Национальный институт образования

Факультативные занятия

Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень

Геометрия

10 класс

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано Научно-методическим учреждением «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь

Минск • «Аверсэв» • 2011

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721
Р59

Серия основана в 2010 году

Рогановский, Н. М.

Р59 Геометрия. 10 класс. Многообразие идей и методов : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 207 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-529-664-6.

Пособие составлено в соответствии с программой факультативного курса. В издании содержится теоретический и практический материал, приводятся различные методы решения геометрических задач.

Предназначено учащимся 10 классов для использования на факультативных занятиях по геометрии.

УДК 514(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-529-664-6

ВВЕДЕНИЕ

1. Что изучает стереометрия. *Стереометрия* — раздел геометрии, в котором изучаются свойства пространственных фигур, т. е. фигур, не принадлежащих одной плоскости.

При изучении стереометрии обобщаются некоторые планиметрические понятия: прямоугольная система координат, вектор, геометрическое преобразование и т. д.

Исходными понятиями стереометрии являются понятия: *«точка»*, *«расстояние между точками»*, *«плоскость»*, с помощью которых определяются другие понятия.

Определить понятие (дать ему определение) — это значит указать его существенные, характеристические, признаки. Часть этих признаков является признаками сходства и устанавливает связь данного понятия с другими, уже известными понятиями; другая часть — признаками отличия, указывающими, какими свойствами данное понятие отличается от остальных.

Исходным геометрическим понятиям непосредственно определение не дается. К каким-либо другим понятиям в принятой системе изложения свести их нельзя. Но это не означает, что они вообще остаются без всякого определения. *Они определяются косвенно, через перечисление некоторых их свойств в аксиомах.*

С помощью аксиом логическим путем выводятся другие свойства геометрических понятий. Утверждения такого рода называются *теоремами*, а рассуждения, в ходе которых они устанавливаются, — *доказательствами*.

2. Основные обозначения. Приведем некоторые обозначения, применяемые в данной книге:

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	плоскости $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
$A = B,\ a = b,\ \alpha = \beta$	точки A и B, прямые a и b, плоскости α и β совпадают
$A \neq B,\ a \neq b,\ \alpha \neq \beta$	точки A и B, прямые a и b, плоскости α и β не совпадают (различные)
$A \in a,\ A \in \alpha,\ AB \subset \alpha$	точка A принадлежит прямой a, точка A принадлежит плоскости α, прямая AB принадлежит плоскости α

$A \notin a$, $A \notin \alpha$, $AB \not\subset \alpha$	точка A не принадлежит прямой a, точка A не принадлежит плоскости α, прямая AB не принадлежит плоскости α
$a \otimes b$, $a \otimes \alpha$, $\alpha \otimes \beta$	прямые a и b, прямая a и плоскость α, плоскости α и β пересекаются
$a \cap b = A$, $a \cap \alpha = A$, $\alpha \cap \beta = a$	прямые a и b пересекаются в точке A, прямая a и плоскость α пересекаются в точке A, плоскости α и β пересекаются по прямой a
$a \dot{-} b$	прямые a и b — скрещивающиеся прямые

Предостережения.

1. Нельзя путать значки «$\in$» и «$\subset$». Первый значок используется для записи принадлежности элемента множества (точки) некоторому множеству (прямой, плоскости, кубу, пирамиде и т. д.).

Второй значок используется для записи принадлежности одного множества другому множеству (принадлежности прямой плоскости, принадлежности отрезка плоскости, принадлежности отрезка прямой и т. д.).

2. Так как множество «$a \cap b$» может быть пустым, то запись «$a \cap b$» нельзя использовать для записи предложения «Прямые a и b пересекаются». По аналогичной причине «укороченные» записи «$a \cap \alpha$» и «$\alpha \cap \beta$» нельзя использовать для записи соответственно предложений: «Прямая a и плоскость α пересекаются», «Плоскости α и β пересекаются».

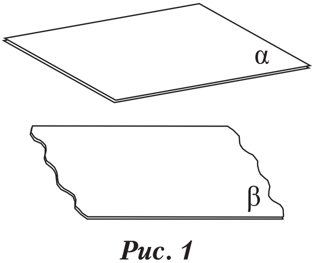


Рис. 1

3. Выполнение рисунков в стереометрии. Необходимо помнить, что плоскости — это неограниченные фигуры, и поэтому на рисунке изображается лишь «часть» плоскости (рис. 1). Большие условности существуют и в изображении ограниченных фигур. Допустим, что поместили проволочный каркас куба перед доской (рис. 2, a), освещенной солнцем. Тень, отбрасываемая каркасом, может служить изображением куба на плоскости. Лучи солнца, из-за дальности их источника, можно считать параллельными. А потому тень можно считать *параллельной проекцией* куба, а способ ее получения — *параллельным проектированием*.

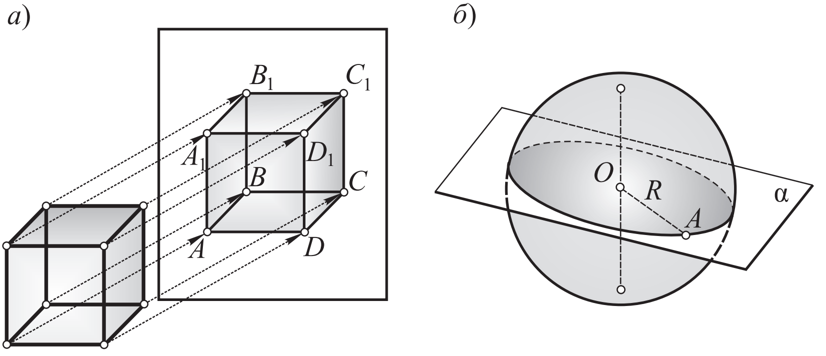


Рис. 2

Рассматривая изображение куба, нетрудно заметить, что:

1) *параллельные и равные отрезки, например параллельные ребра куба, изображаются параллельными и равными отрезками*;

2) *если какой-либо отрезок, например ребро куба, разделить на две части в отношении $m : n$, то они изобразятся отрезками, находящимися также в отношении $m : n$.*

Эти правила и соблюдают при изображении пространственных фигур на плоскости.

Плоские фигуры, не лежащие на плоскости, в которой они изображаются, также претерпевают большие изменения. Рассматривая солнечные тени моделей фигур, можно заметить ряд важных свойств изображений:

3) *треугольник (в том числе равнобедренный, равносторонний и прямоугольный треугольники) можно изобразить любым треугольником*;

4) *параллелограмм (в том числе ромб, прямоугольник и квадрат) — любым параллелограммом*;

5) *трапецию (в том числе равнобедренную или прямоугольную) — любой трапецией с таким же отношением оснований, как и у данной*;

6) *окружность изображается в виде плоской центрально-симметричной фигуры, называемой эллипсом.*

Познакомимся с изображением окружности (и сферы) на примере следующей задачи.

Задача. *Сферой* называется множество всех точек пространства, удаленных от некоторой точки O на одно и то же расстояние R. Точка O называется *центром* сферы. Отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо точкой сферы, называется *радиусом* сферы. Докажите, что пересечением сферы и плоскости, проходящей через центр сферы, является окружность (рис. 2, *б*).

Доказательство.

1) Так как точки пересечения плоскости и сферы принадлежат плоскости, то пересечением плоскости и сферы является плоская фигура;

2) так как точки пересечения плоскости и сферы принадлежат сфере, то они удалены от точки O на одно и то же расстояние R. Плоская фигура, обладающая указанным свойством, является окружностью.

Тема 1 АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

1.1. Аксиомы стереометрии

Стереометрия строится как продолжение планиметрии. Поэтому первой примем следующую аксиому (всего приводятся пять аксиом стереометрии).

Аксиома о связи стереометрии и планиметрии

1. В стереометрии (в каждой плоскости) справедливы все определения, аксиомы и теоремы планиметрии.

Согласно первой аксиоме планиметрические сведения справедливы *в каждой плоскости* пространства (теоремы Пифагора, косинусов, синусов и т. д.). Связь стереометрии с планиметрией будет «проявляться на каждом шагу». Доказательства многих теорем и решение стереометрических задач, как правило, сводятся к решению некоторых планиметрических задач. При формулировании планиметрических предложений в стереометрии обычно необходимо специально оговаривать, что геометрические фигуры лежат в одной плоскости. Например, «*серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, лежащие в плоскости этого треугольника, пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной окружности*». Если такую оговорку не делать, то придем к утверждению: «серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной окружности». Это утверждение в стереометрии не является верным.

Убедитесь в этом!

Будем считать также, что планиметрические признаки равенства и подобия треугольников остаются в силе и для треугольников, расположенных в различных плоскостях.

Аксиомы 2—4 связаны с понятиями принадлежности точек и прямых плоскостям.

Аксиома о принадлежности прямой плоскости

2. Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то прямая принадлежит этой плоскости (рис. 3):

$$(A \neq B \text{ и } A, B \in \alpha) \Rightarrow AB \subset \alpha.$$

Аксиома о задании плоскости

3. Если три точки не лежат на одной прямой, то существует плоскость, проходящая через эти точки, и притом только одна (рис. 4).

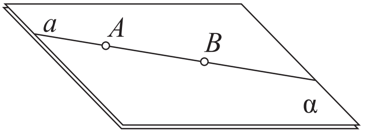


Рис. 3

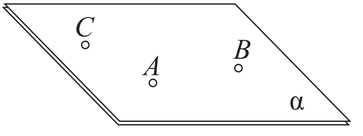


Рис. 4

Аксиома размерности пространства

4. В трехмерном пространстве существуют по меньшей мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости (рис. 5).

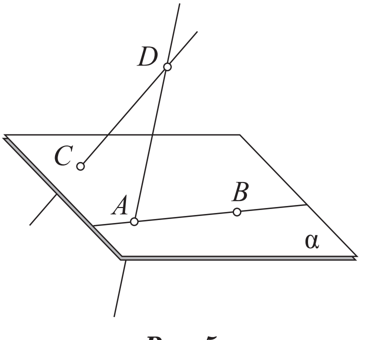


Рис. 5

На рисунке 4 изображена плоскость α, проходящая через три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Аксиома 3 утверждает, что такую плоскость можно провести всегда и она единственная.

Плоскость, проходящую через точки A, B и C, кратко называют «плоскость ABC».

С помощью аксиомы 4 устанавливается трехмерность пространства — существование точек пространства, выходящих за «пределы» какой-либо одной плоскости. Именно эта аксиома обеспечивает существование различных пространственных фигур.

Сформулируем первые два определения в курсе стереометрии. Прямая и плоскость называются **пересекающимися**, если они имеют единственную общую точку. Две прямые, лежащие в одной плоскости, называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Сформулируем теперь пятую аксиому — аксиому параллельных прямых в пространстве.

Аксиома о пересечении параллельных прямых плоскостью

5. Если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую (рис. 6): $(\alpha \otimes a$ и $a \parallel b) \Rightarrow \alpha \otimes b$.

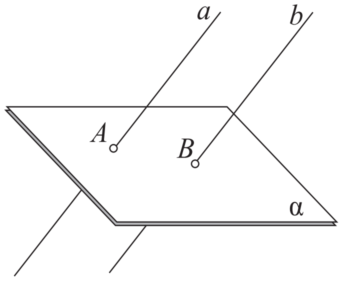


Рис. 6

Заметим, что эта аксиома играет существенную роль при изложении вопросов параллельности прямых и плоскостей в пространстве. С ее помощью, например, просто доказываются признаки параллельности прямой и плоскости и двух плоскостей.

1.2. Пирамида и призма

Если не существует плоскости, которой принадлежали бы все точки некоторой фигуры, то такая фигура называется *пространственной*. Наиболее важными пространственными фигурами являются пирамида и призма. Определим эти фигуры с помощью следующих построений. (Эти определения являются предварительными, позже они будут уточнены.) Пусть в плоскости α дан многоугольник *ABCD*... (рис. 7). Вне плоскости α возьмем точку *P*. В плоскостях *PAB*, *PBC*, *PCD*, ... построим соответственно треугольники *PAB*, *PBC*, *PCD*, ...

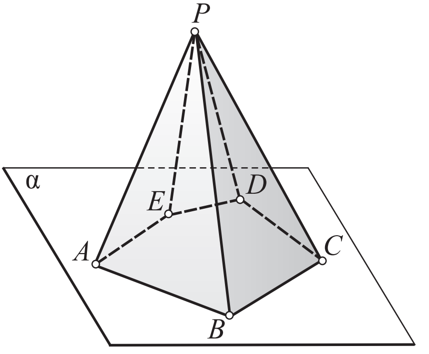


Рис. 7

Пирамидой называется пространственная фигура, ограниченная многоугольником *ABCD*... и треугольниками *PAB*, *PBC*, *PCD*, ...

Точки *P*, *A*, *B*, *C*, *D*, ... называются *вершинами* пирамиды, отрезки *AB*, *BC*, *CD*, ..., *PA*, *PB*, *PC*, ... — *ребрами* пирамиды, многоугольник *ABCD*... — *основанием* пирамиды, треугольники *PAB*, *PBC*, *PCD*, ... — *боковыми гранями* пирамиды. Иногда точка *P* выделяется особо и называется *вершиной пирамиды*. По числу сторон многоугольника, являющегося основанием пирамиды, пирамида называется *треугольной*, *четырехугольной*, ..., *n-угольной*.

Тетраэдром называется треугольная пирамида.

Правильным тетраэдром называется тетраэдр, у которого все ребра равны.

Пусть плоскости α и β не имеют общих точек (рис. 8). В плоскости α построим многоугольник *ABCD*... . Через точки *A*, *B*, *C*, *D*, ... проведем параллельные прямые, пересекающие плоскость β соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1, ... Получим параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, ... (докажем это позже). **Призмой** называется пространственная фигура, ограниченная многоугольниками *ABCD*... и $A_1B_1C_1D_1$... и параллелограммами AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, ...

Многоугольники *ABCD*... и $A_1B_1C_1D_1$... называются *основаниями* призмы (*нижним* и *верхним*). Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, ... называются *боковыми гранями* призмы. Вершины оснований — *вершинами* призмы, стороны параллелограммов — *ребрами* призмы. По числу сторон многоугольников, являющихся основа-

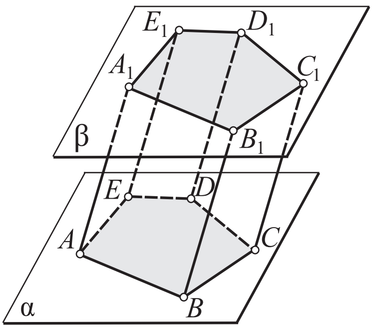


Рис. 8

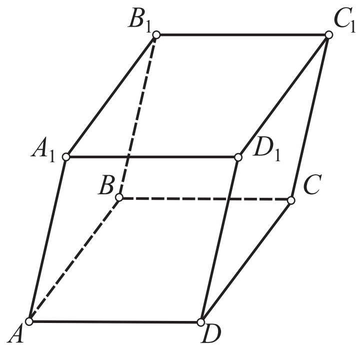


Рис. 9

ниями призмы, призма называется *треугольной*, *четырехугольной*, ..., *n-угольной*.

Параллелепипедом называется призма (рис. 9), все грани которой являются параллелограммами.

1.3. Примеры решения задач

Задача 1. Изобразите данный равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$) в виде произвольного треугольника ABC. Постройте изображение биссектрисы внешнего угла при вершине B_1.

Решение.

1) Воспользуемся планиметрическим фактом: биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию этого треугольника;

2) пусть ΔABC — изображение данного равнобедренного треугольника (рис. 10), $\angle CBD$ — изображение внешнего угла при вершине треугольника;

3) так как параллельность прямых сохраняется на изображении, то искомым изображением биссектрисы будет луч l, параллельный стороне AC.

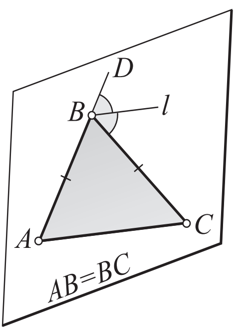


Рис. 10

Задача 2. Дан тетраэдр $PABC$. На его изображении (рис. 11) кажется, что ребра AB и PC пересекаются. Докажите, что на самом деле (на фигуре-оригинале) они пересекаться не могут.

Решение.

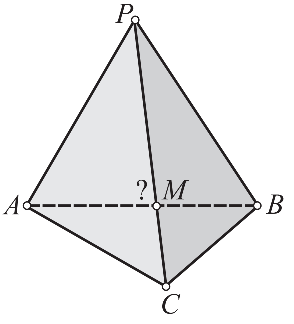


Рис. 11

1) Воспользуемся методом от противного. Выясним, к какому противоречию можно прийти, если допустить, что противоположные ребра AB и PC тетраэдра пересекаются. Допустим, что M — общая точка ребер AB и PC;

2) $(M \in AB$ и $AB \subset ABC) \Rightarrow M \in ABC$;

3) $M, C \in ABC \Rightarrow MC \subset ABC$;

4) $(MC \subset ABC$ и $P \in MC) \Rightarrow P \in ABC$;

5) по определению пирамиды (тетраэдра) $P \notin ABC$;

6) утверждения $P \in ABC$ и $P \notin ABC$ противоречат друг другу;

7) полученное противоречие означает: допущение о том, что ребра AB и PC пересекаются, является неверным. Значит, эти ребра не пересекаются.

§ 2. ПЕРВЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ СТЕРЕОМЕТРИИ

2.1. Теория

Согласно аксиоме 3 (*о задании плоскости*) плоскость можно задать тремя точками, не лежащими на одной прямой. Рассмотрим другие способы задания плоскости.

Теоремы

1. **Существует плоскость, проходящая через прямую и не лежащую на ней точку, и притом только одна.**

2. **Существует плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, и притом только одна.**

План доказательства теорем 1 *и* 2.

Существование плоскости: 1) выбрать три точки, не лежащие на одной прямой; 2) провести через эти точки плоскость α; 3) доказать, что эта плоскость искомая.

Единственность плоскости: 1) временно допустить, что условию теоремы может удовлетворять еще одна плоскость β; 2) доказать, что плоскость β совпадает с плоскостью α.

Следствие. *Плоскость, проходящая через две параллельные прямые, единственная.*

Теорема 3 *(о линии пересечения двух плоскостей)*

Если две различные плоскости (α **и** β**,** рис. 12) **имеют общую точку (точку** M**), то они имеют единственную общую прямую, проходящую через эту точку.**

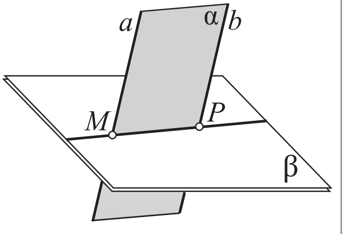


Рис. 12

Доказательство.

Существование. 1) В плоскости α через точку M проведем прямую a. Если $a \subset \beta$, то прямая a — общая прямая плоскостей α и β. Остается доказать только ее единственность;

2) если $a \not\subset \beta$, то $a \otimes \beta$;

3) проведем в плоскости α прямую $b \| a$ (рис. 13);

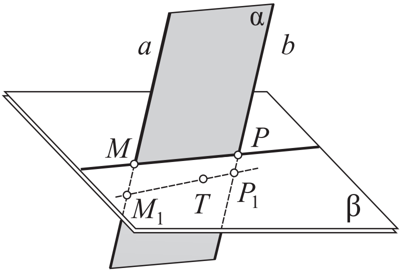


Рис. 13

4) на основании аксиомы 5 (*о пересечении параллельных прямых плоскостью*) имеем: $(\beta \otimes a$ и $a \| b) \Rightarrow \beta \otimes b$. Пусть $\beta \cap b = P$;

5) очевидно, что $P \in \alpha, \beta$ и MP — общая прямая плоскостей α и β.

Единственность. 1) Воспользуемся методом от противного. Допустим, что плоскости α и β кроме прямой MP имеют еще одну общую прямую — M_1P_1 (см. рис. 13).

Поскольку прямые MP и M_1P_1 по допущению различны, то на прямой M_1P_1 найдется точка T, которая не принадлежит прямой MP;

2) тогда обе плоскости α и β проходят через прямую MP и точку T, не лежащую на этой прямой;

3) на основании теоремы 1 плоскости α и β совпадают, что противоречит условию. По условию α и β — две различные плоскости;

4) следовательно, плоскости α и β имеют единственную общую прямую MP.

Пересекающимися плоскостями называются две плоскости, которые имеют единственную общую прямую. Эта прямая называется *прямой пересечения* данных плоскостей.

2.2. Примеры решения задач

Задача 1. Дан тетраэдр $PABC$ (рис. 14). Точки M и N принадлежат соответственно ребрам PA и PB. Постройте точку X — точку пересечения прямой MN и плоскости ABC.

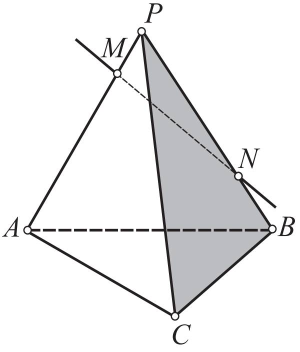


Рис. 14

Решение.

1) Так как точки M и N принадлежат плоскости PAB, то $MN \subset PAB$;

2) все общие точки плоскостей PAB и ABC лежат на прямой AB. Поэтому общая точка X прямой MN и плоскости ABC должна лежать на прямой AB;

3) строим искомую точку $X = MN \cap AB$;

4) если $MN \nparallel AB$, то точка X существует и задача имеет решение, причем единственное. Если $MN \parallel AB$, то точки X не существует и задача решения не имеет.

Задача 2. Дана четырехугольная пирамида $PABCD$ (рис. 15). Докажите, что плоскости граней PAB и PCD пересекаются. Постройте линию пересечения этих плоскостей.

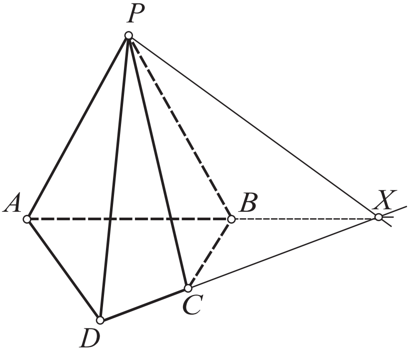


Рис. 15

Решение.

1) Плоскости граней PAB и PCD пересекаются, так как эти плоскости различны и имеют об-

щую точку P. Линия пересечения этих плоскостей проходит через точку P;

2) для построения линии пересечения необходимо построить две ее точки. Одна точка известна — это точка P. Построим еще некоторую точку X, принадлежащую двум данным плоскостям PAB и PCD;

3) точку X построим как точку пересечения прямых AB и DC, лежащих в плоскости основания пирамиды. (Докажите, что точка X — общая точка плоскостей PAB и PCD!);

4) строим прямую $PX = PAB \cap PCD$.

Задача 3. Дана четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ B_1 (рис. 16). Докажите, что плоскости граней AA_1B_1B и DD_1C_1C пересекаются. Постройте линию пересечения этих плоскостей.

Решение.

1) Построим точку $X = AB \cap DC$. Так как точка X принадлежит прямой AB, то она принадлежит и плоскости грани AA_1B_1B;

2) аналогично: так как точка X принадлежит прямой DC, то она принадлежит и плоскости грани DD_1C_1C;

3) поэтому точка X — общая точка плоскостей граней AA_1B_1B и DD_1C_1C;

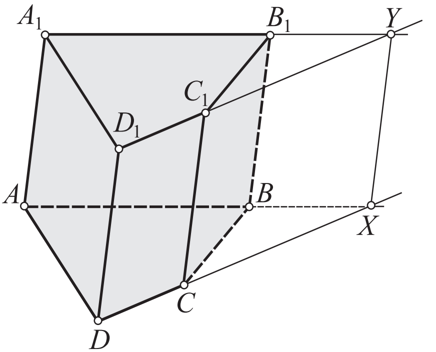


Рис. 16

4) так как плоскости граней AA_1B_1B и DD_1C_1C различны и имеют общую точку X, то они пересекаются по прямой, проходящей через точку X;

5) в плоскости верхнего основания строим точку $Y = A_1B_1 \cap D_1C_1$;

6) аналогично доказывается, что точка Y — общая точка плоскостей граней AA_1B_1B и DD_1C_1C;

7) строим искомую прямую $XY = AA_1B_1B \cap DD_1C_1C$.

Задача 4. Даны n плоскостей, каждая из которых пересекает все остальные, причем никакие три из них не пересекаются по одной прямой. Сколько прямых получается при пересечении этих плоскостей?

Решение.

Рассмотрим одну какую-либо плоскость. Ее пересекают $n - 1$ плоскостей. Поэтому на каждой плоскости имеется $(n - 1)$ линий пересечения. Всего плоскостей n. Поэтому получаем $(n - 1)n$ линий. Нетрудно заметить, что каждая линия была сосчитана дважды. Поэтому общее количество прямых, получаемых при пересечении данных плоскостей, равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

§ 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

3.1. Скрещивающиеся прямые

Из планиметрии известно, что две прямые, лежащие в одной плоскости, либо пересекаются, либо параллельны. В пространстве возможен новый случай взаимного расположения двух прямых, когда они не лежат в одной плоскости (это означает, что не существует плоскости, проходящей через данные прямые).

Скрещивающимися прямыми называются две прямые, для которых не существует плоскости, содержащей эти прямые.

Обозначение: $a \dot{-} b$ — a и b — скрещивающиеся прямые.

Теорема 4 *(признак скрещивающихся прямых)*

Если одна из прямых (AB, рис. 17) **лежит в плоскости** (α), **а другая** (CD) **пересекает эту плоскость в точке** (M), **не принадлежащей первой прямой, то эти прямые — скрещивающиеся.**

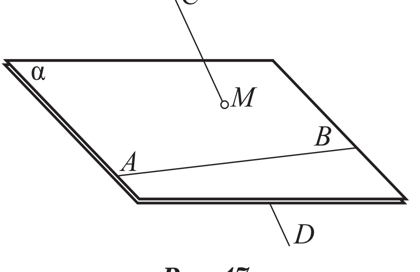


Рис. 17

Замысел доказательства. Пусть $AB \subset \alpha$, $CD \cap \alpha = M$ и $M \notin AB$. Докажем (методом от противного), что $AB \dot{-} CD$.

Доказательство.

1) Допустим, что AB и CD не являются скрещивающимися прямыми. Тогда существует плоскость β, которая проходит через обе эти прямые;

2) такая плоскость β проходит через прямую AB и точку M (как и плоскость α);

3) в силу теоремы 1 плоскости β и α совпадают ($\beta = \alpha$);

4) отсюда $AB, CD \subset \alpha$, что противоречит условию ($CD \otimes \alpha$);

5) следовательно, допущение о существовании плоскости β, проходящей через прямые AB и CD, ложно. Поэтому $AB \dot{-} CD$.

Следствие. *Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек.*

3.2. Классификация взаимных положений двух прямых

В пространстве существуют пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Возможны ли другие случаи расположения двух прямых в пространстве? Ответить на этот вопрос помогает классификация (рис. 18), которая проводится на основании признаков: прямые лежат в одной плоскости и прямые не лежат в одной плоскости. В первом случае прямые либо пересекаются, либо параллельны, во втором — приходим к скрещивающимся прямым. Итак, в пространстве возможны только три случая взаимного расположения двух прямых.

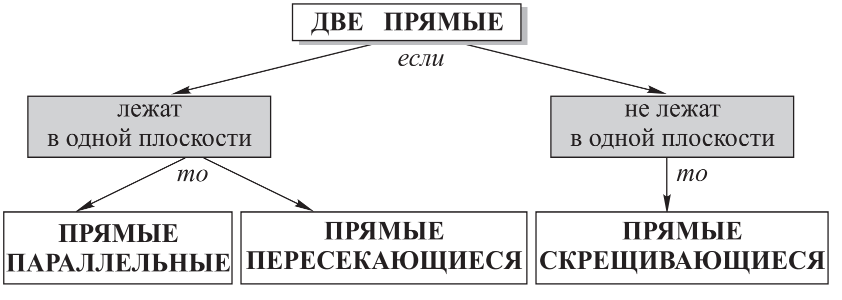


Рис. 18

3.3. Параллельные прямые

Теоремы *(признак параллельности прямых в пространстве)*

5. **Если любая плоскость** (α)**, пересекающая одну из двух прямых** (a, рис. 19)**, пересекает и другую** (b)**, то эти прямые параллельны.**

6. **Параллельность прямых обладает следующими свойствами:**

свойство рефлексивности

а) каждая прямая параллельна самой себе: $a \parallel a$**;**

свойство симметричности

б) если прямая a **параллельна прямой** b**, то и наоборот — прямая** b **параллельна прямой** a**:** $a \parallel b \Rightarrow b \parallel a$**;**

свойство транзитивности

в) если прямая a **параллельна прямой** b **и прямая** b **параллельна прямой** c**, то прямая** a **параллельна прямой** c**.**

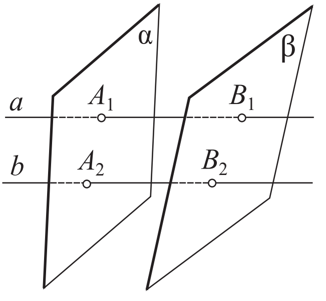


Рис. 19

3.4. Угол между двумя прямыми

Из планиметрии известно, что такое угол между двумя пересекающимися прямыми. Можно ли это понятие распространить на скрещивающиеся прямые? Для этого введем понятие двух сонаправленных лучей.

Луч AB (рис. 20) называется **сонаправленным** с лучом CD, если эти лучи лежат на параллельных прямых и в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начала. Обозначение: $AB\uparrow\uparrow CD$ — луч AB сонаправлен с лучом CD.

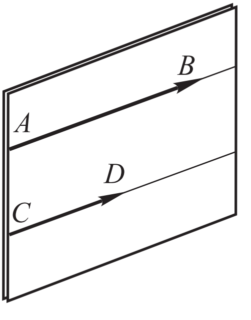


Рис. 20

Следствие. *Сонаправленность лучей обладает следующими свойствами:*

а) каждый луч сонаправлен с самим собой: $AB\uparrow\uparrow AB$*;*

б) если луч AB сонаправлен с лучом CD, то луч CD сонаправлен с лучом AB: $AB \uparrow\uparrow CD \Rightarrow CD \uparrow\uparrow AB$;

в) если луч AB сонаправлен с лучом CD и луч CD сонаправлен с лучом PK, то луч AB сонаправлен с лучом PK (свойство транзитивности): $(AB \uparrow\uparrow CD$ и $CD \uparrow\uparrow PK) \Rightarrow AB \uparrow\uparrow PK$.

Два сонаправленных луча задают *одно и то же направление*, а два несонаправленных луча — *различные направления*.

Рассмотрим стереометрический аналог известного из планиметрии предложения.

Теорема 7

Два угла в пространстве с соответственно сонаправленными сторонами равны между собой.

Доказательство.

1) Из планиметрии известно, что данное утверждение справедливо для углов, расположенных в одной плоскости. Теперь докажем это утверждение для углов, расположенных в различных плоскостях. Пусть даны два угла (рис. 21): $\angle BAC$ и $\angle B_1A_1C_1$, причем $A_1B_1 \uparrow\uparrow AB$, $A_1C_1 \uparrow\uparrow AC$. Докажем, что

$$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1;$$

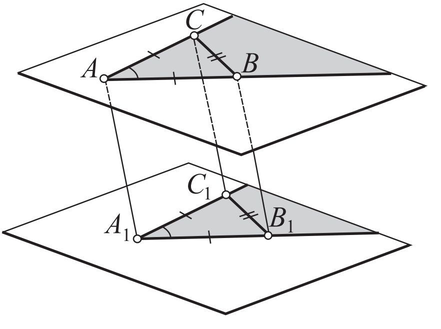


Рис. 21

2) воспользуемся методом равных треугольников. Для этого отложим на сторонах данных углов равные отрезки:

$$AB = AC = A_1B_1 = A_1C_1;$$

3) $(A_1B_1 = AB$ и $A_1B_1 \uparrow\uparrow AB) \Rightarrow ABB_1A_1$ — параллелограмм. Аналогично приходим к выводу о том, что четырехугольник ACC_1A_1 — тоже параллелограмм;

4) из двух последних утверждений следует, что четырехугольник BCC_1B_1 — параллелограмм;

5) отсюда $BC = B_1C_1$;

6) тогда $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ (по трем сторонам). Из равенства треугольников следует, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Это и требовалось доказать.

Взаимное расположение двух прямых может быть охарактеризовано также при помощи понятия «угол между двумя прямыми». Напомним это понятие для пересекающихся прямых.

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется меньший из углов, образуемых при пересечении этих прямых.

Введем теперь понятие «угол между двумя скрещивающимися прямыми». Пусть даны две скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 22). Возьмем произвольную точку O и проведем через нее прямые OP и OK, параллельные соответственно данным скрещивающимся прямым AB и CD. За угол между двумя скрещивающимися прямыми AB и CD принимается угол между пересекающимися прямыми OP и OK. Тогда имеем следующие определения.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

Если угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $90°$ ($\angle POK = 90°$, рис. 23), то скрещивающиеся прямые называются **перпендикулярными**.

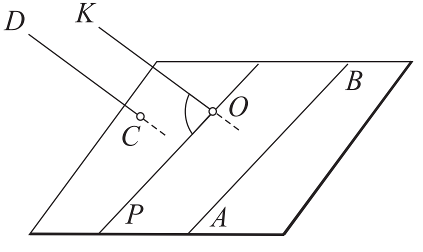


Рис. 22

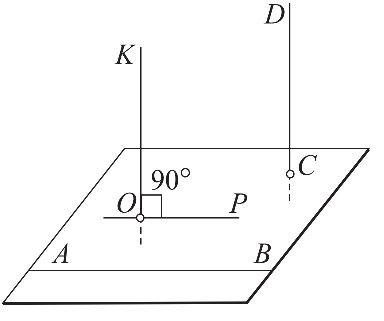


Рис. 23

3.5. Примеры решения задач

Задача 1. Дано изображение тетраэдра $PABC$, на котором ребра PA и BC — параллельные отрезки (рис. 24). По условию эти отрезки параллельны, а будут ли они параллельны на самом тетраэдре?

Решение.

1-й способ. 1) Допустим, что $PA \parallel BC$. Тогда через эти ребра можно провести плоскость α;

2) плоскость α содержит все четыре вершины тетраэдра, и особо отметим: она содержит вершину P;

3) плоскость α, проходя через точки A, B и C, совпадет с плоскостью ABC;

4) $P \in \alpha \Rightarrow P \in ABC$;

5) последнее утверждение противоречит определению пирамиды. По определению пирамиды $P \notin ABC$;

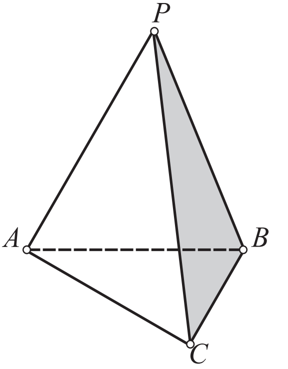


Рис. 24

6) полученное противоречие означает, что допущение о параллельности ребер PA и BC является неверным. Значит, $PA \nparallel BC$.

2-й способ. 1) Прямая PA пересекает плоскость ABC в точке A, которая не принадлежит прямой BC, лежащей в этой плоскости (см. рис. 24). На основании признака скрещивающихся прямых: $PA \dot{-} BC$;

2) если $PA \dot{-} BC$, то $PA \nparallel BC$.

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 25), O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Докажите, что $OC_1 \perp BD$.

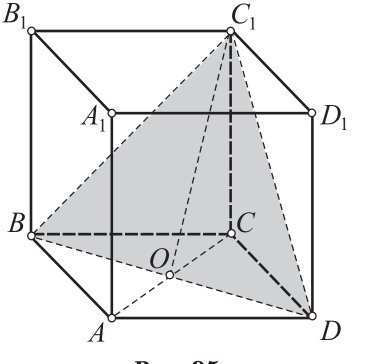


Рис. 25

Решение.

1) Рассмотрим ΔBC_1D. В этом треугольнике $BC_1 = C_1D$ (как диагонали квадратов с одной и той же стороной);

2) так как O — середина диагонали BD, то C_1O — медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию;

3) поэтому $OC_1 \perp BD$.

Задача 3. Используя условие предыдущей задачи, докажите, что $CC_1 \perp AC$.

Решение.

1) Пусть ребро куба равно a (см. рис. 25). Вычислим стороны треугольника OCC_1 и воспользуемся теоремой, обратной теореме Пифагора;

2) имеем:

$$OD = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ DC_1 = a\sqrt{2};$$

3) из прямоугольного треугольника OC_1B (см. предыдущую задачу) по теореме Пифагора находим, что

$$OC_1 = \sqrt{DC_1^2 - OD^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}};$$

4) все стороны треугольника OCC_1 известны. Проверим, выполняется ли для этого треугольника теорема, обратная теореме Пифагора:

$$\left(OC_1^2 = \frac{3a^2}{2},\ OC^2 = \frac{a^2}{2},\ CC_1^2 = a^2\right) \Rightarrow OC_1^2 = OC^2 + CC_1^2;$$

5) поэтому ΔOCC_1 — прямоугольный и $CC_1 \perp OC$. Отсюда $CC_1 \perp AC$.

Задача 4. Используя условие предыдущей задачи, докажите, что $BB_1 \perp AC$ (см. рис. 25).

Решение.

1) Так как прямая BB_1 пересекает плоскость нижнего основания куба в точке B, не принадлежащей прямой AC, и прямая AC лежит в плоскости нижнего основания, то по признаку скрещивающихся прямых $BB_1 \dot{-} AC$;

2) построим угол между этими скрещивающимися прямыми. Для этого через точку C проведем прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым BB_1 и AC. Получим прямые CC_1 и AC;

3) так как $CC_1 \perp AC$ (см. предыдущую задачу), то $BB_1 \perp AC$.

§ 4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

4.1. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости

Начнем с определений.

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если прямая лежит в плоскости или не имеет с ней общих точек. Обозначение: $a \parallel \alpha$ (рис. 26).

Если прямая перпендикулярна к любой прямой, принадлежащей плоскости (α), то она называется **перпендикулярной** к этой плоскости.

Обозначение: $m \perp \alpha$, $\alpha \perp m$ — прямая m и плоскость α перпендикулярны (рис. 27).

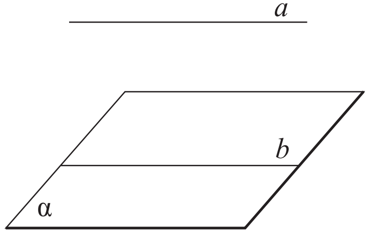


Рис. 26

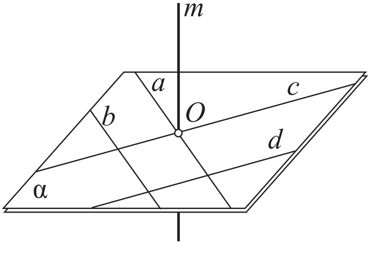


Рис. 27

Рассмотрим вопросы параллельности прямой и плоскости.

Теоремы 8

Признак параллельности прямой и плоскости

1. **Если прямая** (a, см. рис. 26) **параллельна какой-нибудь прямой** (b), **принадлежащей плоскости** (α), **то данная прямая параллельна этой плоскости.**

Обобщенный признак параллельности прямой и плоскости

2. **Если прямая** (a, см. рис. 28) **параллельна какой-либо прямой** (b), **параллельной плоскости** (α), **то данная прямая** (a) **параллельна этой плоскости.**

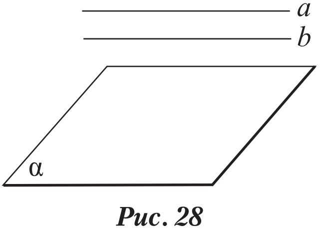


Рис. 28

Обратная теореме 8.1

3. **Если через прямую** (a, рис. 29)**, параллельную плоскости** (α)**, проходит некоторая плоскость, пересекающая первую плоскость, то линия пересечения** (b) **параллельна данной прямой** (a)**.**

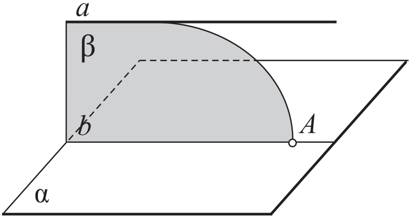


Рис. 29

Доказательства.

1—2. Допустим, что $a \nparallel \alpha$. Тогда:

1) $a \nparallel \alpha \Rightarrow a \otimes \alpha$ (на основании определения параллельности прямой и плоскости);

2) ($a \otimes \alpha$ и $a \parallel b$) $\Rightarrow \alpha \otimes b$ (на основании аксиомы 5 о пересечении параллельных прямых плоскостью);

3) утверждения $\alpha \otimes b$ и $b \subset \alpha$ ($b \parallel \alpha$ для теоремы 8.2) противоречат друг другу;

4) следовательно, $a \parallel \alpha$.

3. 1) Допустим, что $b \nparallel a$ (см. рис. 29);

2) тогда из того, что прямые a и b не параллельны и лежат в одной плоскости — плоскости β, следует, что $a \otimes b$;

3) если прямые a и b пересекаются и прямая b принадлежит плоскости α, то $a \otimes \alpha$;

4) получили противоречие с условием. Следовательно, $a \parallel b$.

Следующие утверждения также имеют определенное теоретическое значение и находят применение при решении задач.

Следствия.

1. *Если прямая параллельна плоскости и имеет с ней общую точку, то такая прямая принадлежит этой плоскости.*

2. *Если прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям, то она параллельна линии их пересечения.*

3. *Через данную точку можно провести сколько угодно прямых, параллельных данной плоскости.*

Рассмотрим вопросы перпендикулярности прямой и плоскости.

Теоремы 9

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

1. **Если прямая** (AA_1, рис. 30)**, пересекающаяся с плоскостью** (α)**, перпендикулярна к каким-либо двум прямым** (OB и OC)**, проведенным на этой плоскости через точку пересечения** (O) **данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна к данной плоскости.**

Обобщенный признак перпендикулярности прямой и плоскости

2. **Если прямая** (m, рис. 31) **перпендикулярна к двум пересекающимся прямым** (OB и OC)**, лежащим в этой плоскости, то данная прямая перпендикулярна к плоскости.**

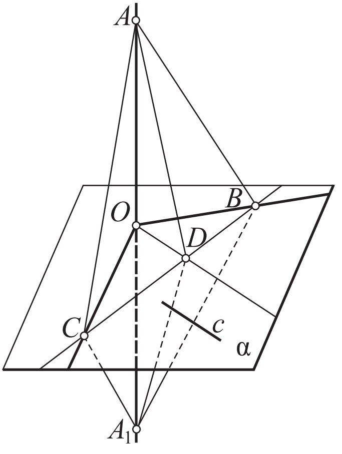


Рис. 30

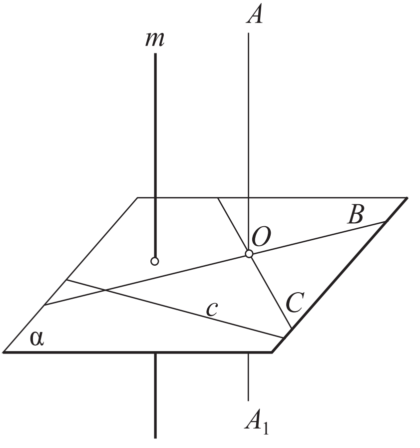


Рис. 31

Теоремы 10

1. **Если одна из параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.**

2. **Через данную точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную к данной плоскости.**

3. **Если две прямые перпендикулярны к одной плоскости, то они параллельны.**

4.2. Примеры решения задач

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 32). Докажите, что:
а) $A_1B_1 \parallel ABCD$; б) $A_1B_1 \parallel DD_1C_1C$; в) $A_1C_1 \parallel ACD_1$;
г) $AA_1 \parallel BB_1D_1D$; д) $AC \perp BB_1D_1D$.

Доказательство.

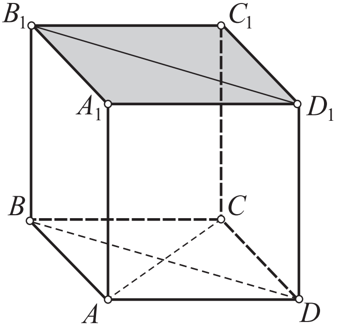


Рис. 32

а) $(A_1B_1 \parallel AB$ и $AB \subset ABCD) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1B_1 \parallel ABCD$ — на основании признака параллельности прямой и плоскости;

б) докажите самостоятельно;

в) $(A_1C_1 \parallel AC$ и $AC \subset ACD_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1C_1 \parallel ACD_1$ — на основании признака параллельности прямой и плоскости;

г) $(AA_1 \parallel BB_1$ и $BB_1 \subset BB_1D_1D) \Rightarrow$
$\Rightarrow AA_1 \parallel BB_1D_1D$ — на основании признака параллельности прямой и плоскости;

д) прямая AC перпендикулярна к двум пересекающимся прямым BD и BB_1, лежащим в плоскости BB_1D_1D.

