(5; 1),\ \ \overrightarrow{BB_1}\,(5; 1),\ \ \overrightarrow{CC_1}\,(5; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}.$$

Это означает, что ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ могут быть совмещены параллельным переносом: $\vec{m}(5; 1)$ — вектор параллельного переноса.

60, *б* (*1-й уровень сложности*).

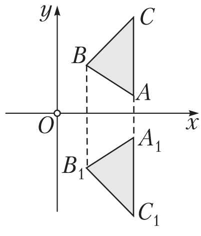


Рис. 66

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $A(3; 2)$, $B(1; 3)$, $C(3; 6)$, $A_1(3; -2)$, $B_1(1; -3)$, $C_1(3; -6)$ (рис. 66).

Можно ли ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ совместить симметрией относительно какой-нибудь из координатных осей?

План решения. Установим, что:

1) точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 симметричны относительно оси x;

2) ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ симметричны относительно оси x;

3) ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ могут быть совмещены симметрией относительно оси x.

60, *в* (*1-й уровень сложности*).

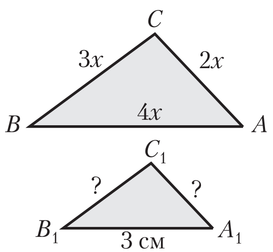


Рис. 67

Краткая запись задачи:
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$,
$AC : CB : AB = 2 : 3 : 4$,
$A_1B_1 = 3$ см (рис. 67).

$A_1C_1 = ?$
$C_1B_1 = ?$

Замысел решения. Неизвестные стороны можем найти, составив пропорцию, предварительно положив $AC = 2x$, $CB = 3x$, $AB = 4x$.

Решение. Имеем:

1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по условию);

2) $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} \Rightarrow \dfrac{2x}{A_1C_1} = \dfrac{3x}{C_1B_1} = \dfrac{4x}{3_1}$;

3) $A_1C_1 = 1{,}5$ см, $C_1B_1 = 2{,}25$ (см).

60, *г* (*1-й уровень сложности*).

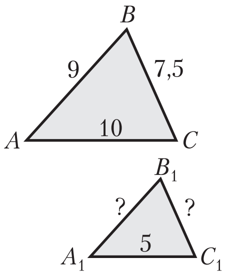


Рис. 68

Краткая запись задачи:
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $AB = 9$ см,
$BC = 7{,}5$ см, $AC = 10$ см,
$A_1C_1 = 5$ см (рис. 68).

$A_1B_1 = ?$
$B_1C_1 = ?$

Решение.

1) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по условию);

2) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \dfrac{9}{A_1B_1} = \dfrac{7{,}5}{B_1C_1} = \dfrac{10}{5}$;

3) отсюда $A_1B_1 = 4{,}5$ см, $B_1C_1 = 3{,}75$ (см).

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 1; 2 из п. 14.2 теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 61, а—г (две задачи на выбор).

61, *а* (*1-й уровень сложности*).

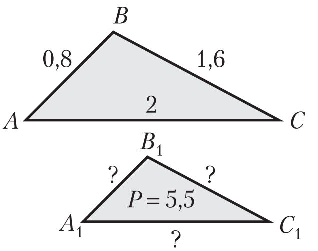


Рис. 69

Краткая запись задачи:
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $AB = 0{,}8$ см,
$BC = 1{,}6$ см, $AC = 2$ см,
$P_{A_1B_1C_1} = 5{,}5$ см (рис. 69).

$A_1B_1 = ?$
$B_1C_1 = ?$
$A_1C_1 = ?$

План решения. 1) Находим периметр ΔABC;
2) находим коэффициент подобия;

3) составляем пропорцию и приравниваем ее отношения коэффициенту подобия;

4) находим стороны $\Delta A_1B_1C_1$.

Решение.

1) $P_{ABC} = 0{,}8 + 1{,}6 + 2 = 4{,}4$ (см);

2) $\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = \frac{5{,}5}{4{,}4} = \frac{5}{4} \Rightarrow k = \frac{5}{4}$;

3) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k \Rightarrow \frac{A_1B_1}{0{,}8} = \frac{B_1C}{1{,}6} = \frac{A_1C_1}{2} = \frac{5}{4}$;

4) отсюда

$A_1B_1 = 0{,}8 \cdot \frac{5}{4} = 1$ (см), $B_1C_1 = 1{,}6 \cdot \frac{5}{4} = 2$ (см), $A_1C_1 = 2 \cdot \frac{5}{4} = 2{,}5$ (см).

Контрольное вычисление. $P_{A_1B_1C_1} = 1 + 2 + 2{,}5 = 5{,}5$ (см).

61, *б* (*1-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
$ABCD... \backsim A_1B_1C_1D_1...$, $AB = 35$ м,
$BC = 1{,}6$ см, $A_1B_1 = 14$ м,
$P_{ABCD\,...} - P_{A_1B_1C_1D_1\,...} = 60$ м.

$P_{ABCD\,...} = ?$
$P_{A_1B_1C_1D_1\,...} = ?$

Поиск решения задачи (анализ через синтез).

1) Пусть AB и A_1B_1 — наибольшие стороны данных многоугольников. Что можно найти, зная AB и A_1B_1? Можно найти коэффициент подобия;

2) зная коэффициент подобия, какое равенство можем записать? Можем приравнять отношение периметров многоугольников коэффициенту подобия;

3) зная отношение и разность периметров данных многоугольников, что можно составить? Можно составить систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив ее, найдем искомые периметры.

Решение.

1) $A_1B_1C_1D_1... \backsim ABCD... \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{14}{35} = 0{,}4 \Rightarrow k = 0{,}4$;

2) $\frac{P_{A_1B_1C_1D_1\,...}}{P_{ABCD\,...}} = 0{,}4$;

3) $\begin{cases} \dfrac{P_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{P_{ABCD\ldots}} = 0,4, \\ P_{ABCD\ldots} - P_{A_1B_1C_1D_1\ldots} = 60 \end{cases} \Rightarrow P_{ABCD\ldots} = 100\,(\text{м}), P_{A_1B_1C_1D_1\ldots} = 40\,(\text{м}).$

61, *в* (*1-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи: a и b — соответственные стороны двух правильных одноименных многоугольников.

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{P_{ABCD\ldots}} = ? \quad \frac{S_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{S_{ABCD\ldots}} = ?$$

Замысел решения. Воспользуемся подобием двух правильных одноименных многоугольников. Для нахождения отношения периметров и площадей подобных многоугольников достаточно знать коэффициент подобия и применить формулы:

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{P_{ABCD\ldots}} = k, \quad \frac{S_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{S_{ABCD\ldots}} = k^2.$$

Решение.

1) $A_1B_1C_1D_1... \backsim ABCD...$, так как многоугольники правильные и одноименные;

2) пусть $A_1B_1 = b$, $AB = a$. Тогда

$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{b}{a};$$

3) по приведенным выше формулам имеем:

$$\frac{P_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{P_{ABCD\ldots}} = \frac{b}{a}, \quad \frac{S_{A_1B_1C_1D_1\ldots}}{S_{ABCD\ldots}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

61, *г* (*1-й уровень сложности*).

Краткая запись задачи:
$S_{\text{из.уч}} = 100$ см^2, $k = 1 : 10\ 000$.

$S_{\text{уч}} = ?$

Замысел решения. Выразим коэффициент подобия через отношение площадей и из полученного равенства найдем площадь участка.

Решение. Имеем:

1) $\dfrac{S_{\text{из.уч}}}{S_{\text{уч}}} = \left(\dfrac{1}{10\ 000}\right)^2 \Rightarrow S_{\text{уч}} = S_{\text{из.уч}} \cdot 10^8;$

2) $S_{\text{уч}} = 100 \cdot 10^8 = 10^{10}$ (см^2);

3) $S_{\text{уч}} = 10^{10}$ см$^2 = 1$ (км^2).

Занятие 15. Равенство и подобие фигур. Подобие треугольников. Свойства подобных многоугольников. Пропорциональные отрезки в круге

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 15 теоретической части пособия для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 62, а—е.

Занятие 16. Метод подобия

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 63, а—е.

63, *в* (*2-й уровень сложности*).

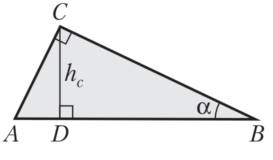


Рис. 70

Краткая запись задачи:
ΔABC, $\angle C$ — прямой, CD — высота (рис. 70).

1) Найти подобные треугольники.
2) Доказать, что $h_c^2 = AD \cdot DB$.

1) *План решения*. Выясняем, подобны или нет пары треугольников: 1) ΔABC и ΔACD; 2) ΔABC и ΔCBD; 3) ΔACD и ΔCBD.

Решение.

Утверждения	На основании
1) $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$ — по 1-му признаку подобия;	$\angle D = \angle C = 90°$, $\angle A$ — общий;

Утверждения	На основании
2) $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ — по 1-му признаку подобия;	$\angle D = \angle C = 90°$, $\angle B$ — общий;
3) $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ — по 3-му признаку подобия.	$\Delta ACD \sim \Delta ABC \sim \Delta CBD$. Поэтому соответственные стороны этих треугольников пропорциональны.

2) ΔABC, $\angle C = 90°$, $CD = h_c$ — высота (см. рис. 70).

$$h_c^2 = AD \cdot DB.$$

Доказательство (при помощи анализа Евклида).

1) Пусть $h_c^2 = AD \cdot DB$ (какие следствия можно вывести из этого равенства?);

2) тогда

$$\frac{h_c}{DB} = \frac{AD}{h_c};$$

3) тогда прямоугольные треугольники ACD и CBD подобны;

4) эти рассуждения можно обратить, так как треугольники ACD и CBD действительно подобны (см. решение предыдущей задачи);

5) следовательно, $h_c^2 = AD \cdot DB$.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 64, а—д.
Индивидуальное задание: 64, е—ж.

Занятие 17. Метод подобия

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 65.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 66.

Занятие 18. Метод подобия

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 67.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 68.

ТЕМА 3 ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

Занятие 19. Правильный многоугольник. Сумма углов многоугольника. Центр правильного многоугольника. Построение некоторых правильных многоугольников, вписанных в окружность

1. Методические комментарии к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект к п. 16.1; 17.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 16.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5; 6 из теоретической части (п. 16.2) пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 69, а—г (одну-две задачи на выбор).

69, *а.* $Q_n = 180°(n-2) \Rightarrow a_n = \dfrac{Q_n}{n} = \dfrac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow n = \dfrac{180°(n-2)}{\alpha_n}$, где α_n — внутренний угол правильного n-угольника.

69, *г.* Обратная теорема: «Если сумма углов выпуклого многоугольника равна 180°, то этот многоугольник является треугольником». Для доказательства воспользуемся формулой для числа n из задачи 69, а.

Занятие 20. Правильный многоугольник. Сумма углов многоугольника. Центр правильного многоугольника. Построение некоторых правильных многоугольников, вписанных в окружность

1. Методические комментарии к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект к п. 18.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 70.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 71.
Индивидуальное задание: 72.

71, *а*. Воспользуемся формулами

$$S_n = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n} \quad \text{и} \quad S'_n = r^2 n \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}.$$

72. *Выполнение задания*. Для уточнения понятия паркета приведем пример паркета (рис. 71, *а*) и контрпримеры (рис. 71, *б—в*).

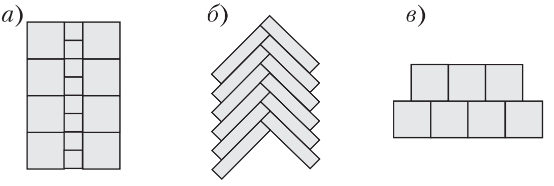


Рис. 71

Предположим, что мы начали «замащивать» плоскость в одной какой-либо точке. Необходимо, чтобы сумма углов всех многоугольников при выбранной вершине была равна 360°. Проверим выполнимость этого условия для различных комбинаций правильных многоугольников:

1) из правильных треугольников можно образовать упомянутое выше окаймление при выбранной вершине из 360° : 60° = 6 треугольников;

после этого показываем возможность построения паркета из одних правильных треугольников;

2) для построения окаймления вершины, состоящего из квадратов, достаточно взять $360° : 90° = 4$ таких квадрата; после этого строим соответствующий паркет;

3) для пятиугольника получаем: $360° : 108° = 3\frac{1}{3}$, что означает, что из правильных пятиугольников нельзя образовать окаймления вершины, а значит, нельзя построить и паркета;

4) у квадрата внутренний угол равен 90°, у восьмиугольника — 135°. Если в одной вершине будут сходиться два восьмиугольника и один квадрат, то получаем: $135° \cdot 2 + 90° = 360°$. Это означает возможность окаймления вершины и построения соответствующего паркета;

5) у шестиугольника внутренний угол равен 120°, у квадрата — 90°, у треугольника — 60°. Два квадрата, шестиугольник и треугольник при вершине дают угол в 360°. Указанное окаймление возможно, приводим соответствующий паркет;

6) окаймление возможно также, если в вершине будут сходиться два квадрата и три треугольника: $2 \cdot 90° + 3 \cdot 60° = 360°$; приводим соответствующий паркет.

Занятие 21. Выражение элементов правильного многоугольника через радиус описанной или вписанной окружности. Длина окружности и ее дуг. Площадь круга и его частей

1. Методические комментарии к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект к п. 19—21.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—4 из п. 21.2 теоретической части пособия для учащихся.

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: задачи 5; 6 из п. 21.2 теоретической части пособия для учащихся.

Индивидуальное задание: 73 (две задачи на выбор).

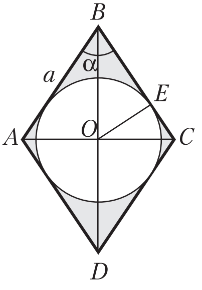


Рис. 72

73, *д*. Дан ромб со стороной a и острым углом α (рис. 72). Найдите площадь вписанного круга. Чему равно отношение длины окружности к периметру ромба?