В самом деле, $AC \perp BD$ как диагонали квадрата. Кроме того, так как $BB_1 \perp BA$ и $BB_1 \perp BC$, то $BB_1 \perp ABCD$, а значит, BB_1 перпендикулярна к прямой AC, лежащей в этой плоскости.

Если прямая AC перпендикулярна к двум пересекающимся прямым BD и BB_1, лежащим в плоскости BB_1D_1D, то $AC \perp BB_1D_1D$.

Задача 2. Дана четырехугольная пирамида $PABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$ (рис. 33). Постройте линию пересечения плоскостей PAB и PCD. Докажите, что линия пересечения параллельна плоскости основания пирамиды.

Решение.

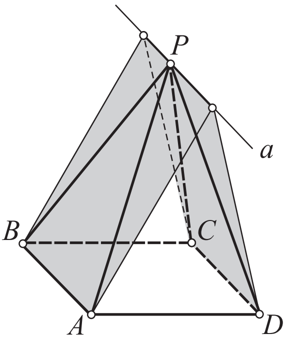


Рис. 33

1) Плоскости PAB и PCD имеют общую точку P. Поэтому они пересекаются по прямой, проходящей через точку P;

2) для построения этой прямой учтем, что $AB \parallel CD$ и $CD \subset PCD$. Поэтому $AB \parallel PCD$;

3) тогда плоскость PAB, проходя через прямую AB, параллельную плоскости PCD, пересечет плоскость PCD по прямой a, параллельной AB;

4) приходим к следующему построению искомой прямой: в плоскости PAB через точку P проводим прямую a, параллельную прямой AB. Прямая a — искомая прямая пересечения плоскостей PAB и PCD;

5) прямая a параллельна плоскости основания пирамиды, так как $a \parallel AB$ и $AB \subset ABCD$.

Задача 3. Стороны AB и AC треугольника ABC параллельны плоскости α (рис. 34). Докажите, что сторона BC также параллельна плоскости α.

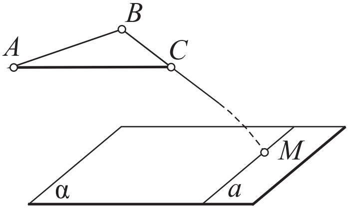


Рис. 34

Доказательство (методом от противного).

1) Допустим, что $BC \nparallel \alpha$;

2) тогда $BC \cap \alpha = M$;

3) плоскости ABC и α, имея общую точку M, пересекутся по некоторой прямой a, проходящей через точку M;

4) прямые AB, AC и a лежат в одной плоскости — плоскости ABC;

5) кроме того, прямые AB и AC не могут пересечь прямую a, так как в этом случае они пересекали бы плоскость α, а это противоречит условию задачи;

6) приходим к выводу, что прямые AB и AC параллельны прямой a;

7) оказалось, что в плоскости ABC через точку A проведены две прямые AB и AC, параллельные прямой a;

8) это противоречит аксиоме параллельности из планиметрии;

9) полученное противоречие означает, что $BC \parallel \alpha$.

Задача 4. Дана пирамида $PABC...$ с равными боковыми ребрами (рис. 35, *а*). Прямая, проходящая через вершину P и перпендикулярная к плоскости основания, пересекает эту плоскость в точке O. Докажите, что точка O является центром окружности, описанной около основания пирамиды.

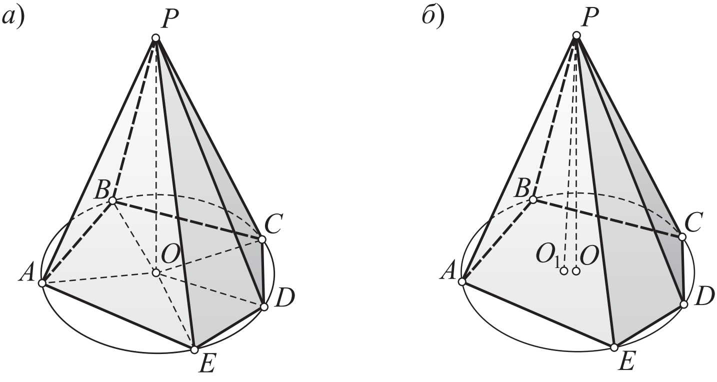


Рис. 35

Доказательство.

1) Соединим отрезками точку O с вершинами многоугольника, лежащего в основании пирамиды. Получим треугольники POA, POB, POC, ... ;

2) так как $PO \perp ABC...$, то прямая PO перпендикулярна к прямым OA, OB, OC, ..., лежащим в плоскости основания;

3) поэтому треугольники POA, POB, POC, ... — прямоугольные;

4) в этих треугольниках катет PO является общим, а гипотенузы равны: $PA = PB = PC = ...$;

5) следовательно, эти треугольники равны по гипотенузе и катету;

6) из равенства треугольников следует, что $OA = OB = OC = ...$;

7) это означает, что точка O является центром окружности, описанной около основания пирамиды.

Задача 5. (*Обратная предыдущей.*) Дана пирамида $PABC...$ с равными боковыми ребрами (рис. 35, *б*) и основанием, около которого можно описать окружность. Пусть O — центр описанной окружности. Докажите, что прямая, проходящая через вершину P и точку O, перпендикулярна к плоскости основания.

Доказательство (методом от противного).

1) Допустим, что прямая PO не перпендикулярна к плоскости основания;

2) пусть $PO_1 \perp ABC...$;

3) на основании предыдущей задачи O_1 — центр окружности, описанной около основания пирамиды;

4) получили противоречие: окружность, описанная около основания, имеет два центра;

5) значит, допущение не является верным и прямая, проходящая через вершину P и точку O, перпендикулярна к плоскости основания.

4.3. Ортогональная проекция. Теоремы о трех перпендикулярах

Пусть дана плоскость α (рис. 36, *а*) и не принадлежащая ей точка A. Проведем через точку A прямую l, перпендикулярную к плоскости α и пересекающую эту плоскость в точке A_1. Полученная точка A_1 называется **ортогональной проекцией точки** A **на плоскость** α. Если

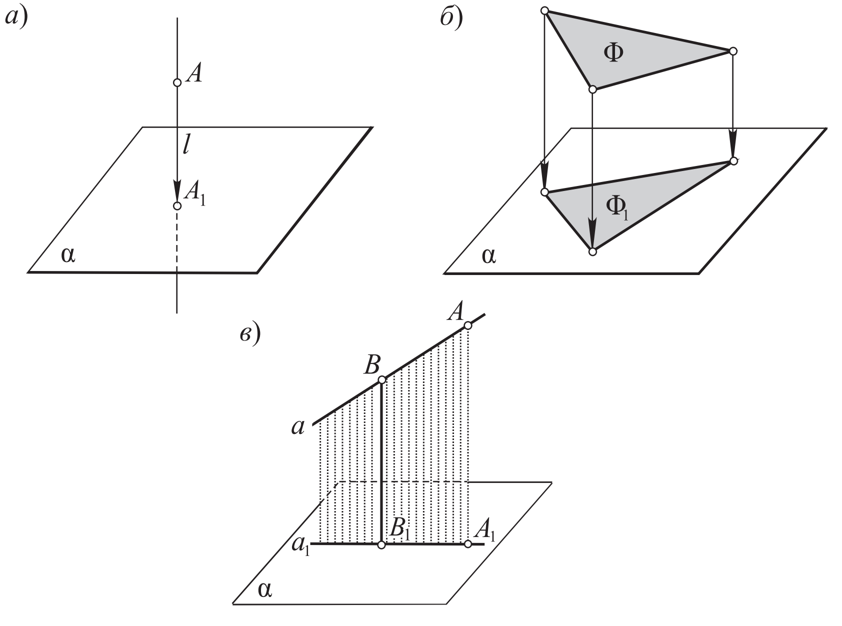


Рис. 36

для каждой точки фигуры Ф (рис. 36, *б*) построим ее ортогональную проекцию на плоскость α, то полученная фигура $Ф_1$ называется **ортогональной проекцией фигуры Ф на плоскость** α. Плоскость α называется **плоскостью проекций**. Если прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна к ней, то она называется **наклонной к этой плоскости**.

Следствие. *Если прямая не перпендикулярна к данной плоскости, то ее ортогональная проекция на эту плоскость есть прямая* (рис. 36, *в*).

Рассмотрим две знаменитые теоремы стереометрии — теоремы о трех перпендикулярах.

Теоремы 11 *(о трех перпендикулярах)*

1. **Если прямая, лежащая в плоскости проекций, перпендикулярна к наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и к проекции этой наклонной** (рис. 37)**.**

Обратная теорема

2. **Если прямая, лежащая в плоскости проекций, перпендикулярна к проекции наклонной, то она перпендикулярна и самой наклонной** (см. рис. 37)**.**

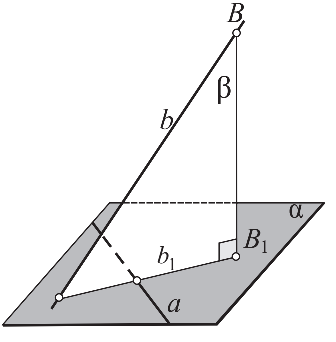


Рис. 37

Доказательства.

1. Дано: b — наклонная к плоскости проекций α, b_1 — ортогональная проекция прямой b на плоскость α и $a \perp b$.

Доказать: $a \perp b_1$.

Доказательство.

1) Возьмем точку $B \in b$ и рассмотрим точку B_1 — ортогональную проекцию точки B на плоскость α;

2) по определению ортогональной проекции $BB_1 \perp \alpha$;

3) $(BB_1 \perp \alpha$ и $a \subset \alpha) \Rightarrow BB_1 \perp a$ (или $a \perp BB_1$);

4) пусть $\beta = (b; BB_1,)$. Тогда

$$(a \perp b \text{ и } a \perp BB_1) \Rightarrow a \perp \beta;$$
$$(a \perp \beta \text{ и } b_1 \subset \beta) \Rightarrow a \perp b_1.$$

2. Теорему 11.2 докажите самостоятельно.

4.4. Примеры решения задач

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 38). Докажите, что $AC \perp B_1D$.

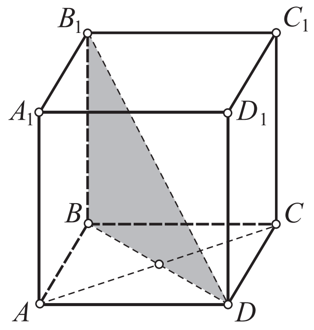


Рис. 38

Доказательство.

1) Прямая AC лежит в плоскости нижнего основания куба, а прямая B_1D — наклонная к этой плоскости;

2) прямая B_1D ортогонально проектируется на плоскость нижнего основания в прямую BD;

3) кроме того, $AC \perp BD$, так как диагонали квадрата перпендикулярны;

4) получаем, что прямая AC, лежащая в плоскости проекций, перпендикулярна к проекции BD наклонной B_1D;

5) по теореме о трех перпендикулярах (теореме 11.2) прямая AC перпендикулярна к наклонной B_1D: $AC \perp B_1D$.

Задача 2. В основании тетраэдра $PABC$ (рис. 39) лежит правильный ΔABC, боковые ребра тетраэдра равны между собой. Докажите, что противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны: $PA \perp BC$, $PB \perp AC$ и $PC \perp AB$.

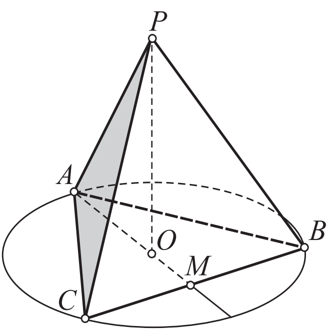


Рис. 39

Доказательство.

1) Пусть точка O — центр окружности, описанной около основания ABC;

2) так как боковые ребра пирамиды равны между собой, то $PO \perp ABC$ (задача 5 из п. 4.2);

3) поэтому прямая AP ортогонально проектируется на плоскость основания в прямую AO;

4) пусть $AO \cap BC = M$. Отрезок AM в правильном треугольнике является высотой. Тогда $BC \perp AM$ и, значит, $BC \perp AO$;

5) если прямая BC, лежащая в плоскости проекций, перпендикулярна проекции AO наклонной AP, то по теореме о трех перпендикулярах (теореме 11.2) $BC \perp PA$;

6) аналогично доказывается, что $PB \perp AC$ и $PC \perp AB$.

Задача 3. Из точки A выходят три луча AB, AC и AP, которые не лежат в одной плоскости (рис. 40). Луч AP образует с лучами AB и AC равные углы (отличные от прямого угла). Докажите, что луч AP ортогонально проектируется на плоскость BAC либо в биссектрису угла BAC, либо в продолжение этой биссектрисы.

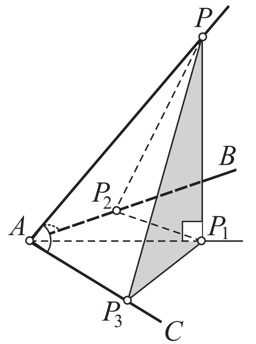


Рис. 40

Доказательство.

1-й случай: луч AP образует с лучами AB и AC равные острые углы. Докажем, что луч AP ортогонально проектируется на плоскость BAC в биссектрису угла BAC.

1) Пусть P_1 — ортогональная проекция точки P на плоскость BAC. Тогда луч AP_1 — ортогональная проекция луча AP на плоскость BAC;

2) из точки P_1 проведем перпендикуляры P_1P_2 и P_1P_3 соответственно на лучи AB и AC. Точку P соединим отрезками с точками P_2 и P_3;

3) отрезки P_1P_2 и P_1P_3 являются ортогональными проекциями соответственно отрезков PP_2 и PP_3 на плоскость BAC;

4) прямая AB, принадлежащая плоскости проекций, перпендикулярна к проекции P_1P_2 наклонной PP_2. По теореме о трех перпендикулярах (теореме 11.2) $AB \perp PP_2$;

5) аналогично доказывается, что $AC \perp PP_3$;

6) прямоугольные треугольники PAP_2 и PAP_3 равны по гипотенузе и острому углу;

7) из их равенства следует, что $PP_2 = PP_3$;

8) тогда прямоугольные треугольники PP_1P_2 и PP_1P_3 (почему они прямоугольные?) равны по гипотенузе и катету;

9) из их равенства следует, что $P_1P_2 = P_1P_3$;

10) получаем, что отрезки P_1P_2 и P_1P_3 перпендикулярны к соответственным сторонам угла BAC и равны, т. е. точка P_1 равноудалена от сторон угла BAC;

11) поэтому точка P_1 принадлежит биссектрисе угла BAC. Значит, луч AP_1 — биссектриса угла BAC.

2-й случай: луч AP образует с лучами AB и AC равные тупые углы. (Рассмотрите самостоятельно.)

4.5. Угол между прямой и плоскостью

Если прямая перпендикулярна к плоскости, то по определению полагают, что **угол между прямой и плоскостью** равен 90°.

Пусть теперь прямая a (рис. 41) — наклонная к плоскости α. Что такое угол между прямой и плоскостью в этом случае? Пусть O — точка пересечения прямой a и плоскости α, a_1 — ортогональная проекция наклонной a на плоскость α. **Углом между наклонной и плоскостью** называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость (угол φ, см. рис. 41).

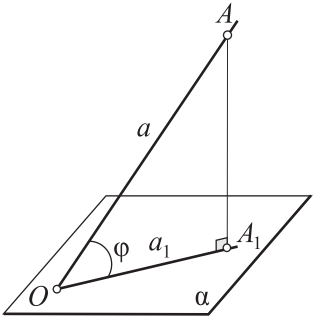


Рис. 41

4.6. Классификация взаимных положений прямой и плоскости

Рассмотренный материал позволяет утверждать, что возможны только два случая взаимного положения прямой и плоскости (рис. 42):

прямая и плоскость либо пересекаются, либо параллельны. В первом случае возможно выделение двух подслучаев: прямая либо перпендикулярна, либо наклонна к плоскости.

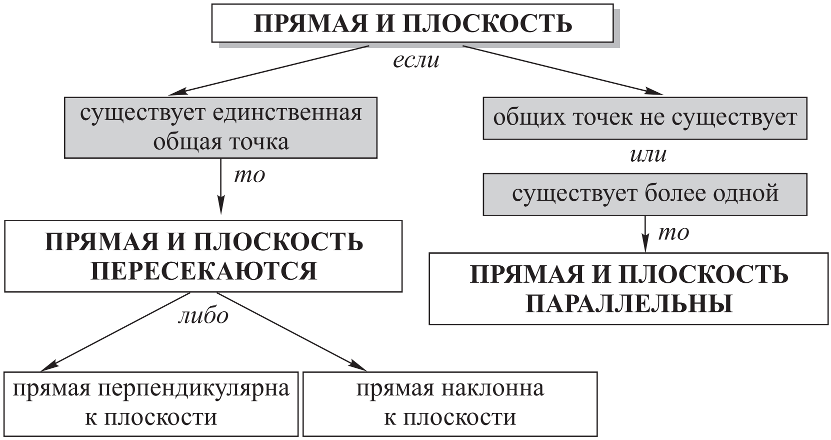


Рис. 42

4.7. Примеры решения задач. Формула Эйлера

Задача 1. В передней грани куба проведена диагональ. Найдите угол между этой диагональю и плоскостью нижнего основания куба.

Решение.

1) Требуется найти угол между диагональю AD_1 и плоскостью нижнего основания куба (рис. 43);

2) ребро A_1D_1 является ортогональной проекцией диагонали AD_1 на эту плоскость;

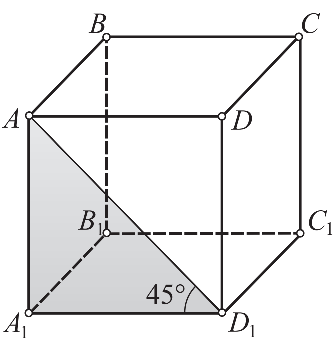


Рис. 43

3) поэтому угол между диагональю AD_1 и плоскостью нижнего основания есть угол AD_1A_1;

4) так как грань куба — квадрат, то $\angle AD_1A_1 = 45°$.

Ответ: $\angle AD_1A_1 = 45°$.

Задача 2. Дан $\angle PAB = \varphi$, сторона AB которого принадлежит плоскости проекций, а сторона AP — наклонена к этой плоскости под углом β (рис. 44); угол PAB ортогонально проектируется на плоскость проекций в угол $P_1AB = \varphi_1$. Докажите формулу Эйлера: $\cos\varphi = \cos\varphi_1 \cdot \cos\beta$.

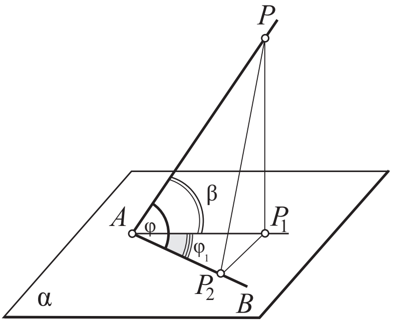


Рис. 44

Доказательство.

1-й случай: $\angle PAB$ — острый.

1)Так как луч AP ортогонально проектируется на плоскость α в луч AP_1, то $\angle PAP_1$ — угол наклона прямой AP к плоскости α. По условию $\angle PAP_1 = \beta$;

2) ($PP_1 \perp \alpha$ и $AP_1 \subset \alpha$) $\Rightarrow$ ($PP_1 \perp AP$ и ΔAPP_1 — прямоугольный);

3) проведем перпендикуляр P_1P_2 к стороне AB (ΔAP_1P_2 — прямоугольный) и точку P_2 соединим отрезком с точкой P;

4) получаем, что прямая AB, лежащая в плоскости проекций α, перпендикулярна к ортогональной проекции P_1P_2 наклонной PP_2. По теореме о трех перпендикулярах (теореме 11.2) прямая AB перпендикулярна к наклонной PP_2;

5) значит, треугольник APP_2 — прямоугольный;

6) из прямоугольных треугольников APP_2, AP_1P_2 и APP_1, выразив косинусы интересующих нас углов, придем к требуемой формуле:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{AP_2}{AP}, \\ \cos\varphi_1 &= \frac{AP_2}{AP_1}, \\ \cos\beta &= \frac{AP_1}{AP} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\varphi_1 \cdot \cos\beta = \frac{AP_2}{AP_1} \cdot \frac{AP_1}{AP} = \frac{AP_2}{AP} = \cos\varphi .$$

2-й и *3-й случаи*: $\angle PAB$ — прямой, $\angle PAB$ — тупой.

Задача 3. Дана треугольная пирамида $PABC$ (рис. 45), в основании которой лежит правильный треугольник и боковые ребра которой в 2 раза больше ребер основания. Постройте угол между прямой PA и плоскостью грани PBC. Найдите косинус этого угла.

Решение.

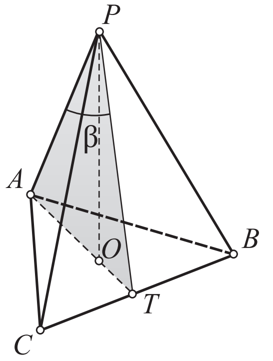


Рис. 45

1) Так как $\Delta APB = \Delta APC$ (по трем сторонам), то $\angle APB = \angle APC$;

2) так как луч PA образует равные углы с лучами PB и PC, то он ортогонально проектируется в биссектрису PT угла BPC (задача 3 из п. 4.4.);

3) построим биссектрису PT угла BPC, получим $\angle APT$ — угол между ребром PA и плоскостью грани PBC;

4) для нахождения величины $\angle APT$ рассмотрим треугольник APT, применим к нему теорему косинусов (сторону основания примем равной a, искомый угол обозначим через β):

$$\left.\begin{array}{l} AT^2 = AP^2 + PT^2 - 2AP \cdot PT \cdot \cos\beta, \\ AT = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},\ PT = \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3a^2}{4} =$$

$$= 4a^2 + \frac{15a^2}{4} - 2 \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot \cos\beta;$$

5) отсюда $\cos\beta = \dfrac{7}{2\sqrt{15}}$, $\beta \approx 28{,}2°$.

Ответ: $\cos\beta = \dfrac{7}{2\sqrt{15}}$.

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 46), точка T — середина ребра DD_1. Постройте угол между прямой C_1T и плоскостью AA_1C_1C и найдите синус этого угла.

Решение.

1) Построим ортогональную проекцию точки T на плоскость AA_1C_1C. Для этого учтем, что $DO \perp AA_1C_1C$ (установите, что $DO \perp AC$ и $DO \perp AA_1$). Поэтому в плоскости BB_1D_1D проведем $TP \parallel DO$. По теореме 10.1 $TP \perp AA_1C_1C$;

2) построим точку $M = TP \cap AA_1C_1C$. Точка M должна принадлежать линии OO_1 — линии пересечения плоскостей AA_1C_1C и BB_1D_1D. Поэтому $M = TP \cap OO_1$;

3) тогда отрезок C_1M — ортогональная проекция отрезка C_1T на плоскость AA_1C_1C и $\angle TC_1M$ — искомый угол между прямой C_1T и плоскостью AA_1C_1C;

4) для нахождения величины этого угла рассмотрим прямоугольный треугольник TC_1M (почему он прямоугольный?);

5) обозначим $\angle TC_1M$ через β, ребро куба через a. Так как $TM = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $C_1T = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, то

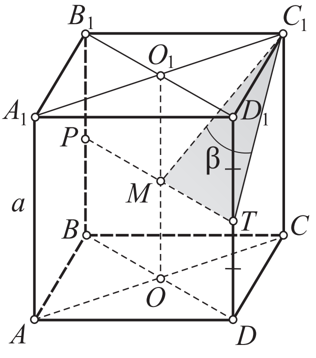


Рис. 46

$$\sin\beta = \frac{MT}{C_1T} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \beta \approx 43{,}6°.$$

Ответ: $\sin\beta = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

§ 5. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

5.1. Параллельность двух плоскостей

Две плоскости называются **параллельными**, если они либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Обозначение: $\alpha \parallel \beta$ — плоскости α и β параллельны.

Теоремы *(признаки параллельности плоскостей)*

1-й признак

12. **Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости** (рис. 47, *а*)**, то такие плоскости параллельны.**

2-й признак

13. **Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.**

Доказательства.

12. 1) Возьмем плоскость α и проведем в ней две пересекающиеся прямые a и b (см. рис. 47, *а*). Существует точка $O' \notin \alpha$. Через точку O' проведем прямые $a' \parallel a$ и $b' \parallel b$;

2) прямые a' и b' пересекаются (почему?). Через пересекающиеся прямые a' и b' можно провести плоскость. Обозначим ее через α';

3) получили две плоскости α и α', которые удовлетворяют условию теоремы. Докажем, что $\alpha \parallel \alpha'$ (методом от противного);

4) допустим, что $\alpha \nparallel \alpha'$ (рис. 47, *б*);

5) тогда α и α' — две различные плоскости, имеющие общие точки. Поэтому $\alpha \cap \alpha' = c$;

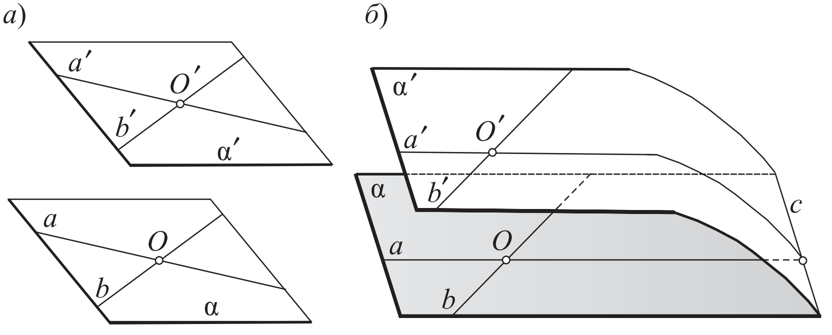


Рис. 47

6) прямая c пересечет хотя бы одну из прямых a' и b' (Почему? Вспомните аксиому параллельности из планиметрии!);

7) пусть $c \otimes a'$;

8) тогда $\alpha \otimes a'$ и по аксиоме параллельных прямых в пространстве $\alpha \otimes a$, что противоречит условию;

9) следовательно, $\alpha \parallel \alpha'$.

13. 1) Пусть $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ (рис. 48, *а*). Докажем (методом от противного), что $\alpha \parallel \beta$. Допустим, что $\alpha \nparallel \beta$.

2) тогда $\alpha \otimes \beta$. Пусть M — одна из их общих точек (рис. 48, *б*);

3) проведем прямые MA и MB;

4) ($a \perp \alpha$ и $MA \subset \alpha$) $\Rightarrow a \perp MA$. Аналогично получаем: $a \perp MB$;

5) тогда из точки M в плоскости AMB оказались проведенными два перпендикуляра к прямой a, что невозможно;

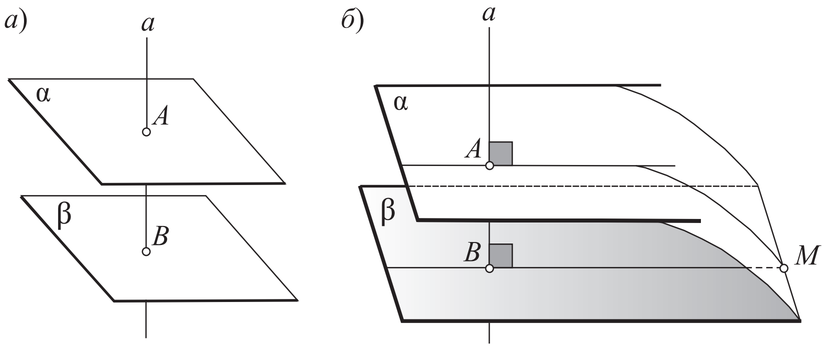


Рис. 48

6) следовательно, α || β.

Выясним, какими свойствами обладают параллельные плоскости.

Теоремы 14

1. **Через точку, лежащую вне данной плоскости, можно провести не более одной плоскости, параллельной данной.**

2. **Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость, причем линии пересечения параллельны.**

3. **Если две плоскости параллельны, то любая прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую.**

4. **Если две плоскости параллельны, то любая прямая, перпендикулярная к одной из них, перпендикулярна и к другой.**

Доказательства.

1. 1) Пусть $A \notin \alpha$ (рис. 49, *а*) и плоскость β проходит через точку A и параллельна плоскости α. Докажем, что другой плоскости, проходящей через точку A и параллельной плоскости α, не существует. Допустим временно, что через точку A можно провести две плоскости β и β_1 (рис. 49, *б*), параллельные плоскости α;

2) в плоскости α проведем некоторую прямую a. Через прямую a и точку A проведем плоскость γ;

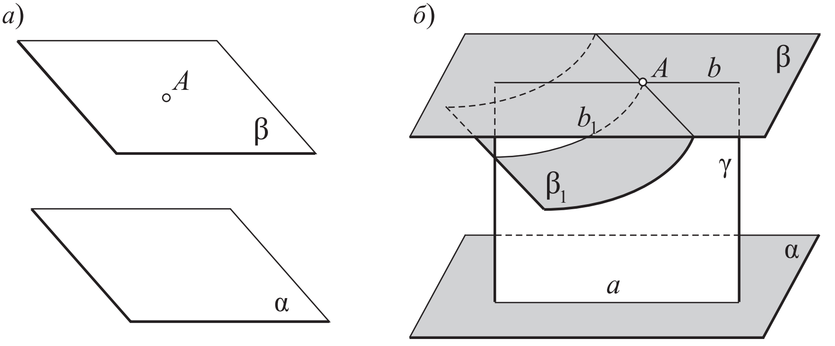


Рис. 49

3) плоскость γ, имея с плоскостями β и β_1 общую точку A, будет пересекать их по некоторым прямым b и b_1;

4) эти прямые не могут пересечь прямую a. В противном случае плоскости β и β_1 пересекли бы плоскость α, что противоречит допущению;

5) получили **противоречие с аксиомой параллельности из планиметрии**: в плоскости γ через точку A проведены две прямые b и b_1, параллельные прямой a, что невозможно;

6) следовательно, через точку A можно провести не более одной плоскости, параллельной плоскости α.

2. 1) Пусть $\alpha \parallel \beta$ (рис. 50, *а*) и плоскость γ пересекает плоскость α. В силу предыдущей теоремы плоскость γ пересечет и плоскость β. Пусть $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$. Докажем, что $a \parallel b$;

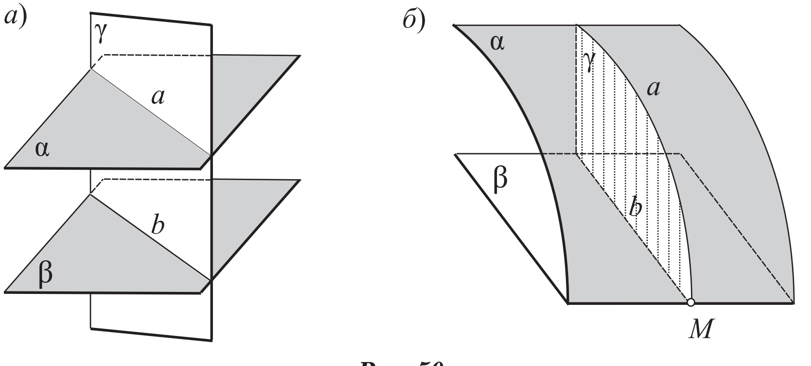


Рис. 50

2) допустим, что $a \nparallel b$ (рис. 50, *б*);

3) так как эти прямые лежат в плоскости γ, то $a \otimes b$;

4) пусть $a \cap b = M$. Эта точка будет общей и для плоскостей α и β, что противоречит условию;

5) следовательно, $a \parallel b$.

3. 1) Пусть $\beta \parallel \alpha$ и $a \otimes \beta$. Докажем, что $a \otimes \alpha$ (рис. 51, *а*). Допустим временно, что прямая a, пересекая плоскость β (в точке A), не пересекает плоскость α (рис. 51, *б*);

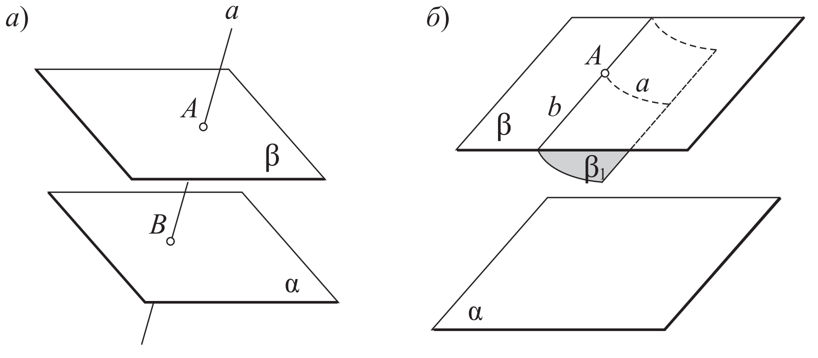


Рис. 51

2) в плоскости β через точку A проведем некоторую прямую b;

3) через прямые a и b проведем плоскость β_1;

4) плоскость β_1 проходит через две пересекающиеся прямые a и b, параллельные плоскости α. Поэтому $\beta_1 \parallel \alpha$;

5) получили, что через точку A проходят две плоскости β и β_1, параллельные плоскости α. Это противоречит теореме 14.1;

6) следовательно, $a \otimes \alpha$.

4. 1) Пусть $a \perp \beta$ и $\beta \parallel \alpha$ (рис. 52). Докажем, что $a \perp \alpha$;

2) так как $a \perp \beta$, то $a \otimes \beta$. По предыдущей теореме $a \otimes \alpha$;

3) через прямую a проведем две плоскости γ и δ, которые пересекают плоскости β и α соответственно по прямым b_1, b_2 и c_1, c_2;

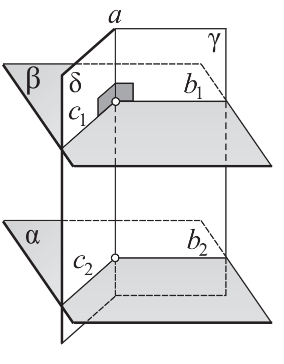


Рис. 52

4) по теореме 14.2 $b_1 \parallel b_2$ и $c_1 \parallel c_2$;

5) так как $a \perp \beta$, то $a \perp b_1$ и $a \perp c_1$;

6) воспользуемся теперь планиметрическим фактом: если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой. Поэтому

$$(a \perp b_1 \text{ и } b_1 \parallel b_2) \Rightarrow a \perp b_2, \quad (a \perp c_1 \text{ и } c_1 \parallel c_2) \Rightarrow a \perp c_2;$$

7) отсюда $a \perp \alpha$.

5.2. Примеры решения задач

Задача 1. Приведите другие способы доказательства теоремы 14.3.

Доказательство.

1-й способ. 1) Пусть $\beta \parallel \alpha$ и $a \otimes \beta$. Докажем, что $a \otimes \alpha$ (рис. 53);

2) через точку $A = a \cap \beta$ проведем произвольную прямую b, пересекающую плоскость α;

3) проведем плоскость $\gamma = (a, b)$;

4) построим прямые $c = \gamma \cap \beta$ и $c_1 = \gamma \cap \alpha$. По теореме 14.2 $c \parallel c_1$;

5) прямая a, пересекая прямую c, пересечет параллельную прямую c_1 (все эти три прямые лежат в одной плоскости γ), а значит, прямая a пересечет плоскость α;

6) итак, $a \otimes \alpha$.

2-й способ. 1) Через произвольную точку $M \in \alpha$ проведем прямую $b \parallel a$ (рис. 54). Докажем (методом от противного), что $b \otimes \alpha$. Допустим, что $b \subset \alpha$;

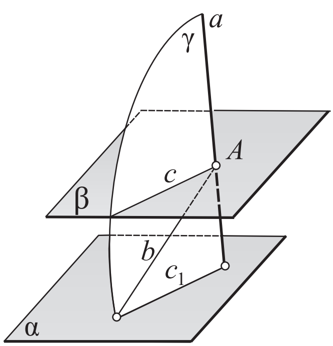


Рис. 53

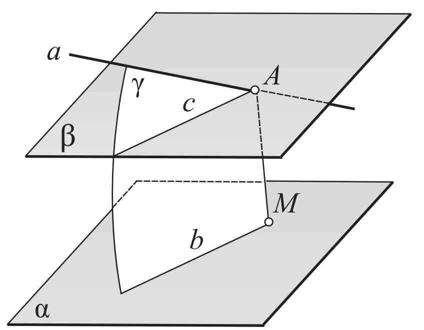


Рис. 54

2) проведем плоскость $\gamma = (a, b)$;

3) пусть $c = \gamma \cap \beta$. По теореме 14.2 $c \parallel b$;

4) тогда в плоскости γ через точку A оказались проведенными две прямые a и c, параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме параллельных прямых из планиметрии;

5) значит, $b \not\subset \alpha$ и поэтому $b \otimes \alpha$;

6) если $\alpha \otimes b$ и $b \parallel a$, то $\alpha \otimes a$ — по аксиоме параллельных прямых в пространстве. Это и требовалось доказать.

Задача 2. Приведите другое доказательство теоремы 14.4.

Доказательство.

1) Пусть $a \perp \beta$ и $\beta \parallel \alpha$ (рис. 55). Докажем (методом от противного), что $a \perp \alpha$;

2) так как $a \perp \beta$, то $a \otimes \beta$. По теореме 14.3 $a \otimes \alpha$. Пусть $a \cap \alpha = A$. Допустим, что плоскость α не перпендикулярна прямой a. Через точку A проведем плоскость $\gamma \perp a$;

3) по теореме 13.2 $\gamma \parallel \beta$. Получили, что через точку A проходят две плоскости α и γ, параллельные плоскости β. Это противоречит теореме 14.1;

4) значит, $a \perp \alpha$.

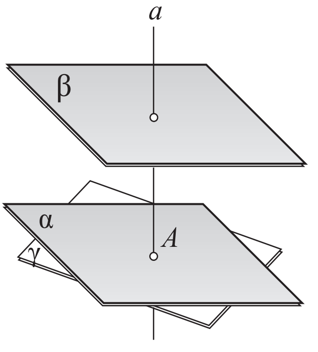


Рис. 55

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 56). Докажите, что плоскости AB_1C и A_1C_1D параллельны.

Доказательство.

1) В плоскости AB_1C возьмем две пересекающиеся прямые AB_1 и AC;

2) эти прямые параллельны соответственно прямым DC_1 и A_1C_1, лежащим в плоскости A_1C_1D;

3) поэтому $AB_1C \parallel A_1C_1D$.

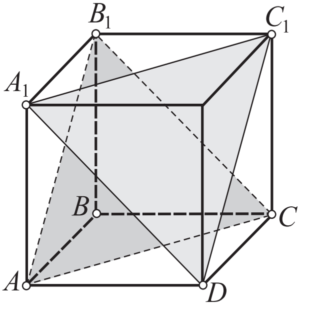


Рис. 56

Следующие задачи будут связаны с построением сечения фигуры плоскостью.

Пусть дана некоторая пространственная фигура Φ и плоскость α. Сечением фигуры Φ плоскостью α называется фигура $S = \Phi \cap \alpha$. Плоскость α называется *плоскостью сечения*.

Задача 4. Дана пятиугольная пирамида $PABCDE$ (рис. 57) и точка $X_1 \in PA$. Постройте сечение пирамиды плоскостью α, проходящей через точку X_1 и параллельной плоскости основания.

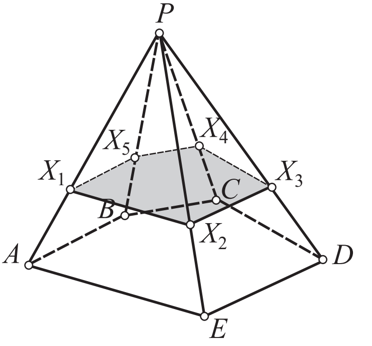


Рис. 57

Решение.

1) Так как плоскость α и плоскость основания параллельны, то плоскость APE пересечет эти плоскости по параллельным прямым. Поэтому плоскость α пересечет плоскость APE по прямой X_1X_2, параллельной AE;

2) аналогично строим остальные отрезки, по которым плоскость α пересекает боковые грани пирамиды;

3) в итоге получаем искомое сечение — пятиугольник $X_1X_2X_3X_4X_5$.

Задача 5. Дан тетраэдр $PABC$ (рис. 58) и точка $X_1 \in PA$. Точка T — середина ребра AC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью α, проходящей через точку X_1 и параллельной плоскости PBT.

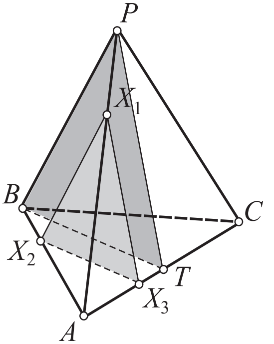


Рис. 58

Решение.

1) Так как $\alpha \parallel PBT$, то плоскость PAB пересечет эти плоскости по параллельным прямым. Поэтому плоскость α пересечет плоскость PAB по прямой X_1X_2, параллельной PB;

2) аналогично строим остальные отрезки, по которым плоскость α пересекает грани пирамиды;

3) $\Delta X_1X_2X_3$ — искомое сечение.

Задача 6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 59) и точка $X_1 \in A_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью α, проходящей через точку X_1 и параллельной плоскости AB_1C.

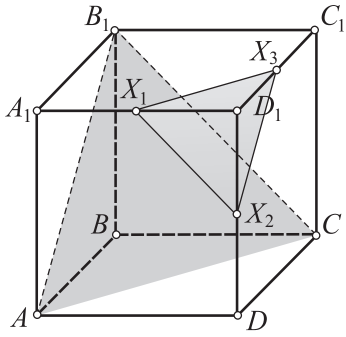


Рис. 59

Решение.

1) Воспользуемся тем, что если две параллельные плоскости пересечь двумя параллельными плоскостями, то получим четыре линии пересечения, которые попарно параллельны;

2) так как $\alpha \parallel AB_1C$, то плоскости передней и задней граней куба пересекут две первые плоскости по четырем попарно параллельным прямым;

3) прямая B_1C — одна такая прямая, лежащая в плоскости задней грани. Прямая X_1X_2 — другая прямая, лежащая в плоскости передней грани. Итак, плоскость α пересекает переднюю грань по отрезку X_1X_2, параллельному B_1C;

4) аналогично строим остальные отрезки, по которым плоскость α пересекает грани куба;

5) $\Delta X_1X_2X_3$ — искомое сечение.

5.3. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями

Взаимное расположение двух плоскостей может быть охарактеризовано с помощью понятий «двугранный угол», «угол между двумя плоскостями». Что такое двугранный угол?

Двугранным углом называется фигура, состоящая из двух полуплоскостей (α и β, рис. 60, *а*), имеющих общую границу (l). Данные полуплоскости называются *гранями* двугранного угла, общая граница полуплоскостей — *ребром* двугранного угла.

Обозначение: $\alpha l \beta$ — двугранный угол с гранями α и β и ребром l.

Линейным углом двугранного угла называется плоский угол ($\angle MON$, рис. 60, *б*), полученный при пересечении двугранного угла плоскостью (γ), перпендикулярной к его ребру.

Пусть дан двугранный угол $\alpha l \beta$ (рис. 60, *в*). Полуплоскость γ с ребром l, пересекающая отрезок, концы которого лежат на гранях

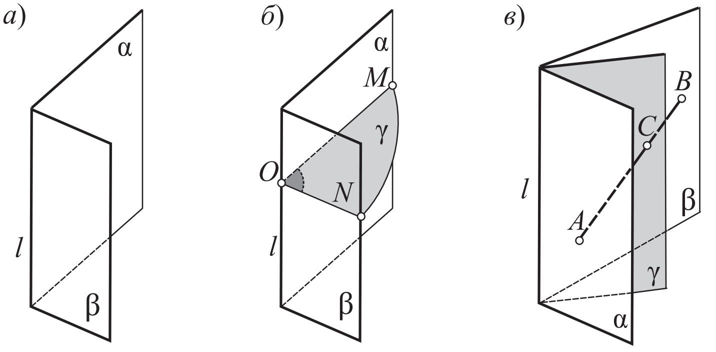


Рис. 60

двугранного угла, называется *полуплоскостью, проходящей между гранями* данного двугранного угла.

Биссектором двугранного угла называется полуплоскость, проходящая между его гранями и делящая двугранный угол на два равных двугранных угла.

Измеряются и сравниваются двугранные углы с помощью их линейных углов (см. далее теорему 15.1). Она дает возможность также ввести понятие угла между двумя пересекающимися плоскостями.

За меру двугранного угла принимается мера его линейного угла, т. е. если линейный угол содержит $n°$, то и мера двугранного угла равна $n°$.

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется меньший из двугранных углов, получаемых при их пересечении.

Теория двугранного угла аналогична теории угла, рассматриваемого в планиметрии. Эта аналогия хорошо видна уже в следующих определениях:

два двугранных угла называются **равными**, если они имеют одинаковую градусную меру;

двугранный угол, равный 90°, называют **прямым**; меньший 90° — **острым**; больший 90°, но меньший 180° — **тупым**; равный 180° — **развернутым**.

Аналогично, как и в планиметрии, могут быть введены понятия смежных и вертикальных двугранных углов.

Теоремы 15

1. **Все линейные углы двугранного угла равны.**

2. **Площадь ортогональной проекции многоугольника равна площади данного многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью данного многоугольника и плоскостью проекций.**

Доказательство.

2. Пусть S — площадь данной фигуры, S_1 — площадь ее ортогональной проекции, α — плоскость проекций, β — плоскость данной фигуры, φ — угол между плоскостями α и β (рис. 61, *а*). Докажем, что $S_1 = S \cos \varphi$.

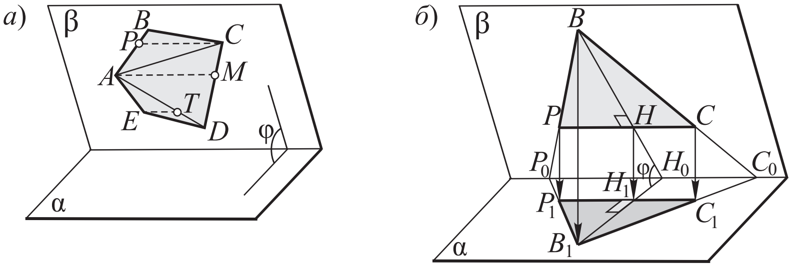


Рис. 61

План доказательства. Доказательство попытаемся свести к выводу искомой формулы для частного случая треугольника, когда в нем имеется сторона, параллельная линии пересечения плоскостей α и β. С учетом этого наметим следующие действия:

1) убедимся, что многоугольник можно разбить на треугольники, в каждом из которых имеется сторона, параллельная линии пересечения плоскостей α и β — прямой l (см. рис. 61, *а*);

2) докажем справедливость формулы $S_1 = S \cos \varphi$ для одного такого треугольника (например, ΔPBC, рис. 61, *б*);

3) докажем данную формулу для произвольного плоского многоугольника.

Осуществление плана. Пусть в треугольнике PBC сторона PC параллельна линии пересечения плоскостей α и β — прямой l. Пусть

B_1 — ортогональная проекция вершины B на плоскость α ($BB_1 \perp \alpha$), $P_0 = PB \cap l$, $C_0 = BC \cap l$. Проведем прямые B_1P_0 и B_1C_0. Эти прямые являются проекциями прямых BP и BC соответственно. Проведем PP_1 и CC_1 параллельно BB_1, полученные точки $P_1 \in B_1P_0$ и $C_1 \in B_1C_0$ являются проекциями вершин P и C на плоскость α. В итоге получаем $\Delta B_1P_1C_1$ — проекцию ΔBPC. Проведем еще высоту BH треугольника PBC и построим ее проекцию B_1H_1. Установим, что:

а) $PC = P_1C_1$;

б) B_1H_1 является высотой треугольника $B_1P_1C_1$;

в) $B_1H_1 = BH \cos\varphi$;

г) $S_{B_1P_1C_1} = \frac{1}{2} P_1C_1 \cdot B_1H_1 = \frac{1}{2} PC \cdot BH \cdot \cos\varphi = S_{BPC} \cos\varphi$;

д) $S_1 = S_{A_1B_1C_1D_1\ldots} = S_{P_1B_1C_1} + S_{A_1P_1C_1} + \ldots + S_{E_1T_1D_1} =$
$= S_{PBC} \cos\varphi + S_{APC} \cos\varphi + \ldots + S_{ETD} \cos\varphi =$
$= (S_{PBC} + S_{APC} + \ldots + S_{ETD}) \cos\varphi = S_{ABCD\ldots} \cos\varphi.$

5.4. Примеры решения задач

Задача 1. Дана треугольная пирамида $PABC$ (рис. 62, *а*), в основании которой лежит правильный треугольник ABC, а боковые ребра в 2 раза больше ребер основания.

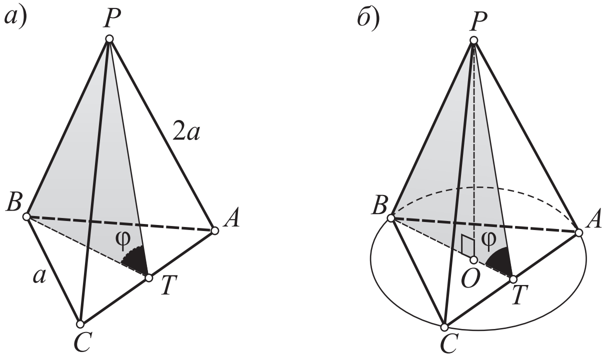


Рис. 62

1. Постройте угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания (угол наклона боковой грани к плоскости основания).

2. Найдите косинус этого угла.

3. Докажите, что боковые грани данной пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом.

Решение.

1. Построим угол между плоскостью боковой грани PAC и плоскостью основания ABC. Эти плоскости пересекаются по прямой AC (ребру искомого двугранного угла). В плоскости основания проведем $BT \perp AC$. Так как треугольник ABC — правильный, то высота BT является медианой треугольника. Поэтому T — середина стороны AC. Проведем отрезок PT. Так как треугольник APC — равнобедренный, то медиана PT является его высотой. Поскольку TB и TP перпендикулярны к AC, то угол PTB является линейным углом искомого двугранного угла.

2. *1-й способ* (см. рис. 62, *а*). Угол PTB будем находить из треугольника PTB с помощью теоремы косинусов. Обозначим этот угол через φ, а сторону основания через a. Так как

$$BT = \sqrt{BC^2 - TC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad PT = \sqrt{PC^2 - TC^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2},$$

то

$$PB^2 = PT^2 + BT^2 - 2PT \cdot BT \cdot \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 = \frac{15a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}, \ \varphi \approx 81{,}4^\circ.$$

2-й способ (рис. 62, *б*). Пусть O — центр окружности, описанной около основания. Так как боковые ребра пирамиды равны, то $PO \perp ABC$. Тогда $PO \perp TO$ и треугольник PTO — прямоугольный. Имеем: $OT = \frac{1}{3}BT = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\cos\varphi = \frac{OT}{PT} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{6 \cdot a\sqrt{15}} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

3. Построив линейные углы двугранных углов при ребрах основания AB и BC, приходим к их равенству, что следует из равенства соответствующих треугольников. Выполните эти построения самостоятельно.

Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи постройте и найдите косинус угла между плоскостями боковых граней PAB и PAC (рис. 63).

Решение.

Построение. 1) Построим линейный угол двугранного угла с ребром PA. Для этого проведем высоту BT треугольника PAB;

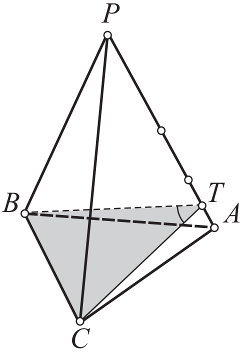


Рис. 63

2) так как $\Delta PAB = \Delta PAC$, то высоты этих треугольников, проведенные к стороне PA, равны;

3) равны и отрезки, на которые основания высот делят сторону PA. Поэтому CT будет являться высотой треугольника PAC;

4) получили угол BTC — линейный угол искомого угла между плоскостями граней PAB и PAC;

5) заметим, что выполненный рисунок пока является схематичным. Для его точного построения необходимо знать, в каком отношении точка T делит ребро PA. Для этого потребуются некоторые вычисления. Угол BTC будем находить из треугольника BTC с помощью теоремы косинусов. Предварительно найдем стороны треугольника BTC. Воспользуемся тем, что BT — высота треугольника PAB. Применим метод площадей: $S_{PAB} = \sqrt{\frac{5a}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ (по формуле Герона), $S_{PAB} = \frac{1}{2} PA \cdot BT$. Приравнивая полученные выражения для площади, находим, что $BT = \frac{a\sqrt{15}}{4}$. Тогда

$$AT = \sqrt{AB^2 - BT^2} = \frac{2a}{8}, \quad AT = \frac{1}{8} PA.$$

Точка T и затем угол BTC с помощью этого условия строятся точно. Первая часть решения задачи завершена.

Вычисления. 1) Применим к треугольнику BTC теорему косинусов:

$$BC^2 = BT^2 + CT^2 - 2BT \cdot CT \cdot \cos\varphi;$$

2) подставив в это равенство значения сторон треугольника, найдем, что $\cos\varphi = \frac{7}{15}$, $\varphi \approx 62{,}2°$.

Ответ: $\cos\varphi = \frac{7}{15}$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 64). Постройте угол между плоскостями AA_1C_1C и A_1B_1CD и найдите его величину.

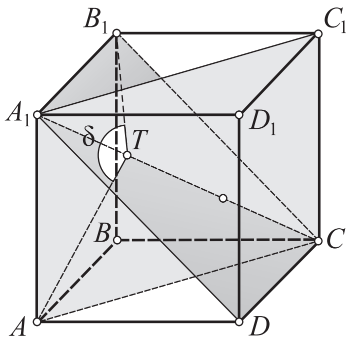


Рис. 64

Решение.

Построение. 1) Так как точки A_1 и C — общие точки данных плоскостей, то они пересекаются по прямой A_1C;

2) в плоскости AA_1C_1C из точки A проведем перпендикуляр AT к прямой A_1C. Этот перпендикуляр будет являться высотой треугольника A_1AC, проведенной к его гипотенузе A_1C;

3) в плоскости A_1B_1CD проведем перпендикуляр из точки B_1 к прямой A_1C. Он будет являться высотой прямоугольного треугольника A_1B_1C, проведенной к гипотенузе A_1C;

4) $\Delta A_1AC = \Delta CDA_1$ — по катету и гипотенузе. Поэтому указанные высоты на гипотенузе A_1C отсекут один и тот же отрезок — отрезок A_1T;

5) поэтому B_1T — высота треугольника A_1B_1C;

6) значит, $\angle ATB_1$ — линейный угол одного из двугранных углов, образуемых при пересечении данных плоскостей;

7) как и при решении предыдущей задачи, заметим, что выполненный рисунок пока является схематичным. Для его точного построения необходимо знать, в каком отношении точка T делит отрезок A_1C. Для этого потребуются некоторые вычисления. Воспользуемся формулой высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе:

$$AT = \frac{AA_1 \cdot AC}{A_1C} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$A_1T = \sqrt{AA_1^2 - AT^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad A_1T : A_1C = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Точка T и угол ATB_1 с помощью этого условия строятся точно. Первая часть решения задачи завершена.

Вычисления. 1) Применим к треугольнику ATB_1 теорему косинусов: $AB_1^2 = AT^2 + B_1T^2 - 2AT \cdot B_1T \cdot \cos\delta$;

2) подставив в это равенство значения сторон треугольника, найдем, что $\cos\delta = -\frac{1}{2}$, $\delta = 120°$;

3) если один из двугранных углов, образуемых при пересечении данных плоскостей, равен 120°, то угол φ между плоскостями равен смежному углу: $\varphi = 180° - \delta = 60°$.

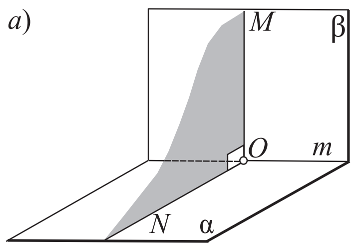
Ответ: $\varphi = 60°$.

5.5. Перпендикулярность двух плоскостей. Классификация взаимных положений двух плоскостей

Две плоскости (рис. 65, *а*) называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым двугранным углом. Обозначение: $\alpha \perp \beta$ — плоскости α и β перпендикулярны.

Классификация взаимных положений двух плоскостей представлена на рисунке 65, *б*.

а)



б)

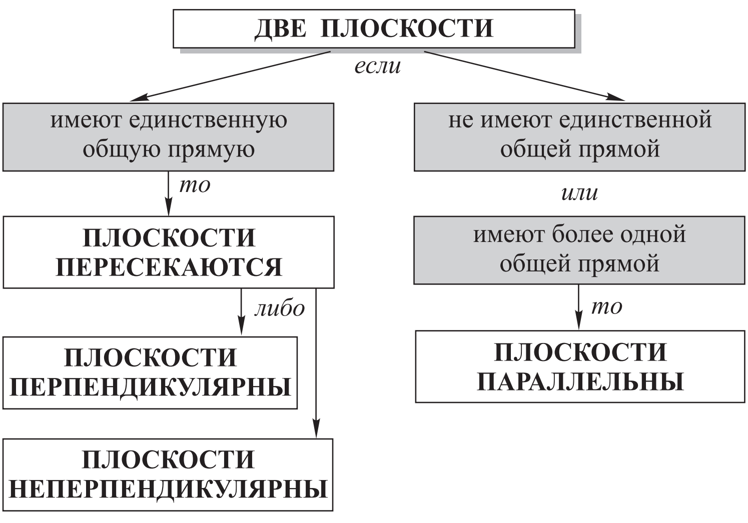


Рис. 65

Признак перпендикулярности двух плоскостей

1. **Если плоскость** (рис. 66) **проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.**

2. **Если две плоскости** (рис. 67) **перпендикулярны и в одной из них проведен перпендикуляр к линии их пересечения, то он является перпендикуляром к другой плоскости.**

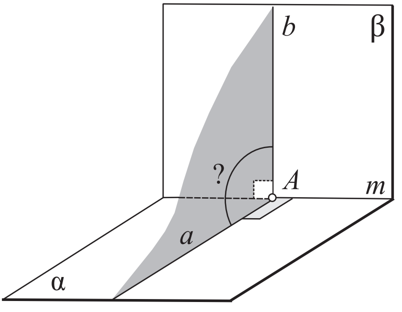


Рис. 66

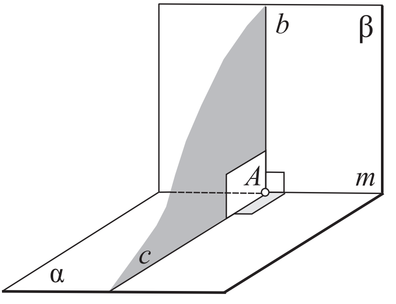


Рис. 67

3. **Если прямая** (рис. 68) **и плоскость перпендикулярны к некоторой другой плоскости и имеют общую точку, то прямая принадлежит первой плоскости.**

4. **Если две пересекающиеся плоскости** (рис. 69) **перпендикулярны к третьей плоскости, то линия их пересечения также перпендикулярна к этой плоскости.**

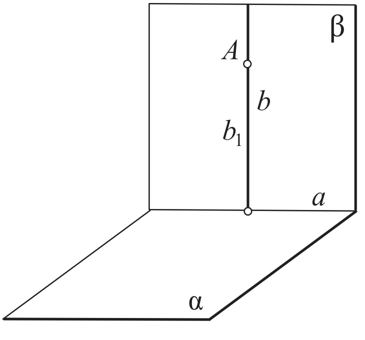


Рис. 68

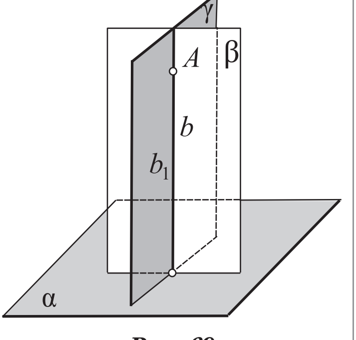


Рис. 69

Доказательства.

1. 1) Пусть $b \cap m = A$ (см. рис. 66). Через точку A в плоскости α проведем прямую a, перпендикулярную к прямой m — линии пересечения плоскостей β и α;

2) ($b \perp \alpha$ и $m \subset \alpha$) $\Rightarrow b \perp m$;

3) это значит, что прямые b и a, пересекаясь, образуют линейный угол двугранного угла $\beta m \alpha$;

4) ($b \perp \alpha$ и $a \subset \alpha$) $\Rightarrow b \perp a$;

5) значит, линейный угол данного двугранного угла — прямой. Поэтому и двугранный угол $\beta m \alpha$ прямой, а плоскости β и α перпендикулярны друг к другу.

5.6. Примеры решения задач

Задача 1. Дан правильный тетраэдр $PABC$ (рис. 70), точки M и N — середины соответственно ребер AC и PB. Докажите, что $ACN \perp PBM$.

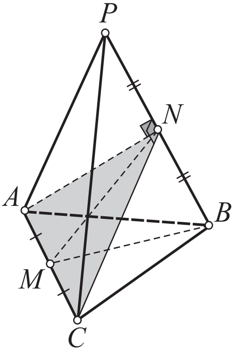


Рис. 70

Решение.

1) Так как точки M и N — общие точки плоскостей ACN и PBM, то эти плоскости пересекаются по прямой MN;

2) медианы AN и CN в равносторонних треугольниках PAB и PCB являются высотами. Поэтому $PB \perp AN$ и $PB \perp CN$;

3) $PB \perp ACN$ — на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости;

4) ($PB \perp ACN$ и $PB \subset PBM$) $\Rightarrow PBM \perp ACN$.

Задача 2. В условиях предыдущей задачи докажите, что плоскости PAB и PCB перпендикулярны к плоскости ANC.

Задача 3. Пусть $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Из точек A и B к прямой a проведены перпендикуляры AP и BT (рис. 71), $AP = 1$, $BT = 2$, $PT = 3$. Найдите длину отрезка AB.

Решение.

1) Так как $BT \perp a$, то треугольник BTP — прямоугольный, по теореме Пифагора $BP^2 = BT^2 + PT^2 = 4 + 9 = 13$;

2) так как $\alpha \perp \beta$, то отрезок AP, проведенный в плоскости α перпендикулярно к линии пересечения плоскостей α и β, перпендикулярен к плоскости β (теорема 16.2) и, значит, перпендикулярен к отрезку BP, принадлежащему плоскости β (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости);

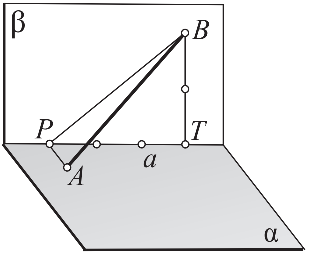


Рис. 71

3) поэтому треугольник APB — прямоугольный и $AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = \sqrt{1+13} = \sqrt{14}$.

Ответ: $AB = \sqrt{14}$.

Задача 4. (*Обратная предыдущей.*) Пусть $\alpha \cap \beta = a$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Из точек A и B к прямой a проведены перпендикуляры AP и BT (см. рис. 71), $AP = 1$, $BT = 2$, $PT = 3$, $AB = \sqrt{14}$. Докажите, что $\alpha \perp \beta$.

Решение.

1) Так как $BT \perp a$, то треугольник BTP — прямоугольный, по теореме Пифагора $BP^2 = BT^2 + PT^2 = 4 + 9 = 13$;

2) в треугольнике APB известны все три стороны: $AP = 1$, $BP = \sqrt{13}$, $AB = \sqrt{14}$. Для этих сторон выполняется равенство

$$AB^2 = AP^2 + BP^2;$$

3) поэтому треугольник APB — прямоугольный и $AP \perp BP$;

4) так как $AP \perp a$ и $AP \perp BP$, то $AP \perp \beta$ (на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости);

5) тогда плоскость α, проходя через перпендикуляр AP к плоскости β, будет перпендикулярна к плоскости β (на основании признака перпендикулярности двух плоскостей).

Задача 5. Дан двугранный угол $\alpha a \beta$ (рис. 72), $\angle BAC = 60°$, расположенный так, что стороны AB и AC лежат соответственно в плоскостях α и β и образуют с прямой a углы, равные $45°$. Докажите, что $\alpha \perp \beta$.

Доказательство.

1) Построим линейный угол данного двугранного угла. Для этого проведем плоскость $\gamma \perp a$;

2) угол BA_1C, образуемый при пересечении плоскости γ с гранями двугранного угла, является линейным углом двугранного угла. Требуется доказать, что $\angle BA_1C = 90°$;

3) угол BA_1C является ортогональной проекцией угла BAC на плоскость γ. Для нахождения угла BA_1C воспользуемся обобщенной формулой Эйлера:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi - \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_2}{\sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2},$$

где $\angle BAC = \varphi$, $\angle BA_1C = \varphi_1$, $\angle BAA_1 = \delta_1$, $\angle CAA_1 = \delta_2$;

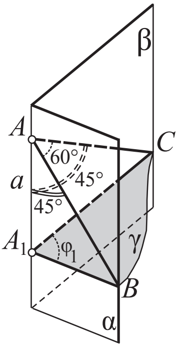


Рис. 72

4) подставив значения углов, получим, что $\cos\varphi_1 = 0$. Отсюда $\varphi_1 = 90°$;

5) если линейный угол двугранного угла прямой, то двугранный угол является прямым. Поэтому $\alpha \perp \beta$.

§ 6. РАССТОЯНИЕ: НОВЫЕ ФИГУРЫ — НОВЫЕ РАССТОЯНИЯ

В курсе планиметрии мы познакомились с расстоянием между двумя точками, с расстоянием от точки до прямой, с расстоянием от точки до луча, с расстоянием между параллельными прямыми и т. д. Стереометрические фигуры по сравнению с планиметрическими являются существенно новыми фигурами. Общее определение расстояния между двумя фигурами применимо и для стереометрических фигур. Однако теоремы, позволяющие вычислять эти расстояния, хотя в некоторых отношениях аналогичны планиметрическим, тем не менее являются новыми. Особенно заметно новизна проявляется в доказательствах.

6.1. Расстояние от точки до плоскости

Пусть точка A принадлежит одной фигуре, а точка B — другой. При различном выборе точек A и B расстояние AB изменяется. В том случае, когда оно становится наименьшим, его называют **расстоянием между данными фигурами**.

Теорема 17

Расстояние от точки до плоскости (рис. 73) **равно расстоянию между этой точкой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.**

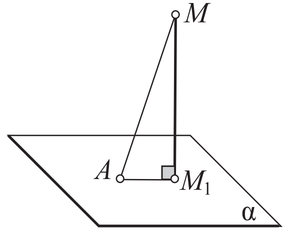


Рис. 73

6.2. Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Пользуясь определением расстояния между двумя фигурами, выясним, каким образом можно найти расстояние между двумя параллельными плоскостями. Проведем следующие рассуждения.

1) Пусть $\alpha \parallel \beta$ (рис. 74) и AB — общий перпендикуляр этих плоскостей, $A \in \alpha$ и $B \in \beta$. Докажем, что расстояние AB является наименьшим из всех расстояний между точками этих плоскостей;

2) для этого возьмем на плоскостях α и β соответственно произвольные точки M и N. Как установить, что $AB \leq MN$?

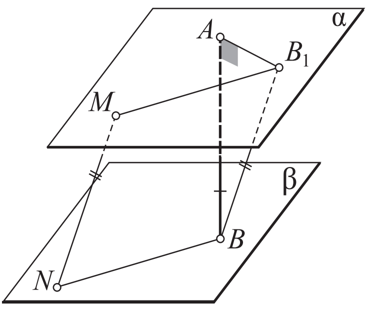


Рис. 74

3) проведем отрезок NB и в плоскости α через точку M проведем прямую $MB_1 \parallel NB$. Отложим отрезок $MB_1 = NB$;

4) получили четырехугольник $MNBB_1$, в котором противоположные стороны NB и MB_1 равны и параллельны между собой. Такой четырехугольник — параллелограмм;

5) значит, $MN = B_1B$;

6) из прямоугольного треугольника BAB_1 (почему он прямоугольный?) имеем: $AB < B_1B$;

7) следовательно, $AB < MN$ (выясните, в каком случае возможно равенство $AB = MN$);

8) это означает, что расстояние AB является расстоянием между данными плоскостями.

Полученный вывод сформулируем в виде следствия.

Следствие. *Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра, концы которого лежат на этих плоскостях.*

6.3. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью

Пусть $a \parallel \alpha$ (рис. 75). Найдем расстояние между прямой a и плоскостью α. Для этого проведем следующие рассуждения.

1) Через прямую a проведем плоскость β, параллельную плоскости α. На прямой a возьмем точку A и построим общий перпендикуляр AB к плоскостям α и β $(B \in \alpha)$;

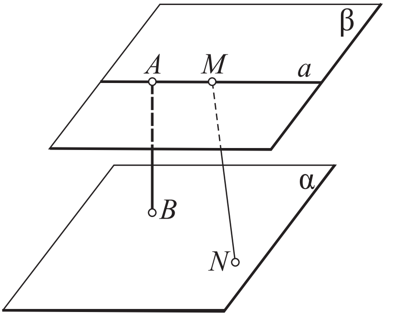


Рис. 75

2) расстояние AB является наименьшим из всех расстояний от точек одной плоскости до точек другой плоскости;

3) поэтому оно будет наименьшим для точек прямой a и плоскости α.

Приходим к следующему выводу.

Следствие. *Расстояние между параллельными прямой и плоскостью равно длине их общего перпендикуляра, один конец которого лежит на данной прямой, а другой — на данной плоскости.*

6.4. Примеры решения задач

Задача 1. Дана точка $A \notin \alpha$ (рис. 76). Постройте перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α.

Решение.

Построение. Проведем:

1) в плоскости α произвольную прямую a;

2) в плоскости (a, A) через точку A прямую $b \perp a$;

3) через точку $B = a \cap b$ в плоскости α прямую $b_1 \perp a$;

4) в плоскости (b, b_1) через точку A перпендикуляр AA_1 к прямой b_1.

Отрезок AA_1 — искомый перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α.

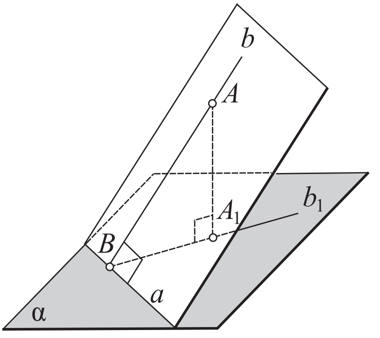


Рис. 76

Доказательство.

Так как по построению $a \perp b$ и $a \perp b_1$, то $a \perp (b, b_1)$ — на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости. Тогда $a \perp AA_1$ — по определению прямой, перпендикулярной к плоскости. Так как $AA_1 \perp a$ (по доказанному) и $AA_1 \perp b_1$ (по построению), то $AA_1 \perp \alpha$.

Исследование. Так как построения 1—4 выполнимы всегда, то задача всегда имеет решение. Это решение единственное. Данный вывод следует из того, что через точку A можно провести только одну прямую, перпендикулярную к плоскости α.

Задача 2. Дан правильный тетраэдр $PABC$ (рис. 77), M, K и T — середины соответственно ребер PA, PB и AB. Проведите перпендикуляр из точки M к плоскости CKT.

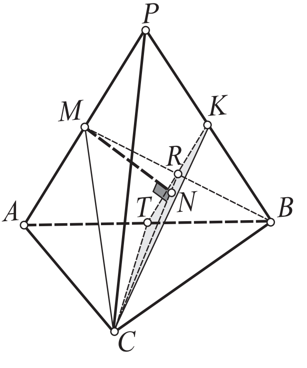


Рис. 77

Решение.

1) В плоскости CKT рассмотрим прямую KT;

2) ($BM \perp PA$ и $KT \parallel PA$) $\Rightarrow BM \perp KT$;

3) пусть

$$R = BM \cap KT;$$

4) нетрудно установить, что точка R — середина отрезка KT, треугольник CKT — равнобедренный и CR — высота треугольника CKT;

5) на основании предыдущей задачи перпендикуляр MN, проведенный в плоскости (RM, RC) к прямой CR, будет являться искомым перпендикуляром, проведенным из точки M к плоскости CKT.

Задача 3. Пользуясь условием предыдущей задачи (см. рис. 77), найдите расстояние от точки M до плоскости CKT, если ребра тетраэдра равны a.

Решение.

1) Требуется найти длину перпендикуляра MN. Воспользуемся тем, что MN является высотой треугольника CMR, стороны которого находятся достаточно просто. Найдем вначале стороны CM и MR:

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad MR = \frac{1}{2}BM = \frac{a\sqrt{3}}{4};$$

2) сторону CR найдем из треугольника CKT по известной формуле медианы: $CR = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{3a^2}{4} + a^2\right) - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{11}}{4};$

3) наконец, воспользуемся формулой высоты треугольника

$$h_c^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2:$$

$$MN^2 = \frac{3a^2}{4} - \left(\frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{11a^2}{16} - \frac{3a^2}{16}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{11}}{4}}\right)^2 = \frac{2a^2}{11}, \quad MN = a\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Ответ: $MN = a\sqrt{\frac{2}{11}}$.

Задача 4. Пользуясь условием задачи 2 (см. рис. 77), докажите, что $PA \parallel CKT$. Найдите расстояние от прямой PA до плоскости CKT.

Решение.

1) ($PA \parallel KT$ и $KT \subset CKT$) $\Rightarrow PA \parallel CKT$ — по признаку параллельности прямой и плоскости;

2) тогда расстояние от прямой PA до плоскости CKT равно длине перпендикуляра MN, проведенного из точки $M \in PA$ к плоскости CKT;

3) поэтому искомое расстояние $MN = a\sqrt{\frac{2}{11}}$.

Ответ: $a\sqrt{\frac{2}{11}}$.

6.5. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Попытаемся вначале опытным путем выяснить, каким образом можно измерить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми a и b (рис. 78). Для этого на спицы a и b наденем соответственно кольца A и B, соединенные между собой туго натянутым резиновым шнуром, который, сжимаясь, заставляет скользить кольца по спицам. Положение шнура зафиксируется, когда его длина станет минимальной.

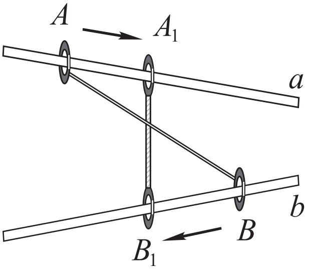


Рис. 78

Пусть A_1 и B_1 — новые положения колец. Непосредственно обнаруживается, что отрезок A_1B_1 перпендикулярен к a и b. (Рекомендуем проделать этот опыт.)

Можно высказать предположение о том, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине общего перпендикуляра, пересекающего эти прямые.

Убедимся в этом с помощью доказательства следующих теорем.

Теоремы 18

1. **Существует единственная прямая** HT (рис. 79, a) **пересекающая скрещивающиеся прямые** a **и** b **и перпендикулярная к ним.**

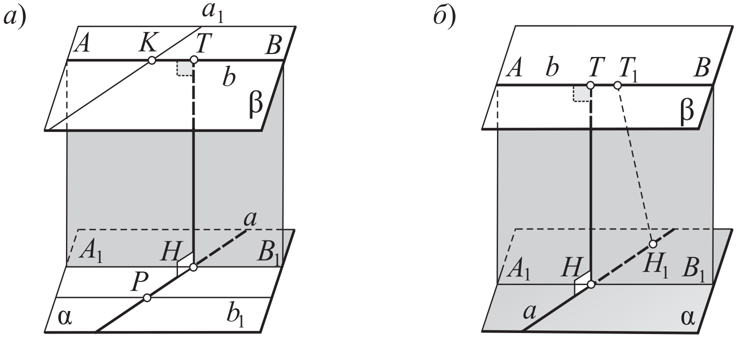


Рис. 79

2. **Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра, концы которого лежат на этих прямых.**

Доказательства.

1. *Существование.* 1) Через данные прямые a и b (см. рис. 79, *а*) проведем две параллельные между собой плоскости α и β. Для этого через точку $P \in \alpha$ проведем $b_1 \parallel b$, через точку $K \in b$ проведем $a_1 \parallel a$. Через прямые a и b_1 проведем плоскость α, через прямые b и a_1 — плоскость β;

2) по первому признаку параллельности двух плоскостей $\alpha \parallel \beta$;

3) если теперь провести любой перпендикуляр к параллельным плоскостям α и β, то он будет и перпендикуляром к прямым a и b, лежащим в этих плоскостях;

4) осталось выяснить, как проводить этот перпендикуляр, чтобы он пересек данные прямые a и b. С этой целью построим ортогональную проекцию прямой b на плоскость α — прямую A_1B_1 ($AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$);

5) найдем точку пересечения прямых A_1B_1 и a. Пусть $A_1B_1 \cap a = H$. Проведем прямую $HT \parallel A_1A$;

6) ($HT \parallel A_1A$ и $A_1A \perp \alpha$) $\Rightarrow HT \perp \alpha$ (а значит, $HT \perp \beta$);

7) очевидно, что прямая HT — общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых a и b, пересекающий эти прямые.

Единственность. 1) Допустим, что H_1T_1 — еще один общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b, пересекающий эти прямые (рис. 79, *б*);

2) тогда TH и T_1H_1 — два перпендикуляра, проведенных к параллельным плоскостям α и β;

3) поэтому $TH \parallel T_1H_1$. Это означает, что TH и T_1H_1 лежат в одной плоскости. Тогда и прямые TT_1 и HH_1 (b и a) лежат в одной плоскости;

4) этого быть не может, так как по условию $a \dot{-} b$;

5) следовательно, общий перпендикуляр, пересекающий две данные скрещивающиеся прямые a и b, — единственный.

2. 1) Так как HT (см. рис. 79, *а*) — расстояние между плоскостями α и β, то это расстояние будет наименьшим и между точками прямых a и b;

2) следовательно, расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра, концы которого лежат на этих прямых.

6.6. Примеры решения задач

Задача 1. Прямая $a \perp \alpha$ и $a \cap \alpha = A$. Прямая b лежит в плоскости α и не проходит через точку A. Из точки A в плоскости α провели перпендикуляр AB к прямой b (рис. 80, *а*). Докажите, что длина отрезка AB есть расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.

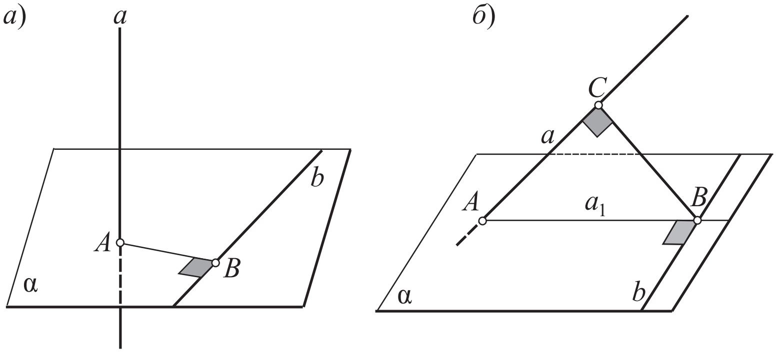


Рис. 80

Доказательство.

1) Так как $b \subset \alpha$ и a пересекает плоскость α в точке, не принадлежащей прямой b, то $a \dot{-} b$ (по признаку скрещивающихся прямых). Требуется доказать, что длина отрезка AB есть расстояние между данными скрещивающимися прямыми;

2) $(a \perp \alpha$ и $AB \subset \alpha) \Rightarrow a \perp AB$;

3) кроме того, по построению $AB \perp b$;

4) значит, отрезок AB — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b и длина отрезка AB есть расстояние между этими прямыми.

Задача 2. Прямая a — наклонная к плоскости α, прямая $b \subset \alpha$ (рис. 80, *б*). Точка A — точка пересечения прямой a и плоскости α — не принадлежит прямой b. Прямая b перпендикулярна к ортогональной проекции a_1 прямой a на плоскость α и пересекает прямую a_1 в точке B. Из точки B в плоскости (a, a_1) провели перпендикуляр BC к прямой a. Докажите, что длина отрезка BC есть расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.

Доказательство.

1) Так как прямая $b \subset \alpha$ и прямая a пересекает плоскость α в точке, не принадлежащей прямой b, то $a \dot{-} b$ (по признаку скрещивающихся прямых). Требуется доказать, что длина отрезка BC есть расстояние между данными скрещивающимися прямыми;

2) на основании теоремы о трех перпендикулярах (если прямая перпендикулярна к проекции наклонной, то она перпендикулярна к наклонной) $b \perp a$;

3) тогда $(b \perp a_1$ и $b \perp a) \Rightarrow b \perp (a, a_1)$, $(b \perp (a, a_1)$ и $BC \subset (a, a_1)) \Rightarrow$ $\Rightarrow b \perp BC$;

4) так как $BC \perp b$ (по доказанному) и $BC \perp a$ (по построению), то отрезок BC — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b и длина отрезка BC есть расстояние между этими прямыми.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 81), ребро которого равно a. Найдите расстояние между прямыми B_1D и D_1C.

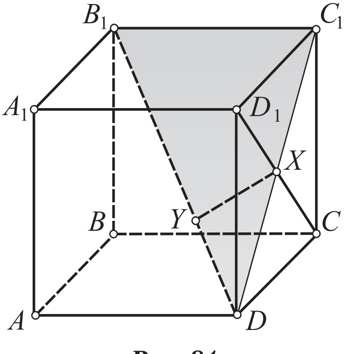


Рис. 81

Решение.

1) Прямые B_1D и D_1C удовлетворяют условию задачи 2. В самом деле, прямая $D_1C \subset DD_1C_1C$, прямая B_1D пересекает плоскость DD_1C_1C в точке $D \notin D_1C$;

2) прямая D_1C перпендикулярна ортогональной проекции прямой B_1D на плоскость DD_1C_1C (на основании теоремы о трех перпендикулярах);

3) тогда, проведя из точки $X = D_1C \cap DC_1$ в плоскости (DC_1, DB_1) перпендикуляр XY к прямой B_1D, получим отрезок XY, который является общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым B_1D и D_1C;

4) длину отрезка XY будем находить из треугольника B_1C_1D. Прямоугольные треугольники B_1DC_1 и XDY, имея общий острый угол D, подобны;

5) поэтому $\frac{XY}{B_1C_1} = \frac{XD}{B_1D} \Rightarrow \frac{XY}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot a\sqrt{3}} \Rightarrow XY = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $XY = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Задача 4. Постройте перпендикуляр XY, данный в условии предыдущей задачи.

Решение.

1) Для построения точки Y на рисунке 81 необходимо знать, в каком отношении точка Y делит отрезок B_1D. Найдем это отношение;

2) так как $\Delta B_1DC_1 \backsim \Delta XDY$ (см. предыдущую задачу), то

$$\frac{DY}{DC_1} = \frac{DX}{DB_1} \Rightarrow DY = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}DB_1;$$

3) зная это, строим точку Y и общий перпендикуляр XY к двум данным скрещивающимся прямым B_1D и D_1C.

6.7. Заключительные замечания

Рассматриваемый теоретический материал свидетельствует о том, что для характеристики взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве особенно важную роль играют два понятия: «расстояние» и «угол».

1. *Две прямые.* а) Если прямые a и b пересекаются, то расстояние между ними $d = 0$. Их взаимное расположение зависит также от величины угла $\varphi \neq 0°$ между ними, в частности, если $\varphi = 90°$, то прямые перпендикулярны.

б) Если прямые a и b параллельны, то расстояние между ними $d = 0$ при условии, что прямые совпадают, и $d \neq 0$ при условии, что прямые не совпадают. Угол между параллельными прямыми $\varphi = 0°$.

в) Если прямые a и b — скрещивающиеся, то расстояние между ними $d \neq 0$ и угол между ними $\varphi \neq 0°$.

2. *Прямая и плоскость.* а) Если прямая a и плоскость α пересекаются, то расстояние между ними $d = 0$. Их взаимное расположение зависит также от величины угла φ между ними. При $\varphi = 90°$ прямая перпендикулярна к плоскости; при $\varphi \neq 90°$ прямая наклонна к плоскости.

б) Если прямая a и плоскость α параллельны, то расстояние между ними $d = 0$ при условии, что прямая лежит в плоскости, и $d \neq 0$, когда прямая не лежит в плоскости. Угол между параллельными прямой и плоскостью $\varphi = 0°$.

3. *Две плоскости.* а) Если плоскости α и β пересекаются, то расстояние между ними $d = 0$. Их взаимное расположение зависит также от величины двугранного угла, в частности, если двугранный угол равен 90°, то плоскости перпендикулярны.

б) Если плоскости α и β параллельны, то расстояние между ними $d = 0$, когда эти плоскости совпадают, и $d \neq 0$, когда плоскости не совпадают. Угол между параллельными плоскостями $\varphi = 0°$.

6.8. Примеры решения задач

Задача 1. В основании треугольной пирамиды $PABC$ лежит правильный треугольник ABC (рис. 82, *а*). Ребро $PA = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и наклонено к сторонам AB и AC под одним и тем же углом, равным 60°. Найдите расстояние от вершины P до плоскости ABC.

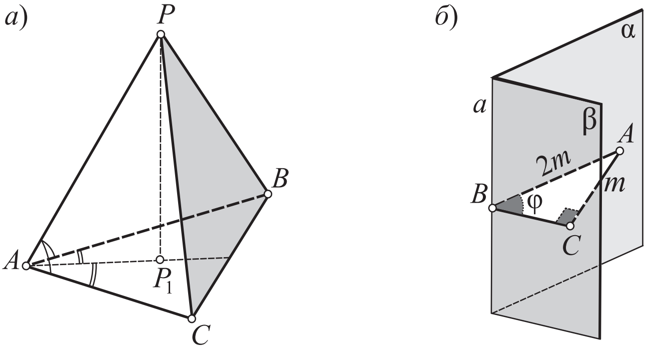


Рис. 82

Решение.

1) Так как ребро PA наклонено к сторонам AB и AC под одним и тем же углом, то оно ортогонально проектируется в отрезок AP_1, лежащий на биссектрисе угла BAC;

2) по формуле Эйлера ($\cos\varphi = \cos\varphi_1 \cos\beta$) можно найти $\angle PAP_1$ — угол наклона ребра PA к плоскости ABC;

3) в нашем случае $\varphi = 60°$, $\varphi_1 = 30°$, $\angle PAP_1 = \beta$. Имеем:

$$\cos\beta = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

4) искомое расстояние от точки P до плоскости ABC есть длина перпендикуляра PP_1. Найдем вначале синус $\angle PAP_1$:

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

5) тогда $\dfrac{PP_1}{AP} = \sin\beta \Rightarrow PP_1 = AP\sin\beta = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} = 1.$

Ответ: $PP_1 = 1$.

Задача 2. Найдите величину φ двугранного угла, если точка A, взятая на одной из граней (рис. 82, *б*), отстоит от ребра a вдвое далее, чем от другой грани.

Решение.

1) Из точки A, лежащей в грани α, проведем в плоскости этой грани перпендикуляр AB к ребру a. Пусть AC — перпендикуляр, проведенный из точки A на другую грань двугранного угла — грань β. По условию, если $AB = 2m$, то $AC = m$;

2) выясним, будет ли $\angle ABC$ являться линейным углом данного двугранного угла $\alpha a\beta$: $(AC \perp \beta$ и $a \subset \beta) \Rightarrow AC \perp a$;
$(a \perp AB$ и $a \perp AC) \Rightarrow a \perp ABC$, $ABC \perp a \Rightarrow \angle ABC$ — линейный угол двугранного угла $\alpha a\beta$, $\angle ABC = \varphi$;

3) ΔABC — прямоугольный, так как $AC \perp BC$ ($AC \perp \beta$ и $BC \subset \beta$). Поэтому $\sin\varphi = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{m}{2m} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30°$.

Ответ: $\varphi = 30°$.

§ 7. МНОГОГРАННЫЙ УГОЛ

7.1. Теория

Пусть на плоскости α (рис. 83, *а*) имеется многоугольник и вне этой плоскости — точка P. Объединение плоских углов APB, BPC, CPD, ... образует пространственную фигуру, которая называется **многогранным углом**. Обозначение: $PABC$ ... — многогранный угол $PABC$ ... .

Точка P называется *вершиной* многогранного угла, общие стороны плоских углов PA, PB, PC, ... — *ребрами*, углы APB, BPC, CPD ... вместе с их внутренними точками — *гранями*. Объединение граней многогранного угла называется *поверхностью*.