План решения (анализ Паппа). Решение задачи сводится к нахождению радиуса OE вписанной окружности: 1) В какой треугольник входит OE? (В ΔOBE.) 2) Что в этом треугольнике известно? $\left(\angle OBE = \frac{\alpha}{2}.\right)$ 3) Нельзя ли найти OB? Какой треугольник для этого необходимо рассмотреть? (ΔBOC.) 4) Что в этом треугольнике известно? (Гипотенуза $BC = a$ и $\angle OBE = \frac{\alpha}{2}$.) 5) Можно ли по этим данным найти OB? (Можно.) В итоге составляется план решения задачи. Находим:

1) OB из ΔBOC; 2) OE из ΔOBE; 3) отвечаем на вопросы задачи.

Решение.

1) Пусть E — точка касания стороны BC ромба и вписанной в него окружности, тогда OE — радиус этой окружности. Для нахождения OE рассмотрим прямоугольный ΔBOC. По свойству ромба

$$\angle OBC = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\frac{OB}{BC} = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow OB = BC\cos\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2};$$

2) из ΔOBE:

$$\frac{OE}{OB} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow OE = OB\sin\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}a\sin\alpha.$$

Итак, радиус вписанной окружности

$$OE = \frac{1}{2}a\sin\alpha;$$

3) площадь вписанного круга

$$S = \pi OE^2 = \pi\left(\frac{1}{2}a\sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{4}a^2\pi\sin^2\alpha;$$

отношение длины окружности к периметру ромба равно

$$\frac{2\pi\cdot\frac{1}{2}a\sin\alpha}{4a} = \frac{\pi\sin\alpha}{4}.$$

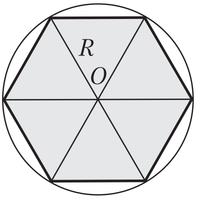


Рис. 73

73, *ж*. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник (рис. 73). Найдите отношение площади шестиугольника к площади круга.

План решения.

1) Правильный шестиугольник радиусами разбивается на шесть правильных треугольников. Найдем площадь одного из них;

2) найдем площадь данного шестиугольника;

3) найдем искомое отношение.

Вычисления.

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2;$$

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2;$$

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,8.$$

Замечание. Как видно, искомое отношение не зависит от радиуса круга и показывает, что площадь правильного вписанного шестиугольника составляет примерно $\frac{4}{5}$ площади круга.

Занятие 22. Выражение элементов правильного многоугольника через радиус описанной или вписанной окружности. Длина окружности и ее дуг. Площадь круга и его частей

1. Методические комментарии к изучению теоретического материала

Приготовьте конспект к п. 22.

2. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 74, а—г.

74, *а*. (*Задача с межпредметным содержанием.*) Спутник вращается вокруг Земли со скоростью 7,9 км/с. За какое время спутник обернется вокруг Земли? (Землю считать шаром радиуса $R \approx 6370$ км, высоту орбиты положить равной 500 км.)

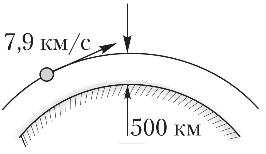


Рис. 74

Решение. Время обращения спутника вокруг Земли (рис. 74) находится по формуле

$$t = \frac{C}{v},$$

где C — длина проходимой им окружности, v — скорость движения.

Найдем радиус окружности, по которой движется спутник. Он равен $6370 + 500 = 6870$ (км). Тогда

$$t = \frac{2\pi 6870}{7{,}9} \approx 5463{,}9\,(\text{с}) \approx 1{,}5\,(\text{ч}).$$

Замечание. Для выполнения правдоподобного рисунка к задаче необходимо учесть, что радиус Земли больше высоты орбиты в $\frac{6370}{500} \approx 13$ раз.

74, *б*. (*Задача с межпредметным содержанием*.) Период обращения Земли вокруг Солнца примерно равен 365 суткам. Расстояние от Земли до Солнца примерно равно 150 млн км. Найдите скорость вращения Земли вокруг Солнца. Сравните ее со скоростью вращения точки поверхности Земли вокруг земной оси, которая приближенно равна 448 м/с.

Решение. Скорость вращения Земли вокруг Солнца находится по формуле

$$v = \frac{C}{T},$$

где C — длина окружности, по которой Земля движется вокруг Солнца, а T — время совершения одного оборота. Найдем длину окружности:

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 150 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi 150 \cdot 10^6}{365 \cdot 24} \approx 108\ 000\,(\text{км/ч}) \approx 29\ 886\ (\text{м/с}).$$

Сравним скорости: $29\,886 : 448 \approx 67$. Это означает, что скорость движения Земли вокруг Солнца в 67 раз больше скорости вращения точки поверхности Земли вокруг земной оси.

Замечание. Если учесть, что скорость вращения точки земного экватора примерно равна 463 м/с, то можно сделать вывод о том, что в задаче речь идет о точке, расположенной достаточно близко к экватору.

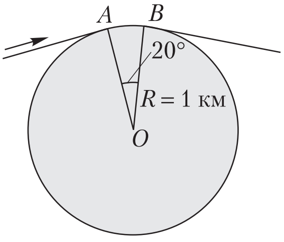


Рис. 75

74, *г.* (*Задача с практическим содержанием.*) Радиус закругления полотна железной дороги равен 1000 м, дуга закругления содержит 20°. Найдите длину дуги (рис. 75).

Решение. Длина дуги окружности находится по формуле

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Поэтому

$$l = \frac{\pi 1000 \cdot 20}{180} \approx 349 \text{ (м)}.$$

3. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 74, д—ж.
Индивидуальное задание: 74, з.

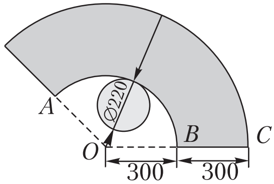


Рис. 76

74, *д.* (*Задача с практическим содержанием.*) По рисунку 76 рассчитайте площадь оцинкованного железа, необходимого для изготовления ведра, если $\angle AOB = 115°$, $OB = BC = 300$ мм, диаметр дна ведра равен 220 мм.

Решение. Дно ведра имеет площадь $S_1 = \pi \cdot 110^2 \approx 314{,}2$ (мм^2) $\approx 0{,}03$ (дм^2). Площадь S_2 боковой поверхности ведра получим как разность площадей секторов, радиусы которых равны 600 мм и 300 мм:

$$S_2 = \frac{\pi 600^2 \cdot 115}{360} - \frac{\pi 300^2 \cdot 115}{360} = \frac{\pi \cdot 115}{360}(600^2 - 300^2) =$$

$$= \frac{\pi \cdot 115}{360} \cdot 900 \cdot 300 \approx 270\ 962 \text{ (мм}^2) \approx 27{,}1 \text{ (дм}^2).$$

Тогда полная поверхность ведра имеет площадь

$$S = S_1 + S_2 \approx 0{,}03 + 27{,}1 = 27{,}13 \text{ (дм}^2).$$

Следовательно, площадь оцинкованного железа, необходимого для изготовления ведра, равна 27,13 (дм^2).

74, *е.* (*Задача с межпредметным содержанием.*) 22 июня 1976 г. в СССР произведен запуск орбитальной научной станции «Салют-5». Ее максимальное удаление от поверхности Земли (в апогее) — 260 км, мини-

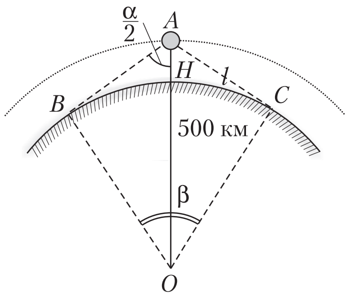


Рис. 77

мальное (в перигее) — 219 км (рис. 77). Найдите величину угла, под которым наблюдается Земля со станции в тот момент, когда она находится в апогее. Какова длина дуги земной поверхности (в плоскости орбиты станции), наблюдаемой из той же точки?

Решение. По условию $AH = 260$ км. Тогда $AO = AH + HO = 260 + 6370 = 6630$ (км). Пусть $\angle BAC = \alpha$ — искомый угол. Из соображений симметрии

$$\angle BAO = \angle CAO = \frac{\alpha}{2}.$$

Так как AB — касательная, то

$$\angle ABO = 90° \quad \text{и} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BO}{AO} = \frac{6370}{6630} \approx 0{,}9608.$$

Отсюда $\frac{\alpha}{2} \approx 73{,}9°$, $\alpha \approx 147{,}8°$. Для отыскания длины l дуги BC найдем угол β: $\beta \approx 180° - 147{,}8° \approx 32{,}2°$. Тогда

$$l = \frac{\pi Rn}{180} \approx \frac{\pi 6370 \cdot 32{,}2}{180} \approx 3579{,}9 \text{ (км)}.$$

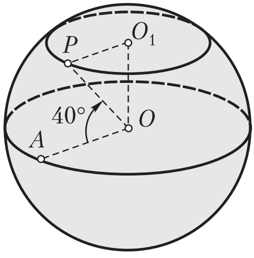


Рис. 78

74, *з.* (*Задача с межпредметным содержанием.*) Найдите длину параллели Земли на широте, равной 40°.

(Широта отсчитывается от экватора.)

Решение. Пусть $\angle AOP = 40°$ (рис. 78). Это означает, что точка P находится на параллели, широта которой равна 40°. Необходимо найти длину l этой параллели, т. е. длину окружности с центром O_1 и радиусом, равным O_1P.

Так как ΔOO_1P — прямоугольный ($\angle OO_1P = 90°$) и $\angle O_1PO = \angle AOP = 40°$, то можно записать:

$$\frac{O_1P}{OP} = \cos\angle O_1PO = \cos 40° \Rightarrow O_1P = OP\cos 40°.$$

Тогда $l = 2\pi O_1P = 2\pi OP\cos 40° \approx \pi \cdot 2 \cdot 6370 \cos 40° \approx 30\,660$ (км).

Занятие 23. Задачи на комбинацию окружности и многоугольников

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задачи 1—5 из п. 23 теоретической части пособия для учащихся.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 75; 76, а, б.
Индивидуальное задание: 76, в.

Занятие 24. Задачи на комбинацию окружности и многоугольников

1. Методические комментарии к решению задач в классе

Задача 76, г—и.

2. Методические комментарии к решению задач домашнего задания

Общее задание: 77, а—в.
Индивидуальное задание: 77, г.

ТЕМА 4 ПОВТОРЯЕМ, СИСТЕМАТИЗИРУЕМ, ОБНОВЛЯЕМ: С КАКИМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ МЫ ПОЗНАКОМИЛИСЬ В ДАННОМ ФАКУЛЬТАТИВНОМ КУРСЕ

Приводимые ниже задачи предназначены для организации повторения курса планиметрии. Они распределены по основным содержательным линиям и представляют собой своего рода «представительную выборку» из задачного материала факультативного курса 7—9 классов. В соответствующих темах эти задачи играли роль ключевых задач. Как правило, эти задачи, или такие же, уже решались с учащимися. В приводимой ниже таблице номера задач указываются из пособий для учащихся соответствующих классов.

Решение ряда задач (особенно за 7 класс) может быть проведено в устной форме. Решение задач и их разбор рекомендуется сопровождать своего рода обобщающей рефлексией — выяснением, каким математическим методом решается та или иная задача.

Занятие	Тема	Задачи, решаемые в классе	Домашнее задание	
			Общее	Индивидуальное
Повторение материала 7 класса				
№ 25	Темы 1–2	№ 7, 10, 22е	30б, 40а, 47а	48а
№ 26	Темы 2–3	№ 63, 78, 87в, 133б	89, 93а, 116, 145	124б, 152б
Повторение материала 8 класса				
№ 27	Тема 1	№ 2, 3, 22	25, 31, 40	38, 39
№ 28	Тема 2	№ 47, 48, 50	52а, 52в, 53а	57а, 58а
№ 29	Тема 2	№ 82а—б, 84в	85—87	90
№ 30	Тема 3	№ 95б, 98а—д	104а, 105, 107а	108д

Занятие	Тема	Задачи, решаемые в классе	Домашнее задание	
			Общее	Индивидуальное
Повторение материала 9 класса				
№ 31	Тема 1	№ 15, 16, 23а	23в, 26б, 31	34
№ 32	Тема 1	№ 36(1), 41а, 42а	43а—в	43г
№ 33	Тема 1	№ 47а, д; 49б	48в	49в
№ 34	Тема 2	№ 55б, 56а, 59а—б	55а, 56б, 61а	58б, 63а
№ 35	Тема 3	№ 69в, 71а, 76а	69д, 71б, 73д	76б

Приложения

Приложение 1. Конспекты к изучению теоретического материала в 8 классе

ЗАНЯТИЕ 1

Конспект

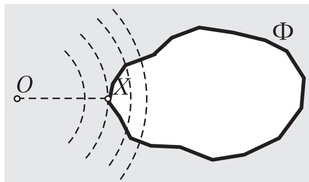
<table>
<tr><th>Определения</th><th>Ключевые задачи</th></tr>
<tr><td>


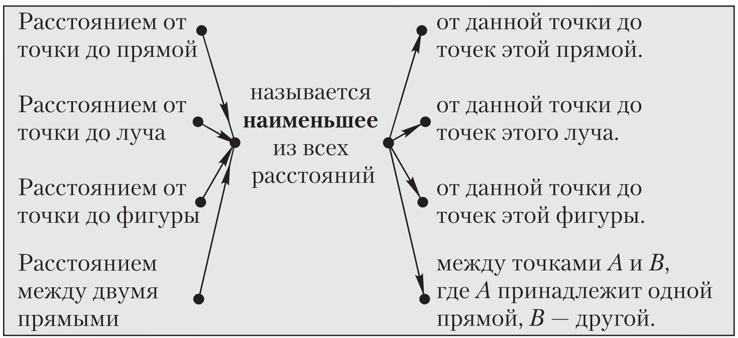
Рис. 1


Рис. 2
</td><td>

Задача 1. Точка O удалена от точек A и B на расстояние, равное 2. На какое расстояние точка O удалена от прямой AB, если $AB = 1$?

Задача 2. Хорды AB и CD окружности параллельны и равны соответственно 6 см и 8 см. Найдите расстояние между прямыми AB и CD, если радиус окружности равен 5 см.
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Теоремы и следствие

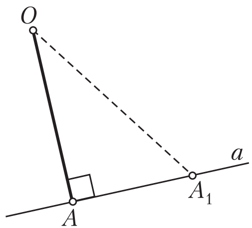


Рис. 3

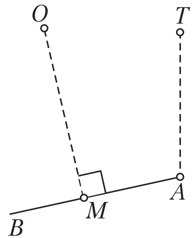


Рис. 4

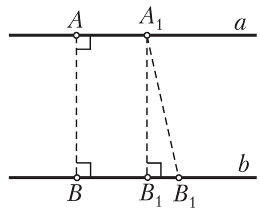


Рис. 5

Теоремы.