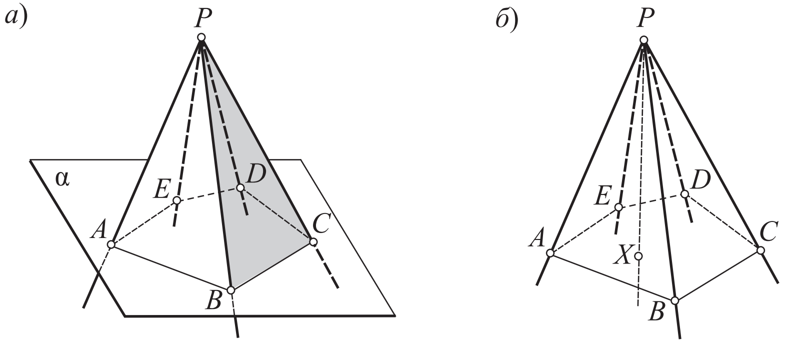


Рис. 83

В зависимости от числа граней многогранные углы бывают *трехгранные*, *четырехгранные* и т. д. Многогранный угол называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону относительно плоскости любой из его граней, в противном случае — *невыпуклым*.

Пусть X — произвольная внутренняя точка плоского многоугольника $ABCDE$ (рис. 83, *б*). Проведем луч PX. Говорят, что *луч PX проходит внутри данного многогранного угла*. Каждая точка луча PX называется *внутренней точкой многогранного угла*. Множество всех внутренних точек многогранного угла называется *внутренней областью* многогранного угла. Многогранный угол вместе с его внутренней областью обычно также называется *многогранным углом*.

Плоские углы многогранного угла обладают рядом интересных свойств. Рассмотрим их.

Теоремы 19

1. **Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы и больше разности двух других углов.**

2. **Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.**

7.2. Примеры решения задач

Задача 1. Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90° (рис. 84). Найдите косинусы его двугранных углов.

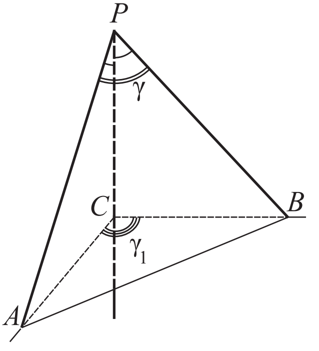


Рис. 84

Решение.

1) Пусть $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 90°$. Найдем двугранный угол γ_1, лежащий против плоского угла γ. Воспользуемся обобщенной формулой Эйлера:

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos 90° - \cos 60°\cdot\cos 60°}{\sin 60°\cdot\sin 60°} = -\frac{1}{3},\ \gamma_1 \approx 109{,}5°;$$

2) аналогично находим, что $\cos\alpha_1 = \cos\beta_1 = \dfrac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \alpha_1 = \beta_1 \approx 54{,}7°.$

Ответ: $\cos\gamma_1 = -\frac{1}{3}$, $\cos\alpha_1 = \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2. В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°, двугранный угол между ними — прямой (рис. 85). Найдите третий плоский угол.

Решение.

Пусть $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma_1 = 90°$. Найдем плоский угол γ, лежащий против двугранного угла γ_1. Воспользуемся обобщенной формулой Эйлера:

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 90° = \frac{\cos\gamma - \cos 45°\cdot\cos 45°}{\sin 45°\cdot\sin 45°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60°.$$

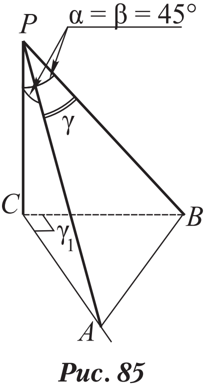


Рис. 85

Ответ: $\gamma = 60°$.

Задача 3. Плоские углы трехгранного угла равны (рис. 86). Через его вершину проведена прямая, образующая равные углы с его ребрами. Докажите, что эта прямая образует равные углы с его гранями.

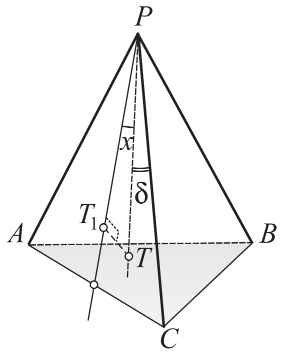


Рис. 86

Доказательство.

1) Обозначим величины плоских углов через α. Пусть луч PT проходит через вершину трехгранного угла и образует равные углы с его ребрами. Обозначим величину этих углов через δ;

2) тогда луч PT проектируется на плоскость грани APC в биссектрису угла APC, а точка T — в точку T_1, лежащую на этой биссектрисе;

3) поэтому $\angle TPT_1 = x$ — искомый угол наклона луча PT к плоскости грани APC;

4) при ортогональном проектировании на плоскость грани APC $\angle TPC = \delta$ проектируется в $\angle CPT_1 = \frac{\alpha}{2}$;

5) воспользуемся формулой Эйлера, связывающей угол и его ортогональную проекцию (см. задачу 2 из § 4.5):

$$\cos\delta = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos x \Rightarrow \cos x = \frac{\cos\delta}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

6) так как для каждой грани углы δ и α принимают одни и те же значения, то каждый раз будем получать одно и то же значение $\cos x$ и значение искомого угла x;

7) отсюда следует справедливость утверждения задачи.

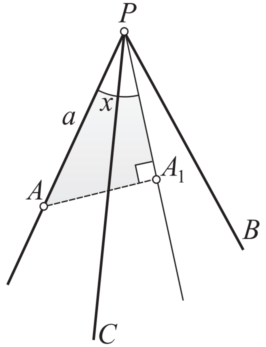


Рис. 87

Задача 4. (*С межпредметным содержанием — связь с алгеброй.*) Каждый плоский угол трехгранного угла равен α (рис. 87). На одном из его ребер от вершины отложен отрезок, равный a, и из конца этого отрезка проведен перпендикуляр к противоположной грани. Найдите длину этого перпендикуляра.

Решение.

1) Пусть $PA = a$ и $AA_1 \perp BPC$. Требуется найти длину отрезка AA_1;

2) $(AA_1 \perp BPC) \Rightarrow (AA_1 \perp PA_1$ и ΔAPA_1 — прямоугольный);

3) для нахождения перпендикуляра AA_1 достаточно найти $\sin \angle APA_1$. Пусть $\angle APA_1 = x$;

4) так как луч PA образует равные углы с лучами PB и PC, то ортогональной проекцией луча PA на плоскость BPC будет являться биссектриса угла BPC. Поэтому $\angle BPA_1 = \frac{\alpha}{2}$;

5) воспользуемся формулой Эйлера:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos x \Rightarrow \cos x = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

6) тогда

$$\frac{AA_1}{PA} = \sin x \Rightarrow AA_1 = PA\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA_1 = a\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha};$$

7) так как

$$\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha = 2\sin\frac{3\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\alpha}{4},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha = 2\cos\frac{3\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4},$$

то подкоренное выражение нетрудно преобразовать к виду:

$$\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2};$$

8) получаем $AA_1 = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $AA_1 = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 5. В трехгранном угле $PABC$ ребра попарно перпендикулярны (рис. 88). Внутри него из вершины P проведен отрезок PM, ортогональные проекции которого на каждую из граней равны 1. Найдите его ортогональные проекции на ребра.

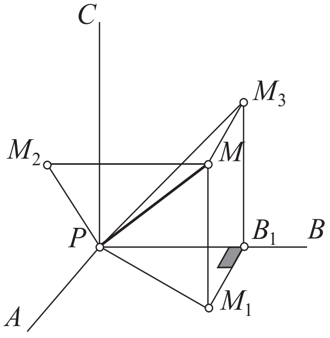


Рис. 88

Решение.

1) Проведем перпендикуляры MM_1, MM_2 и MM_3 на грани данного трехгранного угла. Получим проекции отрезка PM на грани: $PM_1 = PM_2 = PM_3 = 1$;

2) ортогональную проекцию точки M на ребро (на прямую) можно построить двумя способами: либо через точку M провести плоскость, перпендикулярную к этому ребру, либо из точки M (в плоскости, проходящей через данную точку и ребро) провести перпендикуляр к ребру. В обоих случаях получим одну и ту же точку. Пусть отрезок $PB_1 = x$ — ортогональная проекция отрезка PM на прямую PB;

3) так как $\Delta PMM_1 = \Delta PMM_2 = \Delta PMM_3$ (по гипотенузе и катету), то

$$MM_1 = MM_2 = MM_3;$$

4) точка, равноудаленная от двух граней двугранного угла, лежит на биссекторе двугранного угла. Биссектор двугранного ребра, образованного гранями APC и BPC, будет делить линейный угол APB этого двугранного угла пополам;

5) так как биссектор перпендикулярен к грани APB и проходит через точку M, то он будет содержать в себе перпендикуляр MM_1 к плоскости APB. Значит, M_1 принадлежит биссектору и принадлежит биссектрисе угла APB. Поэтому $\angle M_1PB_1 = 45°$;

6) так как PB_1 — ортогональная проекция отрезка PM на ребро PB, то $PB_1 \perp MM_1M_3$ и поэтому $PB_1 \perp B_1M_1$;

7) значит, ΔPB_1M_1 — прямоугольный равнобедренный треугольник. По теореме Пифагора:

$$PB_1^2 + B_1M_1^2 = PM_1^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

8) проекции отрезка PM на другие ребра будут иметь такую же величину.

Ответ: $PA_1 = PB_1 = PC_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Из истории развития теории перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве. Стереометрии посвящены почти целиком XI—XIII книги «Начал» Евклида. В одиннадцатой книге приводится следующее определение: «*Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым, проведенным в плоскости в точке, в которой она эту плоскость встречает*». В нашем курсе принято более общее определение (см. § 4.2). Оно стало возможным благодаря предварительному введению понятия перпендикулярных скрещивающихся прямых. А вот как формулируется признак перпендикулярности прямой и плоскости у Евклида: «*Если прямая образует с двумя пересекающимися прямыми в точке их пересечения прямые углы, то она перпендикулярна ко всякой прямой, которая проходит в плоскости, содержащей эти две прямые, через точку их пересечения*».

В данном курсе этот признак несколько иными словами сформулирован в виде теоремы 9.1. Приведен также обобщенный признак перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 9.2). Евклид приводит довольно длинное и сложное доказательство. Приведенное в пособии доказательство принадлежит О. Коши (XIX в.). Известно также доказательство А. Лежандра, использующее прямую и обратную теоремы Пифагора. В современных курсах применяется иногда векторное доказательство этого признака.

Приведем *доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости*, использующее теорему Пифагора, обратную теорему и теорему Стюарта.

Пусть прямые OB и OC лежат в плоскости α (рис. 89), $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$.

Требуется доказать, что $OA \perp \alpha$.

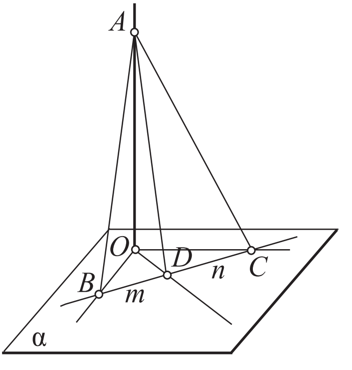


Рис. 89

Доказательство.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую OD. Пусть $OA = OB = OC = 1$, $BD = m$, $DC = n$;

2) по теореме Стюарта, применяя ее к треугольникам ABC и OBC, имеем:

$$AD^2 = \frac{AC^2m + AB^2n - BCmn}{BC} = \frac{2m + 2n - (m+n)mn}{m+n} = 2 - mn,$$

$$OD^2 = \frac{OC^2m + OB^2n - BCmn}{BC} = \frac{m + n - (m+n)mn}{m+n} = 1 - mn;$$

3) тогда $AO^2 + OD^2 = 1 + (1 - mn) = 2 - mn = AD^2$;

4) на основании теоремы, обратной теореме Пифагора, ΔAOD — прямоугольный. В нем $AO \perp OD$;

5) отсюда следует, что $OA \perp \alpha$.

В «Началах» Евклида отсутствует теорема о трех перпендикулярах. Эта знаменитая стереометрическая теорема была доказана математиками Ближнего и Среднего Востока («Исфаханским анонимом» — XI—XII вв., Насир ад-Дином-ат-Туси — XIII в.). В Европе эта теорема была сформулирована Л. Бертраном (1731—1812) и доказана в «Элементах геометрии» Лежандра (1794). Примерно в таком виде это доказательство приведено в данном пособии.

Тема 2 КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 8. МЕТОД ВООБРАЖАЕМЫХ (УСЛОВНЫХ) ПОСТРОЕНИЙ

8.1. Что значит «выполнить построение в пространстве»? Аксиомы геометрических построений

Геометрические построения, которые изучались в планиметрии, выполнялись в одной плоскости при помощи чертежных инструментов. Инструментов, которые бы оставляли «след» непосредственно в пространстве, не существует. Кроме того, при построении пространственных фигур появляется новый элемент — плоскость, которую нельзя построить обычными чертежными инструментами. Уже эти обстоятельства говорят о том, что построения в пространстве обладают большой спецификой! Для выяснения этих особенностей необходимо точно определить, что значит выполнить то или иное построение в пространстве. Ответить на этот вопрос помогают следующие аксиомы геометрических построений в пространстве.

1. **Если построены элементы, определяющие положение плоскости в пространстве, то плоскость, проходящая через эти элементы, считается построенной.**

2. **Если построены две пересекающиеся плоскости, то линия их пересечения также считается построенной.**

3. **Если дана плоскость, то считается, что в ней можно выполнить все планиметрические построения.**

Выполнить построение в пространстве — это значит свести его к конечному числу следующих трех *основных построений*:

1) построение плоскости через три точки, не лежащие на одной прямой;

2) построение линии пересечения двух данных пересекающихся плоскостей;

3) выполнение планиметрических построений в каждой плоскости.

Как видно, построения в пространстве начинаются с некоторых условных соглашений. Поэтому эти построения не носят конструктивного характера. Они выполняются мысленно, в воображении. Сопровождающий их рисунок носит иллюстративный характер. Такие построения в пространстве называются **воображаемыми** или условными.

С помощью воображаемых построений устанавливается *существование* пространственных фигур. Отметим, что вопросы существования в математике относятся к числу важнейших теоретических положений.

Приведем примеры воображаемых построений. Чтобы подчеркнуть связь воображаемых построений с обоснованием существования фигур, приведем две формы записи решения первой задачи. Вначале покажем обычную запись (с использованием слов: «возьмем точку», «построим точку», «проведем плоскость», «построим плоскость» и т. п.), затем — запись с использованием слова «существует».

8.2. Примеры решения задач

Задача 1. Постройте точку пересечения данной прямой a с данной плоскостью α (рис. 90).

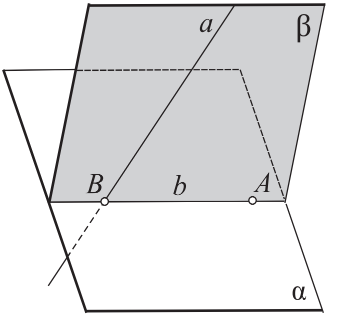


Рис. 90

Решение.

I способ записи. 1) *Возьмем* на плоскости α некоторую точку A;

2) через прямую a и точку A *проведем* плоскость β;

3) плоскости α и β, имея общую точку A, пересекутся по некоторой прямой b;

4) если прямые a и b не параллельны, то в плоскости β *построим* точку пересечения этих прямых — точку B.

Эта точка является искомой.

Если $a \parallel b$, то задача решения не имеет.

II способ записи. 1) На плоскости α *существует* некоторая точка A;

2) *существует* также плоскость β, проходящая через прямую a и точку A;

3) так как плоскости α и β имеют общую точку A, то *существует* прямая b — линия их пересечения;

4) если прямые a и b не параллельны, то в плоскости β *существует* точка пересечения этих прямых — точка B.

Эта точка является искомой.

Если $a \parallel b$, то задача решения не имеет.

Задача 2. Через данную точку A, лежащую вне данной прямой a, проведите прямую, параллельную данной прямой a.

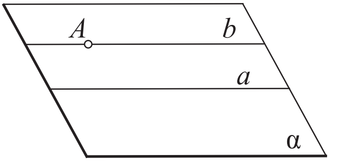


Рис. 91

Решение.

1) Через прямую a и точку A (рис. 91) проведем плоскость α;

2) в этой плоскости через точку A проведем $b \parallel a$.

Задача всегда имеет единственное решение.

Задача 3. Через данную точку A проведите прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые a и b (рис. 92).

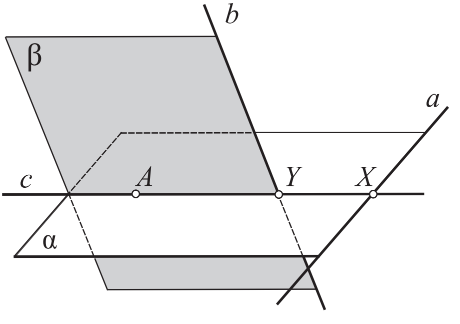


Рис. 92

Решение.

1) Так как искомая прямая должна проходить через точку A и пересекать прямую a, то она должна лежать в плоскости α, проходящей через точку A и прямую a;

2) аналогично искомая прямая должна лежать в плоскости β, проходящей через точку A и прямую b;

3) поэтому искомая прямая, если она существует, строится как линия пересечения c плоскостей α и β.

Если прямая c окажется параллельной одной из данных прямых a или b, то задача решения не имеет. (Приведите соответствующий рисунок.)

Задача 4. Через точку A, лежащую вне данной плоскости α, проведите прямую, параллельную данной плоскости (рис. 93).

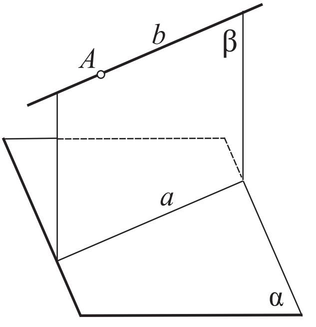


Рис. 93

Решение.

1) В плоскости α проведем произвольную прямую a;

2) через прямую a и точку A проведем плоскость β;

3) в плоскости β через точку A проведем $b \parallel a$. Прямая b является искомой (на основании признака параллельности прямой и плоскости).

Задача имеет бесконечное множество решений (почему?).

Задача 5. Через данную точку A проведите плоскость, перпендикулярную данной прямой a.

Решение.

1-й случай: пусть $A \in a$ (рис. 94, *а*).

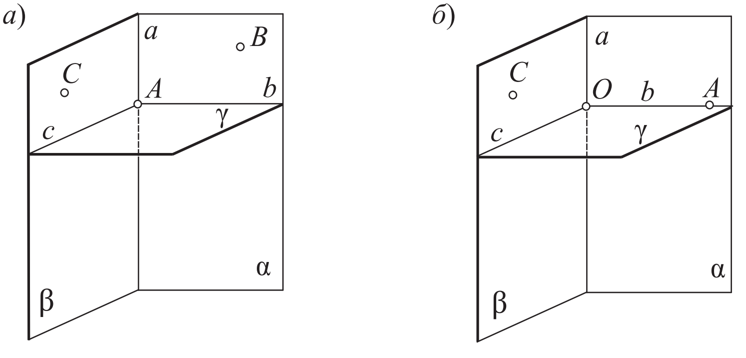


Рис. 94

1) Возьмем некоторую точку $B \notin a$;

2) через точку B и прямую a проведем плоскость α;

3) далее возьмем точку $C \notin \alpha$;

4) через точку C и прямую a проведем плоскость β;

5) через точку A в плоскостях α и β проведем соответственно прямые b и c, перпендикулярные к прямой a;

6) через прямые b и c проведем искомую плоскость γ.

Докажите, что $a \perp \gamma$.

Задача всегда имеет единственное решение.

2-й случай: пусть $A \notin a$ (рис. 94, *б*).

Выполним следующие построения (запишем их в символических обозначениях):

1) $\alpha = (A; a)$;

2) $C \notin \alpha$;

3) $\beta = (C; a)$;

4) b: $(A \in b, b \subset \alpha, b \perp a)$;

5) $O = a \cap b$;

6) c: $(O \in c, c \subset \beta, c \perp a)$;

7) $\gamma = (b; c)$ — искомая плоскость.

Задача всегда имеет единственное решение.

§ 9. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ: НАЧАЛА НОВОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА — МЕТОДА ПРОЕКЦИЙ

9.1. Теория

В стереометрии существует два вида геометрических построений и соответствено два метода построений: метод воображаемых построений и метод проекций (задачи на проекционном чертеже). С воображаемыми (условными) построениями мы познакомились в предыдущем параграфе. Рассмотрим *новый вид построений в пространстве — построения на проекционном чертеже* (*метод проекций*).

Для этого рассмотрим следующие вопросы: параллельная проекция, свойства параллельного проектирования, изображение фигуры, построение изображений плоских и пространственных фигур.

Рассмотрим плоскость α и прямую l, пересекающую эту плоскость (рис. 95, *а*). Возьмем в пространстве произвольную точку A, проведем через нее прямую $l_1 \parallel l$. Пусть прямая l_1 пересекает плоскость α в точке A_1. Точка A_1 называется **параллельной проекцией**

точки A **на плоскость** α **в данном направлении** l. Плоскость α называется *плоскостью проекций*; прямая l — *направлением проектирования*; прямая l_1 — *проектирующей прямой точки* A.

Множество Φ_1 проекций всех точек фигуры Φ (рис. 95, *б*) называется *параллельной проекцией фигуры* Φ *на плоскость* α *в данном направлении* l.

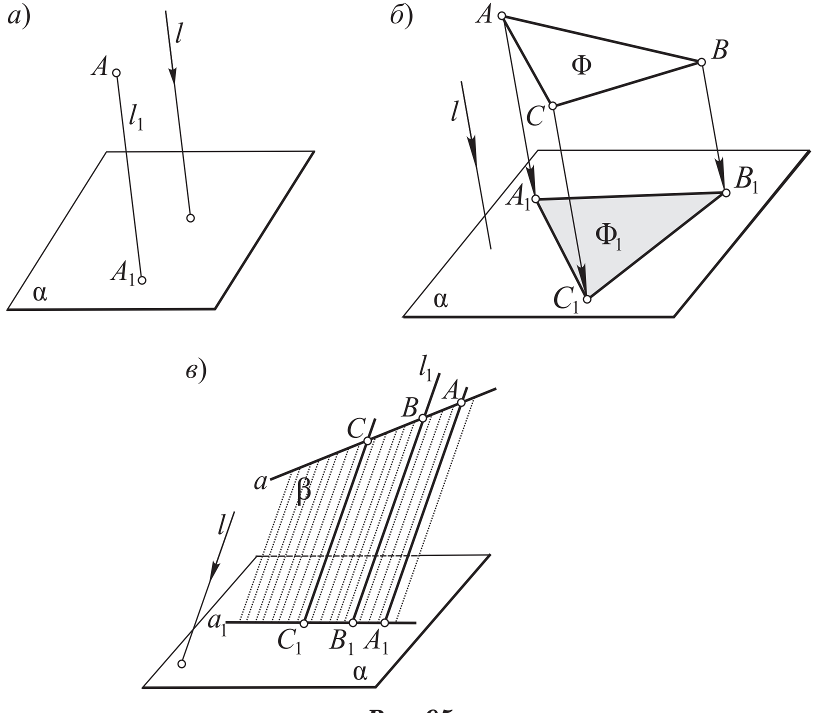


Рис. 95

Теоремы 20

> *Свойства параллельного проектирования*
>
> **При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, выполняются следующие свойства:**
>
> 1. **Проекция прямой есть прямая, проекция отрезка — отрезок.**

2. **Проекции параллельных прямых параллельны.**

3. **Отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых, сохраняется.**

4. **Если треугольник лежит в плоскости, параллельной плоскости проекций, то он равен своей проекции.**

Доказательства.

1. 1) Пусть точка A_1 — проекция точки A на плоскость α в направлении l и точка $B \in a$ (рис. 95, *в*), $\beta = (a; AA_1)$, $\beta \cap \alpha = a_1$. Докажем, что прямая a_1 является проекцией прямой a;

2) для этого в плоскости β через точку B проведем $l_1 \parallel AA_1$;

3) пусть $l_1 \cap a_1 = B_1$. Полученная точка B_1 является проекцией точки B на плоскость α в направлении l. В самом деле: $(l_1 \parallel AA_1$ и $AA_1 \parallel l) \Rightarrow l_1 \parallel l$;

4) аналогичными рассуждениями показывается, что каждая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a;

5) следовательно, при указанном параллельном проектировании прямая a переходит в прямую a_1.

Примечание. Плоскость $\beta = (a; AA_1)$, проходящая через прямую a (см. рис. 95, *в*) и проектирующую прямую AA_1 некоторой точки $A \in a$, называется *проектирующей плоскостью прямой а*.

2. 1) Пусть $a \parallel b$ ($a \nparallel l$, $b \nparallel l$, рис. 96, *а*), a_1 и b_1 — проекции данных прямых. Докажем, что $a_1 \parallel b_1$;

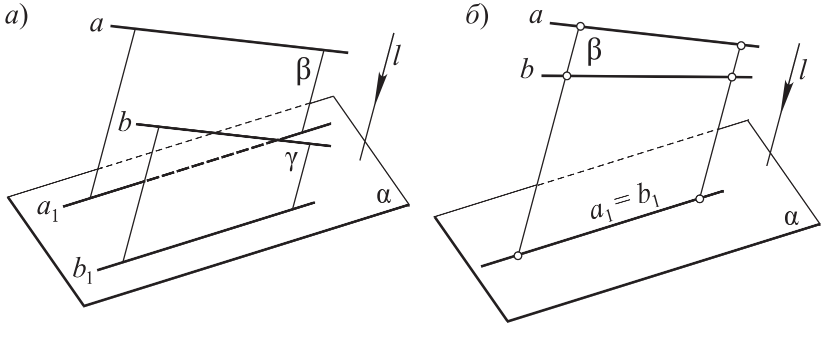


Рис. 96

2) рассмотрим проектирующие плоскости β и γ этих прямых. Эти плоскости параллельны (почему?);

3) поэтому плоскость α пересекает плоскости β и γ по параллельным прямым a_1 и b_1: $a_1 \parallel b_1$;

4) может оказаться, что прямые a и b лежат в одной проектирующей плоскости β (рис. 96, *б*). В этом случае они проектируются в одну и ту же прямую: $a_1 = b_1$. Следовательно, и в этом случае $a_1 \parallel b_1$.

3. *1-й случай*: отрезки AC и BC лежат на одной прямой a (рис. 97, *а*).

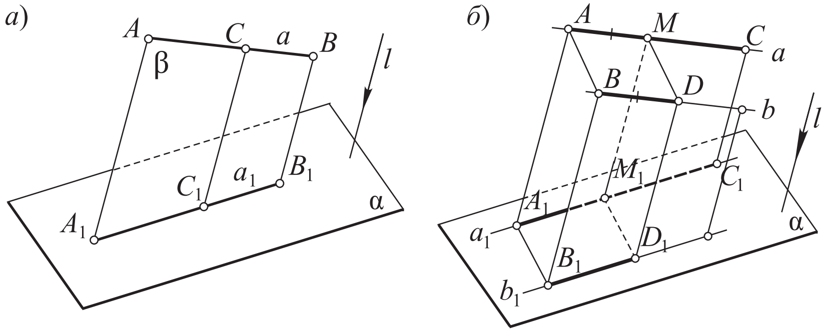


Рис. 97

Тогда в плоскости β три параллельные прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекают прямые a и a_1.

На основании обобщенной теоремы Фалеса, известной из планиметрии, $AC : BC = A_1C_1 : B_1C_1$.

2-й случай: отрезки AC и BD лежат на различных параллельных прямых (рис. 97, *б*).

Проведем в плоскости $(a; b)$ $DM \parallel AB$. Четырехугольник $ABDM$ — параллелограмм, поэтому $BD = AM$.

Так как проекции параллельных прямых параллельны, то четырехугольник $A_1B_1D_1M_1$ — тоже параллелограмм и, значит,

$$B_1D_1 = A_1M_1.$$

Будем иметь: $AC : AM = A_1C_1 : A_1M_1$.

Заменив отрезки AM и A_1M_1 равными, получим

$$AC : BD = A_1C_1 : B_1D_1.$$

4. Докажите самостоятельно.

9.2. Примеры решения задач

В следующих задачах рассматриваются проекции фигур, расположенных в плоскостях, которые не параллельны направлению проектирования.

Задача 1. Докажите, что параллельной проекцией параллелограмма (рис. 98, *а*) является параллелограмм.

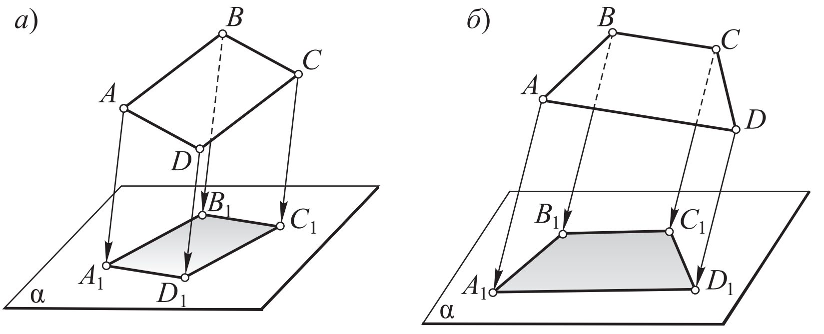


Рис. 98

Доказательство.

1) Так как при параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные прямые, то противоположные стороны параллелограмма (они параллельны между собой) перейдут в параллельные отрезки;

2) поэтому параллельной проекцией данного параллелограмма $ABCD$ будет параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$.

Задача 2. Докажите, что при параллельном проектировании медианы треугольника переходят в медианы треугольника-проекции.

Задача 3. Докажите, что при параллельном проектировании трапеция (рис. 98, *б*) переходит в трапецию с тем же самым отношением оснований.

Доказательство.

1) Так как при параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные прямые, то основания трапеции (они параллельны между собой) перейдут в параллельные отрезки;

2) поэтому параллельной проекцией трапеции является трапеция;

3) кроме того, при параллельном проектировании сохраняется отношение параллельных отрезков. Значит, трапеция-проекция имеет такое же отношение оснований, как и данная трапеция.

§ 10. ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУРЫ. ПОСТРОЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

10.1. Теория

Изображения фигур и построения на изображениях приводят к новому виду задач в стереометрии. Эти построения, в отличие от воображаемых (условных) построений, как правило, не допускают произвола в построении и выполняются с помощью чертежных инструментов. Построения на изображениях опираются на метод проекций, рассмотрение которого продолжится в данном параграфе.

Что такое изображение фигуры? Согласитесь, что не всегда удобно пользоваться параллельной проекцией фигуры. Если размеры проекции фигуры неудобны для рассмотрения (очень большие или, напротив, очень малые), то проекцию заменяют подобной фигурой, с удобными размерами. Поэтому необходимо ввести понятие «изображение фигуры».

Фигура Φ' называется **изображением фигуры** Φ, если фигура Φ' подобна проекции Φ_1 данной фигуры Φ (рис. 99).

Из определения понятия изображения фигуры и свойств параллельного проектирования следует ряд свойств изображений.

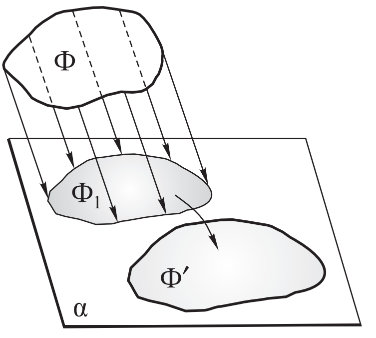


Рис. 99

Следствия *(свойства изображений).*

1. *Прямая изображается прямой, отрезок — отрезком.*

2. *Параллельные прямые изображаются параллельными прямыми.*

3. *Параллельные отрезки сохраняют свое отношение на изображении.*

4. *Если треугольник лежит в плоскости, параллельной плоскости чертежа, то он изображается треугольником, подобным данному.*

5. *Окружность изображается эллипсом.*

Построение изображений плоских фигур связано с умением изображать простейшую плоскую фигуру — треугольник. Рассматривая солнечную тень от треугольника на экране, можно заметить, что его проекция (а значит, и его изображение) может быть каким угодно треугольником. Опыт подсказывает следующую теорему.

Теорема 21

На плоскости чертежа в качестве изображения данного треугольника может быть взят совершенно произвольный (!) треугольник.

Доказательство.

1) Возьмем в плоскости α (рис. 100) произвольный треугольник $A'B'C'$ и докажем, что он может быть выбран в качестве изображения данного треугольника ABC;

2) треугольник ABC расположим так, чтобы $A = A'$, $C \in A'C'$, $B \notin \alpha$;

3) нетрудно выбрать направление проектирования, при котором треугольник ABC проектируется в треугольник, подобный треугольнику $A'B'C'$. Для этого построим $\Delta A'CB_1 \sim \Delta A'C'B'$ (проведем $CB_1 \parallel C'B'$);

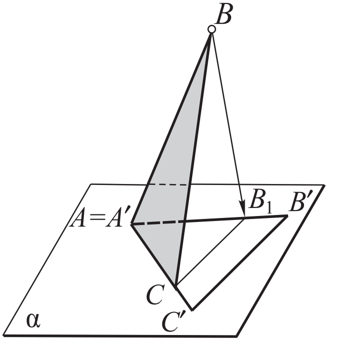


Рис. 100

4) если теперь в качестве направления проектирования выберем направление BB_1, то треугольник ABC проектируется в треугольник $A'CB_1$, подобный произвольно взятому треугольнику $A'B'C'$.

10.2. Примеры решения задач

Задача 1. В плоскости α дан треугольник $A'B'C'$ — изображение некоторого прямоугольного треугольника ABC (рис. 101, *а*). Угол C' — изображение прямого угла C. На гипотенузе AB взята точка M. Постройте изображение перпендикуляра MT, проведенного из точки M к катету AC.

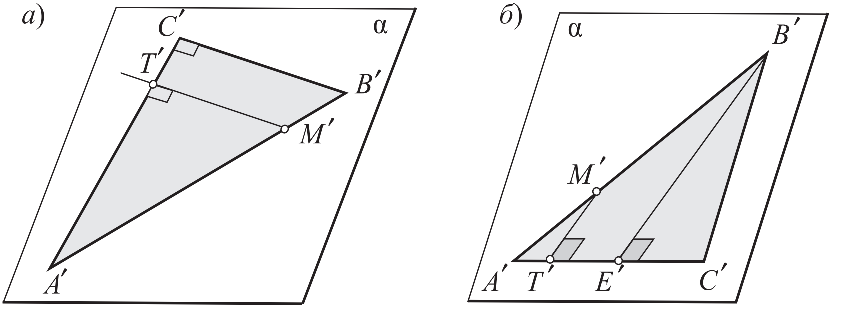


Рис. 101

Решение.

1) Так как $MT \perp AC$ и $BC \perp AC$, то $MT \parallel BC$;

2) параллельность отрезков сохраняется на изображении. Поэтому изображением перпендикуляра MT, проведенного из точки M к катету AC, будет являться отрезок $M'T' \parallel B'C'$.

Задача 2. В плоскости α дан треугольник $A'B'C'$ — изображение некоторого равнобедренного треугольника ABC (рис. 101, *б*). Стороны $A'B'$ и $B'C'$ изображают боковые стороны треугольника ABC. На стороне AB взята точка M и проведен перпендикуляр MT к основанию AC. Постройте изображение этого перпендикуляра.

Решение.

1) Вначале построим изображение медианы BE, проведенной к основанию AC: медиана BE изобразится медианой $B'E'$;

2) отрезок $B'E'$ одновременно является и изображением высоты BE, проведенной к основанию треугольника-оригинала;

3) так как $MT \parallel BE$, то отрезок MT изобразится отрезком $M'T' \parallel B'E'$.

Задача 3. В плоскости α дана трапеция $A'B'C'D'$ — изображение некоторой равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 102, *а*). Стороны $A'B'$ и $C'D'$ изображают боковые стороны трапеции $ABCD$. На стороне AB взята точка M и проведен перпендикуляр MT к основанию AD. Постройте изображение этого перпендикуляра.

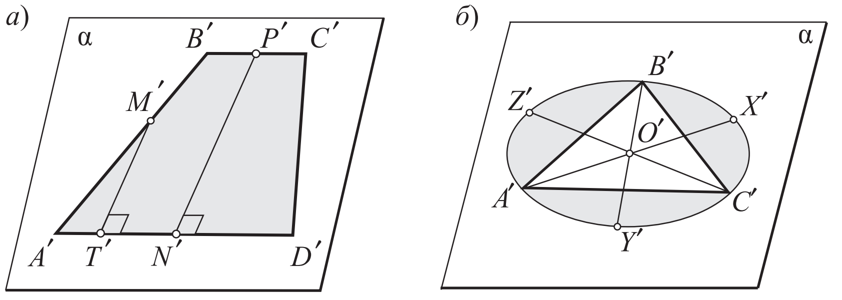


Рис. 102

Решение.

1) Вначале построим изображение отрезка PN, соединяющего середины оснований трапеции $ABCD$. Этот отрезок изобразится отрезком $P'N'$, который также соединяет середины оснований трапеции $A'B'C'D'$;

2) в равнобедренной трапеции $ABCD$ отрезок PN перпендикулярен ее основаниям;

3) так как $PN \perp AD$ и $MT \perp AD$, то $MT \parallel PN$;

4) поэтому отрезок MT изобразится отрезком $M'T'$, параллельным отрезку $P'N'$.

Задача 4. В плоскости α дан треугольник $A'B'C'$ (рис. 102, *б*) — изображение равностороннего треугольника ABC. Около треугольника ABC описана окружность. Постройте ее изображение (по 6 точкам).

Решение.

1) Окружность, описанная около треугольника ABC, изобразится эллипсом. Три точки искомого эллипса известны — это вершины треугольника $A'B'C'$. Осталось построить еще три точки;

2) построим вначале изображение центра O окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Центр O в равностороннем треугольнике совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника. Медианы треугольника ABC изобразятся медианами треугольника $A'B'C'$, центр O — точкой O' — точкой пересечения медиан треугольника $A'B'C'$;

3) диаметры окружности AX, BY и CZ изобразятся отрезками $A'X'$, $B'Y'$ и $C'Z'$, для которых точка O' будет серединой;

4) поэтому для построения точки X' продолжим отрезок $A'O'$ за точку O' и на продолжении отложим отрезок $O'X' = O'A'$;

5) аналогично строятся точки Y' и Z';

6) через точки A', B', C', X', Y' и Z' проводим эллипс. Он и будет являться изображением окружности, описанной около треугольника ABC.

§ 11. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

11.1. Теория

В основе построений различных пространственных фигур лежит умение строить изображения тетраэдра и параллелепипеда. Поэтому начнем именно с этих фигур. Построение изображений пространственных фигур опирается на один простой факт, к изучению которого мы приступаем. Вначале сформулируем следующее определение.

Фигура, образованная тремя отрезками, выходящими из одной точки и не лежащими в одной плоскости, называйся **треножником**. Обратите внимание: треножник — пространственная фигура!

Обозначение: $PABC$, где P — *вершина* треножника, PA, PB и PC — отрезки, выходящие из вершины.

Следующая теорема примечательна тем, что с ее помощью можно строить не только правильные, но и что очень важно — наглядные изображения.

Теорема 22

Пусть дан треножник $PABC$ (рис. 103). **Можно подобрать направление проектирования на плоскость чертежа таким образом, что треугольник** PAB **изобразится равным треугольником** $P'A'B'$, **а отрезок** PC **— произвольным отрезком** $P'C'$.

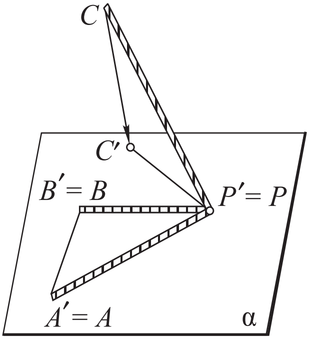


Рис. 103

Доказательство.

1) Пусть на плоскости чертежа — плоскости α — имеется $\Delta A'P'B'$, равный ΔAPB данного треножника, а $P'C'$ — произвольный отрезок в плоскости α;

2) выясним, как же нужно приложить треножник $PABC$ к плоскости чертежа и как потом выбрать направление проектирования, чтобы отрезки PA, PB и PC треножника проектировались соответственно в отрезки $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$;

3) сделать это совсем просто: треугольник PAB необходимо совместить с треугольником $P'A'B'$ и после этого в качестве направления проектирования взять направление CC'.

Примечания. 1) Рассмотренная теорема позволяет выделить в пространственной фигуре некоторый треугольник PAB и изобразить его без искажения. Обычно в качестве такого треугольника выбирается тот, в котором сосредоточено большее количество известных элементов фигуры, являющихся наиболее важными для решения задачи. Наглядность изображения повышается. Безусловно, это помогает быстрее найти решение задачи;

2) чаще треугольник PAB строится лишь с точностью до подобия — без искажения его угловых элементов.

11.2. Примеры решения задач

Задача 1. На рисунке 104 изображены: правильный тетраэдр; перпендикуляр PO, проведенный из вершины P на плоскость ABC; ΔAPK, в котором PO является высотой, причем в целях наглядности этот треугольник изображен без искажения. Допустим, что вам необходимо самостоятельно выполнить этот рисунок. Какие построения и в какой последовательности вы бы проделали?

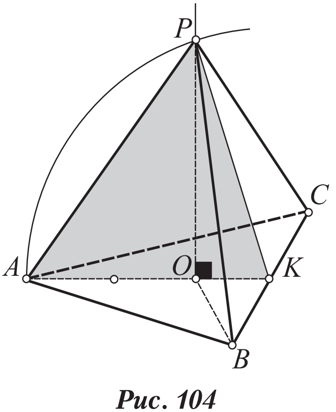


Рис. 104

Решение.

Очевидно, что начать надо с построения треугольника APK. Построим его без искажения линейных (а значит, и угловых) элементов. Для этого заметим, что если $PA = PB = PC$, то ортогональные проекции этих отрезков также равны: $OA = OB = OC$. Поэтому точка O является центром описанной окружности.

В равностороннем треугольнике ABC точка O лежит на медиане AK, причем $AO = \frac{2}{3}AK$. Чтобы треугольник APK изобразился без искажения линейных размеров, воспользуемся треножником $KPAB$ и расположим его таким образом, чтобы треугольник KPA оказался параллельным плоскости чертежа. Отрезок KB при этом можно изобразить произвольным отрезком. Итак, приходим к следующим построениям:

1) на горизонтальной прямой откладываем отрезок AK в натуральную величину (см. рис. 104) и делим его на три равные части; строим точку O так, чтобы $AO = \frac{2}{3}AK$;

2) через точку O проводим прямую, перпендикулярную к AK (прямой угол изображаем без искажения);

3) проводим окружность $(K; KA)$, при пересечении ее с построенным перпендикуляром получаем точку P (в результате построен треугольник APK);

4) отрезок KB строим на чертеже произвольно, руководствуясь только соображениями наглядности чертежа (например, точку B надо выбирать так, чтобы отрезки PO и PB не накладывались друг на друга);

5) точку C строим с учетом того, что $KC = KB$;

6) строим ребра тетраэдра AB, AC, PB и PC. Искомые построения найдены.

Задача 2. Дан правильный тетраэдр $PABC$ (рис. 105). Постройте перпендикуляр к скрещивающимся прямым PA и BC, концы которого лежали бы на этих прямых. Найдите длину этого перпендикуляра, если ребра тетраэдра равны a.

Решение.

1) Строим изображение правильного тетраэдра также, как и при решении предыдущей задачи (рисунок 105 не совсем отвечает требованию наглядности; рекомендуем выполнить более наглядный рисунок);

2) нетрудно установить, что PA и BC — перпендикулярные скрещивающиеся прямые (ранее решенная задача);

3) в этом случае достаточно из точки K в плоскости PAK провести перпендикуляр KX к прямой PA (провести высоту треугольника PAK). Перпендикуляр KX проводим к прямой PA без искажения прямого угла! Учитывая, что треугольник PAK — равнобедренный, точка X — середина ребра PA;

4) отрезок KX — искомый перпендикуляр к скрещивающимся прямым PA и BC. В самом деле: $PA \perp KX$ по построению; $BC \perp KX$, так как

$$BC \perp PAK \text{ и } KX \subset PAK;$$

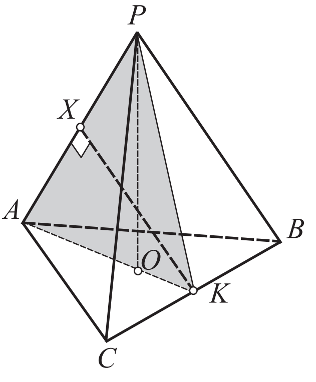


Рис. 105

5) вычисление длины перпендикуляра KX сводится к нахождению катета KX прямоугольного треугольника PXK, в котором $PK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $PX = \frac{a}{2}$:

$$KX = \sqrt{PK^2 - PX^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $KX = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

§ 12. ПОСТРОЕНИЯ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ

12.1. Простейшие задачи

Вернемся к задачам на воображаемые построения (см. § 8) и посмотрим, нельзя ли их переформулировать в задачи на построение на изображениях. В задаче 1 требовалось построить точку пересечения данной прямой a с данной плоскостью α. Сформулируем ее таким образом.

Задача 1. На рисунке 106, *а*, *б* изображены прямая a, плоскость α, точки A и B данной прямой и их проекции A_1 и B_1 на плоскость α. Постройте точку пересечения данной прямой a с данной плоскостью α.

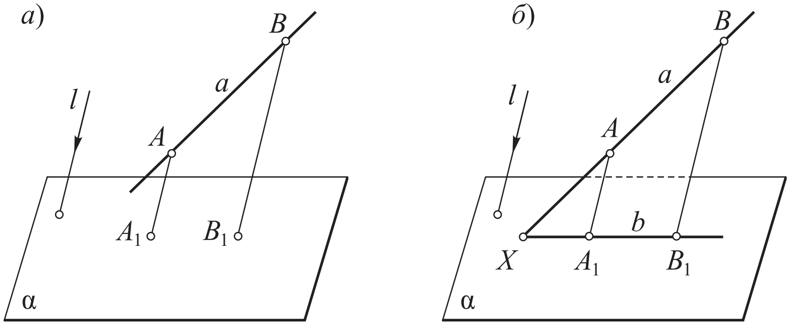


Рис. 106

Решение.

1) При решении задачи 1 из § 8 в плоскости α бралась произвольная точка. В данной задаче в этом нет необходимости. В качестве такой точки можно взять не произвольную, а данную точку A_1;

2) при решении задачи 1 из § 8 проводилась плоскость $\beta = (a; A_1)$. Здесь мы тоже рассмотрим плоскость $\beta = (a; A_1)$;

3) как и прежде, построим прямую $b = \alpha \cap \beta$. Но в данной задаче эта прямая строится единственным образом: $b = A_1B_1$;

4) далее, как и при решении задачи 1 из § 8, построим точку пересечения прямых a и b: $X = a \cap b$.

Точка X — искомая точка.

Задачу 1 из § 8 можно сформулировать и таким образом.

Задача 2. (*Конкретизация предыдущей задачи на примере куба.*) На рисунке 107, *а*, *б* изображены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка M, принадлежащая грани D_1DCC_1. Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью нижнего основания куба.

Решение.

1) Эта задача близка к предыдущей. Примем за направление проектирования боковое ребро куба и найдем проекции точек B и M на плоскость нижнего основания (см. рис. 107, *б*). Проекцией точки B будет точка B_1, а проекцией точки M — точка $M_1 = l \cap D_1C_1$, где $l \parallel CC_1$;

2) дальнейшие построения такие же, как и при решении задачи 1:

а) проводим прямую B_1M_1, при этом прямые BM и B_1M_1 располагаются в одной проектирующей плоскости β;

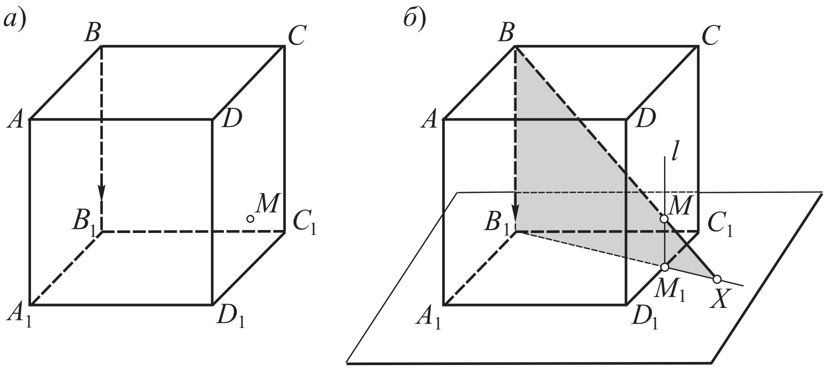


Рис. 107

б) строим точку $X = BM \cap B_1M_1$.

Точка X — искомая точка.

Рассмотрим еще один пример «перевода» задачи 1 из § 8 в задачу на построение на изображении.

Задача 3. На рисунке 108, *а* изображены тетраэдр $PABC$, точка M, принадлежащая ребру PA, и точка K, принадлежащая грани PBC. Постройте точку пересечения прямой MK с плоскостью основания тетраэдра.

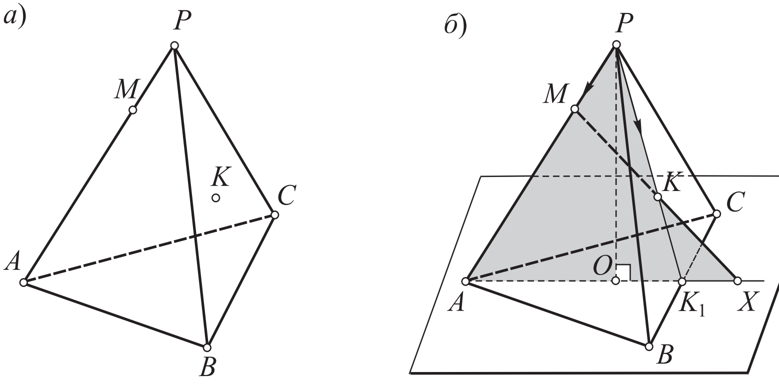


Рис. 108

Решение.

1) В данном случае удобно воспользоваться не параллельным проектированием, а *центральным*. При центральном проектирова-

нии на некоторую плоскость проектирующие прямые «исходят» из некоторой точки, называемой *центром* проектирования. Применим центральное проектирование с центром P на плоскость ABC (рис. 108, *б*). Проекцией точки M будет точка A, проекцией точки K — точка $K_1 = PK \cap CB$;

2) дальнейшие построения такие же, как и при решении задачи 2:

а) проводим прямую AK_1;

б) прямые MK и AK_1 лежат в одной проектирующей плоскости PAK_1; строим точку $X = MK \cap AK_1$. Точка X — искомая.

Примечание. Как видно, при построениях на изображении нет произвола в построении точек, прямых, плоскостей и, следовательно, их общих элементов. В этом и заключается главная особенность этих построений.

Обратимся к задаче 3 из § 8 и покажем, каким образом ее можно переформулировать в задачу на построение на изображении.

Задача 4. На рисунке 109 изображены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и две скрещивающиеся прямые A_1D и D_1C. Постройте прямую, проходящую через точку A и пересекающую прямые A_1D и D_1C.

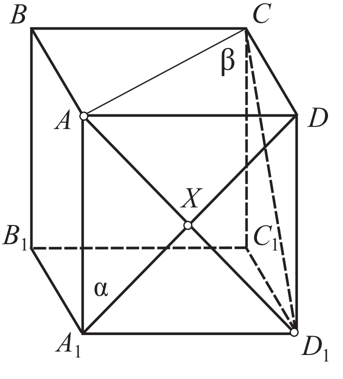


Рис. 109

Решение.

1) При решении задачи 3 из § 8 проводили две плоскости α и β. Такие же плоскости проведем и сейчас: $\alpha = (A; A_1D)$, $\beta = (A; D_1C)$. Если при решении задачи 3 из § 8 эти плоскости проводились чисто условно, то здесь положение плоскостей полностью определено: α — плоскость передней грани куба, β — плоскость AD_1C;

2) искомая прямая определяется как линия пересечения плоскостей α и β.

Такой прямой является прямая AD_1, она — искомая: проходит через точку A и пересекает две данные скрещивающиеся прямые A_1D и D_1C.

Примечание. Как видно, замысел решения данной задачи такой же, как и задачи 3 из § 8. Реализуется же он иначе. Рисунок перестает быть условным, все построения на нем выполнены с помощью линейки, взаимное расположение различных его элементов строго определенное.

12.2. Примеры задач на построение и вычисление

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра CC_1 (рис. 110). Постройте перпендикуляр, проведенный из точки M к плоскости BDD_1. Найдите длину этого перпендикуляра, а также угол наклона прямой DM к плоскости BDD_1. Ребро куба положите равным a.

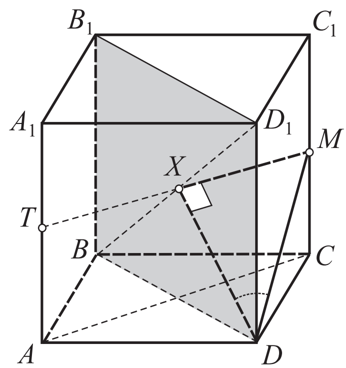


Рис. 110

Решение.

1) Пусть T — середина ребра AA_1, проведем прямую MT. Воспользуемся тем, что $MT \parallel AC$;

2) ($AC \perp BB_1D_1D$ (ранее решенная задача) и $MT \parallel AC$) $\Rightarrow MT \perp BB_1D_1D$;

3) прямая MT пересекает отрезок BD_1 в точке X — его середине (докажите это). Поэтому отрезок MX — искомый перпендикуляр, проведенный из точки M к плоскости BDD_1;

4) перейдем к вычислениям:

$$(MX \perp BB_1D_1D \text{ и } XD \subset BB_1D_1D) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (MX \perp XD \text{ и } \Delta MXD \text{ — прямоугольный});$$

5) в этом треугольнике

$$MD = \frac{a\sqrt{5}}{2},\ XD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда по теореме Пифагора

$$MX = \sqrt{MD^2 - XD^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

6) так как отрезок XD является ортогональной проекцией отрезка MD на плоскость BDD_1, то $\angle MDX = \alpha$ — угол наклона отрез-

ка DM к плоскости BDD_1. Из прямоугольного треугольника MXD имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MX}{XD} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \alpha \approx 39{,}2°.$$

Ответ: $MX = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра CC_1 (рис. 111). Постройте перпендикуляр, проведенный из точки A_1 к плоскости BMD. Найдите длину этого перпендикуляра, а также угол наклона прямой A_1M к плоскости BMD. Ребро куба равно a.

Решение.

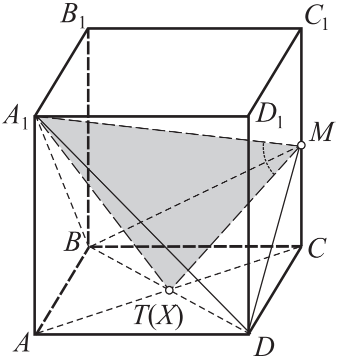


Рис. 111

1) Рассмотрим наклонные A_1B и A_1D к плоскости BMD. Так как эти наклонные равны, то равны их ортогональные проекции на данную плоскость. Поэтому точка A_1 ортогонально проектируется на плоскость BMD в некоторую точку X, равноудаленную от концов отрезка BD;

2) следовательно, точка X лежит в плоскости BMD на серединном перпендикуляре к отрезку BD. По аналогичной причине точка M также лежит на этом серединном перпендикуляре. Значит, отрезок A_1X является высотой треугольника A_1MT (T — середина стороны BD);

3) выясним, какого вида этот треугольник. Для этого вычислим его стороны. Из прямоугольного треугольника A_1AT по теореме Пифагора имеем:

$$A_1T = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника MTC по теореме Пифагора имеем:

$$MT = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника A_1C_1M по теореме Пифагора находим:

$$A_1M = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}.$$

Получаем:

$$A_1T^2 + MT^2 = A_1M^2.$$

Поэтому треугольник A_1MT — прямоугольный и $A_1T \perp MT$;

4) тогда точка X совпадет с точкой T и A_1T — перпендикуляр к плоскости BMD;

5) итак, $A_1X = A_1T = a\sqrt{\frac{3}{2}}$;

6) найдем тангенс $\angle A_1MT = \alpha$ — угла наклона прямой MA_1 к плоскости BMD. Из прямоугольного треугольника A_1MT:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1T}{MT} = \frac{a\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \ \ \alpha \approx 54{,}7°.$$

Ответ: $A_1X = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра CC_1, точка T — середина ребра AA_1 (рис. 112). Найдите косинус двугранного угла, образованного ребром BD и гранями, проходящими через точки M и T. Найдите также косинус угла между плоскостями граней этого двугранного угла.

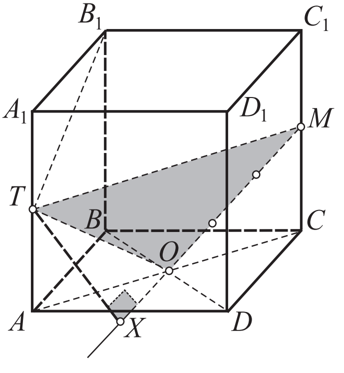


Рис. 112

Решение.

1) Построим линейный угол данного двугранного угла. Пусть O — середина отрезка BD. Так как MO и TO перпендикулярны к BD (установите это!), то $\angle MOT = \alpha$ является искомым линейным углом данного двугранного угла;

2) угол MOT найдем по теореме косинусов из треугольника MOT:

$$\left(MT = AC = a\sqrt{2},\ OM = OT = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha.$$

Отсюда $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \approx 109{,}5°$;

3) тогда угол δ между плоскостями граней данного двугранного угла равен смежному углу:

$$\delta = 180° - \alpha \Rightarrow \cos\delta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \delta \approx 70{,}5°.$$

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\delta = \frac{1}{3}$.

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина ребра BC (рис. 113, *а*). Постройте общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым A_1M и AB_1. Найдите его длину, если ребро куба равно a.

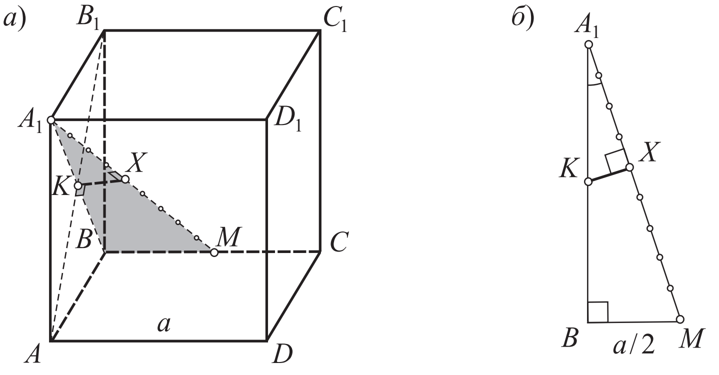


Рис. 113

Решение.

1) Рассмотрим ортогональную проекцию прямой A_1M на плоскость боковой грани AA_1B_1B — прямую A_1B;

2) так как данная прямая AB_1 перпендикулярна к ортогональной проекции наклонной A_1M, то прямая AB_1 перпендикулярна к самой наклонной A_1M. Поэтому данные скрещивающиеся прямые являются перпендикулярными;

3) пусть $K = AB_1 \cap A_1B$;

4) для построения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым A_1M и AB_1 достаточно из точки K провести перпендикуляр KX к прямой A_1M (ранее решенная задача);

5) для этого рассмотрим прямоугольный треугольник A_1BM (рис. 113, *б*). Прямоугольные треугольники A_1BM и A_1XK подобны (по двум углам). Из подобия этих треугольников следует (предварительно из прямоугольного треугольника AA_1M найдем, что $A_1M = \frac{3a}{2}$):

$$\frac{KX}{BM} = \frac{A_1K}{A_1M} \Rightarrow \frac{KX}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow KX = \frac{a\sqrt{2}}{6};$$

6) для точного построения точки X найдем, в каком отношении она делит отрезок A_1M. Находим A_1X из прямоугольного треугольника A_1XK и искомое отношение:

$$A_1X = \sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{36}} = \frac{2a}{3}, \ \frac{A_1X}{A_1M} = \frac{2a}{3} : \frac{3a}{2} = \frac{4}{9};$$

7) пользуясь этим отношением, строим точку X и тем самым искомый перпендикуляр KX.

Ответ: $KX = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

12.3. Методы решения задач на построение сечений

Пусть даны некоторая пространственная фигура Ф и плоскость α. **Сечением фигуры Ф плоскостью** α называется фигура $S = \alpha \cap Ф$. Плоскость α при этом называется *плоскостью сечения* или *секущей плоскостью*.

Возможны различные методы построения сечений.

1. *Метод следа.* Поясним суть этого метода.

Задача 1. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 114, *а*) и три точки, принадлежащие его ребрам: $X_1 \in AA_1$, $X_2 \in BB_1$ и $X_3 \in CC_1$. Постройте сечение куба плоскостью $X_1X_2X_3$.

Решение.

1) Решение задачи начнем с построения прямой MN, по которой секущая плоскость $X_1X_2X_3$ пересекает плоскость нижнего основа-

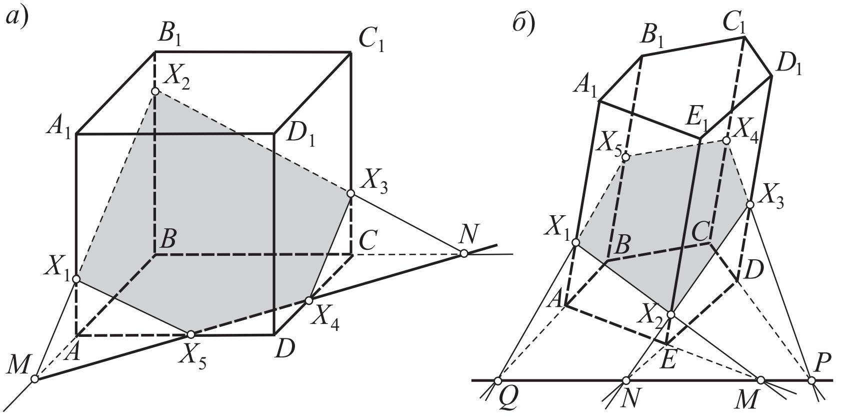


Рис. 114

ния куба. Плоскость нижнего основания при этом называется *основной*, а прямая MN — *следом*;

2) точки M и N строим так же, как и в задаче 1 из п. 12.1:

$$M = X_1X_2 \cap AB, \; N = X_2X_3 \cap BC;$$

3) через точки M и N проводим прямую MN — искомый след;

4) заметим, что прямая MN принадлежит секущей плоскости и пересекает ребра нижнего основания куба. Построим эти точки:

$$X_4 = MN \cap CD, \; X_5 = MN \cap AD;$$

5) многоугольник $X_1X_2X_3X_4X_5$ — искомое сечение.

Задача 2. Дана пятиугольная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 114, *б*), $X_1 \in AA_1$, $X_2 \in EE_1$, $X_3 \in DD_1$. Постройте сечение призмы плоскостью $X_1X_2X_3$.

Решение.

1) Решение задачи начнем с построения прямой MN, по которой секущая плоскость $X_1X_2X_3$ пересекает плоскость нижнего основания призмы. Плоскость нижнего основания, как и в предыдущей задаче, называется *основной*, а прямая MN — *следом*;

2) точки M и N строим так же, как и в задаче 1 из п. 12.1:

$$M = X_1X_2 \cap AE, \; N = X_2X_3 \cap ED;$$

3) через точки M и N проводим прямую MN — искомый след;

4) строим точку $P = CD \cap MN$. Так как точка P принадлежит прямой MN и прямая MN принадлежит секущей плоскости, то точка P принадлежит секущей плоскости;

5) тогда прямая PX_3 принадлежит секущей плоскости. Кроме того, эта прямая лежит в плоскости боковой грани CC_1D_1D. Поэтому прямая PX_3 пересекает прямую CC_1 в некоторой точке X_4, которая является четвертой вершиной многоугольника сечения:

$$X_4 = PX_3 \cap CC_1;$$

6) строим точку $Q = AB \cap MN$;

7) строим точку $X_5 = QX_1 \cap BB_1$;

8) многоугольник $X_1X_2X_3X_4X_5$ — искомое сечение.

Задача 3. Дана пятиугольная пирамида $PABCDE$ (рис. 115), $X_1 \in PA$, $X_2 \in PE$, $X_3 \in PD$. Постройте сечение пирамиды плоскостью $X_1X_2X_3$.

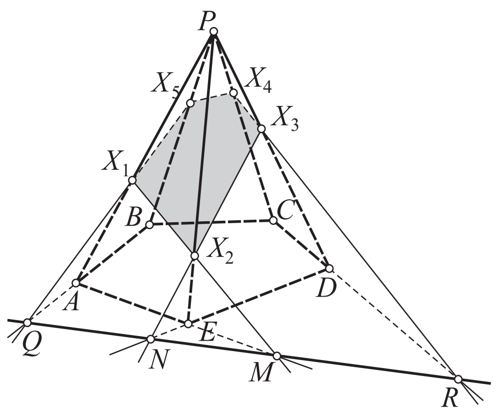


Рис. 115

Решение.

1) Решение задачи начнем с построения прямой MN, по которой секущая плоскость $X_1X_2X_3$ пересекает плоскость основания пирамиды. Плоскость основания, как и в предыдущих задачах, называется *основной*, а прямая MN — *следом*;

2) точки M и N строим так же, как и в задаче 1 из п. 12.1:

$$M = X_1X_2 \cap AE, \ N = X_2X_3 \cap ED;$$

3) через точки M и N проводим прямую MN — искомый след;

4) строим точку $R = CD \cap MN$. Так как точка R принадлежит прямой MN и прямая MN принадлежит секущей плоскости, то точка R принадлежит секущей плоскости;

5) тогда прямая RX_3 принадлежит секущей плоскости. Кроме того, эта прямая лежит в плоскости боковой грани PCD. Поэтому прямая RX_3 пересекает прямую PC в некоторой точке X_4, которая является четвертой вершиной многоугольника сечения: $X_4 = RX_3 \cap PC$;

6) строим точку $Q = AB \cap MN$;

7) строим точку $X_5 = QX_1 \cap PB$;

8) многоугольник $X_1X_2X_3X_4X_5$ — искомое сечение.

Примечание. В зависимости от расположения точек X_1, X_2 и X_3 на ребрах точки X_4 и X_5 могут оказаться лежащими не на ребрах, а на их продолжениях.

2. *Использование свойств секущей плоскости* (указанных при ее задании).

Задача 4. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 116) и точка X_1, принадлежащая ребру C_1D_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку X_1 и параллельной плоскости AB_1C_1D.

Решение.

1) Воспользуемся тем, что линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью — параллельны. Поэтому секущая плоскость пересечет плоскость грани DD_1C_1C по прямой X_1X_2, параллельной прямой C_1D. Построив такую прямую, получим точку X_2 — точку пересечения ее с прямой DD_1;

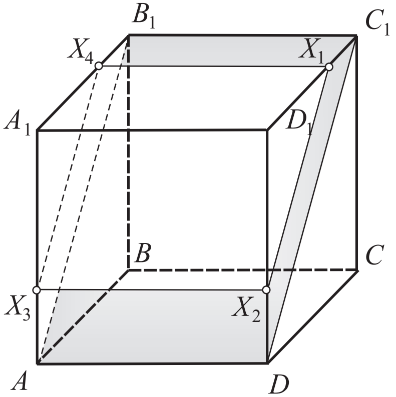


Рис. 116

2) повторим предыдущее рассуждение для секущей плоскости и плоскости передней грани куба. Как и ранее, секущая плоскость пересечет плоскость передней грани по прямой X_2X_3, параллельной прямой AD. В итоге строим еще одну вершину многоугольника сечения — вершину X_3;

3) аналогично: секущая плоскость пересечет плоскость грани AA_1B_1B по прямой X_3X_4, параллельной прямой AB_1. На этом основании строим точку X_4 — точку пересечения указанной прямой с прямой A_1B_1. Многоугольник $X_1X_2X_3X_4$ — искомое сечение.

Задача 5. а) Пусть S — площадь данного многоугольника, S_1 — площадь его ортогональной проекции на некоторую плоскость, α — угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций. Докажите, что $S_1 = S \cdot \cos \alpha$.

б) В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной, равной a (рис. 117). Боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны к плоскостям оснований. Через прямую BD под углом α к плоскости нижнего основания проведена секущая плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке E. Найдите площадь сечения.

в) В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной, равной a (рис. 118). Боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны к плоскостям оснований. Через прямую X_1X_2 (X_1 и X_2 — середины ребер AB и AD) под углом α к плоскости нижнего основания проведена секущая плоскость, пересекающая ребро CC_1. Найдите площадь сечения.

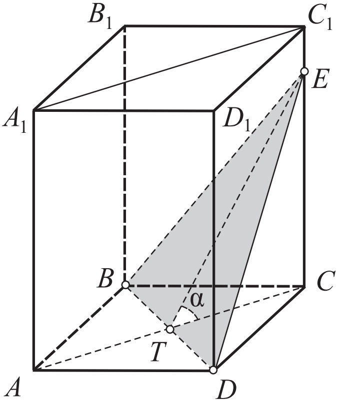


Рис. 117

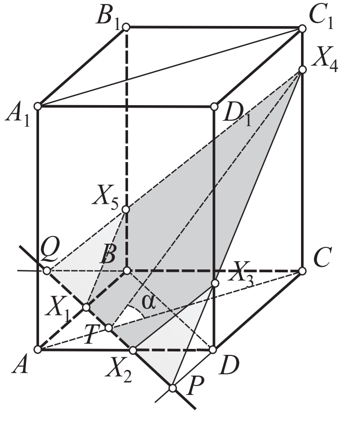


Рис. 118

Решение.

а) Докажите самостоятельно.

б) Сечением параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ΔBDE. Для построения этого сечения в плоскости AA_1C_1C через середину T отрезка BD провели прямую TE так, что $\angle CTE = \alpha$. Так как $BD \perp TC$ и $BD \perp TE$, то $\angle CTE$ действительно является линейным углом рассматриваемого двугранного угла. На основании теоремы 15.2 имеем:

$$S_{BCD} = S_{BED} \cdot \cos\alpha \Rightarrow S_{BED} = \frac{S_{BCD}}{\cos\alpha} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}.$$

Ответ: $S_{BED} = \dfrac{a^2}{2\cos\alpha}$.

в) Для построения сечения в плоскости AA_1C_1C через точку T ($T = X_1X_2 \cap AC$) под углом α к прямой TC проведем прямую TX_4. Точка X_4 — одна из вершин многоугольника сечения. Для построения оставшихся вершин многоугольника сечения воспользуемся методом следа. Следом секущей плоскости на плоскости нижнего основания параллелепипеда является прямая X_1X_2. Строим точку $P = CD \cap X_1X_2$, прямую PX_4 и точку $X_3 = PX_4 \cap DD_1$. Аналогично строится точка X_5. Многоугольник $X_1X_2X_3X_4X_5$ — искомое сечение. Это сечение ортогонально проектируется в пятиугольник X_1BCDX_2. Площадь этого пятиугольника получим, если от площади квадрата $ABCD$ отнимем площадь ΔAX_1X_2. Площадь ΔAX_1X_2 равна $\frac{1}{4}$ площади ΔABD (эти треугольники подобны с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{2}$). Поэтому площадь ΔAX_1X_2 равна $\frac{1}{8}$ площади квадрата $ABCD$.

Отсюда следует, что $S_{X_1BCDX_2} = a^2 - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{7a^2}{8}$. Тогда

$$S_{X_1BCDX_2} = S_{X_1X_2X_3X_4X_5} \cdot \cos\alpha \Rightarrow S_{X_1X_2X_3X_4X_5} = \frac{S_{X_1BCDX_2}}{\cos\alpha} = \frac{7a^2}{8\cos\alpha}.$$

Ответ: $S_{X_1X_2X_3X_4X_5} = \dfrac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

3. ***Построение сечений призм и пирамид с использованием линий пересечения несмежных боковых граней.*** Данный метод представляет собой некоторое видоизменение метода следа. В методе следа основная плоскость выбирается единственным образом и на протяжении решения задачи не заменяется другой плоскостью. При построении сечений призм и пирамид с использованием линий пересечения несмежных боковых граней за основную плоскость поочередно выбираются плоскости некоторых боковых граней, строят след секущей плоскости на этих «основных» плоскостях и так же, как в методе следа, строят вершины многоугольника сечения.

Задача 6. Дана пятиугольная призма $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 119), $X_1 \in AA_1$, $X_2 \in EE_1$, $X_3 \in DD_1$. Постройте сечение призмы плоскостью $X_1X_2X_3$.

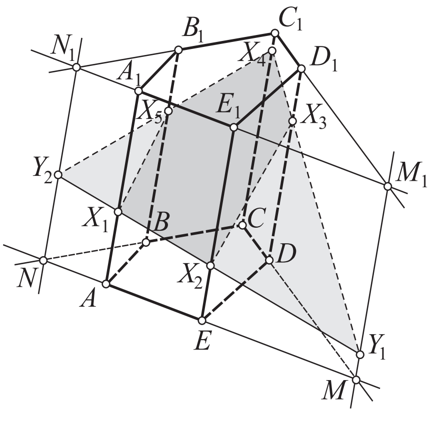


Рис. 119

Решение.

Строим:

1) $M = AE \cap DC, M_1 = A_1E_1 \cap D_1C_1$; $N = AE \cap BC, N_1 = A_1E_1 \cap B_1C_1$;

2) $MM_1 = AA_1E_1E \cap DD_1C_1C$; $NN_1 = AA_1E_1E \cap BB_1C_1C$;

3) $Y_1 = X_1X_2 \cap MM_1$, $Y_2 = X_1X_2 \cap NN_1$;

4) $X_4 = Y_1X_3 \cap CC_1$;

5) $X_5 = Y_2X_4 \cap BB_1$;

6) многоугольник $X_1X_2X_3X_4X_5$ — искомое сечение. Докажите это самостоятельно.

Задача 7. Дана пятиугольная пирамида $PABCDE$ (рис. 120), $X_1 \in PA$, $X_2 \in PE$, $X_3 \in PD$. Постройте сечение призмы плоскостью $X_1X_2X_3$.

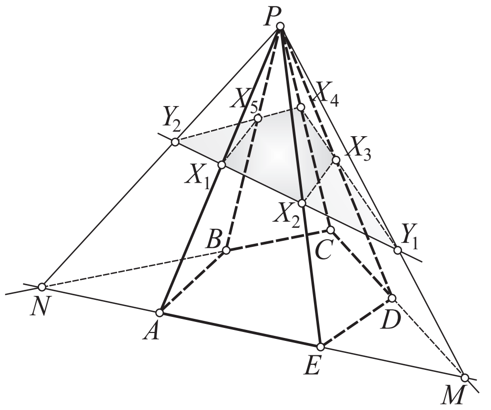


Рис. 120

Решение.

Строим:

1) $M = AE \cap DC$, $N = AE \cap BC$;

2) $PM = PAE \cap PDC$; $PN = PAE \cap PBC$;

3) $Y_1 = X_1X_2 \cap PM$, $Y_2 = X_1X_2 \cap PN$;

4) $X_4 = Y_1X_3 \cap PC$;

5) $X_5 = Y_2X_4 \cap PB$;

6) многоугольник $X_1X_2X_3X_4X_5$ — искомое сечение. Докажите это.

Тема 3 КООРДИНАТНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ МЕТОДЫ В СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 13. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ И ВЕКТОРА

13.1. Координаты точки

В геометрии широко используется не только прямоугольная система координат на плоскости, но и прямоугольная система координат в пространстве. Рассмотрим три попарно перпендикулярные (рис. 121), пересекающиеся в точке O прямые Ox, Oy и Oz. Пусть положительное направление этих прямых задается соответственно лучами Ox, Oy и Oz. Точку O будем называть *началом координат*, прямые Ox, Oy, Oz (*координатные прямые*) — соответственно *осью абсцисс*, *осью ординат* и *осью аппликат*, плоскости xOy, xOz и yOz — *координатными плоскостями*.

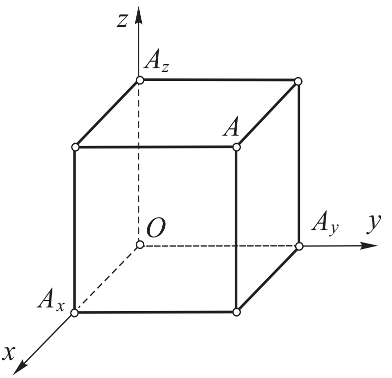


Рис. 121

Введем теперь координаты точки в пространстве.

Пусть A — произвольная точка пространства. Проведем через точку A плоскости, перпендикулярные к координатным осям. Пусть A_x, A_y и A_z — точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординат и аппликат.

Абсциссой, ординатой и аппликатой точки A будем называть соответственно числа x, y и z такие, что

$$x = \begin{cases} OA_x, \text{ если } A_x \text{ принадлежит лучу } Ox; \\ -OA_x, \text{ если } A_x \text{ принадлежит} \\ \qquad \text{дополнительному лучу к лучу } Ox; \\ 0, \text{ если } A_x \text{ совпадает с точкой } O. \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} OA_y, \text{ если } A_y \text{ принадлежит лучу } Oy; \\ -OA_y, \text{ если } A_y \text{ принадлежит} \\ \qquad \text{дополнительному лучу к лучу } Oy; \\ 0, \text{ если } A_y \text{ совпадает с точкой } O. \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} OA_z, \text{ если } A_z \text{ принадлежит лучу } Oz; \\ -OA_z, \text{ если } A_z \text{ принадлежит} \\ \qquad \text{дополнительному лучу к лучу } Oz; \\ 0, \text{ если } A_z \text{ совпадает с точкой } O. \end{cases}$$

Записывают: $A(x, y, z)$ — точка A с координатами x, y и z.

Основное свойство системы координат состоит в том, что она устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел. Это означает, что для каждой точки можно найти единственным образом числа x, y и z, являющиеся координатами этой точки, и наоборот, — для каждой тройки чисел x, y и z можно построить единственную точку, имеющую указанные координаты.

13.2. Вектор. Координаты вектора

Как и в планиметрии, отрезок AB, для которого конец A считается первым, а конец B — вторым (рис. 122), называется **направленным отрезком**, или **вектором**. Точка A называется *началом вектора*, точка B — его *концом*. Обозначения: $\overrightarrow{AB}$ — вектор AB, $\vec{a}$ — вектор a.

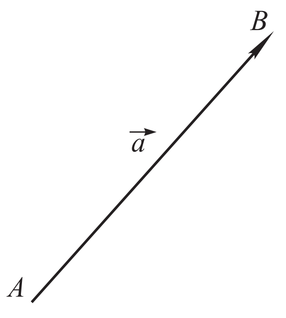


Рис. 122

Длину отрезка AB называют *длиной* или *абсолютной величиной вектора* $\overrightarrow{AB}$. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$.

Если точка A имеет координаты x_1, y_1 и z_1, а точка B — координаты x_2, y_2 и z_2, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$ называются *координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$. Записывают: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ — вектор $\overrightarrow{AB}$ с координатами $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ и $z_2 - z_1$, $\vec{a}(x; y; z)$ — вектор $\vec{a}$ с координатами x, y и z.

Для вектора $\overrightarrow{AB}$, изображенного на рисунке 123, имеем: $A(1; 2; 1)$, $B(2; 1; 2)$. Координаты этого вектора равны:

$$2 - 1 = 1,\ 1 - 2 = -1,\ 2 - 1 = 1.$$

Итак, $\overrightarrow{AB}(1; -1; 1)$.

Примечание. Если вектор изображен на пространственной координатной сетке (см. рис. 123), то его координаты можно определить непосредственно по рисунку. Представим, что совершается переход от начала вектора к его концу вначале параллельно оси Ox, затем параллельно оси Oy и, наконец, параллельно оси Oz. При переходе от начала A к концу B параллельно оси Ox в положительном направлении нужно пройти один единичный отрезок, в отрицательном направлении оси Oy нужно пройти один единичный отрезок и в положительном направлении оси Oz нужно пройти один единичный отрезок. Значит, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты 1, -1 и 1, что полностью согласуется с первоначальным подсчетом координат этого вектора при помощи определения.

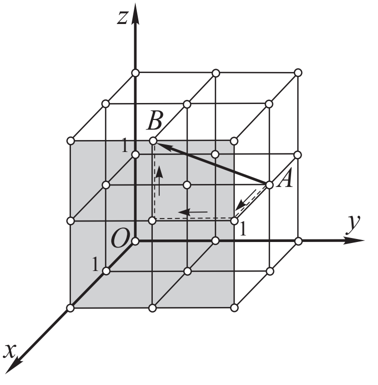


Рис. 123

13.3. Расстояние между точками. Длина отрезка. Координаты середины отрезка

Формулы расстояния между точками и длины отрезка являются обобщениями аналогичных планиметрических формул. Рассмотрим их.

Теоремы 23

1. **Расстояние между точками** $A(x_1; y_1; z_1)$ **и** $B(x_2; y_2; z_2)$ **находится по формуле**

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

2. **Если вектор** $\overrightarrow{AB}$ **имеет координаты** x, y **и** z, **то его длина находится по формуле**

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

3. **Если** $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, **то координаты середины отрезка** AB — **точки** $C(x; y; z)$ — **находятся по формулам:**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (3)$$

Доказательства.

1. 1) Пусть A_1 и B_1 (рис. 124) — ортогональные проекции точек A и B на плоскость xOy. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную к оси Oz и пересекающую прямую BB_1 в точке C;

2) по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2};$$

3) так как

$$AC^2 = A_1B_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

и

$$CB^2 = |z_2 - z_1|^2 = (z_2 - z_1)^2,$$

то приходим к формуле (1).

2. 1) Пусть $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$;

2) тогда $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

3) отсюда следует формула (2).

3. 1) Для доказательства первой формулы через точки A, B и C проведем плоскости, перпендикулярные к оси Ox (рис. 125);

2) пусть они пересекут эту ось соответственно в точках A_1, B_1 и C_1;

3) очевидно, что точка C_1 является серединой отрезка A_1B_1;

4) кроме того, по определению координат точки в пространстве абсциссы точек A_1, B_1 и C_1 соответственно равны x_1, x_2 и x;

5) из планиметрии известно, что $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$;

6) аналогично доказываются две другие формулы (при этом через точки A, B и C проводятся плоскости, перпендикулярные соответственно к осям Oy и Oz).

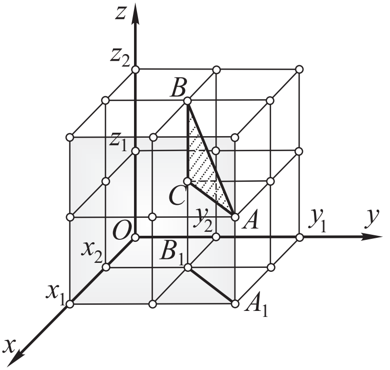


Рис. 124

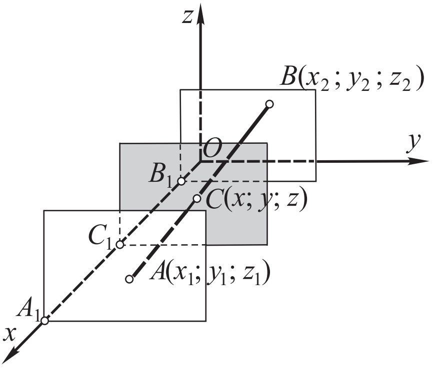


Рис. 125

13.4. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение с тремя переменными x, y, z называется **уравнением фигуры** (в системе координат $Oxyz$), если этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек данной фигуры и только этих точек.

С уравнениями фигур (прямой и окружности) мы встречались в курсе планиметрии. Рассмотрим уравнения прямой в пространстве, в системе координат $Oxyz$. Вначале напомним планиметрический случай: *уравнение прямой, проходящей через две точки* $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ *в системе координат* xOy.

Если $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то уравнение прямой AB имеет вид (рис. 126):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

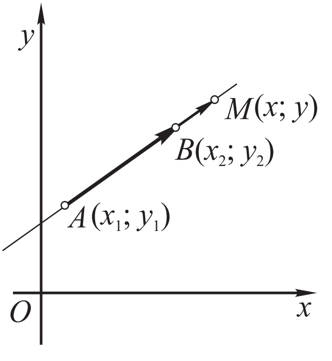


Рис. 126

Если прямая AB параллельна оси Ox или оси Oy, то ее уравнения имеют соответственно вид:

$$y = y_1 \ (x \text{ — любое число}),$$

$$x = x_1 \ (y \text{ — любое число}).$$

Обратимся теперь к уравнениям прямой, проходящей через две данные точки пространства.

Пусть дана прямая, проходящая через точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 127). Найдем уравнения этой прямой.

1-й случай. Пусть $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$ (см. рис. 127). На прямой AB возьмем точку $M(x; y; z)$. Найдем уравнения, связывающие координаты x, y и z между собой. Будем проектировать прямую AB вначале на плоскость xOy, затем на плоскость xOz.

В системе координат xOy имеем: $A_1(x_1; y_1)$, $B_1(x_2; y_2)$, $M_1(x; y)$. Уравнение прямой A_1B_1 в этой системе координат имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

В системе координат xOz имеем: $A_2(x_1; z_1)$, $B_2(x_2; z_2)$, $M_2(x; z)$. Уравнение прямой A_2B_2 в этой системе координат имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

На основании полученных равенств можно записать, что

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (1)$$

Если $M \notin AB$, то равенства (1) выполняться не будут.

Равенства (1) называются **уравнениями прямой, проходящей через две данные точки**.

Заметим, что равенствами (1) записаны три уравнения прямой AB.

2-й случай. Пусть $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 = z_2$ (рис. 128). В этом случае выполняются равенства

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ z=z_1. \qquad (2)$$

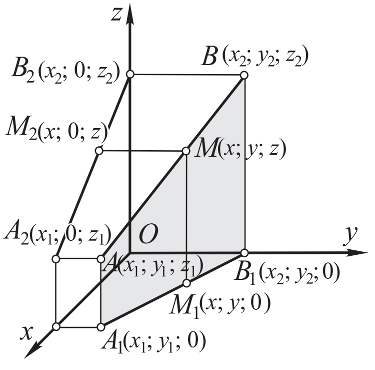


Рис. 127

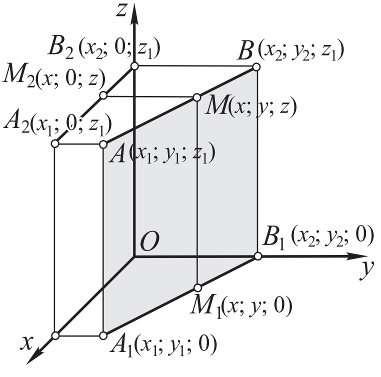


Рис. 128

Равенства (2) выполняются только при условии, что $M \in AB$.

Они называются **уравнениями прямой, проходящей через две данные точки параллельно плоскости** xOy.

Аналогично составляются уравнения прямой, параллельной какой-либо другой координатной плоскости.

Если прямая $AB \parallel xOz$, имеем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},\ y=y_1. \tag{3}$$

Если прямая $AB \parallel yOz$, имеем

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},\ x=x_1. \tag{4}$$

3-й случай. Пусть $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, $x_1 \neq x_2$ (рис. 129). В этом случае прямая AB параллельна двум координатным плоскостям xOy и xOz, а значит, и линии их пересечения — оси Ox.

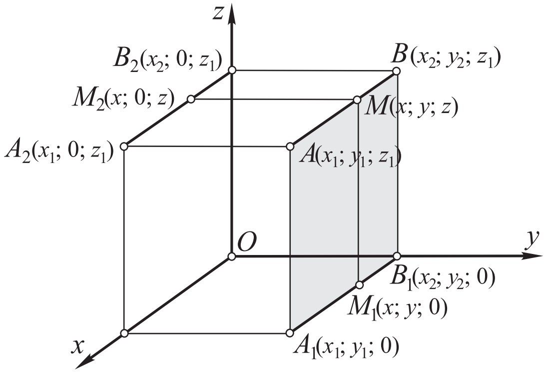


Рис. 129

Очевидным образом выполняются равенства

$$y=y_1,\ z=z_1. \tag{5}$$

Координата x в данном случае не зависит от координат точек A и B и принимает любые значения. Полученные равенства называются **уравнениями прямой, проходящей через точки** A **и** B **параллельно оси** Ox.

Аналогично составляются уравнения прямой, параллельной какой-либо другой координатной оси.

Если прямая $AB \parallel Oy$, то имеем

$$x = x_1,\ z = z_1. \tag{6}$$

Если прямая $AB \parallel Oz$, то имеем

$$x = x_1,\ y = y_1. \tag{7}$$

В итоге можно сформулировать следующие теоремы.

Теоремы 24

> 1. **Если прямая не параллельна ни одной из координатных плоскостей, то ее уравнения имеют вид** (1)**.**
>
> 2. **Если прямая параллельна какой-либо одной координатной плоскости, то ее уравнения имеют один из видов** (2)—(4)**.**
>
> 3. **Если прямая параллельна каким-либо двум координатным плоскостям, то ее уравнения имеют один из видов** (5)—(7)**.**

13.5. Примеры решения задач

Задача 1. Найдите аппликату точки $A(-2;\ -3;\ z)$, если $OA = \sqrt{15}$ (O — начало координат).