1. Длина перпендикуляра OA, проведенного из точки O к прямой a, есть расстояние от точки O до прямой a (рис. 3—4).

2. Если длина отрезка OA ($O \notin a$, $A \in a$) есть расстояние от точки O до прямой a, то $OA \perp a$.

Следствие. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине общего перпендикуляра к этим прямым, концы которого ____________________ (рис. 5).

ЗАНЯТИЕ 3

Конспект

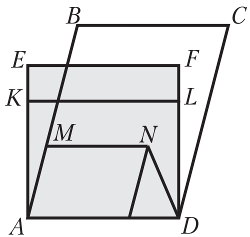
<table>
<tr><th>Виды четырехугольников</th><th>Свойства четырехугольников</th><th>Признаки четырехугольников</th></tr>
<tr><td rowspan="2">

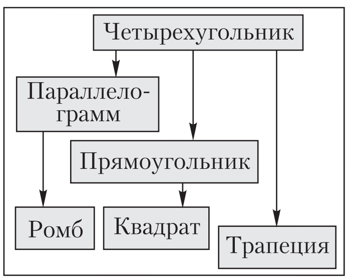
Рис. 1


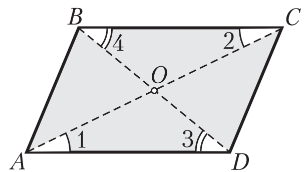
Рис. 2</td><td colspan="2">Параллелограмм


Рис. 3</td></tr>
<tr><td>В параллелограмме (рис. 3):
1) противоположные стороны и углы ____________________;
2) диагонали в точке пересечения ________________________.</td><td>Четырехугольник является параллелограммом, если в нем:
1) противоположные стороны равны, или
2) две противоположные стороны равны и параллельны, или
3) диагонали в точке пересечения делятся пополам.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Высоты параллелограмма

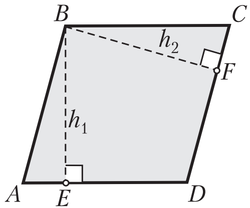


Рис. 4

Высота трапеции

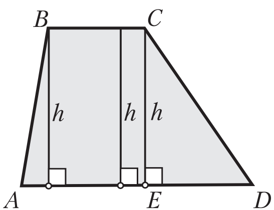


Рис. 5

Прямоугольник. Ромб. Квадрат

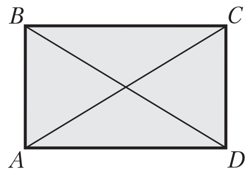


Рис. 6

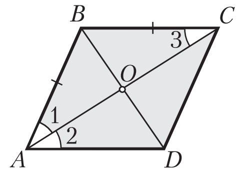


Рис. 7

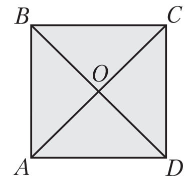


Рис. 8

1) Диагонали прямоугольника равны (рис. 6).

2) Диагонали ромба ________________ и являются биссектрисами его углов (рис. 7).

3) Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба (рис. 8).

Если в параллелограмме:

1) диагонали равны, то он является _______________________;

2) диагональ является биссектрисой его угла, то он является _____________;

3) диагонали перпендикулярны, то он является ________________.

ЗАНЯТИЕ 6

Конспект

<table>
<tr><th colspan="4">Площади фигур</th></tr>
<tr><th>Теоремы</th><th>Метод площадей</th><th></th><th>Ключевые задачи</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">1. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, ____________________________.

2. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

3. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, ___________________________.

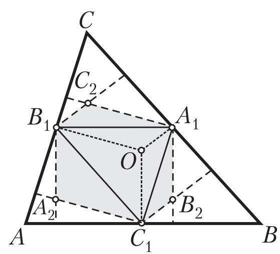
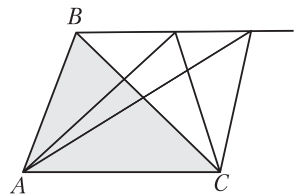
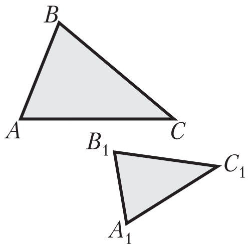
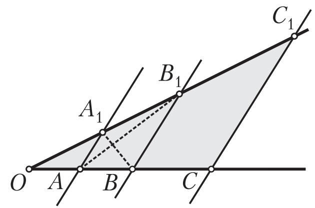
4. Площадь трапеции равна половине произведения высоты на сумму оснований.</td>
<td>1. Метод площадей состоит в том, что площадь фигуры используется для нахождения других элементов этой фигуры.</td>
<td></td>
<td>Задача 1. Мы знаем, что в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c высота h, проведенная к гипотенузе, находится по формуле $h=\frac{ab}{c}$. Докажите эту формулу методом площадей.
Р е ш е н и е. Выразим дважды площадь прямоугольного треугольника:
$$\left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}ab\\ S&=\frac{1}{2}ch\end{aligned}\right\}\Rightarrow ab=ch\Rightarrow h=\frac{ab}{c}.$$</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Площадь одной фигуры может использоваться для нахождения площади другой фигуры.</td>
<td>

Рис. 1</td>
<td>Задача 2. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника проведены перпендикуляры на две другие стороны (рис. 1). Найдите площадь Q ограниченного ими шестиугольника, если площадь треугольника равна S.
Ответ: $Q=\frac{1}{2}S$.</td>
</tr>
</table>

	3. Площадь может использоваться для доказательства параллельности или перпендикулярности отрезков.	 Рис. 2	**Задача 3.** Вершина B треугольника ABC перемещается так, что площадь его остается неизменной (рис. 2). Докажите, что вершина B перемещается по прямой, параллельной прямой AC.
	4. Площадь может использоваться также при доказательстве существования фигуры с некоторыми свойствами.		**Задача 4.** Пусть a, b и c — соответственно катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника, h — высота, проведенная к гипотенузе. Существует ли треугольник со сторонами h, $c+h$ и $a+b$? Если — да, то установите вид этого треугольника и найдите его площадь.

ЗАНЯТИЕ 8

Конспект 1

Определение	Теоремы и следствия	Доказательства
 Рис. 1 Два треугольника называются ***подобными***, если у них соответственные углы равны и соответственные стороны ________________ (рис. 1). Коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом подобия треугольников*.	 Рис. 2 **ОТФ и обратная теорема.** **1 (ОТФ).** Если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отношение двух отрезков, лежащих на одной стороне, равно отношению соответственных отрезков, лежащих на другой стороне (рис. 2). **2 (обратная теорема).** Если отношение любых двух отрезков, лежащих на одной стороне угла, равно отношению соответственных отрезков, лежащих на другой его стороне, то прямые, проведенные через соответственные концы отрезков, параллельны (см. рис. 2).	**1. Доказательство ОТФ.** 1) Воспользуемся методом площадей: учтем, что $S_{OBA_1} = S_{OB_1A}$. Тогда $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{S_{OAA_1}}{S_{OBA_1}} = \dfrac{S_{OAA_1}}{S_{OB_1A}} = \dfrac{OA_1}{OB_1}.$ 2)—3). Доказательство равенства 2) может быть проведено аналогичным образом с помощью метода площадей. Доказательство равенства 3) может быть сведено к равенству 1), если через точку A_1 провести прямую, параллельную OA. Возможно чисто алгебраическое доказательство равенств 2) и 3), сводя их к равенству 1) путем преобразования пропорций. **2.** Обратная теорема доказывается методом от противного.

Краткая запись ОТФ.

Дано: $AA_1 \parallel BB_1$.

Доказать:

1) $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA_1}{OB_1}$;

2) $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OA_1}{A_1B_1}$;

3) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

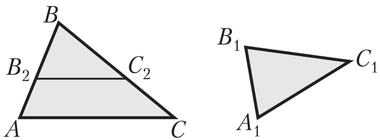
Замысел доказательства ОТФ. Воспользуемся методом площадей: тем, что отношение площадей треугольников, имеющих равные высоты, равно отношению сторон, к которым эти высоты проведены.

Следствия.

1. Прямая, параллельная некоторой стороне треугольника, отсекает от него подобный треугольник.

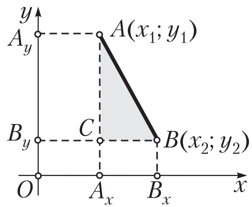
2. Если один треугольник подобен второму, а второй равен третьему, то первый подобен ______________.

Конспект 2

Признаки подобия треугольников	Доказательство 1-го признака	Ключевые задачи
 *1-й признак*. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между ними равны, то треугольники __________________: $\left(\frac{A_1B_!}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}=k, \angle A=\angle A_1\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. *2-й признак*. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники ____________________. *3-й признак*. Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого, то треугольники _______________.	1) Отложим на сторонах AB и AC (или на их продолжениях) отрезки AB_2 и AC_2, соответственно равные сторонам A_1B_1 и A_1C_1. Получим третий треугольник — ΔAB_2C_2 (см. рис.). Нетрудно видеть, что $\Delta AB_2C_2=\Delta A_1B_1C_1$; 2) $\left(\frac{A_1B_!}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}, AB_2=A_1B_1, AC_2=A_1C_1\right)\Rightarrow\frac{AB_2}{AB}=\frac{AC_2}{AC}$; 3) тогда по теореме, обратной обобщенной теореме Фалеса, $BC \parallel B_2C_2$; 4) по следствию 1 из предыдущего конспекта $\Delta ABC \backsim \Delta AB_2C_2$; 5) по следствию 2 из предыдущего конспекта $(\Delta ABC \backsim \Delta AB_2C_2$ и $\Delta AB_2C_2=$ $=\Delta A_1B_1C_1)\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.	**Задача 1.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике $h_c=\frac{ab}{c}$. **Задача 2.** Докажите, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, проведенной к гипотенузе, равен произведению отрезков, на которые гипотенуза делится высотой. **Задача 3.** Стороны параллелограмма равны a и b. Из одной его вершины проведены две высоты. Найдите одну из них, если вторая равна h.

ЗАНЯТИЕ 10

Конспект

<table>
<tr><th>Определения</th><th>Основные формулы</th><th>Координатный метод</th><th>Ключевые задачи</th></tr>
<tr>
<td>1) ось абсцисс;
2) ось ординат;
3) оси координат;
4) начало координат;
5) положительная полуось;
6) отрицательная полуось;
7) абсцисса точки;
8) ордината точки;
9) координаты точки;
10) четверти системы координат;
11) координатная плоскость;
12) уравнение фигуры;
13) уравнение прямой;
14) уравнение окружности.</td>
<td>
Рис. 1
$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$
$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$

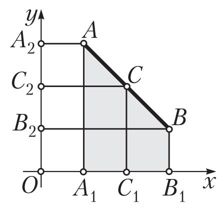
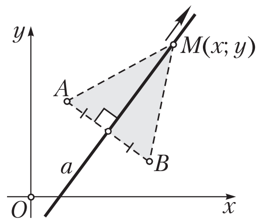
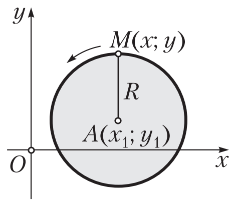



Рис. 2
$C(x;\ y)$
$x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\quad y=\dfrac{y_1+y_2}{2}.$</td>
<td>1) Строится чертеж;
2) выбирается удобное расположение осей системы координат;
3) записываются координаты данных точек (уравнения прямых, окружностей и других линий);
4) записывается условие и заключение задачи на координатном языке;
5) делается переход от условия задачи к заключению.</td>
<td>Задача 1. Координаты точки B противоположны одноименным координатам точки A. Докажите, что начало координат является серединой отрезка AB.
Задача 2. Даны точки $A(1;\ 5)$ и $B(6;\ 1)$. На координатных осях найдите точки, равноудаленные от точек A и B.
Задача 3. Даны точки $A(1;\ 5)$ и $B(6;\ 1)$. На оси абсцисс найдите точку X такую, что $XA=2XB$.</td>
</tr>
</table>

ЗАНЯТИЕ 11

Конспект

Определения	Основные формулы	Координатный метод	Ключевые задачи
1) уравнение фигуры; 2) уравнение прямой (рис. 1); 3) уравнение окружности (рис. 2).	 Рис. 1 $Ax+By+C=0\left(\begin{matrix}A\neq 0\\ \text{или } B\neq 0\end{matrix}\right)$ — **общее уравнение прямой**. $y=kx+b$ — **уравнение прямой с угловым коэффициентом** k.	1) Строится чертеж; 2) выбирается удобное расположение осей системы координат; 3) записываются координаты данных точек (уравнения прямых, окружностей, других линий); 4) записывается условие и заключение задачи на координатном языке; 5) делается переход от условия задачи к заключению.	**Задача 1.** Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 3)$ и $B(1; -5)$. **Задача 2.** Какую линию задает уравнение $(x-3)^2+(y+2)^2=$ $=4$? Постройте эту линию на координатной плоскости. **Задача 3.** Какую линию задает уравнение $x^2-6x+y^2=0$? Постройте эту линию на координатной плоскости. **Задача 4.** Запишите уравнение окружности с центром $A(4; 3)$, которая проходит через начало координат. **Задача 5.** Докажите, что окружность $x^2+y^2=9$ и прямая $y=\frac{1}{2}x+1$ пересекаются.

	 Рис. 2 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=R^2$ — **уравнение окружности с центром** $A(x_1; y_1)$ **и радиусом** R. $x^2+y^2=R^2$ — **уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом** R.		

ЗАНЯТИЕ 13

Конспект 1

<table>
<tr><th colspan="2">Понятие вектора. Равенство векторов</th></tr>
<tr><th>Определения</th><th>Ключевые задания</th></tr>
<tr><td>

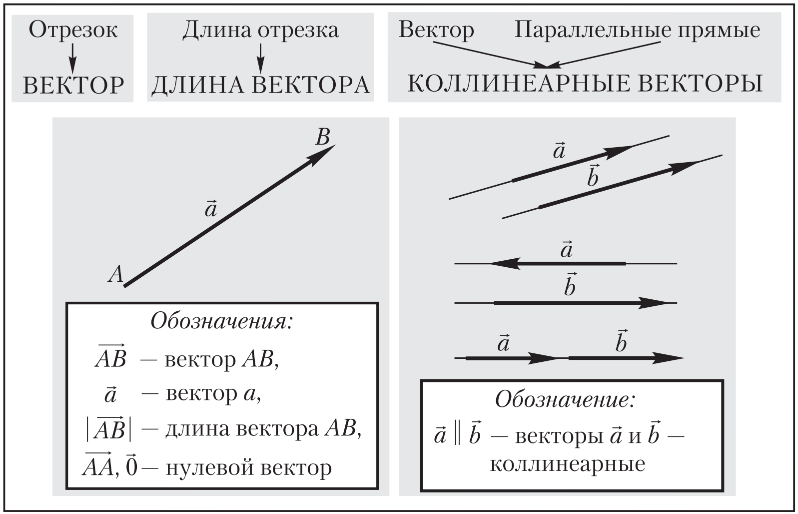


Рис. 1

</td><td>

Задача 1. Дано: $\overrightarrow{AB}(3; y)$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$. Найдите y.

Задача 2. Длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны 2, угол между этими векторами равен 60°. Найдите длину вектора $\overrightarrow{BC}$. Какой угол образует вектор $\overrightarrow{BC}$ с вектором $\overrightarrow{AC}$?

Задача 3. Какое наименьшее и наибольшее значения может принимать угол между двумя векторами?

Задача 4. Дан параллелограмм $ABCD$. Какой угол образуют векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, или ***вектором*** $\overrightarrow{AB}$ называется отрезок AB, для которого конец A считается первым, а конец B — ____________________.

Точка A называется *началом вектора*, точка B — его *концом* (рис. 1).

Длиной (модулем, абсолютной величиной) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB (см. рис. 1).

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец ________ ____________________.

Коллинеарными (параллельными) векторами называются два вектора, которые лежат на параллельных прямых (см. рис. 1).

Равными векторами называются два вектора, которые коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление (рис. 2).

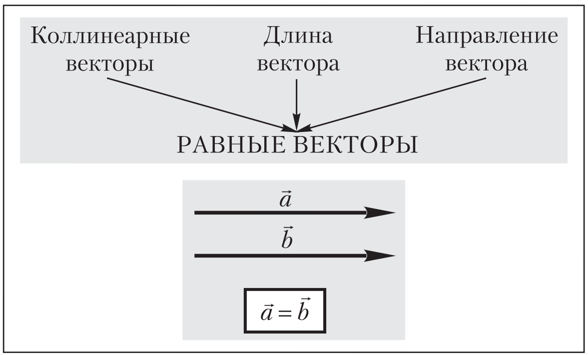
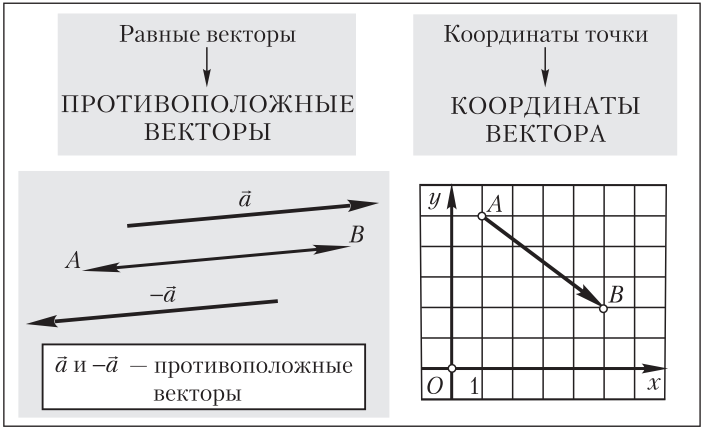


Рис. 2

Определения	**Ключевые задания**
Противоположными векторами называются два вектора $\vec{a}$ и $-\vec{a}$, если один из них равен вектору $\overrightarrow{AB}$, а другой — вектору $\overrightarrow{BA}$ (рис. 3).  Рис. 3 Если начало A имеет координаты x_1 и y_1, а конец B — координаты x_2 и y_2, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ называются ***координатами вектора*** $\overrightarrow{AB}$. Записывают: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ — вектор AB с координатами $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$. Пусть дан вектор $\vec{a}$ и некоторая точка A (рис. 4). Построим вектор $\overrightarrow{AB}$ так, чтобы он был равен вектору $\vec{a}$ (как выполнить эти построения?). В этом случае говорят, что ***вектор*** $\vec{a}$ ***отложили от точки*** A.	

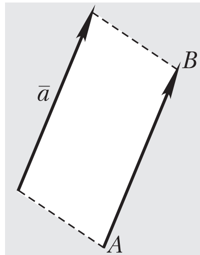
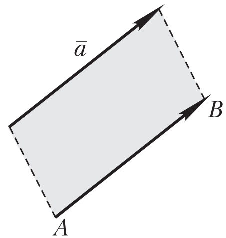
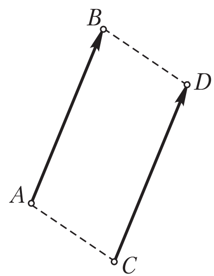


Рис. 4

Углом между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC. Если векторы имеют разные начала, то для построения угла между ними их нужно _______________.

Конспект 2

Доказательства свойств и признаков равенства векторов		
Теоремы: 1 (*об откладывании вектора*). Для любого вектора $\vec{a}$ и точки A существует, и притом единственный, вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 1).	 Рис. 1	**1.** Чтобы отложить вектор $\vec{a}$ от точки A, через точку A проведем прямую b, параллельную прямой, на которой лежит вектор $\vec{a}$. На прямой b существует единственная точка B, такая, что отрезок AB имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, и направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$. Тем самым доказаны существование и единственность вектора, удовлетворяющего условию теоремы.
2 (*1-е свойство равных векторов*). Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то четырехугольник $ACDB$ — параллелограмм (рис. 2).	 Рис. 2	**2.** По определению равенства двух векторов отрезки AB и CD параллельны, равны и направлены в одну сторону. Поэтому $ACDB$ — параллелограмм. Если векторы лежат на одной прямой, то $ACDB$ — также считается параллелограммом (вырожденным).

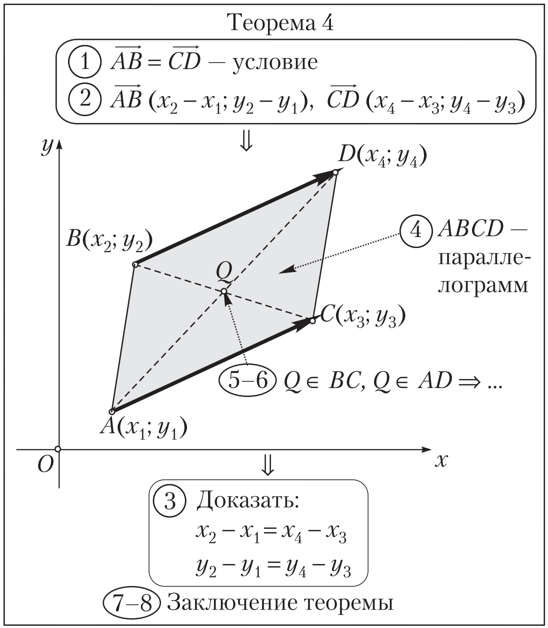
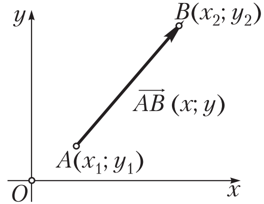
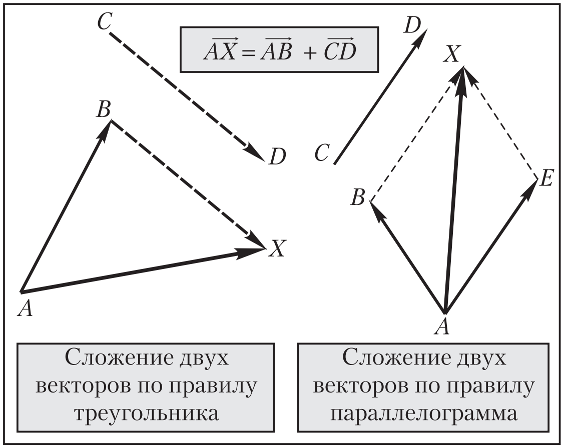
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>3 (признак равенства двух векторов). Если четырехугольник $ACDB$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.</td>
<td></td>
<td>3. Докажите самостоятельно.</td>
</tr>
<tr>
<td>4 (2-е свойство равных векторов). Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то эти векторы имеют равные
____
координаты (рис. 3).</td>
<td>

Рис. 3</td>
<td>4. 1) Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Докажем, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имеют равные одноименные координаты. Введем обозначения координат для точек: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$;
2) запишем координаты векторов:
$$\overrightarrow{AB}\,(x_2-x_1;\ y_2-y_1);$$
$$\overrightarrow{CD}\,(x_4-x_3;\ y_4-y_3);$$
3) нам надо доказать, что
$$x_2-x_1=x_4-x_3,\ \ y_2-y_1=y_4-y_3;$$
4) так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $ABDC$ — параллелограмм;
5) проведем в нем диагонали, обозначим через Q точку их пересечения;
6) по формулам координат середины отрезка (применяя их к диагоналям BC и AD) запишем:
$$Q\left(\frac{x_2+x_3}{2};\ \frac{y_2+y_3}{2}\right);$$
$$Q\left(\frac{x_1+x_4}{2};\ \frac{y_1+y_4}{2}\right);$$</td>
</tr>
</table>

		7) поэтому $\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{x_1+x_4}{2} \Rightarrow x_2-x_1=x_4-x_3$; $\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{y_1+y_4}{2} \Rightarrow y_2-y_1=y_4-y_3$.
5 (*координатный признак равенства двух векторов*). Если одноименные координаты у двух векторов равны, то эти векторы равны.		**5.** Доказательство для желающих (приведено в пособии для учащихся).
6 (*о длине вектора*). Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ с координатами x и y находится по формуле $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 4).	 Рис. 4	**6.** Докажите самостоятельно.

ЗАНЯТИЕ 14

Конспект 1

Сумма векторов		
Определения	**Теоремы**	**Доказательства**
 Рис. 1	**1** (*правило параллелограмма*). Для построения суммы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$. Построим параллелограмм $ABXE$ (рис. 1). Диагональ $\overrightarrow{AX}$ этого параллелограмма является суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AX}$. **2.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. **3.** $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. **4.** $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. **5.** $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. **6.** При сложении двух векторов их одноименные координаты _____ ________________. **7** (*обратная предыдущей*). Если координаты вектора $\vec{c}$ получаются как суммы одноименных координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.	**1.** По теореме 12.3, если $AEXB$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$. По определению суммы двух векторов: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{AX}$. **2—7.** Доказательства для желающих.

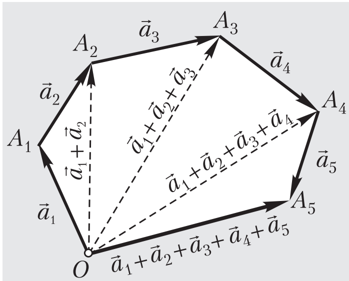
<table>
<tr><th>Определения</th><th>Теоремы</th><th>Доказательства</th></tr>
<tr><td>


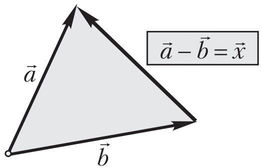
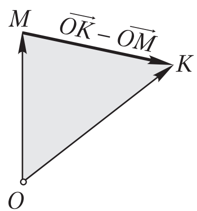
Рис. 2

Даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. От точки B отложим вектор $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{CD}$. Построим вектор $\overrightarrow{AX}$. Вектор $\overrightarrow{AX}$ называется *суммой векторов* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. *Сложение двух векторов таким способом называют* ***правилом треугольника***.

Под суммой $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$ понимают сумму $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)+\vec{a}_3$.

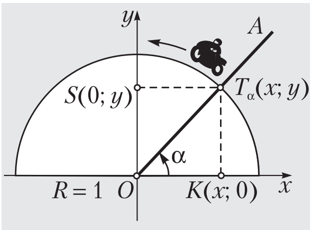
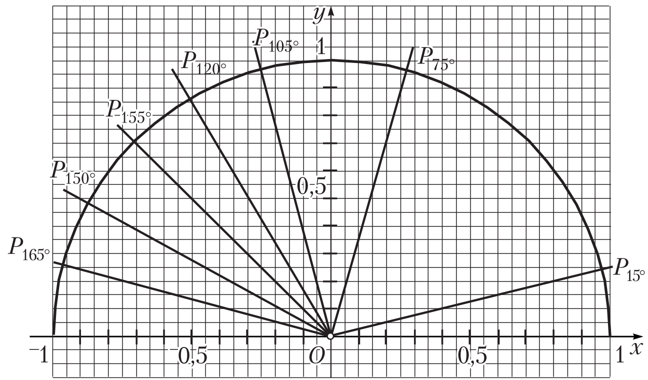
Под суммой $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4$ понимают сумму $(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3)+\vec{a}_4$ и т. д. (рис. 2).
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Конспект 2

Разность двух векторов			
Рисунки	**Определения**	**Следствия**	**Доказательства**
 Рис. 1  Рис. 2	*Разностью двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$ (рис. 1): $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}.$ **Замечание.** Обратите внимание, что вектор-разность «направлен» к тому вектору, из которого вычитают.	**1.** $\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MK}$ (рис. 2). **2.** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. **3.** $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ тогда и только тогда, когда координаты вектора $\vec{c}$ получаются вычитанием из ____________ ________________________.	**1.** Имеем: $\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{OK}.$ Поэтому $\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MK}.$ **2—3.** Доказательство для желающих (см. пособие для учащихся).