Решение.

Имеем: $OA = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + z^2} = \sqrt{15} \Rightarrow z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $z = \pm\sqrt{2}$.

Задача 2. Прямая имеет уравнения $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+1}{3}$.

1) Выясните, проходит ли эта прямая через начало координат.

2) Укажите координаты некоторой точки $P(x_1;\ y_1;\ z_1)$, принадлежащей данной прямой.

3) При каких значениях y_1 и z_1 точка $M(5;\ y_1;\ z_1)$ принадлежит данной прямой?

Решение.

1) При $x = y = z = 0$ равенства

$$\frac{0-1}{2} = \frac{0-3}{5} = \frac{0+1}{3}$$

не выполняются. Поэтому прямая не проходит через начало координат;

2) отношения в уравнениях приравняем к k:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{3}=k.$$

Тогда для искомой точки P должны выполняться равенства:

$$x_1=2k+1,\quad y_1=5k+3,\quad z_1=3k-1.$$

Положив, например, $k=1$, найдем координаты одной из возможных точек: $P(3;\ 8;\ 2)$;

3) в данном случае k выбирать произвольно не нужно. Оно находится следующим образом:

$$k=\frac{x_1-1}{2}=\frac{5-1}{2}=2.$$

Поэтому

$$\left(\frac{y_1-3}{5}=2,\ \frac{z_1+1}{3}=2\right)\Rightarrow y_1=13,\ \ z_1=5.$$

В итоге находим искомую точку: $M(5;\ 13;\ 5)$.

Ответ:

1) Прямая не проходит через начало координат.

2) $P(3;\ 8;\ 2)$.

3) $y_1=13$, $z_1=5$.

§ 14. РАВНЫЕ ВЕКТОРЫ. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

14.1. Определения

Как вы уже заметили, изложение векторной алгебры в стереометрии во многом аналогично изложению ее в планиметрии. Эта аналогия будет продолжена и дальше.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Коллинеарными векторами называются два вектора (рис. 130), которые лежат на параллельных прямых (в частности, на одной прямой).

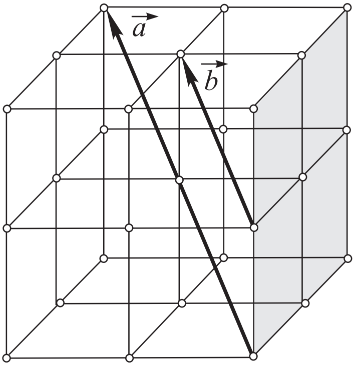


Рис. 130

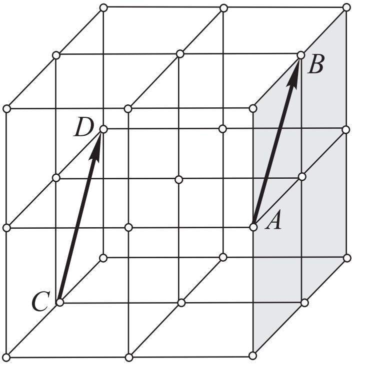


Рис. 131

Равными векторами называются два вектора (рис. 131), если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковые направления. Все нулевые векторы считаются равными.

Противоположными векторами называются векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ (рис. 132), если один из них равен некоторому вектору $\overrightarrow{AB}$, а другой — вектору $\overrightarrow{BA}$.

Следующие два понятия являются новыми, этим понятиям в планиметрии аналога нет.

Некомпланарными векторами называются векторы, которые после откладывания их от одной точки не лежат в одной плоскости (например, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, рис. 133). В противном случае век-

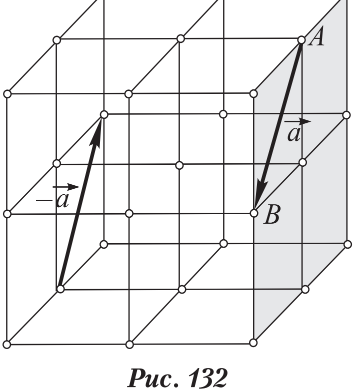


Рис. 132

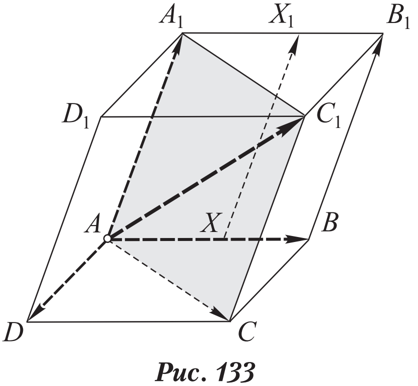


Рис. 133

торы называются **компланарными** (например, векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$ (см. рис. 133).

Заметим также, что два вектора всегда являются компланарными. (Даже если эти векторы лежат на скрещивающихся прямых!)

Сумма и разность векторов в пространстве определяется точно так же, как и на плоскости.

Даны векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (рис. 134). Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CD}$. Получим вектор $\overrightarrow{AP}$, который называется **суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AP}$.**

Суммой трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ (рис. 135).

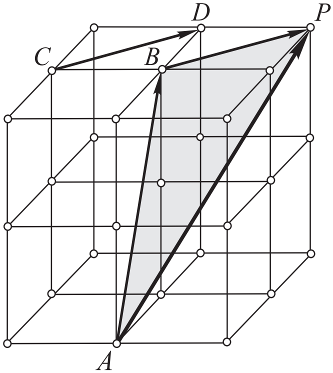


Рис. 134

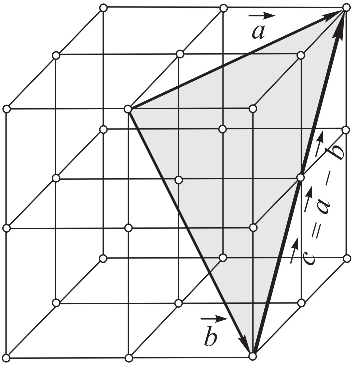


Рис. 135

14.2. Равные векторы

Приведем наиболее важные теоремы, относящиеся к введенным понятиям.

Теоремы 25

1—2. $ABCD$ — **параллелограмм** $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (рис. 136).

3. **Для любого вектора $\vec{a}$ и любой точки** A (рис. 137) **существует единственная точка** B **такая, что** $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$**. (В этом случае говорят, что** ***вектор*** $\vec{a}$ ***отложили от точки*** A**.)**

4. **Одноименные координаты векторов** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{CD}$ **равны тогда и только тогда, когда равны сами векторы.**

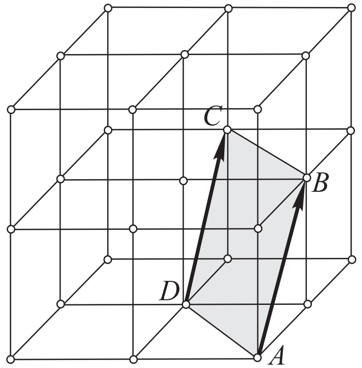


Рис. 136

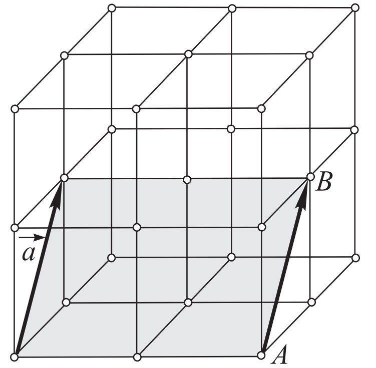


Рис. 137

Доказательства.

1—3. Проводятся точно так же, как и в планиметрии.

4. *Необходимость.* 1) Пусть $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ (рис. 138);

2) по условию координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны. Поэтому

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3, \quad y_2 - y_1 = y_4 - y_3,$$
$$z_2 - z_1 = z_4 - z_3;$$

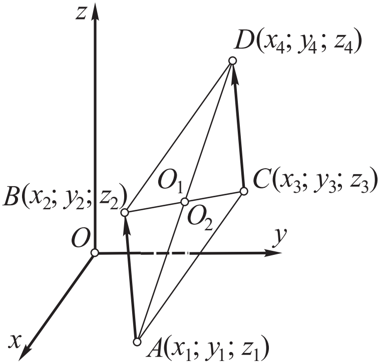


Рис. 138

3) пусть O_1 — середина диагонали BC, O_2 — середина диагонали AD. Если докажем, что точки O_1 и O_2 совпадают, то отсюда будет следовать, что четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, а значит, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

4) по формулам координат середины отрезка запишем абсциссы точек O_1 и O_2: $\frac{x_2+x_3}{2}$ — абсцисса точки O_1, $\frac{x_1+x_4}{2}$ — абсцисса точки O_2;

5) но из равенства $x_2-x_1=x_4-x_3$ следует, что $x_2+x_3=x_1+x_4$;

6) поэтому абсциссы точек O_1 и O_2 совпадают;

7) аналогично доказывается совпадение остальных одноименных координат этих точек;

8) значит, точки O_1 и O_2 совпадают и четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом;

9) на основании теоремы 25.1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Достаточность. 1) Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Воспользуемся предыдущим рисунком и обозначениями. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм;

2) выразим дважды координаты точки O_1 и приравняем одноименные координаты:

$$O_1\left(\frac{x_2+x_3}{2};\ \frac{y_2+y_3}{2};\ \frac{z_2+z_3}{2}\right),$$

$$O_1\left(\frac{x_1+x_4}{2};\ \frac{y_1+y_4}{2};\ \frac{z_1+z_4}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{x_1+x_4}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}=\frac{y_1+y_4}{2},\ \frac{z_2+z_3}{2}=\frac{z_1+z_4}{2}\right);$$

3) отсюда $x_2-x_1=x_4-x_3$, $y_2-y_1=y_4-y_3$, $z_2-z_1=z_4-z_3$;

4) это означает, что одноименные координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны.

14.3. Сложение и вычитание векторов

Теоремы 26

> *Правило треугольника*
>
> 1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 139).

Правило параллелограмма

2. **Если четырехугольник** $ABCD$ **— параллелограмм** (рис. 140)**, то**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Правило параллелепипеда

3. **Если** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **— параллелепипед** (см. рис. 133)**, то**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}.$$

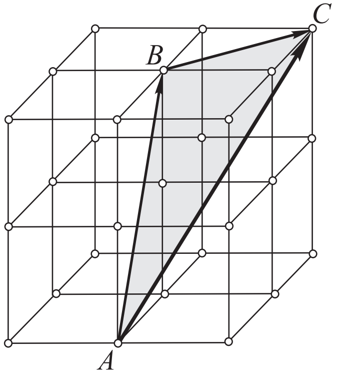


Рис. 139

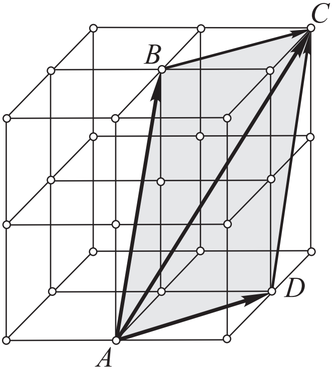


Рис. 140

4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

5. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

6. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

7. $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MK}$ (рис. 141).

8. $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$; $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$.

9. $\left.\begin{array}{l} \vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}, \\ \vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1), \\ \vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{c}(x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2)$.

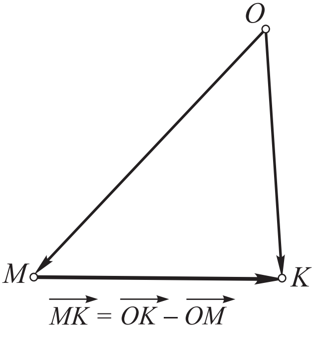


Рис. 141

Доказательства.

Большинство приведенных теорем доказывается точно так же, как и в планиметрии. Отчетливо выраженный стереометрический характер носит только теорема 26.3. Учитывая сказанное, остановимся на доказательстве лишь некоторых приведенных теорем.

3. Геометрический смысл суммы трех некомпланарных векторов выражается правилом параллелепипеда, которое является обобщением правила параллелограмма.

Так как четырехугольники $ABCD$ и AA_1C_1C (см. рис. 133) являются параллелограммами, то доказательство этого утверждения сводится к двухкратному применению правила параллелограмма:

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}.$$

9. 1) Пусть $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ (рис. 142). Тогда $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ (точка O — начало координат).

2) тогда точка A имеет такие же координаты, что и вектор $\vec{a}$: $A(x_1; y_1; z_1)$;

3) вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет такие же координаты, что и вектор $\vec{b}$;

4) зная координаты точки A и вектора $\overrightarrow{AB}$, найдем координаты точки $B(x; y; z)$:

$$x-x_1=x_2 \Rightarrow x=x_1+x_2;$$

5) аналогично получаем:

$$y=y_1+y_2,\ z=z_1+z_2;$$

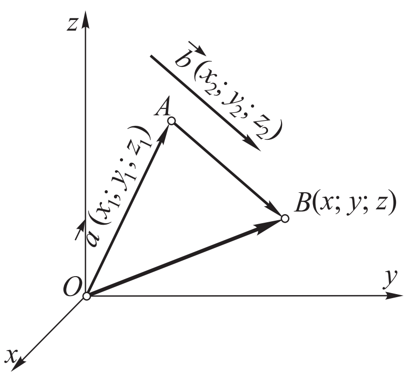


Рис. 142

6) отсюда $\vec{c}=\overrightarrow{OB}(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$;

7) аналогичные рассуждения проводятся для разности двух векторов.

14.4. Примеры решения задач

Задача 1. (*С межпредметным содержанием.*) Самолет летит из пункта A со скоростью $v=800$ км/ч относительно воздуха и направляется в пункт C, находящийся на расстоянии 1500 км от пункта A (рис. 143). На всем пути дует северо-западный ветер со скоростью $u = 80$ км/ч. Через какое время t после вылета самолет прибудет в пункт C, если будет лететь по прямой и скорость $\vec{v}$ направлена на север?

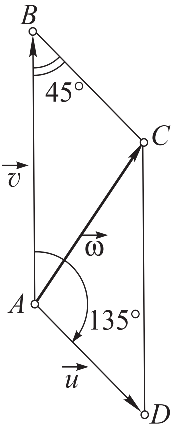


Рис. 143

Решение.

1) Пусть $\vec{w}$ — скорость самолета относительно земли. Тогда $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$;

2) скорость $\vec{w}$ находится как диагональ параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$. В этом параллелограмме $\angle B = 45°$;

3) пусть t — искомое время прилета самолета в пункт C. Тогда

$$AB = 800t, \quad BC = AD = 80t;$$

4) применяя теорему косинусов к треугольнику ABC, запишем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 45° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1500^2 = (800t)^2 + (80t)^2 - 2 \cdot 800t \cdot 80t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{1500^2}{800^2 + 80^2 - 800 \cdot 80 \cdot \sqrt{2}} \approx 4{,}05 \Rightarrow t \approx 2{,}01 \text{(ч)}.$$

Ответ: $t \approx 2{,}01$ ч.

Задача 2. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. 144), точка P лежит на отрезке DA_1 и $DP = \frac{1}{3}DA_1$, точка M лежит на отрезке C_1D и $DM = \frac{1}{3}DC_1$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны.

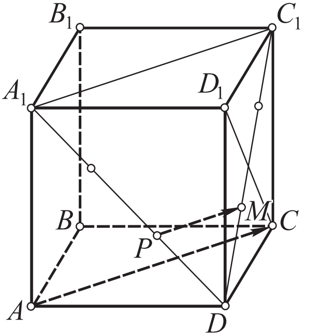


Рис. 144

Решение.

1) ($\Delta DPM \sim \Delta DA_1C_1$ (установите это!)) $\Rightarrow \angle DPM = \angle DA_1C_1$;

2) поэтому $PM \parallel A_1C_1$;

3) $(PM \parallel A_1C_1$ и $A_1C_1 \parallel AC) \Rightarrow PM \parallel AC$;

4) значит, векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{AC}$ — коллинеарны.

§ 15. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСНЫМ ВЕКТОРАМ

15.1. Теория

Для векторов, изображенных на рисунке 145, имеем:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD},$$

$$\overrightarrow{PH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{CD} = -1\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PH} = -1\overrightarrow{CD}.$$

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. **Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число** k называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

2) имеет длину, равную $|k| \cdot |\vec{a}|$;

3) направление вектора $\vec{b}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $k < 0$;

4) если $k = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то произведение вектора $\vec{a}$ на число k есть нулевой вектор.

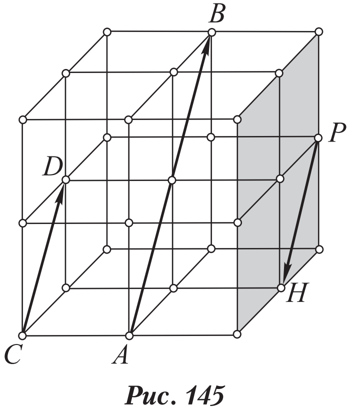


Рис. 145

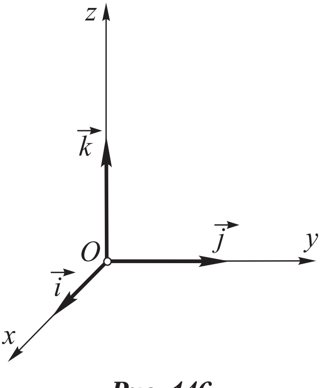


Рис. 146

Обозначение: $\vec{b} = k\vec{a}$ — вектор $\vec{b}$ есть произведение вектора $\vec{a}$ на число k.

Вектор называется *единичным*, если его длина равна 1. Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ (рис. 146), имеющие направления положительных координатных полуосей, называются *базисными векторами*, или *ортами*. Координаты базисных векторов таковы: $\vec{i}\,(1; 0; 0)$, $\vec{j}\,(0; 1; 0)$, $\vec{k}\,(0; 0; 1)$.

Рассмотрим наиболее важные утверждения, относящиеся к произведению вектора на число.

Теоремы 27

1. **Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.**

2. $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1) \Rightarrow k\vec{a}(kx_1;\ ky_1;\ kz_1)$.

3. **Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:**

а) $k(p\vec{a}) = (kp)\vec{a}$ — **сочетательный закон;**

б) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — **первый распределительный закон;**

в) $(k + p)\vec{a} = k\vec{a} + p\vec{a}$ — **второй распределительный закон.**

4. **Любой вектор $\overrightarrow{AC_1}$** (рис. 147) **с координатами x, y и z может быть единственным образом представлен в виде**

$$\overrightarrow{AC_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

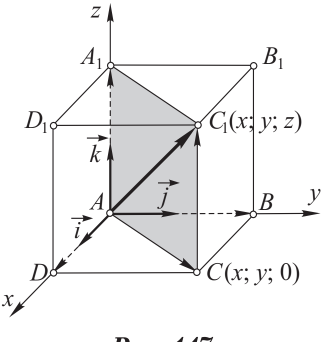


Рис. 147

Доказательства.

4. *Возможность представления.* 1) Построим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором отрезок AC_1 является диагональю;

2) тогда по теореме 26.3 из § 14

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1};$$

3) координаты точки D, а значит, и вектора $\overrightarrow{AD}$, равны x, 0 и 0;

4) сравнивая координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ и вектора $\vec{i}$, можно записать: $\overrightarrow{AD} = x\vec{i}$. Аналогично: $\overrightarrow{AB} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1} = z\vec{k}$;

5) поэтому $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Единственность представления. 1) Допустим, что возможно другое представление вектора $\overrightarrow{AC_1}$: $\overrightarrow{AC_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$;

2) допустим, например, что $x_1 \neq x$. Тогда из равенства $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ будем иметь $\vec{i} = \dfrac{y_1 - y}{x - x_1}\vec{j} + \dfrac{z_1 - z}{x - x_1}\vec{k}$;

3) это означает, что векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ принадлежат одной плоскости (компланарны). Этого быть не может;

4) полученное противоречие доказывает искомую единственность.

Сформулируем определение.

Представление вектора $\overrightarrow{AC_1}$ в виде

$$\overrightarrow{AC_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

называется **разложением этого вектора по базисным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$**.

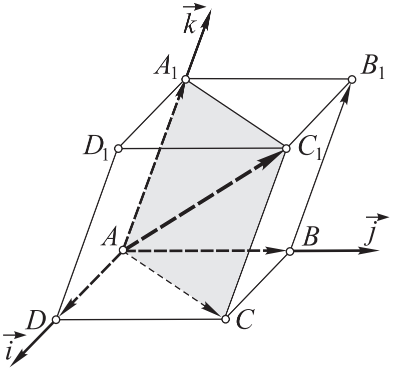


Рис. 148

Следствие. *Любой вектор* $\overrightarrow{AC_1}$ (рис. 148) *может быть единственным образом разложен по трем единичным некомпланарным векторам* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *и* $\vec{k}$: $\overrightarrow{AC_1} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

15.2. Примеры решения задач

Задача 1. Докажите, что если точка $C(x; y; z)$ делит отрезок с концами $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ в отношении $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = k$, то координаты точки C могут быть найдены с помощью следующих формул:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \quad z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}, \tag{1}$$

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}, \quad z = \frac{nz_1 + mz_2}{n+m}. \tag{2}$$

Доказательство.

1) Рассуждения проводятся совершенно так же, как и в планиметрии. Перепишем равенство $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$ в координатах:

$$\overrightarrow{AC}(x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1),$$

$$\overrightarrow{CB}(x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z),\ k\overrightarrow{CB}(kx_2 - kx;\ ky_2 - ky;\ kz_2 - kz),$$

$$x - x_1 = kx_2 - kx;\ y - y_1 = ky_2 - ky;\ z - z_1 = kz_2 - kz.$$

Отсюда приходим к равенствам (1);

2) от этих формул нетрудно перейти к формулам (2), содержащим вместо k числа m и n.

В частности, если C — середина отрезка AB, то $k = 1$

$$\text{и } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3}$$

Задача 2. Докажите, что если $\vec{b} = k\vec{a}$, то $|\vec{b}| = |k|\,|\vec{a}|$.

Доказательство.

1) Пусть $\vec{a}(x; y; z)$, тогда $\vec{b}(kx; ky; kz)$;

2) имеем (сравните это доказательство с планиметрическим):

$$|\vec{b}| = |k\vec{a}| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2} = \sqrt{k^2(x^2 + y^2 + z^2)} =$$

$$= |k|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |k|\,|\vec{a}|.$$

Задача 3. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{i}$ коллинеарны, одинаково направлены и $|\vec{i}| = 1$. Докажите, что выполняется равенство $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{i}$.

Решение.

При доказательстве теоремы 27.1 установлено, что для векторов $\vec{a}$ и $\vec{i}$ будет выполняться равенство $\vec{a} = k\vec{i}$, причем $k = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{i}|} = \dfrac{|\vec{a}|}{1} = |\vec{a}|$.

Итак, $\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{i}$.

Задание. Решите предыдущую задачу в предположении, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{i}$ имеют противоположные направления.

Задача 4. Докажите, что если точка M — середина отрезка AB и O — произвольная точка пространства, то выполняется равенство: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Решение.

Через точку O и прямую AB проведем плоскость (рис. 149, *а*). Данные векторы лежат в этой плоскости. Как установлено в планиметрии, для этих векторов требуемое равенство выполняется.

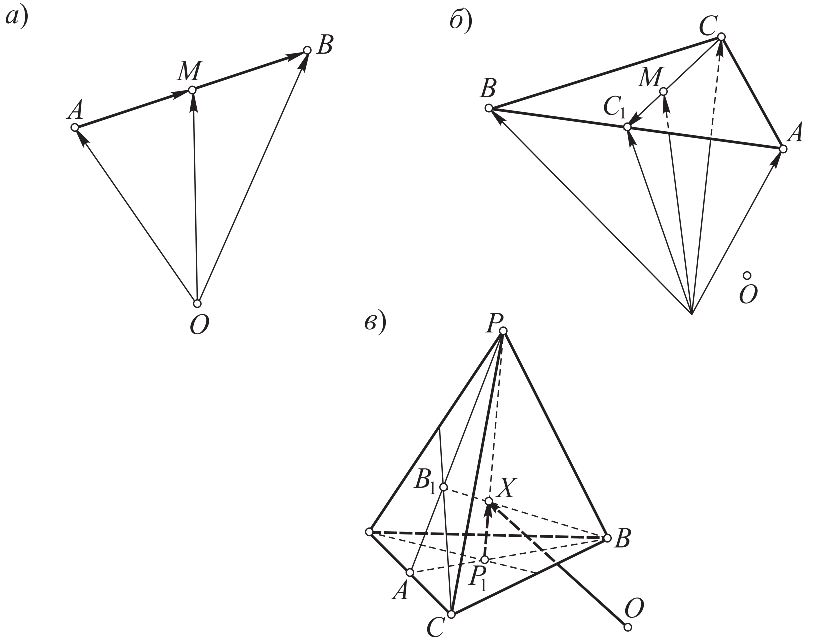


Рис. 149

Задача 5. Докажите, что если точка M — центроид ΔABC и O — произвольная точка пространства, то выполняется равенство: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

Решение.

Пусть CC_1 — медиана треугольника ABC (рис. 149, *б*). Так как $CM : MC_1 = 2 : 1$, то, пользуясь планиметрическим фактом, можно записать:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Задача 6. В тетраэдре $PABC$ каждая вершина соединена с центроидом противолежащей грани. Докажите, что эти отрезки имеют общую точку, которая делит каждый из них в отношении $3:1$ считая от вершины тетраэдра.

Решение.

1) Пусть P_1 — центроид треугольника ABC (рис. 149, *в*) и точка X делит отрезок PP_1 в отношении $3:1$ считая от вершины P. Пусть O — произвольная точка пространства. Точки O, P, X и P_1 лежат в одной плоскости. Поэтому вначале можно воспользоваться известным планиметрическим фактом, затем — результатом предыдущей задачи:

$$\overrightarrow{OX}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OP_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right);$$

2) пусть теперь BB_1 — отрезок, соединяющий вершину B с центроидом B_1 противоположной грани, и точка Y делит отрезок BB_1 в отношении $3:1$. Рассуждая аналогично, получим:

$$\overrightarrow{OY}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right);$$

3) аналогичные равенства получим и для точек Z и U, делящих два других данных отрезка в отношении $3:1$;

4) поэтому точки Y, Z и U совпадают с точкой X. Это означает, что точка X — общая точка всех четырех отрезков, делящая каждый из них в отношении 3 : 1 считая от вершины тетраэдра.

Примечания. 1. Отрезки, соединяющие вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называются *медианами тетраэдра*. Точка, в которой пересекаются все четыре медианы тетраэдра, — *центроидом тетраэдра*.

2. Из предыдущей задачи следует, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке — центроиде тетраэдра — и делятся центроидом тетраэдра в отношении 3 : 1 считая от вершины тетраэдра.

§ 16. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

16.1. Теория

Скалярное произведение двух векторов в пространстве вводится точно так же, как и в планиметрии.

Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1, y_1 и z_1, вектор $\vec{b}$ — координаты x_2, y_2 и z_2. **Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$** называется число $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Обозначение: $\vec{a}\vec{b}$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По определению: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Пример 1. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}(-2; 0; 1)$ и $\overrightarrow{AC}(-1; 1; -1)$ (рис. 150, *а*).

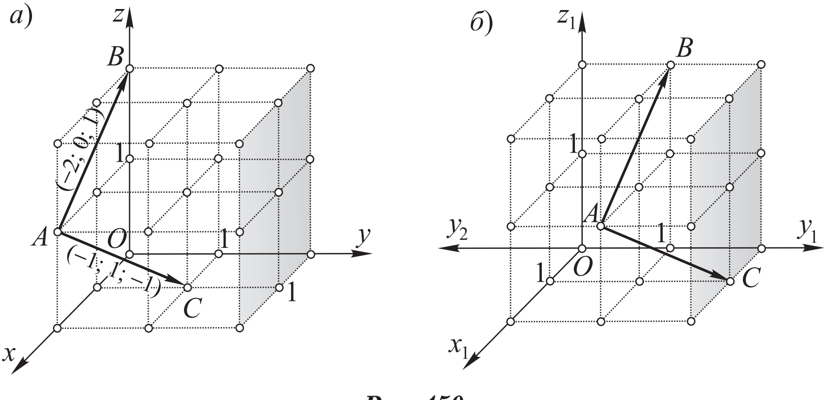


Рис. 150

Решение.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1.$

Пример 2. Если изменить расположение осей координат, то координаты двух векторов изменятся. Изменится ли тогда скалярное произведение этих векторов?

Решение.

1) На рисунке 150, *б* для векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в системе координат $Ox_1y_1z_1$ имеем: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 3;$

2) в системе координат $Ox_1y_2z_1$ имеем:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3;$$

3) видно, что при переходе от одной системы координат к другой координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ изменились, но скалярное произведение их осталось без изменения!

Рассмотрим свойства скалярного произведения двух векторов.

Теоремы 28

1. **Скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора системы координат.**

О геометрическом смысле скалярного произведения двух векторов

2. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$**, где** α **— угол между векторами** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$**.**

Векторный признак перпендикулярности двух прямых

3. **Если скалярное произведение ненулевых векторов** $\overrightarrow{AB}$ **и** $\overrightarrow{AC}$ **равно нулю, то прямые** AB **и** AC **перпендикулярны.**

Доказательства.

1. 1) Даны векторы $\overrightarrow{AB}(x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 151). Запишем квадрат длины вектора $\overrightarrow{AD}$, который является суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 =$$
$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2);$$

2) отсюда

$$AD^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AD^2 - AB^2 - AC^2}{2};$$

3) так как расстояния AD, AB и AC не зависят от выбора системы координат, то число $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, которое выражается через эти расстояния, также не зависит от выбора системы координат.

2. *1-й способ.* 1) Так как скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора системы координат, то оси системы координат можно расположить таким образом, чтобы это было удобно для вычисления скалярного произведения. Расположим оси так, как показано на рисунке 152. Имеем:

$$\vec{a}\,(0;\, y_1;\, 0),\ \ \vec{b}(x_2;\, y_2;\, z_2),\ \ \vec{a}\vec{b} = 0 \cdot x_2 + y_1 y_2 + 0 \cdot z_2 = y_1 y_2;$$

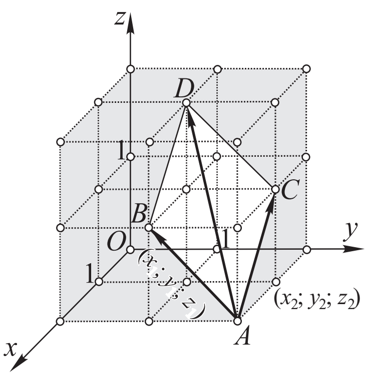


Рис. 151

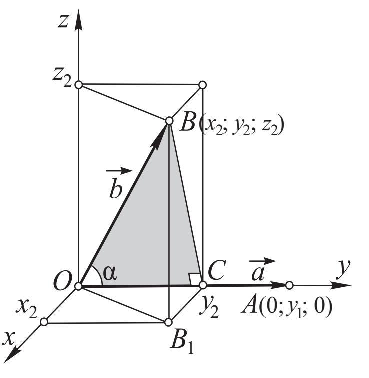


Рис. 152

2) учтем, что $y_1 = |\vec{a}|$ и $\dfrac{y_2}{|\vec{b}\,|} = \cos\alpha$ (из прямоугольного треугольника OBC: $OC \perp BB_1$ и $OC \perp B_1C$. Поэтому $OC \perp BC$);

3) поэтому $\vec{a}\vec{b} = y_1 y_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$.

2-й способ. 1) Более простое доказательство можно получить, если оси системы координат расположить так, как показано на рисунке 153. В этом случае векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ оказываются лежащими в координатной плоскости xOy;

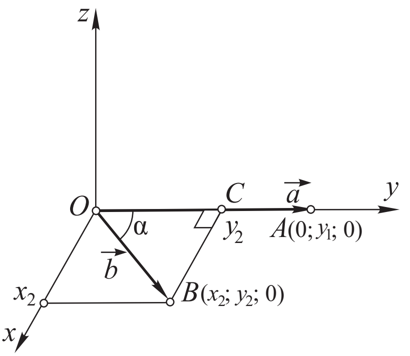


Рис. 153

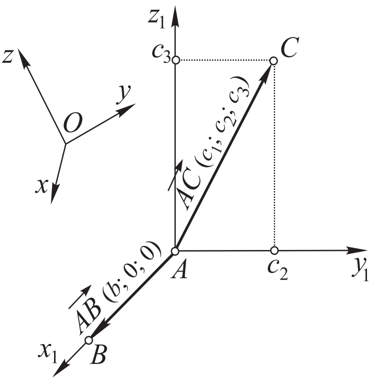


Рис. 154

2) так как $y_1 = OA = |\vec{a}|$, $y_2 = OC = |\vec{b}|\cos\alpha$, то

$$\vec{a}\vec{b} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0\cdot x_2 + y_1y_2 + 0\cdot 0 = y_1y_2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$$

3. *1-й способ.* 1) Применим выведенную формулу скалярного произведения двух векторов. Имеем: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha = 0$, $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$, $|\overrightarrow{AC}| \neq 0$;

2) отсюда $\cos\alpha = 0$. Поэтому $\alpha = 90°$;

3) это означает, что угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ — прямой. Следовательно, $AB \perp AC$.

2-й способ. 1) Пусть в системе координат $Oxyz$ $\overrightarrow{AB}(x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_2; y_2; z_2)$ и $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. Докажем, что $AB \perp AC$;

2) выберем новую систему координат $Ax_1y_1z_1$ (рис. 154) так, чтобы в ней вектор $\overrightarrow{AB}$ имел координаты b, 0 и 0, вектор $\overrightarrow{AC}$ — координаты c_1, c_2 и c_3;

3) в силу теоремы 28.1

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = bc_1 + 0c_2 + 0c_3 = 0;$$

4) отсюда $bc_1 = 0$;

5) так как $b \neq 0$, то $c_1 = 0$;

6) значит, $C \in y_1Az_1$ и $AC \subset y_1Az_1$;

7) имеем: $(AB \perp y_1Az_1,\ AC \subset y_1Az_1) \Rightarrow AB \perp AC$.

Следствия. *Скалярное произведение двух векторов обладает следующими свойствами:*

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
2. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$;
3. $\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$;
4. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Доказательства.

1. Имеем: $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 = \vec{b}\vec{a}$.

2—4. Воспользуйтесь определением скалярного произведения двух векторов.

16.2. Примеры решения задач

Задача 1. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, гранями которого являются ромбы со стороной a и острым углом, равным $60°$ (рис. 155). Найдите диагонали параллелепипеда AC_1, DB_1, CA_1, BD_1.

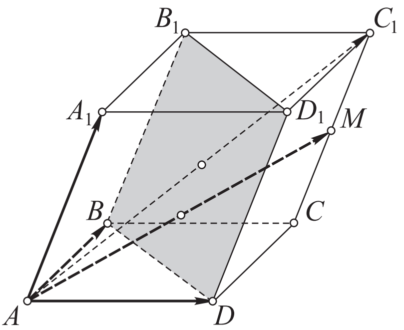


Рис. 155

Решение.

1) По правилу параллелепипеда $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

Найдем скалярный квадрат этого вектора:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2 + 2AB\cdot AD\cos 60° + 2AB\cdot AA_1\cos 60° +$$
$$+2AD\cdot AA_1\cos 60° = 3a^2 + 2a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 = 6a^2,$$
$$AC_1 = a\sqrt{6};$$

2) по правилу параллелепипеда $\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}$. Найдем скалярный квадрат этого вектора:

$$DB_1^2 = DA^2 + DC^2 + DD_1^2 + 2DA\cdot DC\cos 120° + 2DA\cdot DD_1\cos 120° +$$
$$+2DC\cdot DD_1\cos 60° = 3a^2 - a^2 - a^2 + a^2 = 2a^2,$$
$$DB_1 = a\sqrt{2};$$

3) по правилу параллелепипеда $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}$. Найдем скалярный квадрат этого вектора:

$$CA_1^2 = CD^2 + CB^2 + CC_1^2 + 2CD \cdot CB \cos 60° + 2CD \cdot CC_1 \cos 120° +$$
$$+ 2CB \cdot CC_1 \cos 120° = 2a^2,$$
$$CA_1 = a\sqrt{2};$$

4) по правилу параллелепипеда $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$. Найдем скалярный квадрат этого вектора:

$$BD_1^2 = BA^2 + BC^2 + BB_1^2 + 2BA \cdot BC \cos 120° + 2BA \cdot BB_1 \cos 120° +$$
$$+ 2BC \cdot BB_1 \cos 60° = 2a^2,$$
$$BD_1 = a\sqrt{2}.$$

Ответ: $AC_1 = a\sqrt{6}, DB_1 = a\sqrt{2}, CA_1 = a\sqrt{2}, BD_1 = a\sqrt{2}.$

Задача 2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, гранями которого являются ромбы со стороной a и острым углом, равным 60° (см. рис. 155). Точка M — середина ребра CC_1. Найдите длину отрезка AM.

Решение.

1) Вначале воспользуемся тем, что M — середина отрезка CC_1, затем применим правило параллелепипеда. Будем иметь:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1};$$

2) найдем скалярный квадрат этого вектора:

$$AM^2 = AB^2 + AD^2 + \frac{1}{4}AA_1^2 +$$
$$+ 2AB \cdot AD \cos 60° + 2AB \cdot \frac{1}{2}AA_1 \cos 60° + 2AD \cdot \frac{1}{2}AA_1 \cos 60° = \frac{17}{4}a^2.$$

Ответ: $AM = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

Задача 3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, гранями которого являются ромбы со стороной a и острым углом равным 60° (см. рис. 155). Докажите, что: 1) $BB_1 \perp BD$; 2) четырехугольник BB_1D_1D — квадрат.

Доказательство.

1) Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BD}=$$

$$=\overrightarrow{AA_1}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=a^2\cos 60^\circ-a^2\cos 60^\circ=0.$$

Поэтому $BB_1\perp BD$;

2) докажите самостоятельно, что четырехугольник BB_1D_1D — квадрат.

Задача 4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, гранями которого являются ромбы со стороной a и острым углом, равным 60° (см. рис. 155). Найдите угол между прямыми: 1) AA_1 и AC; 2) AM и AC; 3) AM и AB; 4) AM и AD.

Решение.

1) Воспользуемся формулой косинуса угла между двумя векторами, предварительно найдем, что $AC=a\sqrt{3}$:

$$\cos\varphi_1=\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{AA_1\cdot AC}=\frac{\overrightarrow{AA_1}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)}{a\cdot a\sqrt{3}}=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}{a^2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\varphi_1\approx 54{,}7^\circ;$$

2) воспользуемся формулой косинуса угла между двумя векторами, учтем вначале, что $AM=\frac{a\sqrt{17}}{2}$:

$$\cos\varphi_2=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}}{AM\cdot AC}=\frac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)}{\frac{a\sqrt{17}}{2}\cdot a\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2\left(a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}+a^2+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right)}{a^2\sqrt{51}}=\frac{7}{\sqrt{51}};\quad \varphi_2\approx 11{,}4^\circ;$$

3) воспользуемся формулой косинуса угла между двумя векторами, предварительно учтем, что $AM=\frac{a\sqrt{17}}{2}$:

$$\cos\varphi_3=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}}{AM\cdot AB}=\frac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\overrightarrow{AB}}{\frac{a\sqrt{17}}{2}\cdot a}=\frac{\frac{7a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{17}}{2}}=\frac{7}{2\sqrt{17}},$$

$$\varphi_3\approx 31{,}9^\circ;$$

4) воспользуемся формулой косинуса угла между двумя векторами, предварительно учтем, что $AM=\frac{a\sqrt{17}}{2}$:

$$\cos\varphi_4=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD}}{AM\cdot AD}=\frac{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\overrightarrow{AD}}{\frac{a\sqrt{17}}{2}\cdot a}=\frac{\frac{7a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{17}}{2}}=\frac{7}{2\sqrt{17}},$$

$$\varphi_4\approx 31{,}9^\circ.$$

Ответ: $\cos\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi_2=\frac{7}{\sqrt{51}}$, $\cos\varphi_3=\cos\varphi_4=\frac{7}{2\sqrt{17}}$.

§ 17. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И СФЕРЫ

17.1. Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором. Уравнение сферы

Сферой с центром O **и радиусом** R (рис. 156) называется множество всех точек пространства, удаленных от точки O на расстояние R.

Если вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к плоскости α, то он называется **нормальным вектором** этой плоскости.

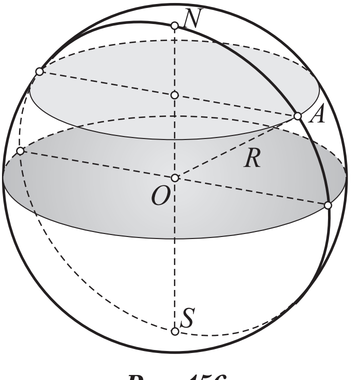


Рис. 156

Плоскость α можно задать точкой M, принадлежащей плоскости, и нормальным вектором $\vec{n}$. Рассмотрим уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором, а также уравнение сферы.

Теоремы 29

Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором

1. **Уравнение плоскости, проходящей через точку** $M(x_1; y_1; z_1)$ **и перпендикулярной к вектору** $\vec{n}(A, B, C)$**, имеет вид:**

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (1)$$

2. **Уравнение сферы с центром** $C(x_1; y_1; z_1)$ **и радиусом** R **имеет вид:**

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2. \qquad (2)$$

Доказательства.

1. а) Пусть плоскость α (рис. 157) проходит через точку M и перпендикулярна вектору $\vec{n}$. Возьмем на плоскости α произвольную точку $P(x; y; z)$. Докажем, что ее координаты удовлетворяют уравнению (1). Так как вектор $\vec{n} \perp \alpha$, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP}$. Тогда скалярное произведение этих векторов равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$. Перепишем это равенство в координатах: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, где $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ — координаты вектора $\overrightarrow{MP}$.

Итак, если $P \in \alpha$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1);

б) если точка $P \notin \alpha$, то $\overrightarrow{MP} \not\perp \vec{n}$ и скалярное произведение этих векторов не равно нулю, координаты точки P не будут удовлетворять уравнению (1).

Вывод. Уравнению (1) удовлетворяют только координаты точек, лежащих в плоскости α. Следовательно, оно является уравнением этой плоскости.

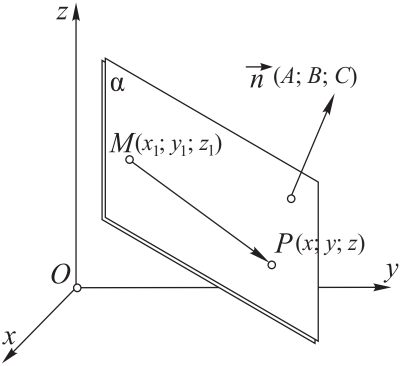


Рис. 157

2. Пусть $P(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка сферы (рис. 158). Тогда $CP^2 = R^2$. Перепишем это равенство в координатах:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2.$$

Если точка P не принадлежит сфере, то она удалена от центра C на расстояние, не равное R, поэтому $CP^2 \neq R^2$, или

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 \neq R^2.$$

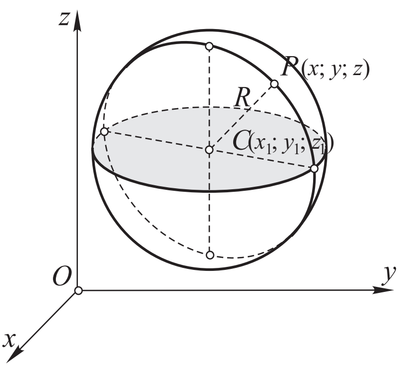


Рис. 158

Вывод. Уравнению (2) удовлетворяют только координаты точек, лежащих на сфере. Следовательно, оно является уравнением этой сферы.

Следствие. *Если центр сферы находится в начале координат, то уравнение сферы имеет вид* $x^2+y^2+z^2=R^2$.

17.2. Общее и неполные уравнения плоскости

Уравнение (1) можно записать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3)$$

где $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$. Уравнение (3) называется *общим уравнением плоскости*. Если некоторые коэффициенты в общем уравнении плоскости положить равными нулю, то получим *неполные уравнения плоскости*.

Рассмотрим неполные уравнения плоскости.

N п/п	Случай	Уравнение плоскости α	Расположение плоскости α относительно системы координат
1	$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	Числа $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворяют этому уравнению. Следовательно, плоскость α проходит через начало координат (рис. 159, *а*). Числа A, B и C — координаты нормального вектора $\vec{n}$ этой плоскости.