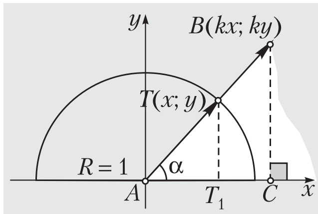
ЗАНЯТИЕ 20

Конспект

Определения	Следствия	Ключевые задачи
 Рис. 1 ***Косинус*** угла α — это абсцисса точки T_α (рис. 1). ***Тангенс*** угла α — это отношение ординаты точки T_α к ее абсциссе. ***Синус*** угла α — это ордината точки T_α (см. рис. 1). ***Котангенс*** угла α — это отношение абсциссы точки T_α к ее ординате. $\cos\alpha = x, \quad \sin\alpha = y,$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}.$	**1.** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$ **2.** $\cos\alpha, \sin\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$ не зависят от выбора системы координат.	 Рис. 2 **95.** а) С помощью рисунка 2 найдите косинус, синус, тангенс и котангенс угла, равного 15°, 75°, 105°, 120°, 135°. Какие закономерности в изменении значений тригонометрических функций можно заметить? б) Может ли точка T_α иметь координаты $\dfrac{8}{17}$ и $\dfrac{15}{17}$? Найдите значение тригонометрических функций угла α. в) Может ли точка T_α иметь координаты $\dfrac{7}{8}$ и $\dfrac{24}{25}$?

ЗАНЯТИЕ 21

Конспект

Теоремы	Доказательства
 Рис. 1 **Теоремы.** **1** (*основная теорема*). В прямоугольном треугольнике для острого угла: а) косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе; б) синус равен отношению противолежащего катета к гипотенузе; в) тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему; г) котангенс равен отношению прилежащего катета к __________________________.	**1.** *Замысел доказательства основной теоремы.* Воспользуйтесь следствием: прямая, пересекающая две стороны треугольника и параллельная третьей стороне, отсекает треугольник, подобный данному треугольнику (рис. 1). **Доказательство основной теоремы.** 1) $\Delta ABC \backsim \Delta ATT_1$ на основании следствия; 2) тогда $\frac{b}{c} = \frac{AC}{AB} = \frac{AT_1}{AT} = AT_1 = \cos\alpha,$ $\frac{a}{c} = \frac{BC}{AB} = \frac{TT_1}{AT} = TT_1 = \sin\alpha;$ 3) $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{a}{b}.$

Теоремы	Доказательства

2.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—

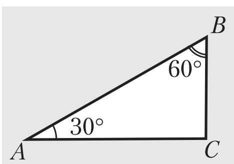


Рис. 2

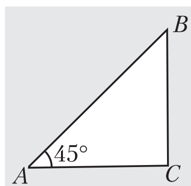


Рис. 3

1. $\angle \boldsymbol{A} = \mathbf{30}°$ (рис. 2). Имеем:

$$AB = c, \quad BC = \frac{c}{2}, \quad AC = \frac{c\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{ctg} 30° = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}.$$

2. $\angle \boldsymbol{B} = \mathbf{60}°$ (см. рис. 2). Имеем:

$$AB = c, \quad BC = \frac{c}{2}, \quad AC = \frac{c\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

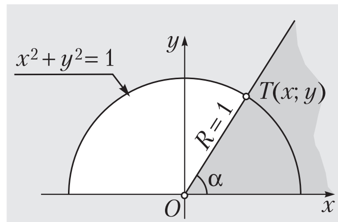
3. $\angle \boldsymbol{A} = \mathbf{45}°$ (рис. 3). Учтем, что треугольник ABC — равнобедренный. Пусть $AC = BC = a$, $AB = a\sqrt{2}$. Тогда

$$\cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1; \quad \operatorname{ctg} 45° = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

ЗАНЯТИЕ 23

Конспект

Теоремы	Доказательства
1 (*основное тригонометрическое тождество*): $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$ **2** (*формулы приведения*): $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ при $0°\le\alpha\le 90°$, (1) $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ при $0°\le\alpha\le 90°$, (2) $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ при $0°\le\alpha\le 180°$, (3) $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ при $0°\le\alpha\le 180°$. (4)	**1.** Для точки $T(x; y)$ единичной полуокружности (рис. 1) выполняется равенство $x^2+y^2=1$ (на основании уравнения окружности, или формулы расстояния, или формулы длины вектора).  Рис. 1 Имеем: $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=1\\ \cos\alpha=x\\ \sin\alpha=y\end{array}\right\}\Rightarrow\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$ **2.** *Замысел доказательства формул* (1) и (2). Рассмотрите прямоугольный треугольник ABC (рис. 2) и примените теорему 1 (основную теорему).

<table>
<tr><th>Теоремы</th><th>Доказательства</th></tr>
<tr><td></td><td>

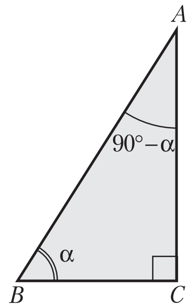


Рис. 2

Из прямоугольного треугольника ABC по теореме 1 имеем:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{BC}{AB} = \sin\alpha;$$

$$\sin(90° - \alpha) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \cos\alpha.$$

Замысел доказательства формул (3) и (4). Рассмотрите $\angle BOA = \alpha$, $\angle B_1OA_1 = \alpha$ и $\angle BOA_1 = 180° - \alpha$. Возьмем систему координат xOy, отложим $\angle BOA = \alpha$, $\angle B_1OA_1 = \alpha$ (рис. 3).

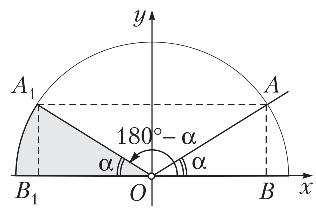


Рис. 3

Тогда $\angle BOA_1 = 180° - \alpha$. Имеем:

$$\cos(180° - \alpha) = -OB_1 = -OB = -\cos\alpha,$$

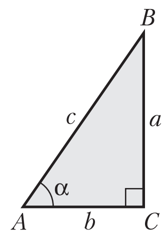
$$\sin(180° - \alpha) = A_1B_1 = AB = \sin\alpha.$$

</td></tr>
</table>

ЗАНЯТИЕ 24

Конспект

Решение прямоугольных треугольников (основные случаи)



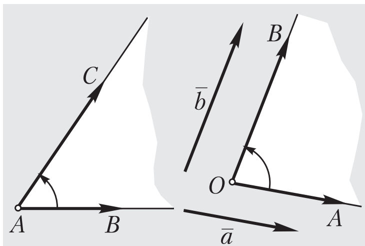
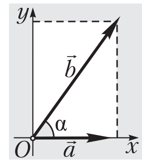
1. Дана гипотенуза c и один из острых углов α. Найдите второй острый угол и катеты.	1) Пусть $\angle A = \alpha$ (см. рис.). Тогда $\angle B = 90° - \angle A = 90° - \alpha$; 2) так как $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, то $a = c\sin\alpha$; 3) второй катет можно вычислить различными способами: а) так как $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c\cos\alpha$; б) по теореме Пифагора: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

2. Даны катет a и один из острых углов α. Найдите второй острый угол, гипотенузу и второй катет.	1) Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда (как и выше) $\angle B = 90° - \alpha$; 2) так как $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, то $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; 3) так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, то $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.
3. Даны два катета a и b. Найдите гипотенузу и острые углы.	1) По теореме Пифагора: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; 2) зная катеты, найдем $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ (а по таблице или с помощью микрокалькулятора, когда даны числовые значения величин, найдем $\angle A$); 3) после этого $\angle B =$ ________________.

1. *Катет, прилежащий к углу* α, *равен произведению* __________________ *на* $\cos\alpha$;
2. *Катет, противолежащий углу* α, *равен произведению* __________________ *на* $\sin\alpha$;
3. *Катет, противолежащий углу* α, *равен произведению второго катета на* $\operatorname{tg}\alpha$;
4. *Гипотенуза равна катету, деленному на синус противолежащего этому катету угла*;
5. *Гипотенуза равна катету, деленному на косинус прилежащего этому катету угла.*

ЗАНЯТИЕ 28

Конспект

Определения	Вспомогательная задача	Теорема. Следствие	Доказательство
$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$  Рис. 1 *Углом между векторами* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AC}$ называется угол BAC (рис. 1). *Углом между произвольными векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется угол между векторами $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.	Дана прямоугольная система координат xOy и вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\angle AOx=\alpha$. Выразите координаты вектора $\vec{a}\,(x;\,y)$ через его длину $\lvert\vec{a}\rvert$ и тригонометрические функции угла α. *Ответ*: $x=\lvert\vec{a}\rvert\cos\alpha$, $y=\lvert\vec{a}\rvert\sin\alpha$.	 Рис. 2 **Теорема.** Теорема *о геометрическом смысле скалярного произведения двух векторов*: $\vec{a}\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\alpha$ (рис. 2). **Следствие.** Угол между векторами $\vec{a}\,(x_1;\,y_1)$ и $\vec{b}\,(x_2;\,y_2)$ находится по одной из следующих формул: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}=$ $=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$	**Доказательство** 1) Расположим оси системы координат таким образом, чтобы проще было найти координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а значит, само скалярное произведение этих векторов; 2) имеем: $\vec{a}\,(\lvert\vec{a}\rvert;\,0)$, $\vec{b}\,(\lvert\vec{b}\rvert\cos\alpha;\,\lvert\vec{b}\rvert\sin\alpha)$; 3) $\vec{a}\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\alpha+$ $+0\cdot\lvert\vec{b}\rvert\sin\alpha=$ $=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\alpha.$

Приложение 2. Программа факультативных занятий

Пояснительная записка

Актуальность факультативных занятий по математике

Овладение практически любой современной профессией требует определенных знаний по математике. С математикой тесно связана и «компьютерная грамотность», широкое распространение которой стало отличительной чертой нашего времени. Математические знания — необходимая часть общей культуры, средство всестороннего развития личности. В школе математика является опорным предметом, обеспечивающим изучение на должном уровне как естественных, так и гуманитарных дисциплин. Необходимо отметить, что математика — это профилирующий предмет на вступительных экзаменах в вузы по широкому спектру специальностей. Наряду с теми, кто поступает на математические факультеты и в технические вузы, вступительные экзамены по математике (централизованное тестирование) сдают будущие физики, химики, биологи, врачи, психологи, экономисты.

Как и в прежние годы, современная школа призвана решать две тесно связанные друг с другом задачи: с одной стороны, обеспечить овладение учащимися твердо установленным и четко очерченным минимальным объемом знаний и умений, необходимых каждому члену нашего общества, с другой — создать условия для дополнительного изучения школьного курса математики тем, кто проявляет интерес и склонность к данному предмету. Свой вклад в решение этих задач призваны сделать факультативные занятия, которые по определению являются **необязательной, дополнительной формой обучения, выбираемой учащимися по их желанию**.

Общие цели и задачи факультативных занятий по математике

В настоящее время ведется интенсивная разработка и корректировка нормативного и учебно-методического обеспечения математического образования *в условиях современной образовательной среды* общеобразовательных учреждений для *повышения качества обучения* предметам естественно-математического цикла с учетом запросов и потребностей общества. Частью этой разработки является создание методических материалов для организации и проведения факультативных занятий по предметам естественно-математического цикла в условиях современной образовательной среды.

Основной задачей факультативных занятий является создание максимально благоприятных условий для интеллектуального развития учащихся в соответствии с их интересами, целями, способностями и потребностями. На факультативных занятиях учащиеся имеют возможность прежде всего улучшить знания, получаемые на уроках по основному курсу, приобрести более прочные умения решать математические задачи. Ввиду существенного повышения роли факультативов на их проведение отводится пять лет (7—11 классы).

Изучение потребностей практики обучения показало, что наибольшую пользу факультативные занятия приносят, если они используются **для дополнения, расширения и коррекции знаний учащихся по основному курсу**, решения задач повышенной трудности, использования различных форм кружковой работы.

Факультативный курс «Геометрия: многообразие идей и методов» является своего рода **сопровождением базового и повышенного курсов, посильно расширяя и дополняя эти курсы**. В содержании данного факультативного курса с учетом рамок базового и повышенного курсов делается больший **акцент на математические методы**, являющиеся основным инструментом изложения теории и решения задач.

Каждая тема факультативного курса непосредственно связана с материалом общеобразовательного курса математики. При этом программа предусматривает достижение двоякой цели: во-первых, довести изучаемый материал до того уровня, на котором учащемуся становится ясным его принципиальная математическая важность, до известной степени завершенности; во-вторых, показать непосредственные связи школьной математики с наукой и ее приложениями.

Материал курса не дублирует вузовские программы, но в целом ряде случаев позволяет с общих позиций взглянуть на школьную математику и подчеркнуть единство предмета и метода математической науки. Поэтому важно в рамках данного факультативного курса не идти от вузовских курсов, адаптируя их к школьникам, а показывать, каким образом из материала школьного курса математики возникают общие концепции, обладающие теоретической и прикладной ценностью, которые впоследствии сыграют роль своего рода пропедевтики для изучения вузовских курсов математики.

Факультативный курс «Школьная геометрия: многообразие идей и методов» содержит разнообразные темы как теоретического, так и прикладного плана. Предполагается, что в процессе занятий будет показана история возникновения ряда изучаемых методов, концепций и идей, их значение для математики, для других наук и областей практической деятельности.

В предлагаемом факультативном курсе развитие содержания обеспечивается путем раскрытия **многообразия идей и методов школьной геометрии, решения содержательных задач**. На теме занятиях учащимся будут предлагаться задачи занимательного характера, исторические сведения. Учащиеся получат возможность выступить с лекцией, провести под руководством учителя экскурсию на интересующее их предприятие или в учебное заведение, подготовить и сделать доклад по выбранной теме. Надеемся, что такой факультатив окажется интересным и полезным и тем учащимся, которые не проявляют специального интереса и склонности к занятиям математикой, но хотят расширить свой кругозор.

На *первом этапе* (7—9 классы) особое внимание следует уделить формированию устойчивого познавательного интереса к предмету, выявлению и развитию математических способностей учащихся. Обучение на *втором этапе* (10—11 классы) должно обеспечить подготовку к поступлению в вуз, продолжению образования и к профессиональной деятельности, требующей глубоких и прочных знаний, умений и навыков, высокой математической культуры.

Образовательные цели факультативных занятий: ознакомление учащихся с основными математическими методами в процессе изучения геометрических фигур и их свойств, систематизация и углубление знаний об измерении геометрических величин, углубленное изучение геометрических построений и преобразований, координат и векторов, приобретение умений и навыков в решении задач повышенной сложности.

Основным является традиционное содержание. К ведущим *содержательным линиям данного факультативного курса* относятся: геометрические фигуры и их свойства; измерение геометрических величин; геометрические построения и преобразования; координаты и векторы, в 7 классе — признаки равенства треугольников, признаки и свойства параллельных прямых, теоремы о сумме углов треугольника и Пифагора. Наибольшее внимание уделяется изучению именно этого материала, который связывается с практикой решения содержательных геометрических задач, с решением задач повышенной сложности.

Факультативный курс начиная с 7 класса представлен систематическим построением планиметрии, предусматривающим: знакомство учащихся с аксиомами геометрии, систематическое изучение теории перпендикулярных и параллельных прямых, треугольников и геометрических построений.

Акцент при этом делается на раскрытие математических идей и методов школьной геометрии. Осуществляется это не только и не столько путем рефлексии, проводимой в заключение изучения того или иного материала. Реализуемый в данном факультативном курсе методический подход состоит в том, что математический метод обозначается в начале его применения, с тем расчетом, чтобы сделать его в руках учащихся эффективным средством изучения теоретического материала и решения задач. Своевременное осознание математических методов облегчает целостное, системное восприятие учебного материала, способствует реализации принципа сознательности.

Развивающие цели факультативных занятий:

• развитие познавательного интереса;

• развитие логического мышления, наблюдательности, воображения, математической интуиции, математической речи;

• развитие умственных способностей: гибкости, критичности и глубины ума, самостоятельности и широты мышления, памяти, способности к цельности восприятия, генерированию идей, укрупнению информации и др.;

• формирование исследовательских навыков применения методов научного познания: анализа и синтеза, абстрагирования, обобщения и конкретизации, индукции и дедукции, классификации, аналогии и моделирования и др.;

• развитие общих учебных умений: постановки учебной цели, выбора средств ее достижения, структурирования информации, выделения главного и т. д.

Воспитательные цели факультативных занятий:

• формирование мировоззренческих представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о роли математики и ее методов в общественном прогрессе;

• развитие и углубление познавательного интереса к математике, стимулирование самостоятельности учащихся в изучении теоретического материала и решении задач повышенной сложности, создание ситуаций успеха по преодолению трудностей, воспитание трудолюбия, волевых качеств личности;

• стимулирование исследовательской деятельности учащихся, активного участия их во внеклассной работе по математике, в математических олимпиадах;

• воспитание нравственных качеств личности: настойчивости, целеустремленности, творческой активности и самостоятельности, трудолюбия и критичности мышления, дисциплинированности, способности к аргументированному отстаиванию своих взглядов и убеждений;

• эстетическое воспитание (раскрытие красоты математической теории, совершенства математического доказательства, точности в постановке математической задачи, рациональности ее решения, раскрытие связи курса математики с архитектурой, живописью, музыкой, скульптурой).

Дидактическая основа организации факультативных занятий. В основу теоретического обоснования и практических разработок нормативного и учебно-методического обеспечения математического образования положен *средовый подход*, разрабатываемый Национальным институтом образования. При реализации средового подхода образовательное содержание учебного предмета *не передается учащимся напрямую*. Каждый обучаемый конструирует и создает в результате деятельности внутреннее содержание образования, отличающееся от внешне заданного с учетом его возможностей и потребностей в ходе разнообразной учебной деятельности, коллективной коммуникации, сопоставления полученных результатов с культурно-историческими аналогами и другими аспектами. Возможности средового подхода расширяются в связи с созданием учебно-методических комплексов нового поколения, предусматривающих включение *электронных учебных изданий и средств обучения*.

Средовый подход рассматривается как общая дидактическая основа организации обучения в современной общеобразовательной школе, повышения качества знаний. В противовес технократическому подходу акцент в построении содержания обучения на факультативных занятиях должен быть сделан на *усвоение идей и методов математики, непосредственно связанных со школьным курсом, обеспечивающих его развитие*.

Наиболее массовой и доступной составляющей средового подхода, дополнительного изучения математики являются факультативные занятия.

Организация учебно-воспитательного процесса на факультативных занятиях. Она должна предусматривать:

• *различные организационные формы*: использование внутренней дифференциации и индивидуализации обучения; уроков-лекций, уроков крупноблочного, обзорного изложения теоретического материала с последующей самостоятельной его проработкой, уроков-практикумов, уроков коллективного исследования, уроков с использованием электронных средств обучения; различных форм внеклассной работы по математике;

• *организацию дидактического цикла с учетом особенностей дополнительного обучения*. Рекомендуется такая последовательность звеньев дидактического цикла: опережающее крупноблочное изучение теоретического материала (при этом рекомендуется избегать прямого дублирования учебного материала основного курса, делая упор на обзор, систематизацию, коррекцию знаний учащихся, подчеркивание элементов новизны, своевременное ознакомление учащихся с математическими методами, формирование навыков использования математических методов в качестве инструмента построения теоретического материала и решения задач); решение ключевых задач всех уровней сложности; организация фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся по решению задач; выполнение самостоятельных работ, в том числе и работ исследовательского характера;

• *учет особенностей системы математических задач и упражнений*, которая в пособиях для факультативных занятий является, как правило, избыточной относительно фронтальной формы работы. Часть задач, избыточная относительно фронтальной формы работы, предназначена для организации самостоятельной групповой и индивидуальной работы;

• *развивающее обучение* (обеспечение оптимально возможного уровня трудности и темпа обучения, доступного учащимся; обеспечение внутренней дифференциации обучения, сочетание фронтальной, групповой и индивидуальной работы учащихся);

• *использование проблемных методов обучения*, обучение учащихся эвристическим приемам решения задач, использование доказательства в целях обнаружения теорем, выработка общих учебных умений по отысканию замысла решения задачи, составлению плана решения задачи;

• *сбалансированное выделение времени на изучение теоретического материала и решение задач* (с учетом общего сравнительно небольшого количества часов рекомендуется примерно 1/2 учебного времени выделять на изучение теории (сюда относится и разбор примеров решений задач, приводимых в теоретической части пособия для учащихся) и столько же — на решение задач из раздела «Задания для самостоятельной работы»);

• *повышение роли самостоятельной работы учащихся* по изучению теоретического материала и решению задач (систематическая самостоятельная работа с учебной и научно-популярной литературой);

• *систематическое решение содержательных геометрических задач, в том числе задач повышенной сложности*, используя при этом различные приемы: руководство и помощь со стороны учителя, коллективный разбор и решение задач повышенной трудности, опора на наиболее способных учащихся класса, использование исследовательских заданий для группы учащихся на сравнительно продолжительный срок;

• *использование компьютерной технологии обучения*;

• *использование опыта учителей-новаторов*;

• *стимулирование внеклассной работы* учащихся, тесное увязывание ее с факультативным занятием.

7 КЛАСС

Содержание обучения

Выбор тем, как правило, совпадает с выбором, осуществляемым на базовом уровне обучения.

1. Как строится геометрия: главная идея

Аксиомы, определения и теоремы: кому и зачем они нужны?

Аксиомы прямой и расстояния. Что можно определить с их помощью?

Аксиомы полуплоскости и луча. Их возможности в построении геометрии.

Проблема Жордана.

Аксиомы измерения и откладывания углов. Почему угол не может быть больше 180°?

Смежные и вертикальные углы: «не совсем очевидное и не совсем вероятное».

Центральный угол окружности. Почему центральный угол окружности может быть больше 180°?

Метод равных треугольников — исторически первый геометрический метод.

Основная цель — заложить первоначальные представления о методе построения школьной геометрии, о логическом строении геометрии, выработать первоначальные умения применять метод равных треугольников при решении задач, систематизировать знания учащихся об основных геометрических фигурах.

Разъясняется смысл и назначение аксиом принадлежности, расстояния и порядка, измерения и откладывания углов, равенства треугольников, параллельности прямых.

Особое внимание уделяется методу равных треугольников — задачам на доказательство равенства треугольников и их элементов, на вычисление длины отрезков и градусной меры углов.

2. Как метод равных треугольников применяется при изложении вопросов перпендикулярности и параллельности прямых

Метод равных треугольников и перпендикулярные прямые.

Как признаки помогают отличить одно понятие от другого?

Признаки параллельных прямых.

Аксиома параллельных прямых и трудный путь ее становления.

Четырехугольник Саккери.

Свойства параллельных прямых: нужна аксиома параллельности!

Разрешимость проблемы Саккери.

Геометрические взаимосвязи: связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых.

Теорема Фалеса — пик применений метода равных треугольников.

Основная цель — познакомить учащихся с применением метода равных треугольников в новых условиях, выработать навыки применения метода равных треугольников к решению задач различной сложности, в том числе — сформировать первоначальные умения в решении задач повышенной сложности, систематизировать свойства перпендикулярных и параллельных прямых, признаки параллельности прямых, сведения о теореме Фалеса, о теоремах, устанавливающих связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых.

3. Треугольник — основная геометрическая фигура

Необходимость доказательства теорем. Знаменитая теорема о сумме углов треугольника. Внешний угол треугольника.

Неутомимые труженики в геометрии: равнобедренный и равносторонний треугольники.

Что такое средняя линия треугольника.

Дальнейшее развитие метода равных треугольников — прямоугольный треугольник.

Две замечательные теоремы: о катете, лежащем против угла в 30°, и медиане, проведенной к гипотенузе.

Первые геометрические неравенства: неравенства треугольника.

Заключительные планиметрические аксиомы — аксиомы площади .

Второй (вычислительный) геометрический метод: теорема Пифагора и обратная теорема.

Решение задач с помощью теоремы Пифагора.

Основная цель — показать дальнейшее развитие метода равных треугольников и познакомиться с двумя новыми геометрическими методами: методом, основанным на применении теоремы Пифагора, и методом площадей, систематизировать и дополнить знания учащихся о свойствах треугольников, разъяснить назначение аксиом измерения площадей, выработать навыки решения основных задач, связанных с различными видами треугольников, научить пользоваться теоремой Пифагора и обратной теоремой.

Доказательства теорем, которые рассматриваются в основном курсе, как правило, опускаются. Введением аксиом площади заканчивается ознакомление учащихся с аксиомами планиметрии. Осуществляется первоначальное знакомство с методом площадей.

4. Конструктивные методы в геометрии: задачи на построение

Основные задачи на построение циркулем и линейкой.

Примеры более сложных задач на построение.

Пример задачи, не разрешимой с помощью циркуля и линейки.

Основная цель — познакомить учащихся с конструктивными методами геометрии, и прежде всего с одним из основных таких методов — методом геометрических мест точек.

Вводится схема решения задач на построение, систематизируются сведения о решении основных задач на построение. Приводятся примеры более сложных задач на построение треугольников. Вырабатывается первоначальный навык решения задач на построение методом геометрических мест точек.

5. Повторяем, систематизируем, обновляем

Понятие об аксиоматическом методе.

Метод равных треугольников.

Теорема Пифагора. Площади некоторых фигур.

Метод геометрических мест точек в задачах на построение.

Основная цель — углубить навыки применения различных математических методов решения задач по курсу геометрии 7-го класса.

Ожидаемые результаты обучения

Качественная оценка результатов обучения должна исходить из определенных требований к уровню математической подготовки учащихся и учитывать динамику этого уровня, обеспечиваемую факультативными занятиями.

Примерные требования

Геометрические фигуры и их свойства

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать знания о математических методах, используемых при изучении геометрических фигур и их свойств;

• получить и углубить представление о роли аксиом, определений и доказательств в построении геометрии, о методе от противного;

• получить представление о строгих доказательствах (их точности, общности, объективности), уметь проводить доказательства повышенной сложности: доказательства признаков равенства треугольников, теоремы о единственности прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную к данной прямой, признака параллельности прямых, теоремы Фалеса;

• научиться применять метод равных треугольников в различных ситуациях;

• приобрести навык решения геометрических задач повышенной сложности;

При этом учащиеся должны:

• знать и правильно использовать геометрические термины;

• уметь изображать геометрические фигуры на чертеже;

• уметь формулировать определения понятий:

а) отрезка, угла, треугольника, равных отрезков (углов, треугольников);

б) прямого, острого и тупого угла, биссектрисы угла;

в) перпендикулярных и параллельных прямых;

• знать и уметь доказывать теоремы:

а) о сумме смежных углов и равенстве вертикальных углов;

б) о свойствах точек серединного перпендикуляра к отрезку и биссектрисы угла;

в) о признаках и свойствах параллельных прямых;

г) о сумме углов треугольника, о свойствах и признаках равнобедренного треугольника; о средней линии треугольника; о признаках равенства прямоугольных треугольников;

д) о катете, лежащем против угла в 30°, и медиане, проведенной к гипотенузе;

е) о неравенстве треугольника;

• уметь решать нестандартные геометрические задачи.

Измерение геометрических величин

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать знания о математических методах, используемых при изучении вопросов измерения геометрических величин (расстояние между двумя точками, длина отрезка, градусная мера угла, площадь многоугольника).

При этом учащиеся должны:

• знать свойства расстояния между двумя точками, длины отрезка, градусной меры угла, площади многоугольника;

• уметь доказывать и применять при решении задач теорему Пифагора, формулы площади прямоугольного треугольника и прямоугольника, теорему об измерении центрального угла окружности.

Геометрические построения

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать сведения о методах решения задач на построение;

• приобрести навык в проведении: а) поиска решения задач на построение; б) построений с помощью циркуля и линейки; в) доказательства правильности построений; г) исследования решения задачи.

При этом учащиеся должны:

• понимать смысл терминов: задача на построение, условие и требование задачи, этапы решения задачи (анализ, построение, доказательство, исследование);

• уметь решать основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки;

• познакомиться с основными методами решения задач на построение, прежде всего с методом ГМТ.

Рекомендуемая литература

Основная

1. Журнал «Матэматыка: праблемы выкладання», 1998—2010.

2. Журнал «Математика в школе», 1998—2010.

3. Журнал «Квант». — М. : Наука, 1970—2010.

4. Задачи областных и республиканских математических олимпиад школьников 1992—1993 гг. / Е. А. Барабанов, В. И. Берник, И. И. Воронович, С. А. Мазаник. — Могилев : Прогресс, 1993.

5. *Прасолов, В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М. : Наука, 1986. — Ч. 1, 2.

6. *Прасолов, В. В.* Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1989.

7. *Рогановский, Н. М.* Геометрия : учеб. пособие для 8 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2005.