2	$C=0$	$Ax+By+D=0$	Нормальный вектор $\vec{n}(A;\ B;\ 0)$, $\vec{n}\perp Oz$, поэтому $\alpha \parallel Oz$ (рис. 159, *б*).
3	$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	Нормальный вектор $\vec{n}(A;\ 0;\ C)$, $\vec{n}\perp Oy$, поэтому $\alpha \parallel Oy$. (рис. 159, *в*).
4	$A=0$	$By+Cz+D=0$	Нормальный вектор $\vec{n}(0;\ B;\ C)$, $\vec{n}\perp Ox$, поэтому $\alpha \parallel Ox$. (рис. 160, *а*).
5	$C=D=0$	$Ax+By=0$	Нормальный вектор $\vec{n}(A;\ B;\ 0)$, $\vec{n}\perp Oz$, поэтому $\alpha \parallel Oz$. Кроме того, $O\in\alpha$. Поэтому $Oz\subset\alpha$ (рис. 160, *б*).
6	$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	Аналогично: $Oy\subset\alpha$ (рис. 160, *в*).
7	$A=D=0$	$By+Cz=0$	$Ox\subset\alpha$ (рис. 161, *а*).
8	$B=C=0$	$Ax+D=0$	$(\alpha \parallel Oy$ и $\alpha \parallel Oz) \Rightarrow \alpha\perp Ox$ (рис. 161, *б*).
9	$A=C=0$	$By+D=0$	$(\alpha \parallel Ox$ и $\alpha \parallel Oz) \Rightarrow \alpha\perp Oy$ (рис. 161, *в*).
10	$A=B=0$	$Cz+D=0$	$(\alpha \parallel Ox$ и $\alpha \parallel Oy) \Rightarrow \alpha\perp Oz$ (рис. 162, *а*).
11	$A=C=D=0$	$y=0$	$\alpha=xOz$ (рис. 162, *б*).
12	$B=C=D=0$	$x=0$	$\alpha=yOz$ (рис. 162, *в*).
13	$A=B=D=0$	$z=0$	$\alpha=xOy$ (рис. 162, *г*).

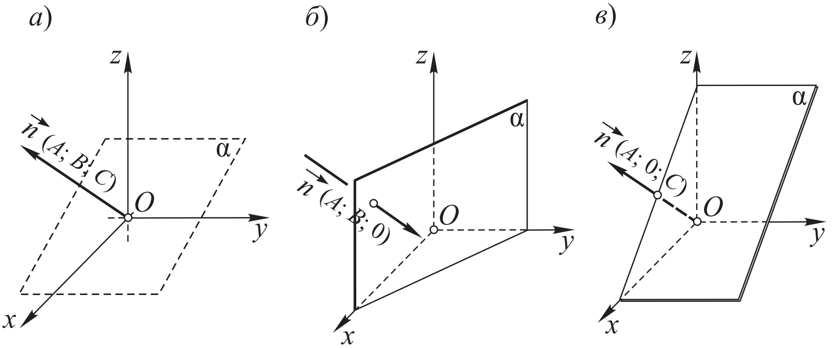


Рис. 159

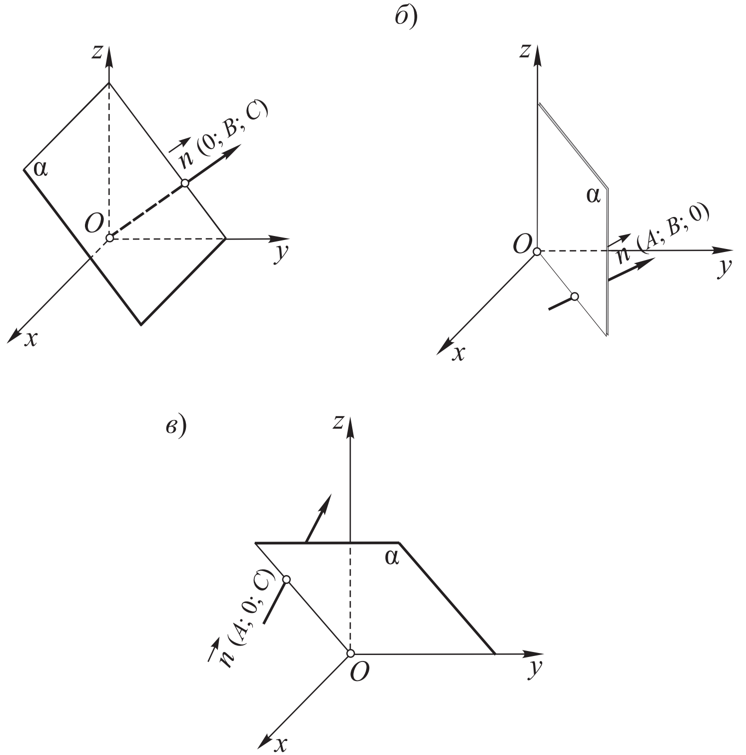


Рис. 160

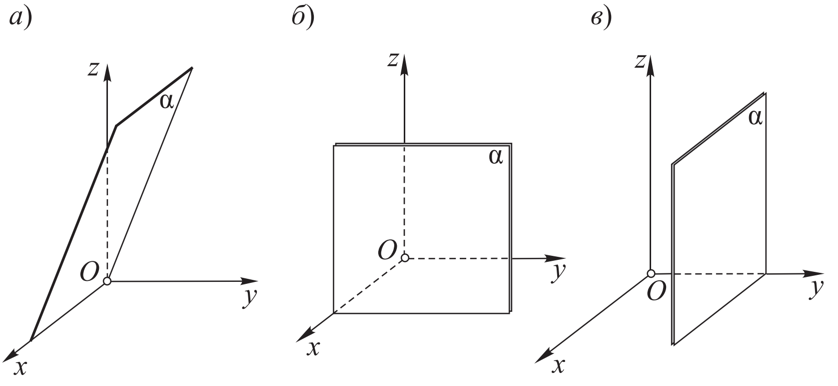


Рис. 161

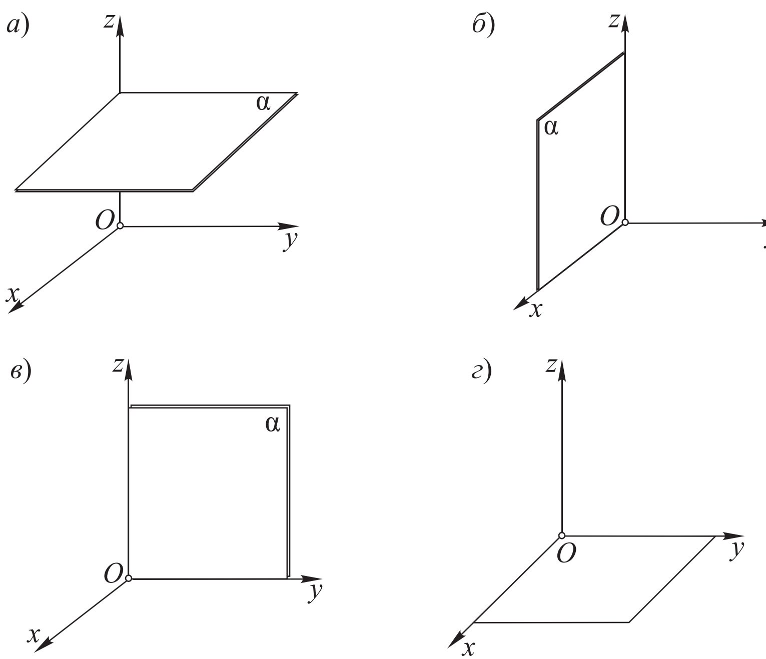


Рис. 162

Так как коэффициенты A, B и C не могут быть равны нулю одновременно, то можно утверждать, что рассмотрены все виды неполных уравнений плоскости.

17.3. Примеры решения задач

Задача 1. Найдите угол между векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, заданными своими координатами.

Решение.

Пусть $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Найдем угол φ между этими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Задача 2. Найдите угол между вектором $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и координатными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

Решение.

1) Воспользуемся формулой, полученной при решении предыдущей задачи. Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{i}$ через α, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{j}$ — через β, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{k}$ — через γ;

2) учтем, что $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{j}(0; 1; 0)$, $\vec{k}(0; 0; 1)$;

3) тогда $\cos\alpha = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$,

$\cos\gamma = \dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$.

Замечание. Углы α, β и γ называются *направляющими углами вектора* $\vec{a}$, а косинусы этих углов — *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$.

Задача 3. Докажите, что направляющие косинусы вектора связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Доказательство.

Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Возводя в квадрат выражения для $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ и складывая, получаем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 1.$$

1. Из истории развития координатного метода в пространстве. У Декарта и Ферма имеются отдаленные намеки на возможность распространения метода координат с двухмерного на трехмерный случай. В 1715 г. Иоганн Бернулли определил пространственные координаты x, y, z как перпендикуляры на три взаимно перпендикулярные плоскости. Первым, кто систематически использовал такие координаты, был французский математик Клеро (1713—1765). Именно он вывел уравнения плоскости, сферы, параболоида вращения и др. Полное же изложение аналитической геометрии в пространстве дал Л. Эйлер. Применению координат в пространстве способствовали Г. Монж и Ж. Лагранж. Монж, например, нашел формулу, позволяющую вычислить перпендикуляр, проведенный из данной точки к данной прямой. Лагранж вывел некоторые координатные формулы для нахождения площадей граней и объемов треугольных пирамид. Равенство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, связывающее (в современной терминологии) направляющие косинусы вектора, впервые установил французский математик Ш. Тенсо в 1780 г.

Координаты могут служить одним из исходных понятий при построении геометрии. Этот подход осуществлен в курсе планиметрии (см.: Рогановский, Н. М. Геометрия : учеб. для 7—9-х кл. / Н. М. Рогановский. — Минск : Нар. асвета, 1992).

2. Из истории открытия векторной алгебры. Самым крупным шагом в этом направлении послужило открытие знаменитым голландским ученым и инженером Симоном Стевином (1548—1620) «правила параллелограмма». Интересно отметить, что Стевин является первооткрывателем десятичных дробей, он создал основы гидростатики и даже построил парусный «автомобиль». Воспроизведем физический опыт, который привел Стевина к обнаружению «правила параллелограмма». Прикрепим грузы A и B к концам нити, перекинутой через блоки (рис. 163). Пусть силы тяжести, приложенные к грузам A и B, соответственно равны 3 и 4 единицам. К «средней» части нити прикрепим груз C, сила тяжести кото-

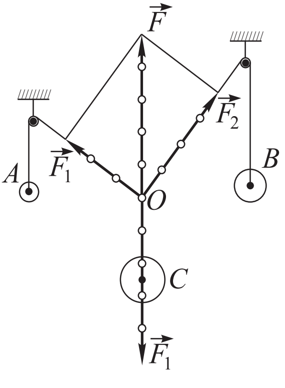


Рис. 163

рого равна 5 единицам. Полученная конструкция подвижна. Под действием сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ точка O после некоторого перемещения займет определенное положение и будет неподвижной. Это означает, что грузы A, B и C уравновесили друг друга. В этом случае сумма $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ равна по величине силе $\vec{F}_3$ и направлена противоположно этой силе. Далее выполним следующие построения. Вдоль нити отложим отрезки, равные соответственно 3 и 4 единицам, и построим на этих отрезках параллелограмм. Замечаем, что диагональ этого параллелограмма направлена вверх и равна 5 единицам. Приходим к выводу о том, что совместное действие сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (сложение этих сил!) равносильно действию одной силы $\vec{F}$, получаемой по «правилу параллелограмма».

Начала геометрической теории векторной алгебры были заложены К. Весселем (1745—1818). Приведем определение суммы нескольких векторов, данное им (1799): «Чтобы сложить более двух отрезков, нужно следовать тому же правилу (сложению двух отрезков — *авт.*): располагаем их так, чтобы конец первого совпадал с началом второго, а конец второго совпадал с первой точкой третьего и т. д., затем соединяем отрезком ту точку, где первый отрезок начинается, с той точкой, где последний отрезок оканчивается, и называем этот последний отрезок *суммой* всех данных отрезков». Другое (не геометрическое!) направление развития векторного исчисления заложено трудами У. Гамильтона (1805—1865) и Г. Грассмана (1809—1877). Гамильтоном был введен термин «вектор». Новое направление развития идей векторной алгебры связано с именем Г. Вейля (1855—1955). В 1917 г. им была предложена векторная аксиоматика евклидовой геометрии.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В СТЕРЕОМЕТРИИ. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Аксиомы стереометрии

1. а) Изобразите данный ромб $A_1B_1C_1D_1$ произвольным параллелограммом $ABCD$ (рис. 164, *а*). Постройте изображение: 1) диагоналей данного ромба; 2) некоторой точки M_1, принадлежащей стороне A_1B_1; 3) перпендикуляра M_1K_1, проведенного к диагонали B_1D_1.

б) Изобразите данную прямоугольную трапецию $A_1B_1C_1D_1$ произвольной трапецией $ABCD$ (пусть BC и AD — основания, а углы C и D — изображают прямые углы трапеции, рис. 164, *б*). Постройте изображение перпендикуляра B_1K_1, проведенного к основанию A_1D_1.

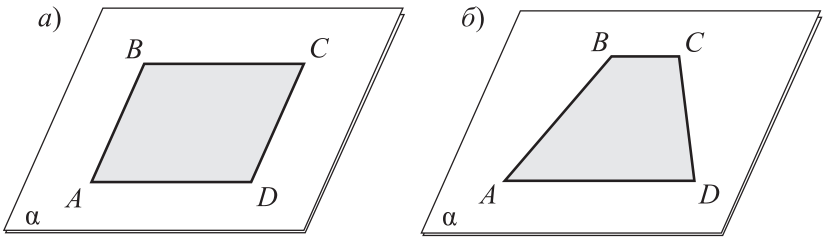


Рис. 164

в) Изобразите равнобедренную трапецию $A_1B_1C_1D_1$ произвольной трапецией $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Постройте изображение перпендикуляра B_1K_1, проведенного к основанию A_1D_1.

2. а) Перечислите признаки, характеризующие понятие параллельных прямых, исходя из следующего определения. По определению $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда: 1) существует плоскость α такая, что $a, b \subset \alpha$, и 2) a и b не имеют общих точек или совпадают.

б) Следующее «определение» параллельных прямых: «Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются параллельными» поначалу может и не вызвать возражений. И все же оно неверно. Ведь в одной плоскости можно нарисовать и три прямые: AB, BC и AC, которые не имеют общих точек, однако они не параллельны. Укажите, какой недостаток имеет приведенное выше «определение» параллельных прямых.

3. а) На рисунке 165, *а* даны две точки $A, B \in a$ и $A, B \in \alpha$. Можно ли по такому рисунку считать, что прямая AB принадлежит плоскости α? Не является ли этот рисунок опровержением аксиомы 2 (о принадлежности прямой плоскости)?

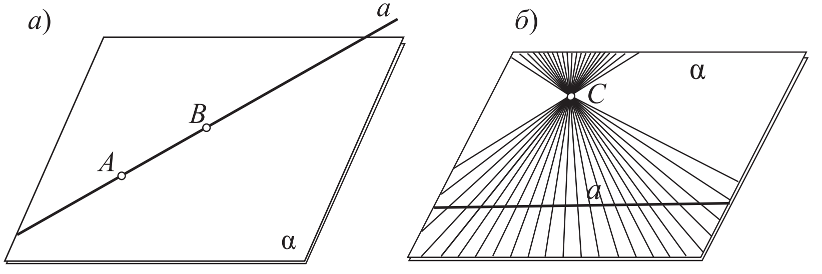


Рис. 165

б) В аксиоме 3 сказано, что «...три точки не лежат на одной прямой...» Является ли это условие существенным? Будет ли справедлива аксиома, если его опустить?

в) Что утверждает аксиома 4 (аксиома размерности)? Может показаться, что она ничего нового к уже известному из планиметрии не добавляет. Ведь из планиметрии известно, что существуют четыре точки! Так ли это?

г) Что утверждает аксиома о параллельных прямых в пространстве (аксиома 5)? Справедливо ли аналогичное утверждение для пересекающихся прямых: «Если плоскость пересекает одну из пересекающихся прямых, то она пересекает и другую»?

4. а) Лежат ли центры Земли, Луны и Солнца в одной плоскости? Могут ли они находиться на одной прямой? Когда?

б) Почему мотоцикл с коляской стоит устойчиво, а для мотоцикла без коляски необходима дополнительная опора?

в) Чтобы открытая форточка не захлопнулась, ее закрепляют крючком. Объясните, почему она занимает устойчивое положение. Какие три точки определяют положение плоскости форточки?

Задачи 5, а—е решите устно.

5. а) Пусть $A, B \in \alpha$, $C \in AB$. Принадлежит ли точка C плоскости α?

б) Пусть $ABCD$ — трапеция, A, B, $C \in \alpha$. Принадлежит ли точка D плоскости α? Принадлежит ли точка пересечения диагоналей трапеции плоскости α?

в) Пусть BM — медиана треугольника ABC, A, B, $C \in \alpha$, $D \in BM$. Принадлежит ли точка D плоскости α?

г) Пусть A, B, C и D — точки окружности, A, B, $C \in \alpha$. Докажите, что $D \in \alpha$.

д) Пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой, A, B, $C \in \alpha$; A, B, $C \in \beta$. Докажите, что плоскости α и β совпадают.

е) Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой, A, B, $C \in \alpha$; A, B, $C \in \beta$, $a \subset \alpha$. Докажите, что $a \subset \beta$.

6. а) *Пространственным многоугольником* будем называть замкнутую ломаную, не принадлежащую одной плоскости. Нарисуйте куб, изобразите на нем пространственный шестиугольник с равными сторонами. Найдите периметр и углы этого многоугольника, если ребро куба равно a.

б) Кусок бумаги в форме правильного треугольника ABC со стороной $2a$ сгибается по средним линиям этого треугольника так, что точки A, B и C оказываются совмещенными. В результате получается макет правильного тетраэдра. Найдите: 1) ребра этого тетраэдра; 2) сумму площадей всех его граней; 3) меру плоских углов при вершинах.

в) Нарисуйте куб. Изобразите на нем точку, принадлежащую: 1) верхней (боковой, передней, нижней, задней) грани; 2) двум граням куба; 3) трем ребрам куба. *Указание*. На чертеже сперва нужно изобразить отрезок, лежащий в грани, и потом уже на нем отметить требуемую точку.

г) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Докажите, что: 1) плоскости ADD_1 и AA_1D_1 совпадают; 2) плоскости ABC и ABB_1 не совпадают.

д) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Заштрихуйте множество общих точек: 1) плоскости ABC и поверхности куба; 2) плоскости BCC_1 и поверхности куба; 3) плоскости ABB_1 и поверхности куба.

7. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки A, D_1, C и B_1 соединены попарно отрезками. Докажите, что полученный многогранник B_1AD_1C есть правильный тетраэдр, т. е. тетраэдр, гранями которого служат равносторонние треугольники (см. задание 6, б).

б) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб: 1) принадлежат ли прямые AB_1 и B_1D плоскости грани AA_1B_1B? Приведите обоснование; 2) укажите точку, которая с точками A, B и C не лежит в одной плоскости; 3) можно ли через точки A, C и C_1 провести плоскость? Будет ли эта плоскость единственной? 4) укажите точку пересечения прямой B_1D и плоскости грани DD_1C_1C.

в) Пусть $PABC$ — тетраэдр: 1) принадлежат ли прямые AC и PB одной плоскости? Приведите обоснование; 2) укажите точку, которая с точками P, B и C не лежит в одной плоскости; 3) пусть M — середина ребра BC. Можно ли через точки A, P и M провести плоскость? Будет ли эта плоскость единственной? 4) укажите точку пересечения прямой PM и плоскости APC.

г) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Чему равен угол AB_1C?

д) Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, M — середина ребра BC. Докажите, что треугольник PAM — равнобедренный.

§ 2. Первые следствия из аксиом стереометрии

8. а) Чтобы поверхность распила четырехугольной балки была плоской, пильщики намечают на ребре точку и проводят через нее в нужном направлении две прямые по смежным граням поверхности балки, затем направляют пилу по намеченным прямым. Сделайте рисунок и дайте обоснование этому приему.

б) Столяр проверяет, лежат ли концы четырех ножек стула в одной плоскости, при помощи двух нитей. Объясните, как это можно сделать. Достаточна ли такая проверка? Нужна ли она, если стул имеет три ножки?

в) При формовке кирпича по параллельным краям прямоугольной формы скользит прямолинейный брус. Почему разравниваемая грань кирпича получается плоской?

г) При формовке кирпича по пересекающимся краям прямоугольной формы скользит прямолинейный брус. Почему и в этом случае разравниваемая грань кирпича будет плоской?

9. а) Даны прямая a и точка $C \notin a$ (рис. 165, *б*). Докажите, что все прямые, проходящие через точку C и пересекающие a, лежат в одной плоскости.

б) Три прямые расположены так, что любые две из них пересекаются. Всегда ли эти прямые лежат в одной плоскости?

в) Даны треугольники ABC и ABD. При каком взаимном расположении прямых AB и CD эти треугольники будут лежать в одной плоскости?

г) 1) Пусть $PABC$ — тетраэдр, D — середина ребра PA. Мысленно представьте расположение плоскости, проходящей через прямую BC и точку D. Постройте сечение тетраэдра плоскостью BCD (множество общих точек этой плоскости с поверхностью тетраэдра). 2) Вычислите площадь треугольника, получившегося в сечении тетраэдра плоскостью BCD, если каждое ребро тетраэдра равно a.

10. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В плоскостях его боковых граней проведено несколько прямых, параллельных AA_1. 1) Докажите, что плоскость ACB_1 пересекает каждую из этих прямых. 2) Мысленно представьте точку пересечения плоскости ACB_1 с прямой DD_1. Постройте эту точку.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Рассмотрите восьмиугольник $CDABB_1A_1D_1C_1$. Установите, сколько пар параллельных сторон имеется в нем.

11. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его поверхности найдите множество точек, равноудаленных от вершин A_1 и B. Какую фигуру образует это множество?

б) Гранями треугольной пирамиды $PABC$ служат равносторонние треугольники. На поверхности этой пирамиды найдите множество точек, равноудаленных от вершин B и C.

12. а) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб: 1) плоскость ABB_1 пересекает прямую BC. Какие еще прямые пересекает эта плоскость? Приведите обоснование при помощи аксиомы 5; 2) в плоскости грани AA_1B_1B постройте прямую, которая бы пересекала прямую AB в точке X, не принадлежащей ребру AB; 3) проведите плоскость через параллельные прямые AA_1 и CC_1. Постройте линии пересечения этой плоскости с гранями нижнего и верхнего оснований.

б) Пусть $PABC$ — тетраэдр: 1) плоскость PBC пересекает прямую AC. Проведите среднюю линию MH треугольника ABC, параллельную AC, и докажите, что плоскость PBC пересекает прямую MH; 2) в плоскости какой-либо грани тетраэдра постройте прямую, которая была бы параллельна прямой AB; 3) пусть M — середина ребра BC. Проведите плоскость PAM и постройте линии пересечения этой плоскости с гранями ABC и PBC.

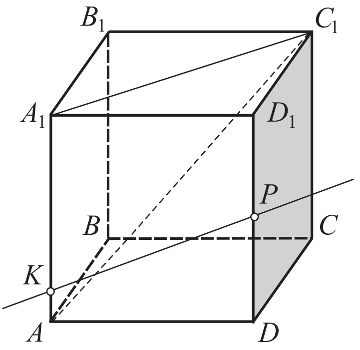
в) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, O — центр нижнего основания. Докажите, что $C_1O \perp BD$.

г) В условиях предыдущего упражнения найдите отрезок C_1O, если ребро куба равно 1.

§ 3. Взаимное расположение двух прямых

13. а) Как расположены оси колесных пар железнодорожного вагона относительно друг друга? Относительно рельса?

б) Найдите ошибки в таблице (рис. 166).



b \ a	AB	BB_1	A_1D_1
KP	$\otimes$	$\dot{-}$	$\otimes$
C_1A_1	$\dot{-}$	$\dot{-}$	$\otimes$
C_1B	$\otimes$	$\otimes$	$\dot{-}$

Рис. 166

в) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка $M \in AA_1$, $P \in DD_1$, $Q \in CC_1$. Постройте точку пересечения прямой: 1) MP с плоскостью нижнего основания куба; 2) PQ с плоскостью нижнего основания куба; 3) проходящей через точку C и центр грани CBB_1C_1, с плоскостью нижнего основания куба.

г) Дан тетраэдр $PABC$. Как располагаются относительно друг друга прямые, указанные в следующей таблице?

	AB	BC	AC	PA	PB	PC
AB						
BC						
AC						
PA						
PB						
PC						

д) Пусть $a \subset \alpha$. Сколько прямых, скрещивающихся с прямой a, проходит через точку A, взятую в плоскости α?

е) Плоскости α и β проходят через одну и ту же прямую c. В плоскости α проведена прямая a, а в плоскости β — прямая b. Лежат ли прямые a и b в одной плоскости, если известно, что они пересекают прямую c: 1) в одной точке; 2) в разных точках?

ж) В плоскости двух параллельных прямых a и b дана точка C, не лежащая на этих прямых. Прямая c проходит через точку C. Как может располагаться прямая c относительно прямых a и b?

14. а) 1) Пусть $ABCD$ и $BCEF$ — параллелограммы. Докажите, что $AD \parallel EF$. 2) Пусть $ABCD$ и $DCEF$ — трапеции с общим основанием DC. Докажите, что $AB \parallel EF$.

б) Дан пространственный четырехугольник $ABCD$ (его называют также *косым*; этот четырехугольник не лежит в одной какой-либо плоскости), P, K, H, O — середины его сторон (рис. 167). Докажите, что $PKHO$ — параллелограмм. Не встречалась ли вам аналогичная планиметрическая задача? Как она решалась?

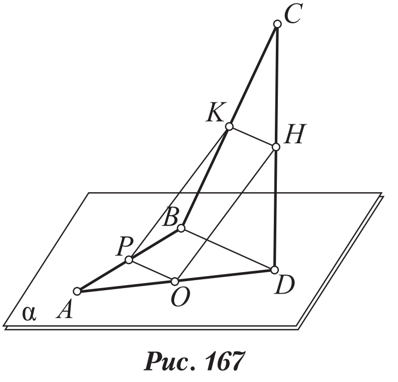


Рис. 167

в) Верно ли утверждение: «Плоскость, пересекающая одну из скрещивающихся прямых, пересекает и другую»?

15. Из точек A и B плоскости α проведены вне ее параллельные отрезки $AC = 8$ см и $BD = 6$ см (рис. 168). Докажите, что прямая CD пересекает плоскость α в некоторой точке E. Найдите расстояние BE, если $AB = 4$ см.

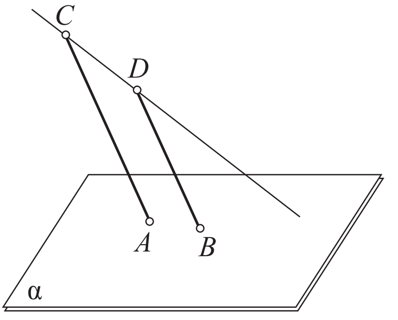


Рис. 168

16. Как известно, *магнитным азимутом* данного направления называют угол между осью магнитной стрелки и данным направлением. Азимуты отсчитываются от направления на север по часовой стрелке от 0° до 360°. Найдите азимуты направлений Минск — Могилев, Минск — Брест, Минск — Витебск, Минск — Гродно.

17. Составьте и решите задачу на нахождение угла между скрещивающимися прямыми, проходящими через вершины куба, таким образом, чтобы этот угол был равен 90°, 60°, 45°.

18. Рассмотрите следующие утверждения: 1) $AB \doteq CD$; 2) $AC \doteq BD$; 3) $AB \parallel CD$; 4) $AC \parallel BD$; 5) $AB \otimes CD$; 6) $AC \otimes BD$. Равносильны ли утверждения 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6?

19. Докажите, что в правильном тетраэдре $PABC$ (рис. 169, *а*) углы между прямыми PB и AC, PC и AB равны между собой.

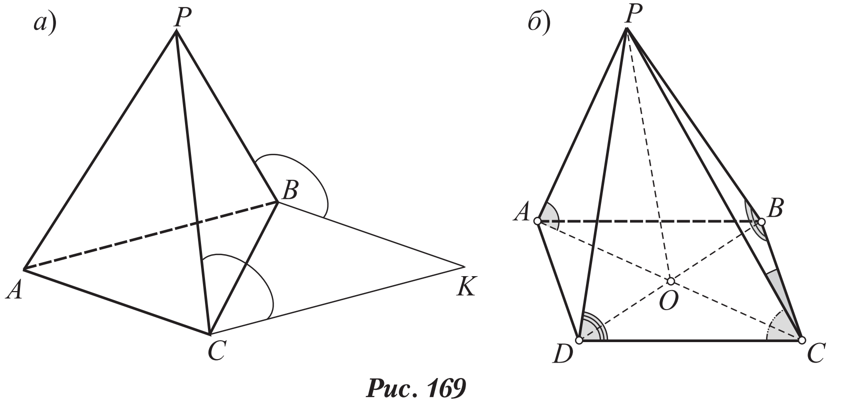


Рис. 169

20. а) Дан правильный тетраэдр $PABC$ (рис. 169, *б*), ребро которого равно a. Его основание достроили до параллелограмма $BADC$, O — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма. Найдите: 1) $\cos \angle PAO$; 2) AD; 3) PD; 4) $\angle PBD$; 5) $\angle PCD$; 6) $\angle PDB$; 7) $\angle PDC$; 8) $\angle(PC, AB)$; 9) $\angle(PB, AC)$; 10) $\angle(PD, AC)$.

б) Ребро правильного тетраэдра $PABC$ равно a. Точка M — середина ребра PA — соединена с вершинами B и C и серединой K ребра BC. Найдите: 1) $\angle PMC$; 2) $\angle PMB$; 3) $\angle PMK$; 4) $\angle BMC$; 5) MK; 6) $\cos \angle PKM$; 7) наибольший из углов PCM, PKM, PBM.

в) Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром a, A_1, B_1, C_1 — середины соответственно ребер BC, AC и AB, O — центр треугольника ABC. Найдите: 1) отрезок PO; 2) $\angle POA$; 3) $\angle POB$; 4) $\angle POC$; 5) $\cos \angle PAO$; 6) $\cos \angle PA_1O$; 7) равные углы; 8) равные отрезки.

г) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Найдите угол A_1AC. Сравните углы A_1AB, A_1AD и A_1AC.

21. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Центр P верхнего основания куба соединен отрезками с вершинами нижнего основания, O — центр нижнего основания. Найдите: 1) PO; 2) углы POA, POB, POC, POD; 3) PA, PB, PC, PD; 4) $\cos \angle PAO$; 5) $\cos \angle PAD$.

б) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб: 1) P — середина ребра DD_1. Постройте точки пересечения прямых B_1P, C_1P и A_1P с плоскостью нижнего основания куба. Докажите, что полученные три точки не лежат на одной прямой; 2) постройте линию пересечения плоскостей AA_1C_1C и BB_1D_1D. Докажите, что она параллельна прямым AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1; 3) постройте сечение куба плоскостью AB_1D_1. Найдите площадь фигуры, полученной в сечении, если ребро куба равно a.

в) Пусть $PABC$ — тетраэдр: 1) M — середина AB, T — середина BC. Постройте угол между скрещивающимися прямыми MT и AP; 2) в условиях предыдущего упражнения найдите угол между прямыми MT и AP, если тетраэдр является правильным; 3) точка T делит ребро BC в отношении $1 : 3$ считая от вершины B, точка M делит ребро AB в таком же отношении считая от вершины A. Постройте точку пересечения прямой MT с плоскостью PAC.

г) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, O — центр нижнего основания, O_1 — центр верхнего основания. Докажите, что четырехугольник AO_1C_1O является параллелограммом.

д) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = a$, O — центр нижнего основания. Найдите отрезок OC_1 и, пользуясь теоремой, обратной теореме Пифагора, докажите, что $CC_1 \perp CO$.

§ 4. Взаимное расположение прямой и плоскости

22. а) Дан тетраэдр $PABC$. Точка M принадлежит ребру PA, K — середина ребра BC. Проведите через точку M прямую $a \parallel ABC$, которая принадлежала бы плоскости: 1) PAB; 2) PAC; 3) PAK. Постройте точки пересечения прямой a с плоскостью PBC.

б) Допустим, что точка K (см. задачу 22, а) движется по ребру в направлении от точки B к точке C (рис. 170). Выясните, что будет представлять собой геометрическое место точек пересечения прямой a с плоскостью PBC.

в) Обратимся к тетраэдру из задачи 22, а. Постройте три прямые, параллельные плоскости PAC и проходящие через точку: 1) C; 2) K; 3) B.

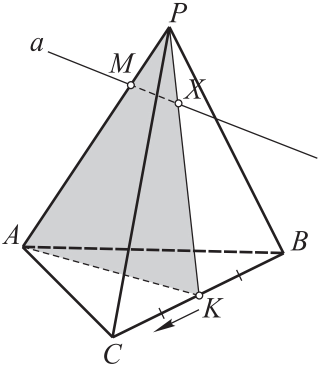


Рис. 170

23. а) Даны тетраэдр $PABC$ и точка M, принадлежащая ребру PA. Постройте плоскость α, проходящую через точку M и параллельную прямой AB. Сколько таких плоскостей можно построить?

б) Несколько изменим предыдущую задачу: постройте плоскость, проходящую через точку M и параллельную прямым AB и PC. Сколько таких плоскостей можно построить?

24. Составьте задачи, аналогичные задачам 23, а и 23, б, в которых вместо тетраэдра будет дан куб. Решите их.

25. а) 1) Пусть $A \notin a$. Через точку A проведите плоскость $\alpha \parallel a$. Сколько таких плоскостей можно построить? 2) Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не принадлежащая плоскости прямых a и b. Через точку A проведите плоскость α, параллельную прямым a и b. Сколько таких плоскостей можно построить?

б) Пусть $a \dot{-} b$ и $A \in a$. Через точку A проведите плоскость α, параллельную прямым a и b. Сколько таких плоскостей можно построить?

в) Пусть $a \dot{-} b$. Точка A не принадлежит этим прямым (рис. 171, *а*). Через точку A проведена плоскость α, параллельная прямым a и b. Сколько таких плоскостей можно построить?

г) Даны две различные параллельные прямые a и b и точка A, не принадлежащая плоскости этих прямых (рис. 171, *б*). Через точку A проведите плоскость α, параллельную данным прямым. Сколько таких плоскостей можно построить?

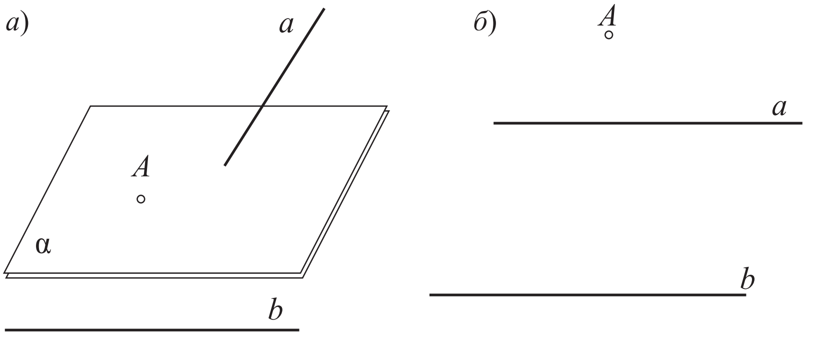


Рис. 171

д) Пусть $a \parallel b$, $c \dot{-} b$ (рис. 172). Через точку A, принадлежащую прямой c, и прямую b проведена плоскость α. Представим, что точка A движется по прямой c. Каждому положению точки A на прямой c соответствует определенное положение плоскости α. Как располагается плоскость α относительно прямой a?

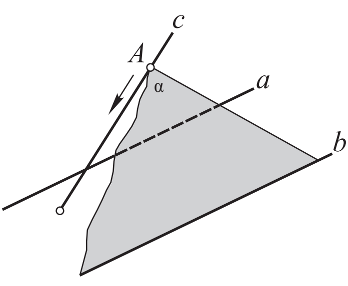


Рис. 172

26. а) Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и две скрещивающиеся прямые B_1D_1 и DC_1. Постройте плоскость α, проходящую через точку B параллельно прямым B_1D_1 и DC_1.

б) Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 26, а.

27. а) В условиях задачи 26, а постройте сечение куба плоскостью α и найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно a.

б) Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей.

28. а) Вертикальность установки столба проверяют, глядя на столб поочередно с двух направлений. Какое геометрическое предложение лежит в основе такой проверки?

б) Как надо установить на крестовине срубленную елку, чтобы ствол елки был перпендикулярен к плоскости пола?

в) На рисунке 173 изображено приспособление в виде подвижного угла, образованного плоскими гранями $ABCD$ и $ABMK$. На внешней стороне граней $ABCD$ и $ABMK$ укреплены перпендикулярно AB два цилиндрических уровня a и b. Приспособление прикладывают к углу колонны. Если пузырьки обоих уровней будут посередине, то колонна расположена вертикально. Какая геометрическая теорема лежит в основе устройства указанного приспособления для проверки вертикальности колонн?

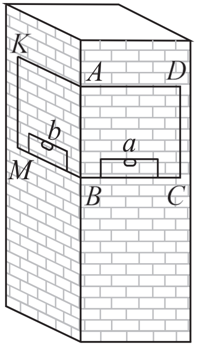


Рис. 173

29. а) Сколько кубов вы видите на рисунке 174?

б) Через катет CB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведены плоскость α ($\alpha \neq ABC$) и в ней прямая $CK \perp CB$. Найдите перпендикулярные прямую и плоскость.

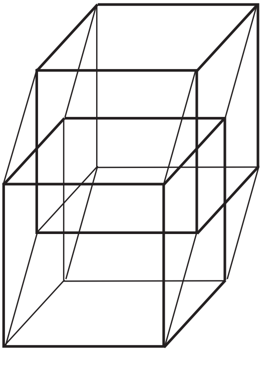


Рис. 174

30. а) Медиана равнобедренного треугольника является катетом другого треугольника. Приложите эти треугольники друг к другу так, чтобы образовались перпендикулярные прямая и плоскость.

б) Вершина P правильного тетраэдра соединена с центром O основания ABC. Докажите, что $PO \perp ABC$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 20, в.

31. а) Дан квадрат $ABCD$. Через точку O пересечения его диагоналей к плоскости этого квадрата проведен перпендикуляр OP. Постройте прямую, перпендикулярную к прямой AB, пересекающую эту прямую и проходящую через точку: 1) O; 2) P. Постройте аналогичные прямые, перпендикулярные к прямым BC, CD и AC.

б) Решите задачу 31, а при условии, что дан прямоугольник.

в) Решите задачу 31, а при условии, что дан ромб с острым углом в 60°.

г) Решите задачу 31, а при условии, что дан параллелограмм со сторонами 4 и 8 и острым углом в 60°.

д) Решите задачу 31, а при условии, что дана прямоугольная трапеция с основаниями 4 и 8 и высотой, равной 4.

е) Решите задачу 31, а при условии, что дана равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями и острым углом в 75° (рис. 175).

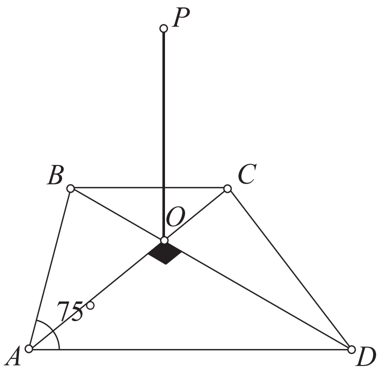


Рис. 175

ж) Дан равносторонний треугольник ABC. Через вершину A к его плоскости проведен перпендикуляр AP. Постройте прямые, проходящие через точки A и P и перпендикулярные к прямым AB, BC и AC.

з) Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C. Через вершину C к его плоскости проведен перпендикуляр CP. Постройте прямые, проходящие через точки C и P и перпендикулярные прямым AB, BC и AC.

и) Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C. Через вершину A к его плоскости проведен перпендикуляр P. Постройте прямые, проходящие через точки A и P и перпендикулярные прямым AC, AB, BC.

к) Дан равносторонний треугольник ABC. Через центр O этого треугольника к его плоскости проведен перпендикуляр OP. Постройте прямые, проходящие через точки O и P и перпендикулярные прямым AB, BC и AC.

л) Дан равносторонний треугольник ABC. Точка M — середина стороны BC. Через точку M к плоскости этого треугольника проведен перпендикуляр MP. Постройте прямые, проходящие через точки M и P и перпендикулярные к прямым AB, BC и AC.

м) Решите задачу 31, л в предположении, что точка M делит сторону BC в отношении $1 : 2$ считая от вершины B.

н) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Через середину M гипотенузы AB к плоскости этого треугольника проведен перпендикуляр MP. Постройте прямые, проходящие через точки M и P и перпендикулярные к прямым AB, BC и AC.

о) Решите задачу 31, н в предположении, что точка M делит гипотенузу AB в отношении $1 : 2$ считая от вершины A.

32. а) Дан квадрат $ABCD$. Через точку O пересечения его диагоналей к его плоскости проведен перпендикуляр OP. Известно, что $OP = AB = a$. Найдите расстояния от точки P до: 1) вершин квадрата; 2) прямых, содержащих стороны квадрата; 3) прямых, содержащих диагонали квадрата.

б) Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b. Через точку O пересечения диагоналей к его плоскости проведен перпендикуляр $OP = c$. Найдите расстояния от точки P до: 1) вершин прямоугольника; 2) прямых AB, BC, CD и DA.

в) Дан ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом 60°. Через точку O пересечения диагоналей к его плоскости проведен перпендикуляр $OP = H$. Найдите расстояния от точки P до: 1) вершин ромба; 2) прямых AB, BC, CD, AD, AC и BD.

г) Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами, равными a и b, и острым углом α. Через точку O пересечения диагоналей к его плоскости проведен перпендикуляр $OP = H$. Найдите расстояния от точки P до: 1) вершин параллелограмма; 2) прямых AB, BC, CD и DA.

д) Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Через вершину A к его плоскости проведен перпендикуляр $AP = H$. Найдите расстояния от точки P до: 1) вершин треугольника ABC, 2) прямых AB, BC и AC.

е) Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C и гипотенузой c. Через вершину C к его плоскости проведен перпендикуляр $CP = H$. Найдите расстояния от точки P до: 1) вершин треугольника ABC; 2) прямых AB, BC и AC.

33. а) Даны треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 3$ (рис. 176) и точка $P \notin ABC$ такая, что $PA = 4\sqrt{2}$, $PB = 5$, $PC = 4$. Проведите перпендикуляр из точки P к плоскости ABC. Есть ли в этой задаче лишнее данное?

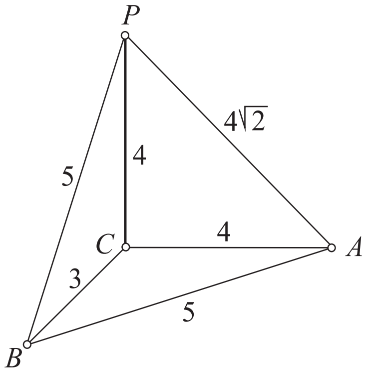


Рис. 176

б) Даны равносторонний треугольник ABC со стороной a и точка $P \notin ABC$ такая, что

$$PB = PC = a,\ PA = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Проведите перпендикуляр из точки P к плоскости ABC. Есть ли в этой задаче лишнее данное?

в) Даны треугольник ABC и точка $P \notin ABC$ такая, что $PA = PB = PC$. Проведите перпендикуляр из точки P к плоскости ABC.

г) Составьте и решите задачу, аналогичную предыдущей, предположив, что вместо треугольника дан квадрат.

д) Докажите, что если точка P, не принадлежащая плоскости многоугольника (рис. 177, a), равноудалена от его вершин, то осно-

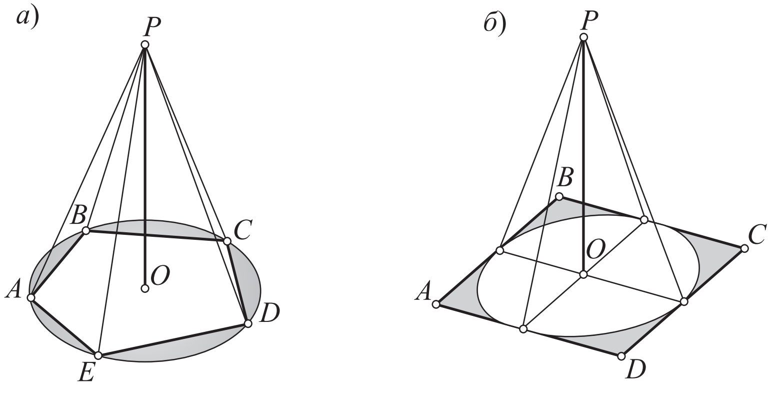


Рис. 177

вание перпендикуляра, проведенного из точки P к плоскости этого многоугольника, совпадает с центром O описанной окружности.