8. *Рогановский, Н. М.* Элементарная математика. В 4-х частях. Ч. III: Геометрия на плоскости / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2003.

9. Серия «Библиотека математического кружка». — М. : Наука.
10. *Тавгень, О. И.* Математика в задачах. Теория и методы решений / О. И. Тавгень, А. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2005.
11. *Шарыгин, И. Ф.* Задачи по геометрии: планиметрия / И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1986.

Дополнительная

12. *Бахтина, Т. П.* Математика : пособие для поступающих в Лицей БГУ / Т. П. Бахтина, И. И. Воронович, Д. В. Синькевич. — Минск : Изд. центр БГУ, 2002.
13. *Березин, В. Н.* Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике: кн. для учителя / В. Н. Березин, Л. Ю. Березина, И. Л. Никольская. — М. : Просвещение, 1985.
14. *Будак, А. Б.* Элементарная математика: руководство для поступающих в МГУ / А. Б. Будак, Б. М. Щедрин. — М. : Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996.
15. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 кл. : учеб. пособие для учащихся школ и классов с углуб. изуч. математики / Л. С. Атанасян [и др.]. — 4-е изд. — М. : Вита-Пресс, 2002.
16. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе : VII—VIII классы / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982.
17. *Градштейн И. С.* Прямая и обратная теоремы / И. С. Градштейн. — М. : Наука, 1965.
18. Дополнительные главы по курсу математики : учеб. пособие по факультативному курсу для учащихся 7—8 классов / сост. К. П. Сикорский. — М. : Просвещение, 1974.
19. *Кокстер, Г. С. М.* Новые встречи с геометрией / Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер. — М. : Наука, 1978.
20. *Костовский, А. Н.* Геометрические построения одним циркулем / А. Н. Костовский. — М. : Наука, 1984.
21. *Курант, Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. — М. : Просвещение, 1967.
22. *Литцман, В.* Теорема Пифагора / В. Литцман. — М. : Физматгиз, 1960.
23. *Лоповок, Л. М.* Факультативные задания по геометрии для 7—11 классов / Л. М. Лоповок. — Киев : Радянська школа, 1990.
24. *Морозова, Е. А.* Международные математические олимпиады / Е. А. Морозова, И. С. Петраков. — М. : Просвещение, 1967.

25. *Нагибин, Ф. Ф.* Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. — М. : Просвещение, 1988.

26. *Нестеренко, Ю. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехнин, М. К. Потапов. — М. : Факториал, 1995.

27. *Радемахер, Г.* Числа и фигуры : Опыты математического мышления / Г. Радемахер, О. Теплиц. — М. : Физматгиз, 1962.

28. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман. — М. : Просвещение, 1965.

29. *Смогоржевский, А. С.* Линейка в геометрических построениях / А. С. Смогоржевский. — М. : Наука, 1984.

30. *Стройк, Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. — М. : Наука, 1984.

31. Факультативный курс : Избранные вопросы математики. — М. : Просвещение, 1978.

32. *Юшкевич, А. П.* История математики в средние века / А. П. Юшкевич. — М. : Физматгиз, 1961.

8 КЛАСС

Содержание обучения

Выбор тем в 8 классе, как правило, совпадает с распределением тем на базовом уровне обучения. Однако в 8 классе имеются определенные отступления, вызванные отсутствием на базовом уровне темы о векторах и сравнительно кратким изложением темы о координатах.

1. Многоугольники: содружество геометрических методов. Начала метода подобия

Теорема Пифагора и расстояния.

Свойства биссектрисы угла. Касательная к окружности.

Виды четырехугольников. Параллелограмм.

Прямоугольник. Ромб. Квадрат.

Трапеция.

Новые применения метода площадей: основные формулы площади, обобщенная теорема Фалеса.

Череда методов: обобщенная теорема Фалеса и новый геометрический метод — метод подобия.

Основная цель — расширить и систематизировать знания о математических методах, применяемых при изложении вопросов о четырехугольниках и их свойствах. Рассматриваются основные виды четырехугольников, доказываются их свойства и признаки. Вырабатывается навык решения задач, связанных с четырехугольниками. Широкое применение находят традиционные методы (признаки равенства треугольников, признаки и свойства параллельных прямых, теорема о сумме углов треугольника и т. д.). Проводится дальнейшее ознакомление с методом площадей.

2. Координатный и векторный методы — окно в мир современной математики

Основные формулы координатной геометрии.

Уравнения прямой и окружности.

Понятие вектора. Равенство векторов.

Сложение и вычитание векторов.

Умножение вектора на число.

Признак коллинеарности двух векторов. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

Скалярное произведение двух векторов.

Применение координатного и векторного методов к решению задач.

Основная цель — познакомить учащихся с координатным и векторным методами и сформировать первоначальные навыки их применения при решении задач.

Вводится прямоугольная система координат, формулы расстояния между двумя точками и координат середины отрезка. Координатный метод используется при изучении взаимного расположения прямой и окружности.

3. Тригонометрический метод: решение прямоугольных треугольников

Тригонометрические функции.

Формулы, связывающие стороны и углы прямоугольного треугольника.

Развитие тригонометрического метода требует новых формул: основное тригонометрическое тождество, формулы приведения.

Применение тригонометрического метода при решении прямоугольных треугольников (основные случаи).

Применение тригонометрического метода к решению более сложных задач.

Геометрический смысл скалярного произведения двух векторов.

Основная цель — познакомить учащихся с тригонометрическим методом и его применениями при изложении теоретического материала и решении задач; ввести тригонометрические функции углов от 0° до 180°, выработать умения решать основные задачи, связанные с прямоугольным треугольником.

Тригонометрические функции вводятся для углов от 0° до 180°. Доказываются основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Особое внимание уделяется задачам на решение прямоугольного треугольника и задачам, сводимым к ним.

Ожидаемые результаты обучения

Качественная оценка результатов обучения должна исходить из определенных требований к уровню математической подготовки учащихся и учитывать динамику этого уровня, обеспечиваемую факультативными занятиями.

Примерные требования

Геометрические фигуры и их свойства

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать более широкий круг знаний, связанных с геометрическими фигурами и их свойствами;

• получить новые и развить имеющиеся представления о роли аксиом, определений и доказательств в построении геометрии, о методе от противного;

• получить представление о строгих доказательствах, уметь проводить доказательства с помощью различных математических методов;

• научиться применять признаки равенства треугольников в новых ситуациях;

• приобрести навык решения геометрических задач повышенной сложности;

• приобрести навык решения задач на комбинацию геометрических фигур (треугольников, четырехугольников, окружности).

При этом учащиеся должны:

• знать и правильно использовать геометрические термины;

• уметь изображать геометрические фигуры на чертеже;

• уметь формулировать определения понятий:

а) отрезка, угла, треугольника, равных отрезков (углов, треугольников);

б) прямого, острого и тупого угла, биссектрисы угла;

в) перпендикулярных и параллельных прямых;

г) окружности, многоугольника, параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции;

• знать и уметь доказывать теоремы о площадях различных треугольников и четырехугольников;

• уметь решать нестандартные геометрические задачи.

Измерение геометрических величин

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать знания об измерении геометрических величин (расстояние между двумя точками, длина отрезка, градусная мера угла, площадь многоугольника);

• систематизировать знания о тригонометрических функциях для углов от 0° до 180°;

• приобрести навык решения геометрических задач повышенной сложности с помощью тригонометрии;

• приобрести навык применения метода площадей к решению геометрических задач повышенной сложности.

При этом учащиеся должны:

• знать свойства расстояния между двумя точками, длины отрезка, градусной меры угла, площади многоугольника;

• уметь доказывать и применять при решении задач теорему Пифагора, формулы площади треугольника, параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции;

• знать определения $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для $0° \le \alpha \le 180°$;

• уметь находить приближенные значения тригонометрических функций с помощью единичной полуокружности, заданной на координатной сетке;

• знать и уметь обосновывать таблицу значений тригонометрических функций для углов, равных 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°;

• знать и уметь доказывать тождество $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$;

• знать и уметь доказывать основные формулы приведения;

• знать и уметь доказывать соотношения между углами и сторонами прямоугольного треугольника;

• уметь решать задачи на прямоугольный треугольник (основные случаи);

• уметь решать основные вычислительные задачи на комбинацию прямоугольного треугольника и окружности, равностороннего треугольника и окружности, равнобедренного треугольника и окружности;

• уметь применять тригонометрические соотношения к решению задач на четырехугольники;

• уметь выводить и применять при решении задач формулы площади треугольника.

Построения

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать сведения о методах решения задач на построение;

• приобрести навык в проведении: а) поиска решения задач на построение; б) построений с помощью циркуля и линейки; в) доказательства правильности построений; г) исследования решения задачи.

При этом учащиеся должны:

• понимать смысл терминов: задача на построение, условие и требование задачи, этапы решения задачи (анализ, построение, доказательство, исследование);

• уметь решать основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки;

• уметь применять метод ГМТ в новых условиях.

Прямоугольная система координат. Векторы

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать сведения о прямоугольной системе координат и векторной алгебре;

• углубить навыки в решении задач повышенной сложности координатным и векторным методами;

• ознакомиться с применениями координатно-векторного метода к решению практических задач.

Учащиеся должны:

• знать и правильно использовать термины, связанные с понятием прямоугольной системы координат;

• знать и уметь доказывать формулу расстояния между двумя точками, формулы координат середины отрезка; выводить уравнения прямой и окружности;

• ознакомиться с методом координат и уметь применять его к решению геометрических задач;

• знать и правильно применять определения понятий, относящихся к векторной алгебре;

• знать и уметь доказывать основные свойства сложения, вычитания векторов, умножение векторов на число, скалярного произведения двух векторов;

• ознакомиться с векторным методом и уметь применять его к решению геометрических задач.

Рекомендуемая литература

Основная

33. Журнал «Матэматыка: праблемы выкладання», 1998—2010.

34. Журнал «Математика в школе», 1998—2010.

35. Журнал «Квант». — М.: Наука, 1970—2010.

36. Задачи областных и республиканских математических олимпиад школьников 1992—1993 гг. / Е. А. Барабанов, В. И. Берник, И. И. Воронович, С. А. Мазаник. — Могилев : Прогресс, 1993.

37. *Прасолов, В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М. : Наука, 1986. — Ч. 1, 2.

38. *Прасолов, В. В.* Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1989.

39. *Рогановский, Н. М.* Геометрия : учеб. пособие для 9 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2006.

40. *Рогановский Н. М.* Элементарная математика. В 4-х частях. Ч. III: Геометрия на плоскости / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2003.

41. Серия «Библиотеки математического кружка». — М. : Наука.

42. *Тавгень, О. И.* Математика в задачах. Теория и методы решений / О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2005.

43. *Шарыгин, И. Ф.* Задачи по геометрии: Планиметрия / И. Ф. Шарыгин.— М. : Наука, 1986.

Дополнительная

44. *Амелькин, В. В.* Готовимся к экзамену по математике : материалы вступительных экзаменов по математике в БГУ в 2000 г. с решениями и комментариями / В. В. Амелькин, К. С. Филиппович, Н. И. Юрчук. — Минск : ТетраСистемс, 2001. — 192 с.

45. *Амелькин, В. В.* Экзамен по математике? Нет проблем! : материалы вступительных экзаменов по математике в БГУ в 1999 г. с решениями и комментариями / В. В. Амелькин, К. С. Филиппович, Н. И. Юрчук. — Минск : ТетраСистемс, 2000. — 256 с.

46. *Бахтина, Т. П.* Математика : пособие для поступающих в Лицей БГУ / Т. П. Бахтина, И. И. Воронович, Д. В. Синькевич. — Минск : Изд. центр БГУ, 2002.

47. *Березин, В. Н.* Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике: кн. для учителя / В. Н. Березин, Л. Ю. Березина, И. Л. Никольская. — М. : Просвещение, 1985.

48. *Болтянский, В. Г.* Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1977.

49. *Будак, А. Б.* Элементарная математика: руководство для поступающих в МГУ / А. Б. Будак. — М. : Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996.

50. Варианты вступительных экзаменов по математике за 1983—1991 гг. на все факультеты МГУ с ответами, указаниями, решениями. — М. : Патент, 1992.

51. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 кл. : учеб. пособие для учащихся школ и классов с углуб. изуч. математики / Л. С. Атанасян [и др.]. — 4-е изд. — М. : Вита-Пресс, 2002.

52. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе : VII—VIII кл. / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982.

53. *Градштейн, И. С.* Прямая и обратная теоремы / И. С. Градштейн. — М. : Наука, 1965.

54. *Делоне, Б.* Задачник по геометрии / Б. Делоне. — М.-Л., ГИТТЛ, 1952.

55. Дополнительные главы по курсу математики : учеб. пособие по факультативному курсу для учащихся 7—8 классов / сост. К. П. Сикорский. — М. : Просвещение, 1974.

56. *Кокстер, Г. С. М.* Введение в геометрию / Г. С. М. Кокстер. — М. : Наука, 1968.

57. *Кокстер, Г. С. М.* Новые встречи с геометрией / Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер. — М. : Наука, 1978.

58. *Костовский, А. Н.* Геометрические построения одним циркулем / А. Н. Костовский. — М. : Наука, 1984.

59. *Курант, Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. — М. : Просвещение, 1967.

60. *Лоповок, Л. М.* Факультативные задания по геометрии для 7—11 классов / Л. М. Лоповок. — Киев : Радянська школа, 1990.

61. Метод координат / И. М. Гельфанд [и др.]. — 5-е изд. — М. : Наука, 1973.

62. *Моденов, П. С.* Геометрические преобразования / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. — М. : Просвещение, 1972.

63. *Морозова, Е. А.* Международные математические олимпиады / Е. А. Морозова, И. С. Петраков. — М. : Просвещение, 1967.

64. *Нагибин, Ф. Ф.* Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. — М. : Просвещение, 1988.

65. *Нестеренко, Ю. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М. : Факториал, 1995.

66. Преобразования. Векторы / В. Г. Болтянский [и др.]. — М. : Просвещение, 1964.

67. *Радемахер, Г.* Числа и фигуры : Опыты математического мышления / Г. Радемахер, О. Теплиц. — М. : Физматгиз, 1962.

68. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман. — М. : Просвещение, 1965.

69. *Смогоржевский, А. С.* Линейка в геометрических построениях / А. С. Смогоржевский. — М. : Наука, 1984.

70. *Смогоржевский, А. С.* Метод координат / А. С. Смогоржевский. — М. : ГИТТЛ, 1952.

71. *Стройк, Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. — М. : Наука, 1984.

72. Факультативный курс : Избранные вопросы математики. — М. : Просвещение, 1978.

73. *Юшкевич, А. П.* История математики в средние века / А. П. Юшкевич. — М. : Физматгиз, 1961.

9 КЛАСС

Содержание обучения

Распределение тем по классам обычно совпадает с распределением на базовом уровне обучения.

1. Замечательные точки треугольника. Вписанные и описанные четырехугольники. Новые сведения о тригонометрическом методе: решение произвольного треугольника

Центроид и ортоцентр треугольника.

Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Вписанные и описанные четырехугольники.

Теоремы косинусов и синусов.

Формулы площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}=rp=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр треугольника, R, r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Решение произвольного треугольника.

Основная цель — познакомить учащихся с комбинациями треугольников и четырехугольников с окружностью; продолжить формирование навыков применения тригонометрического метода к решению прямоугольного, равнобедренного, равностороннего треугольников и их комбинаций с окружностью; изучить теоремы косинусов и синусов, сформировать умение использовать их при решении задач, связанных с треугольником и четырехугольником.

Рассматриваются теоремы о центроиде и ортоцентре треугольника, описанных и вписанных треугольников и четырехугольников. Формируются умения решать задачи на комбинацию треугольников и четырехугольников с окружностью. Доказываются теоремы косинусов и синусов. Особое внимание уделяется основным задачам на решение произвольного треугольника и задачам, сводимым к ним. Изучаются формулы площади треугольника. Дальнейшее развитие получает метод площадей.

2. Метод геометрических преобразований

Движение. Преобразование подобия. Свойства движения и преобразования подобия.

Осевая и центральная симметрии. Параллельный перенос и поворот.

Гомотетия.

Метод геометрических преобразований.

Равенство и подобие фигур.

Свойства подобных многоугольников. Пропорциональные отрезки в окружности.

Метод подобия.

Основная цель — познакомить учащихся с методом геометрических преобразований и сформировать первоначальные навыки его применения при решении задач.

Вводятся понятия движения и преобразования подобия. Рассматриваются их свойства. Изучаются различные виды движения и преобразования подобия. Метод геометрических преобразований применяется при изложении теоретического материала и решении задач.

Вводятся понятия равенства и подобия фигур. Изучается подобие треугольников и многоугольников, пропорциональные отрезки в круге. Формируется умение применять метод подобия к решению геометрических задач. Особое внимание уделяется решению задач на построение с помощью гомотетии.

3. Правильные многоугольники. Длина окружности. Площадь круга

Правильный многоугольник. Сумма углов многоугольника. Величина угла правильного многоугольника. Центр правильного многоугольника.

Построение некоторых правильных многоугольников, вписанных в окружность.

Выражение элементов правильного многоугольника через радиус описанной или вписанной окружности.

Длина окружности и ее дуг. Площадь круга и его частей.

Задачи на комбинацию круга и многоугольника.

Основная цель — систематизировать знания учащихся о правильных многоугольниках, длине окружности и площади круга, выработать навык решения основных задач на комбинацию круга и многоугольников.

Доказываются теоремы о сумме углов многоугольника, о свойствах правильного многоугольника. Выводятся формулы, выражающие стороны, периметр и площадь правильного многоугольника через радиус описанной или вписанной окружности, формулы длины окружности и площади круга, формулы длины дуги окружности, площади сектора и сегмента. Особое внимание уделяется решению задач на комбинацию круга и многоугольника. Рассматриваются задачи прикладного и межпредметного содержания.

Ожидаемые результаты обучения

Качественная оценка результатов обучения должна исходить из определенных требований к уровню математической подготовки учащихся и учитывать динамику этого уровня, обеспечиваемую факультативными занятиями.

Примерные требования

Геометрические фигуры и их свойства

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать знания, связанные с геометрическими фигурами и их свойствами;

• приобрести навык решения геометрических задач повышенной сложности;

• приобрести навык решения задач на комбинацию геометрических фигур (треугольников, четырехугольников, окружности).

При этом учащиеся должны:

• знать и правильно использовать геометрические термины;

• уметь изображать геометрические фигуры на чертеже;

• уметь формулировать определения понятий:

а) описанного и вписанного многоугольника, четырехугольника, правильного многоугольника;

б) центроида и ортоцентра треугольника;

• знать и уметь доказывать теоремы: о вписанном и описанном треугольниках, четырехугольниках и правильных многоугольниках;

• уметь решать нестандартные геометрические задачи.

Измерение геометрических величин

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать знания об измерении геометрических величин (длина окружности, площадь круга);

• систематизировать знания о тригонометрических функциях для углов от 0° до 180°;

• приобрести навык решения геометрических задач повышенной сложности с помощью тригонометрии;

• приобрести навык применения метода площадей к решению геометрических задач повышенной сложности, включая задачи на комбинацию треугольников, четырехугольников и окружности.

При этом учащиеся должны:

• знать определения длины окружности и площади круга;

• знать определения $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для $0° \le \alpha \le 180°$;

• уметь решать основные вычислительные задачи на комбинацию прямоугольного треугольника и окружности, равностороннего треугольника и окружности, равнобедренного треугольника и окружности;

• уметь доказывать и применять при решении задач теоремы синусов и косинусов;

• уметь решать задачи на произвольный треугольник (основные случаи);

• уметь применять тригонометрические соотношения к решению задач на четырехугольники;

• уметь выводить и применять при решении задач формулы площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R},$$

где a, b, c — стороны, p — полупериметр, α — угол между сторонами a и b, R — радиус описанной окружности;

• уметь выводить и применять при решении задач формулу площади четырехугольника

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha,$$

где d_1 и d_2 — диагонали четырехугольника, α — угол между ними;

• уметь выводить и применять при решении задач формулы для нахождения элементов правильного многоугольника:

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}, \quad a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}, \quad P_n = 2Rn\sin\frac{180°}{n},$$

$$S_n = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360°}{n}, \quad a'_n = 2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}, \quad P'_n = 2rn\operatorname{tg}\frac{180°}{n},$$

$$S'_n = r^2 n\operatorname{tg}\frac{180°}{n},$$

где α_n — угол правильного многоугольника; n — число сторон многоугольника, a_n и a'_n, P_n и P'_n, S_n и S'_n — стороны, периметры и площади соответственно вписанного и описанного правильных многоугольников; R и r — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей.

Построения и геометрические преобразования

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• систематизировать сведения о методах решения задач на построение;

• приобрести навык в проведении: а) поиска решения задач на построение; б) построений с помощью циркуля и линейки; в) доказательства правильности построений; г) исследования решения задачи;

• систематизировать знания о геометрических преобразованиях;

• познакомиться с классификацией движений и преобразований подобия;

• приобрести навык решения задач различной степени сложности с помощью метода геометрических преобразований.

При этом учащиеся должны:

• понимать смысл терминов: задача на построение, условие и требование задачи, этапы решения задачи (анализ, построение, доказательство, исследование);

• уметь решать основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки;

• познакомиться с основными методами решения задач на построение (метод ГМТ, метод геометрических преобразований, алгебраический метод);

• знать определения понятий движения, преобразования подобия и отдельных их видов (осевая и центральная симметрия, параллельный перенос и поворот, гомотетия), уметь использовать их при доказательстве теорем и решении задач;

• знать и уметь доказывать общие свойства движений, преобразований подобия;

• знать и уметь доказывать свойства различных видов движений и гомотетии;

• ознакомиться с применением метода геометрических преобразований к решению задач на построение, доказательство и вычисление.

Прямоугольная система координат. Векторы

Факультативный курс дает возможность учащимся:

• ознакомиться с применениями координатно-векторного метода при изучении геометрических преобразований.

Учащиеся должны:

• ознакомиться с координатно-векторным методом и уметь применять его к решению геометрических задач.

Рекомендуемая литература

Основная

1. Журнал «Матэматыка: праблемы выкладання», 1998—2010.

2. Журнал «Математика в школе», 1998—2010.

3. Журнал «Квант». — М.: Наука, 1970—2010.

4. Задачи областных и республиканских математических олимпиад школьников 1992—1993 гг. / Е. А. Барабанов, В. И. Берник, И. И. Воронович, С. А. Мазаник. — Могилев : Прогресс, 1993.

5. *Прасолов, В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М. : Наука, 1986. — Ч. 1, 2.

6. *Прасолов, В. В.* Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1989.

7. *Рогановский, Н. М.* Геометрия : учеб. пособие для 8 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2005.

8. *Рогановский, Н. М.* Геометрия : учеб. пособие для 10 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2007.

9. *Рогановский, Н. М.* Геометрия : учеб. пособие для 11 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2007.

10. *Рогановский, Н. М.* Геометрия : учеб. пособие для 12 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2005.

11. *Рогановский, Н. М.* Геометрия : учеб. пособие для 12 кл. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Нар. асвета, 2008.

12. *Рогановский, Н. М.* Элементарная математика. В 4-х частях. Ч. III: Геометрия на плоскости / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Мінск : Адукацыя і выхаванне, 2003.

13. *Рогановский, Н. М.* Элементарная математика. В 4-х частях. Ч. IV: Геометрия пространства / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2005.

14. Серия «Библиотеки математического кружка». — М. : Наука.

15. *Тавгень, О. И.* Математика в задачах. Теория и методы решений / О. И. Тавгень, А. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2005.

16. *Шарыгин, И. Ф.* Задачи по геометрии: планиметрия / И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1986.

Дополнительная

17. *Амелькин, В. В.* Готовимся к экзамену по математике : материалы вступительных экзаменов по математике в БГУ в 2000 г. с решениями и комментариями / В. В. Амелькин, К. С. Филиппович, Н. И. Юрчук. — Минск : ТетраСистемс, 2001. — 192 с.

18. *Амелькин, В. В.* Экзамен по математике? Нет проблем! : материалы вступительных экзаменов по математике в БГУ в 1999 г. с решениями и комментариями / В. В. Амелькин, К. С. Филиппович, Н. И. Юрчук. — Минск : ТетраСистемс, 2000. — 256 с.

19. *Бахтина, Т. П.* Математика : пособие для поступающих в Лицей БГУ / Т. П. Бахтина, И. И. Воронович, Д. В. Синькевич. — Минск : Изд. центр БГУ, 2002.

20. *Болтянский, В. Г.* Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1977.

21. *Будак, А. Б.* Элементарная математика: руководство для поступающих в МГУ / А. Б. Будак, Б. М. Щедрин. — М. : Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1996.

22. Варианты вступительных экзаменов по математике за 1983—1991 гг. на все факультеты МГУ с ответами, указаниями, решениями. — М. : Патент, 1992.

23. *Вейль, Г.* Симметрия / Г. Вейль. — М. : Наука, 1968.

24. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 кл. : учеб. пособие для учащихся школ и классов с углуб. изуч. математики / Л. С. Атанасян [и др.]. — 4-е изд. — М. : Вита-Пресс, 2002.

25. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 кл. : учеб. пособие для учащихся школ и классов с углуб. изуч. математики / Л. С. Атанасян [и др.]. — 4-е изд. — М. : Вита-Пресс, 2004.

26. *Глейзер, Г. И.* История математики в школе : VII—VIII классы / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982.

27. *Градштейн И. С.* Прямая и обратная теоремы / И. С. Градштейн. — М. : Наука, 1965.

28. *Делоне, Б.* Задачник по геометрии / Б. Делоне, О. Житомирский. — М.-Л., ГИТТЛ, 1952.

29. Дополнительные главы по курсу математики 9 класса для факультативных занятий / сост. П. В. Стратилатов. — М. : Просвещение, 1970.

30. Избранные вопросы математики. Факультативный курс для 10 кл. / А. М. Абрамов [и др.]; под ред. В. В. Фирсова. — М. : Просвещение, 1980.

31. *Кокстер, Г. С. М.* Введение в геометрию / Г. С. М. Кокстер. — М. : Наука, 1968.

32. *Кокстер, Г. С. М.* Новые встречи с геометрией / Г. С. М. Кокстер, С. Л. Грейтцер. — М. : Наука, 1978.

33. *Курант, Р.* Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. — М. : Просвещение, 1967.

34. *Лоповок, Л. М.* Факультативные задания по геометрии для 7—11 классов / Л. М. Лоповок. — Киев : Радянська школа, 1990.

35. *Моденов, П. С.* Геометрические преобразования / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. — М. : Просвещение, 1972.

36. *Морозова, Е. А.* Международные математические олимпиады / Е. А. Морозова, И. С. Петраков. — М. : Просвещение, 1967.

37. *Нагибин, Ф. Ф.* Математическая шкатулка / Ф. Ф. Нагибин, Е. С. Канин. — М. : Просвещение, 1988.

38. *Нестеренко, Ю. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. — М. : Факториал, 1995.

39. Преобразования. Векторы / В. Г. Болтянский [и др.]. — М. : Просвещение, 1964.

40. *Радемахер, Г.* Числа и фигуры : Опыты математического мышления / Г. Радемахер, О. Теплиц. — М. : Физматгиз, 1962.

41. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман. — М. : Просвещение, 1965.

42. Сборник задач по геометрии для 9 и 10 кл. (Библиотека учителя математики) / И. С. Герасимова, В. А. Гусев, Г. Г. Маслова, З. А. Скопец, М. И. Ягодовский. — М. : Просвещение, 1977.

43. *Стройк, Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. — М. : Наука, 1984.

44. Факультативный курс : Избранные вопросы математики. — М. : Просвещение, 1978.

45. *Шубников, А. В.* Симметрия в науке и искусстве / А. В. Шубников, В. А. Копцик. — М. : Наука, 1972.

46. *Юшкевич, А. П.* История математики в средние века / А. П. Юшкевич. — М. : Физматгиз, 1961.

Содержание

8 КЛАСС

ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна
Тавгень Олег Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. 7—9 КЛАССЫ

Многообразие идей и методов

Пособие для учителей общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Ответственный за выпуск *Д.Л. Дембовский*

Подписано в печать 06.01.2011. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага типографская.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,60. Уч.-изд. л. 11,71. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.