е) Докажите, что если точка P, не принадлежащая плоскости многоугольника (рис. 177, *б*), равноудалена от прямых, содержащих его стороны, то основание перпендикуляра, проведенного из точки P к плоскости этого многоугольника, совпадает с центром вписанной окружности.

34. а) Сторона AB угла BAC (рис. 178, *а*) принадлежит плоскости α, а сторона AC — наклонная к этой плоскости; AC_1 — ортогональная проекция стороны AC на плоскость α. Пусть $\angle BAC = \varphi$, $\angle BAC_1 = \beta$, $\angle CAC_1 = \gamma$. Докажите формулу Эйлера: $\cos\varphi = \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

б) В условиях задачи 34, а допустим, что $\varphi = 60°$, $\gamma = 45°$. Найдите угол β. На сколько градусов угол β меньше угла φ?

35. а) Из точки $P \notin \alpha$ проведены к этой плоскости две равные наклонные PA и PB и перпендикуляр PO (рис. 178, *б*). Угол между наклонными равен φ, угол между их ортогональными проекциями равен β. Каждая из наклонных образует с перпендикуляром PO угол γ. Сравните углы φ и β. Нет ли в задаче лишних данных?

б) В условиях задачи 35, а найдите связь между тригонометрическими функциями углов φ, β и γ.

в) Пусть в условиях задачи 35, а $\varphi = 90°$, $\gamma = 60°$. Найдите $\cos\beta$. Сравните углы φ и β.

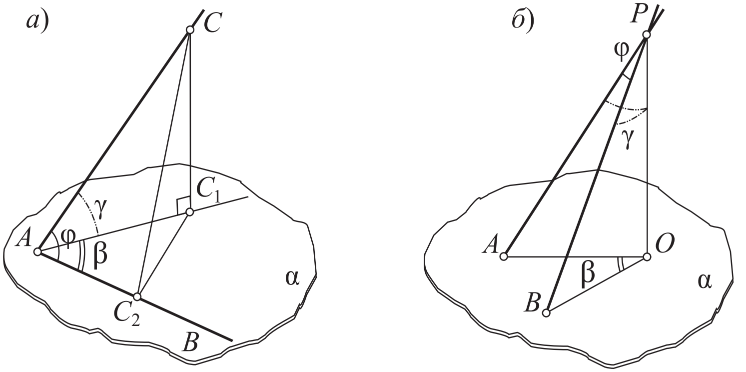


Рис. 178

36. а) Пусть к плоскости α проведены наклонные PA и PB и перпендикуляр PO ($P \notin \alpha$). Положим, что φ — угол между наклонными, β — угол между их ортогональными проекциями на плоскость α, γ и δ — углы между наклонными и перпендикуляром PO. Докажите обобщенную формулу Эйлера: $\cos\beta = \dfrac{\cos\varphi - \cos\gamma \cdot \cos\delta}{\sin\gamma \cdot \sin\delta}$.

б) Проверьте, можно ли из формулы задачи а) получить формулу задачи 35, б.

37. а) Одна из двух прямых перпендикулярна к данной плоскости, другая — параллельна этой плоскости. Как эти прямые располагаются относительно друг друга?

б) Две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости. Как эти прямые располагаются относительно друг друга?

в) Две прямые перпендикулярны друг к другу. Одна из них перпендикулярна плоскости. Как располагается другая прямая относительно этой плоскости?

38. а) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. На поверхности куба найдите множество точек, равноудаленных от его вершин B_1 и D.

б) В условиях предыдущей задачи докажите, что точки, равноудаленные от вершин B_1 и D, лежат на плоскости, перпендикулярной к B_1D и проходящей через середину отрезка B_1D.

в) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середину отрезка B_1D и перпендикулярной к этому отрезку.

39. а) В плоскости α лежит ромб $ABCD$ (рис. 179, *а*). Точка $P \notin \alpha$ и равноудалена от сторон этого ромба. Постройте перпендикуляр к плоскости α, проходящий через точку P.

б) В плоскости α лежит правильный многоугольник $ABCDE...$. Точка $P \notin \alpha$ и равноудалена от сторон этого многоугольника. Докажите, что основание перпендикуляра, проведенного из точки P к плоскости α, совпадает с центром правильного многоугольника.

в) Дан ромб $ABCD$ с острым углом A, равным 60°. Через вершину B к его плоскости проведен перпендикуляр BP. Постройте прямые, проходящие через точку P и перпендикулярные к прямым, содержащим: 1) стороны и 2) диагонали ромба.

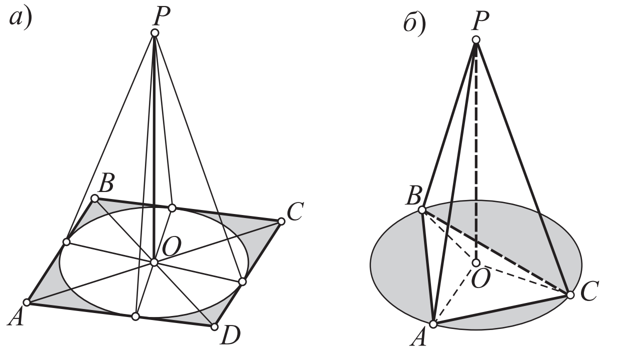


Рис. 179

г) Дана прямоугольная трапеция с основаниями 5 и 10 и высотой, равной 5. Через точку O пересечения ее диагоналей к плоскости трапеции проведен перпендикуляр OP. Постройте прямые, проходящие через точку P и перпендикулярные к прямым, содержащим: 1) стороны и 2) диагонали трапеции.

д) Дана треугольная пирамида $PABC$, боковые ребра которой одинаково наклонены к плоскости основания ABC (рис. 179, *б*). Докажите, что основание перпендикуляра, проведенного из точки P к плоскости ABC, совпадает с центром окружности, описанной около основания ABC.

40. а) Пусть $\alpha \perp a$ и $\alpha \cap a = A$ (рис. 180, *а*). Докажите, что прямые, проходящие через точку A перпендикулярно к прямой a, лежат в плоскости α. *Указание*. Воспользуйтесь методом от противного.

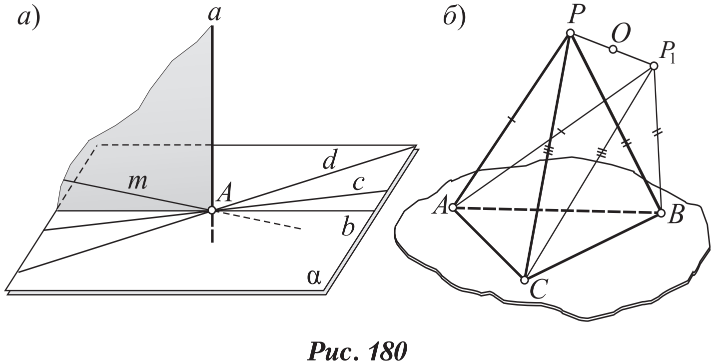


Рис. 180

б) Тетраэдр $PABC$ задан треугольником ABC, лежащим в его основании, и боковыми ребрами $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$ (рис. 180, *б*). Докажите, что положение вершины P указанными условиями определяется единственным образом. *Указание.* Воспользуйтесь методом от противного.

§ 5. Взаимное расположение двух плоскостей

41. а) Даны две параллельные плоскости. Будет ли прямая, проведенная в одной из этих плоскостей, параллельна другой плоскости?

б) Будет ли прямая, параллельная одной из двух параллельных плоскостей, параллельна и другой плоскости?

в) Через точку одной из двух параллельных плоскостей проведена прямая, параллельная другой плоскости. Как расположится эта прямая относительно плоскости, с которой она имеет общую точку?

г) Докажите, что все прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости, параллельной данной.

д) Две различные плоскости параллельны двум данным пересекающимся прямым. Будут ли эти плоскости параллельны между собой?

е) В параллельных плоскостях проведено по одной прямой. Как они располагаются относительно друг друга?

ж) Линии пересечения плоскостей α и β плоскостью γ параллельны между собой. Можно ли утверждать, что $\alpha \parallel \beta$?

42. а) Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку M на ребре AA_1 параллельно плоскости AB_1C_1D. Найдите периметр сечения, если $AM = MA_1$ и ребро куба равно a. Найдите отношение площади этого сечения к площади четырехугольника A_1BCD_1.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через середины ребер AA_1, BB_1 и центр грани $ABCD$. Плоскость β проходит через ребро DC и середину ребра A_1B_1. Постройте сечения куба плоскостями α и β. Докажите, что $\alpha \parallel \beta$. Найдите отношение площадей сечений.

43. а) Докажите, что если равнобедренный и прямоугольный треугольник ABC ($BA = BC$) перегнуть по высоте BD так, чтобы плоскости ABD и CBD оказались перпендикулярными, то прямые DA и DC также станут перпендикулярными, а стороны BA и BC составят угол в 60°.

б) Две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой a (рис. 181, *а*). Точки A и B принадлежат прямой a. В плоскостях α и β соответственно проведены прямые AC и BD, перпендикулярные a. Известно, что $AB = 6$ см, $AC = 3$ см, $BD = 2$ см. Найдите: 1) отрезок CD; 2) косинусы углов, которые образует прямая CD с плоскостями α и β.

в) Две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой AB (рис. 181, *б*). Отрезок CD проведен в плоскости α параллельно AB на расстоянии a от нее; E — точка в плоскости β, удаленная от AB на расстояние b. Найдите расстояние от точки E до прямой CD.

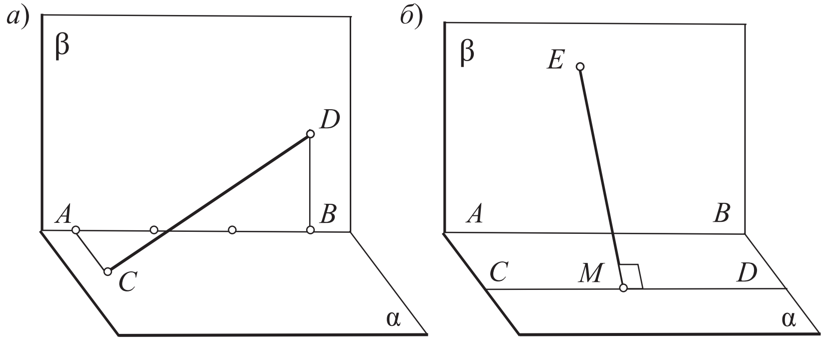


Рис. 181

г) Отрезок AB соединяет точки A и B, лежащие на двух перпендикулярных плоскостях. Перпендикуляры, проведенные из точек A и B на линию пересечения плоскостей, соответственно равны a и b, а расстояние между их основаниями равно c. Найдите длину отрезка AB и длины его проекций на данные плоскости.

д) Концы отрезка лежат на двух перпендикулярных плоскостях, отрезок составляет с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30°; длина отрезка равна a. Найдите длину части линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, проведенными на нее из концов данного отрезка.

е) Можно ли через каждую из двух данных (произвольных!) прямых провести по плоскости так, чтобы они были перпендикулярными? Ответ дайте с помощью построений. Рассмотрите различные случаи расположения данных прямых.

§ 6. Расстояние: новые фигуры — новые расстояния

44. На поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте множество точек, равноудаленных от: 1) вершины A_1 на расстояние, равное ребру куба; 2) вершин A и C_1.

45. а) Через точку пересечения диагоналей прямоугольника проведена прямая, перпендикулярная к его плоскости. Докажите, что все точки этой прямой равноудалены от вершин прямоугольника.

б) Точка лежит вне плоскости прямоугольника и равноудалена от всех его вершин. Постройте ортогональную проекцию данной точки на плоскость данного прямоугольника.

в) Пользуясь условием задачи 45, б, найдите расстояние от данной точки до плоскости данного прямоугольника, если $KA = 5$, $AB = 4$, $AD = 3$, где K — данная точка, B и D — вершины прямоугольника.

46. а) В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$. Через точку C к плоскости ABC проведена наклонная CD, перпендикулярная к AC. Докажите, что проекцией прямой CD на плоскость ABC является прямая CB.

б) В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$. Через точку B к плоскости ABC проведен перпендикулярно отрезок BD. Докажите, что $CD \perp AC$.

в) В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Через точку B к плоскости ABC проведен перпендикулярно отрезок BD. Найдите расстояние между точками A и D, если $AC = a$, $CB = b$, $BD = c$.

г) В условиях задачи 46, б найдите расстояние от точки D до прямых AC, CB, AB, если $\angle DCB = 60°$, $CB = b$.

47. а) Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние H, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° и 30°, а между собой — прямой угол. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

б) Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние H, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° и 30°. Расстояние между основаниями наклонных равно $H\sqrt{6}$. Найдите угол между наклонными.

в) Из точки A, отстоящей от плоскости на расстояние H, проведены две наклонные AC и AD, образующие между собой угол в 90°. Наклонная AC образует с плоскостью угол в 45°. Расстояние между основаниями наклонных равно $H\sqrt{6}$. Найдите угол между наклонной AD и данной плоскостью.

48. Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние H, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45°, а между собой — угол в 60°. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

49. а) Возьмите две спицы, моделирующие две скрещивающиеся прямые, и на глаз определите расположение общего перпендикуляра, пересекающего данные скрещивающиеся прямые. Проверьте с помощью чертежного угольника результаты своего наблюдения. Измерьте линейкой расстояние между данными прямыми.

б) Возьмите две спицы, моделирующие скрещивающиеся прямые. Увеличьте (уменьшите) расстояние между ними. Увеличьте (уменьшите) угол между этими прямыми.

в) Если опустить требование, чтобы прямая, перпендикулярная к двум данным скрещивающимся прямым, пересекала их, то сколько таких прямых можно провести?

50. а) Воспроизведите последовательность построений общего перпендикуляра AB к двум данным скрещивающимся прямым a и b с помощью следующего текста:

1) α, где $\alpha ... b$;
2) b', где b' — ортогональная ...;
3) A, где $A = a$ ...;
4) AB, где $AB \subset (b; b')$ и $AB \perp b'$.

Выполните эти построения и докажите их правильность.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте общий перпендикуляр, пересекающий скрещивающиеся прямые: 1) AA_1 и DC; 2) AA_1 и BC; 3) AA_1 и B_1C_1; 4) AA_1 и BD; 5) AA_1 и DC_1; 6) AA_1 и B_1C.

в) Составьте и решите аналогичные задачи для тетраэдра.

51. а) Справедлив ли следующий вывод: «Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми a и b, достаточно через прямую a провести плоскость α, параллельную b, и из любой точки прямой b провести к плоскости α перпендикуляр. Его длина и будет искомым расстоянием»?

б) Ребро куба равно a. Найдите расстояние между диагональю куба и не пересекающим эту диагональ ребром куба. Рассмотрите несколько случаев.

в) Расстояние между диагональю куба и не пересекающим эту диагональ ребром куба равно $2\sqrt{2}$. Найдите ребро куба.

52. а) Найдите угол между двумя скрещивающимися прямыми a и b, если расстояние между точками $A \in a$ и $B \in b$, равноотстоящими от оснований $C \in a$ и $D \in b$ общего перпендикуляра к этим прямым, равно $2d$, а $DC = AC = BD = d$.

б) Даны две скрещивающиеся под углом α прямые a и b. Расстояние между точками $A \in a$ и $B \in b$, равноотстоящими от оснований $C \in a$ и $D \in b$ общего перпендикуляра к этим прямым, равно m. Найдите расстояние между прямыми, если $AC = BD = l$. Какие случаи надо рассмотреть?

53. а) Прямая AB параллельна плоскости α и отстоит от нее на расстояние a. Через прямую AB проведена плоскость β, пересекающая плоскость α под углом в 45°. В плоскости β проведена прямая под углом в 45° к прямой AB. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между прямой AB и плоскостью α.

б) Дан треугольник ABC со сторонами: $AB = 9$, $BC = 6$, $AC = 5$. Через сторону AC проведена плоскость α, образующая с плоскостью ABC угол в 45°. Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

в) Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Катет AC принадлежит некоторой плоскости α. Плоскости ABC и α, пересекаясь, образуют двугранный угол в 45°. Катет $AC = 2$ м, $AB : BC = 3 : 1$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

г) Точки A и B принадлежат ребру прямого двугранного угла; AC и BD — перпендикуляры к ребру, проведенные в разных гранях. Найдите расстояние CD, если $AB = 6$, $AC = 3$, $BD = 2$ см.

§ 7. Многогранный угол

Проблема. Дан равносторонний треугольник ABC и вне его плоскости — точка P. Изменяя положение точки P, можно получить различные трехгранные углы $PABC$, при пересечении которых плоскостью получается равносторонний треугольник. Создается впечатление, что при сечении любого трехгранного угла плоскостью можно получить равносторонний треугольник. Так ли это?

54. а) Плоские углы трехгранного угла равны между собой. Можно ли трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник? Как построить такое сечение?

б) Два плоских угла трехгранного угла равны 90°, третий — равен 120° (рис. 182, *а*). Можно ли этот трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник?

Указание. Допустите, что трехгранный угол с вершиной P можно пересечь плоскостью так, что в сечении получился равносторонний треугольник ABC. Справедливость допущения обоснуйте с помощью вычислений. Для этого предположите, что $PA = a$, $PB = b$.

в) Два плоских угла трехгранного угла равны по 90°, третий равен 60° (рис. 182, *б*). Можно ли этот трехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник?

г) Решите задачу 54, в, предположив, что два плоских угла равны по 90°, а третий — равен 45°.

д) Какой ответ следует дать на вопрос проблемы?

55. а) Произвольный выпуклый четырехгранный угол $PABCD$ (рис. 182, *в*) пересечен плоскостью α в точках A, B, C и D. Можно ли пересечь этот угол другой плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм? *Указание*. Рассмотрите две прямые, по которым пересекаются плоскости противоположных граней четырехгранного угла, и плоскость, проходящую через эти прямые.

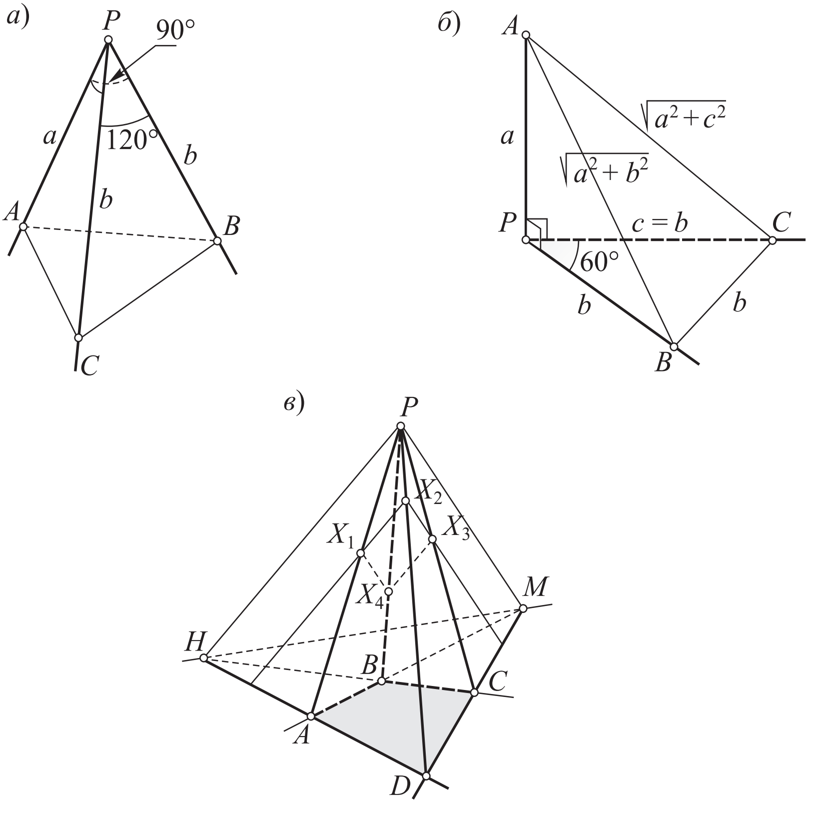


Рис. 182

б) Докажите, что в трехгранном угле против равных плоских углов лежат равные двугранные углы. Докажите также и обратное предложение.

в) Докажите, что если в трехгранном угле два плоских угла прямые, то и противоположные им двугранные углы тоже прямые.

56. а) Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его граней.

б) Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, равноудаленных от его ребер.

57. а) Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер от вершины отложен отрезок, равный 3 см, и из конца этого отрезка проведен перпендикуляр к противолежащей грани. Найдите длину перпендикуляра.

б) Два плоских угла трехгранного угла равны 45°, двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

в) Два плоских угла трехгранного угла равны 45°, третий плоский угол равен 60°. Найдите двугранный угол, противолежащий третьему плоскому углу.

г) Два плоских угла трехгранного угла равны 60°, третий угол — прямой. Найдите угол между плоскостью прямого угла и противолежащим ребром.

Тема 2. КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ В СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 8. Метод воображаемых (условных) построений

58. а) Постройте точку пересечения данной прямой с данной плоскостью. *Указание.* Искомую точку пересечения постройте как точку пересечения двух прямых. Каких?

б) Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

в) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.

г) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной плоскости.

д) Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную данной прямой.

е) Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную данной плоскости.

ж) Даны две скрещивающиеся прямые. Постройте прямую, пересекающую данные прямые и перпендикулярную к ним обеим.

з) Через данную точку проведите плоскость, параллельную данной плоскости.

59. а) Через точку A проведите прямую, пересекающую прямую a так, чтобы ее отрезок, заключенный между прямой a и параллельной ей плоскостью α, имел заданную длину.

б) Даны пересекающиеся прямая a и плоскость α и точка O, не принадлежащая им. Через точку O проведите прямую, пересекающую прямую a и плоскость α так, чтобы ее отрезок, заключенный между прямой a и плоскостью α, делился в точке O пополам.

в) Постройте полуплоскость, ограниченную ребром данного двугранного угла и делящую этот угол пополам. (Эта полуплоскость называется *биссектором* двугранного угла.)

г) Даны плоскость α и точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на плоскости α такую точку X, чтобы сумма $AX + XB$ была наименьшей.

60. а) Постройте точку, равноудаленную от четырех данных точек, не лежащих на одной плоскости.

б) На данной прямой найдите точку, равноудаленную от двух данных точек.

в) На данной плоскости проведите прямую так, чтобы расстояния от любой ее точки до двух данных точек, расположенных вне плоскости, были равны между собой.

г) Постройте прямоугольный треугольник с данными катетами так, чтобы вершина прямого угла находилась в данной точке, вершина одного острого угла лежала на данной прямой, вершина другого — на данной плоскости.

д) Постройте трехгранный угол по двум плоским углам и двугранному углу между ними.

§ 9—12. Параллельная проекция: начала нового геометрического метода — метода проекций. Изображение фигуры. Построение изображений плоских фигур. Изображение пространственных фигур. Построения на изображениях

61. а) Постройте проекцию равнобедренного треугольника $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = A_1C_1$), точки $M_1 \in A_1B_1$ и перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на B_1C_1.

б) Параллелограмм $ABCD$ является проекцией ромба $A_1B_1C_1D_1$, $K_1 \in A_1C_1$. Постройте проекцию перпендикуляра, проведенного через точку K_1 к A_1C_1.

в) В плоскости проекций дан произвольный треугольник ABC, являющийся проекцией некоторого правильного треугольника

$A_1B_1C_1$. На плоскости $A_1B_1C_1$ даны еще некоторая прямая $M_1K_1 \parallel B_1C_1$ и точка P_1. Постройте изображение прямой, проходящей через точку P_1 перпендикулярно к прямой M_1K_1.

г) Изображение фигуры на проекционном чертеже называется *полным*, если для каждой точки этой фигуры можно построить ее проекцию на некоторую плоскость, называемую *основной*. Пусть имеется изображение произвольной треугольной пирамиды (в виде четырехугольника $PABC$ вместе с его диагоналями и изображением ее высоты PO, опущенной из вершины P на основание ABC). Является ли изображение пирамиды вместе с ее высотой полным?

д) Изображены: плоскость α, являющаяся основной; прямая a — прямая пересечения плоскости α с некоторой плоскостью β; точка $A \in \beta$ и точка $A' \in \alpha$, являющаяся проекцией точки A на плоскость α в некотором проектировании. Является ли изображение плоскости β полным?

62. а) Параллельная проекция окружности, не являющаяся отрезком, называется *эллипсом*. Решите следующую задачу: дана проекция квадрата. Постройте проекцию окружности, вписанной в квадрат. (В результате вы найдете один из простых способов построения эллипса.)

б) Проекция центра окружности называется *центром эллипса*, проекция диаметра окружности — *диаметром эллипса*, проекция хорды окружности — *хордой эллипса*. Проекции двух взаимно перпендикулярных диаметров окружности называются *сопряженными диаметрами эллипса*. Докажите, что каждый из сопряженных диаметров эллипса есть геометрическое место середин хорд, параллельных другому диаметру.

в) Дан эллипс и один из его диаметров. Постройте сопряженный диаметр.

г) Дан эллипс. Постройте изображение его центра.

д) Около окружности описан квадрат. Дан эллипс, являющийся изображением этой окружности. Постройте изображение квадрата.

63. а) Даны изображение окружности и ее хорды AB. Точка $K \in AB$. Постройте изображение прямой, проходящей через точку K и перпендикулярной к хорде AB.

б) Даны эллипс, его центр O и хорда CE. На этом же изображении даны прямая $AB \parallel CE$ и точка M. Постройте изображение прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной к прямой AB.

в) Постройте изображение окружности и вписанного в нее правильного треугольника.

г) Постройте изображение правильного треугольника и вписанной в него окружности. (Постройте шесть точек эллипса.)

д) Постройте изображение равнобедренного треугольника со сторонами 4 см, 5 см, 5 см и вписанной в этот треугольник окружности.

64. а) На рисунке 183, *а* показано сечение куба плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и вершину верхнего. Правильно ли оно построено?

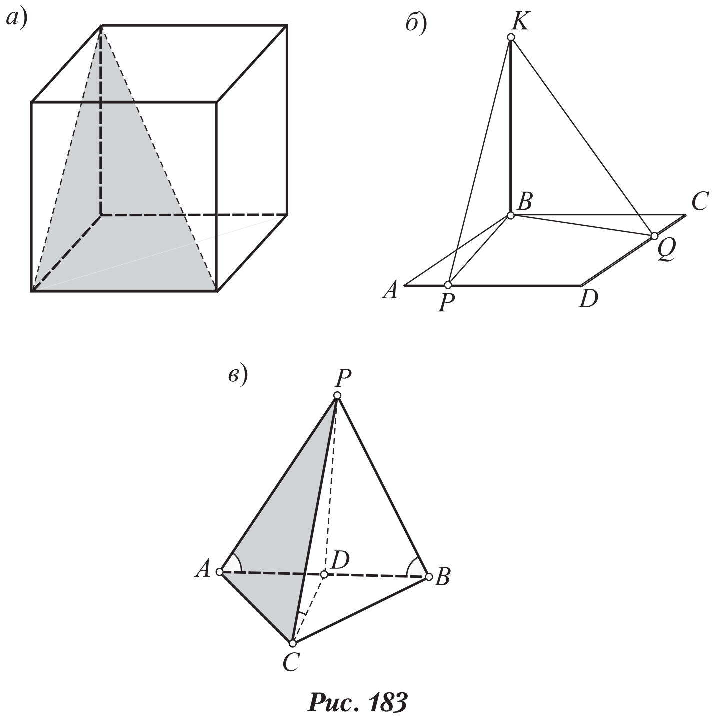


Рис. 183

б) Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Из вершины B к его плоскости проведен перпендикуляр $BK = H$. Найдите расстояние от точки

K до прямых, содержащих стороны квадрата. При решении задачи один из учеников использовал рисунок 183, *б*. Правильно ли он выполнен?

в) Даны правильный треугольник *ABC* и точка *P* вне его плоскости. Найдите сторону этого треугольника, если наклонные *PA*, *PB* и *PC* образуют с плоскостью основания угол в 30° и $PA = a$. При решении задачи один из учеников использовал рисунок 183, *в*, на котором заданными углами считались углы *PAB*, *PBA*, *PCD*. Соответствует ли рисунок условиям задачи?

г) Сторона равностороннего треугольника равна 3 см. Найдите расстояние от его плоскости до точки, которая отстоит от каждой его вершины на 2 см. При решении задачи один из учеников выполнил рисунок 184, *а*, на котором искомое расстояние находилось как длина отрезка *PK*. Соответствует ли рисунок условиям задачи?

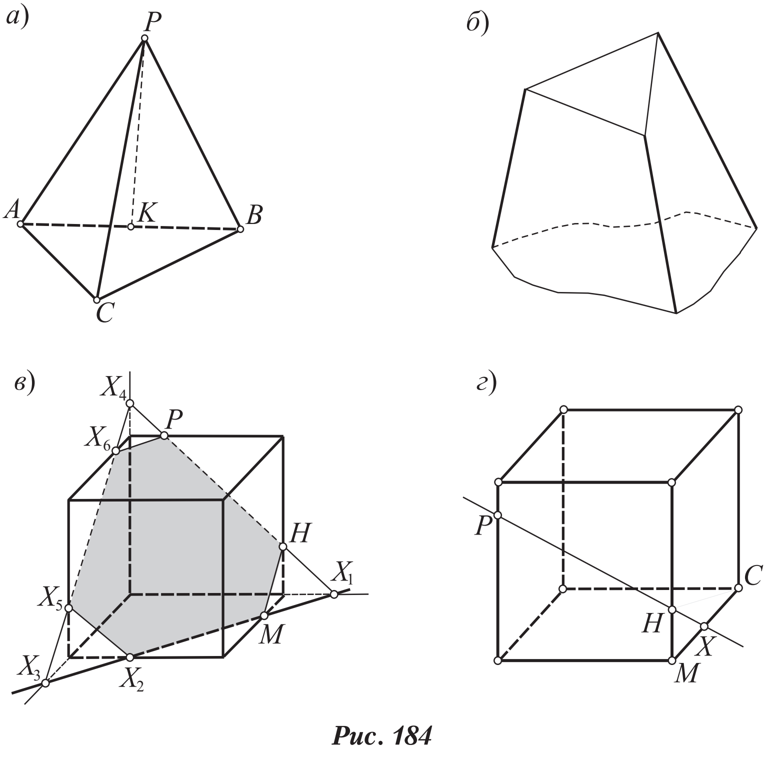


Рис. 184

д) На рисунке 184, *б* изображена часть трехгранного угла. Как проверить, правильно ли построено это изображение?

е) На рисунке 184, *в* изображено сечение куба плоскостью, проходящей через точки P, H, M. Правильно ли построено это сечение?

ж) На рисунке 184, *г* имеются куб и две точки: P и H, расположенные на его ребрах. Постройте точку пересечения прямой PH с плоскостью нижнего основания куба. Одним из учеников искомая точка X была построена как точка «пересечения» прямых PH и MC. Правильно ли решена задача?

з) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка X, принадлежащая ребру BB_1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A, C и X.

и) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точка X, принадлежащая ребру BB_1. Постройте сечение куба плоскостью XBD.

65. а) Треугольная пирамида называется *правильной*, если в ее основании лежит правильный треугольник и вершина пирамиды ортогонально проектируется в центр основания. Постройте изображение правильной треугольной пирамиды и ее сечения плоскостью, проведенной через середину стороны основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру. Боковое ребро в 3 раза больше стороны основания.

б) Найдите площадь сечения, построенного в задаче 65, а, если сторона основания пирамиды равна a.

в) В условиях задачи а) постройте ортогональную проекцию вершины P на плоскость ABC.

г) В условиях задачи а) постройте угол между боковым ребром PA и плоскостью основания ABC. Найдите величину этого угла.

д) В условиях задачи а) постройте линейный угол двугранного угла при ребре PA. Найдите величину этого угла.

66. а) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $K \in CC_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной к ребру CC_1.

б) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, K — середина ребра CC_1, M — середина ребра DC. Постройте сечение куба плоскостью KMA.

в) В условиях предыдущей задачи постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, K и центр грани AA_1B_1B.

г) В условиях задачи 66, б постройте сечения куба плоскостью, проходящей через середину отрезка MK и перпендикулярной к MK.

д) Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка M принадлежит ребру PC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной к ребру PC.

е) В условиях предыдущей задачи постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной к ребру PB.

ж) Пусть $PABC$ — правильная треугольная пирамида, сторона основания $AB = a$, боковое ребро $PA = 2a$, M — середина ребра BC. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной к ребру PA.

з) В условиях предыдущей задачи найдите величину двугранного угла при ребре PA.

Тема 3. КООРДИНАТНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ МЕТОДЫ В СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 13. Координаты точки и вектора

67. а) Какие координаты имеет точка, принадлежащая:

1) плоскости xOy;
2) плоскости xOz;
3) плоскости yOz;
4) плоскостям xOy и xOz;
5) плоскостям xOy и yOz;
6) плоскостям yOz и xOz?

б) Координаты точки M, лежащей на биссекторе двугранного угла, образованного координатными плоскостями xOz и xOy, положительны. Точка M удалена от начала координат на расстояние, равное 2. Найдите ординату и аппликату этой точки, если абсцисса ее равна $\sqrt{2}$.

68. а) Пусть плоскость $\alpha \parallel xOy$ и отстоит от плоскости xOy на расстояние, равное 9. Представим, что некоторая точка A плоскости α совершает в ней произвольное перемещение. Какие значения могут принимать координаты этой точки?

б) Решите задачу 68, а, предположив, что: 1) $\alpha \parallel xOz$; 2) $\alpha \parallel yOz$.

в) Найдите геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$1)\begin{cases} x = y, \\ z = a; \end{cases} 2)\begin{cases} y = z, \\ x = a; \end{cases} 3)\begin{cases} x = z, \\ y = a, \end{cases}$$

где a — некоторая постоянная.

г) Найдите геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$1)\begin{cases} y = x + 1, \\ z = a; \end{cases} 2)\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = a; \end{cases} 3)\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4, \\ z = a, \end{cases}$$

где a — некоторая постоянная.

69. а) Прямая a параллельна оси Oy и пересекает плоскость xOz в точке $P(3; 0; 4)$. Найдите координаты точки $M(x; y; z) \in a$ и удаленной от начала координат на расстояние, равное 6. Сколько решений имеет задача?

б) Точка $M(x; y; z)$ равноудалена от координатных осей. Найдите координаты точки M, если $OM = a$. Сколько решений имеет задача?

в) Найдите координаты точки M, если она лежит на оси Oz и равноудалена от точек $A(1; 1; 1)$ и $B(-1; 2; 3)$.

г) Прямая b параллельна оси Ox и пересекает плоскость yOz в точке $B(0; 4; 6)$. Найдите координаты точки $T(z; y; z) \in b$, если она удалена от начала координат на расстояние, равное: 1) $\sqrt{42}$; 2) 7; 3) $2\sqrt{10}$. Сколько решений имеет задача?

70. а) На координатной сетке постройте вектор, имеющий координаты: 1) 1, 1, 1; 2) 1, –2, 3; 3) 0, 0, 3; 4) –1, 2, 0; 5) –2, 2, 2.

б) Составьте задачу, аналогичную задаче а), и решите ее.

71. а) Найдите координаты конца вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

1) $A(1; 2; 3)$, $\overrightarrow{AB}(-2; 4; 3)$;

2) $A(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AB}(2; 4; -3)$;

3) $A(0; 2; 3)$, $\overrightarrow{AB}(4; 3; 2)$;

4) $A(0; 2; 0)$, $\overrightarrow{AB}(-4; -3; -2)$.

б) Найдите координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

1) $\overrightarrow{AB}(2; 3; 4)$, $B(1; 2; 1)$;

2) $\overrightarrow{AB}(2; 3; 4)$, $B(2; 1; 1)$;

3) $\overrightarrow{AB}(4; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$;

4) $\overrightarrow{AB}(3; 2; 4)$, $B(0; 2; 1)$.

в) На координатной сетке постройте вектор, у которого:

1) первые две координаты нулевые, третья — отрицательная;

2) первая и третья координаты нулевые, вторая — положительная;

3) первые две координаты нулевые, третья — положительная;

4) все три координаты положительные;

5) все три координаты отрицательные.

72. а) Система координат задана ребрами единичного куба, выходящими из одной вершины. Найдите координаты векторов, заданных вершинами этого куба.

б) Даны векторы $\vec{a}\ (0; 2; 3)$ и $\vec{b}\ (1; 0; 0)$. Найдите сумму произведений одноименных координат этих векторов. Как располагаются прямые, на которых лежат данные векторы?

73. а) Можно ли утверждать, что формула расстояния между двумя точками из § 14 является обобщением известной формулы расстояния между двумя точками в курсе планиметрии?

б) Какой вид примет формула расстояния между двумя точками, если точки принадлежат: 1) плоскости xOy; 2) плоскости xOz; 3) плоскости yOz?

74. а) Найдите аппликату точки $A(2; 3; z)$, если $OA = \sqrt{13}$.

б) Найдите длину вектора: 1) $\vec{i}\ (1; 0; 0)$; 2) $\vec{j}\ (0; 1; 0)$; 3) $\vec{k}\ (0; 0; 1)$; 4) $\vec{a}\ (1; 1; 1)$; 5) $\vec{b}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

в) В условиях задачи 72, а найдите длины векторов, заданных вершинами единичного куба. Укажите вектор, имеющий наибольшую длину.

г) Подберите координаты вектора таким образом, чтобы его длина была равна $\sqrt{14}$.

д) Точки K, M и P — середины соответственно отрезков AB, AK и KB. Известны координаты точек M и P: $M(2; 3; 4)$, $P(5; 6; 7)$. Найдите: 1) координаты точек A и B; 2) длину вектора $\overrightarrow{AP}$.

75. а) Постройте на координатной сетке прямую, проходящую через точки $A(5; 0; 1)$ и $B(0; 6; 4)$. Запишите уравнения этой прямой.

б) В условиях задачи а) постройте проекции прямой AB на координатные плоскости и запишите их уравнения.

76. а) Прямая задана уравнениями $\frac{x}{x_2}=\frac{y}{y_2}=\frac{z}{z_2}$. Проходит ли она через точку: 1) начало координат; 2) $A(3; 4; 3)$; 3) $B(3; 3; 3)$; 4) $C(a; a; a)$?

б) Прямая задана уравнениями $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{3}$. Найдите координаты нескольких точек, через которые проходит эта прямая.

77. а) Постройте прямые, заданные уравнениями:

1) $\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-4}{6-4}=\frac{z-1}{2-1}$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-1}{2}$; 3) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

б) В условиях задачи 77, а постройте точки пересечения этих прямых с координатными плоскостями.

в) В условиях задачи 77, б найдите координаты точек пересечения указанных прямых с координатными плоскостями.

78. а) Имеют ли две прямые $\frac{x}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{8}$ общую точку?

б) Найдите координаты общей точки прямых, указанных в задаче 78, а.

в) На координатной сетке постройте прямые, указанные в задаче 78, а, и их точку пересечения.

§ 14. Равные векторы. Сложение и вычитание векторов

79. а) Точка M — середина отрезка AB. Почему $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$?

б) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, точки M и K делят диагональ BD так, что $BM = MK = KD$. Докажите, что $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AK}$.

80. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сумму и разность векторов: 1) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BD}$.

б) В условиях предыдущей задачи постройте разность векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{D_1C}$; 3) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{D_1C}$.

81. а) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, то точки A и B совпадают.

б) Справедливо ли утверждение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$?

в) Докажите утверждение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

г) Как обосновать утверждение: $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$?

д) Пусть $PABC$ — тетраэдр, точки M, N, K и T — середины соответственно ребер AC, AP, PB и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{TK}$.

е) В условиях предыдущей задачи докажите, что:
1) $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NT}$; 2) $\overrightarrow{TK} - \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{MK}$.

82. а) Справедливы ли равенства (рис. 185):

1) $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{MK}$;

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AX}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{ZR}$;

4) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{LS}$;

5) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{AZ}$;

6) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AY}$;

7) $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{KK}$;

8) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{CM}$;

9) $\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BX} + \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{ZM}$;

10) $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KX} + \overrightarrow{XK} = \overrightarrow{PH}$?

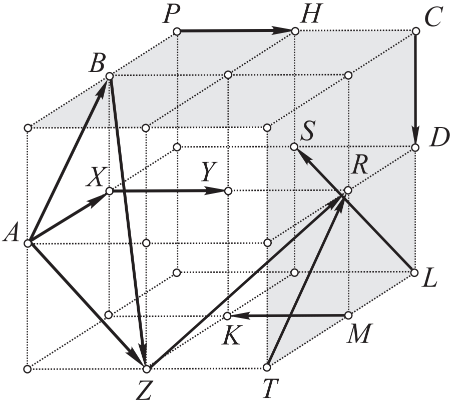


Рис. 185

83. а) Дан тетраэдр $PABC$, точка K — середина ребра BC. Постройте векторы: 1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{PC}$; 5) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AK}$; 6) $\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{AB}$.

б) Постройте разность двух векторов (см. рис. 185): 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PH}$; 3) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{MK}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BZ}$; 5) $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{YX}$; 6) $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{MK}$.

84. а) При каком значении n векторы $\vec{a}(1; n; n)$ и $\vec{b}(1; \sqrt{2}; n)$ имеют одну и ту же длину? Могут ли эти векторы оказаться равными? Всегда ли они равны?

б) Сравните длины векторов: 1) $\vec{a}(x; y; z)$ и $\vec{b}(-x; -y; -z)$; 2) $\vec{a}(x; y; z)$ и $\vec{b}(kx; ky; kz)$. Могут ли эти векторы оказаться равными?

85. Даны векторы $\vec{a}(2; 3; 4)$ и $\vec{b}(1; 5; 6)$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$: 1) $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{m}=\vec{b}+\vec{a}$; 3) $\vec{m}=\vec{a}-\vec{b}$; 4) $\vec{a}=\vec{m}+\vec{b}$; 5) $\vec{b}=\vec{a}+\vec{m}$; 6) $\vec{a}-\vec{m}=\vec{b}$.

86. а) Дан тетраэдр $PABC$. Докажите, что $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AC}$.

б) Дан параллелограмм $ABCD$, O — произвольная точка пространства. Докажете, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Справедливо ли аналогичное равенство в планиметрии?

в) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M и P принадлежат соответственно диагоналям A_1D и D_1C граней, причем $DM=\frac{1}{3}DA_1$ и $D_1P=\frac{1}{3}D_1C$. Отрезок MP спроектирован в направлении A_1A на плоскость AB_1C_1D в отрезок M_1P_1. Докажите, что $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{M_1P_1}$.

§ 15. Умножение вектора на число. Разложение вектора по базисным векторам

87. а) Даны векторы $\vec{a}(1; -2; 3)$ и $\vec{b}(0; 4; -5)$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если: 1) $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{m}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{m}=-2\vec{a}+(-3)\vec{b}$; 4) $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, где α и β — некоторые числа.

б) Пусть $\vec{b}=k\vec{a}$. Найдите k, если $\vec{a}(4; 2; 3)$, $\vec{b}(2; 1; 1,5)$.

в) Являются ли коллинеарными векторы: 1) $\vec{a}(1;\ 1;\ 1), \vec{b}(1;\ 1;\ 2)$; 2) $\vec{a}(1;\ 0;\ 1), \vec{b}(\sqrt{2};\ 0;\ \sqrt{2})$?

г) На координатной сетке постройте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координаты которых удовлетворяют равенству: 1) $\vec{b}=2\vec{a}$; 2) $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}$; 3) $\vec{b}=3\vec{a}$; 4) $\vec{b}=-3\vec{a}$; 5) $\vec{b}=-\frac{1}{3}\vec{a}$.

д) Даны векторы $\vec{a}\ (1;\ 2;\ 3)$ и $\vec{b}\ (0;\ 2;\ 2)$. На координатной сетке постройте вектор $\vec{c}$: 1) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}=(-1)\vec{a}$; 3) $\vec{c}=(-1)\vec{b}$; 4) $\vec{c}=(-1)\vec{a}+(-1)\vec{b}$; 5) $\vec{c}=0\vec{a}+2\vec{b}$.

88. а) Найдите координаты вектора: 1) $\pi\vec{a}+3\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$, если $\vec{a}\ (1;\ 2\pi;\ 0)$, $\vec{b}\left(\frac{3}{4};\ \frac{1}{3};\ 5\right)$, $\vec{c}\,(0;\ -\sqrt{3};\ 2)$; 2) $(-2)\vec{a}+(-3)\vec{b}+(-4)\vec{c}$, если $\vec{a}(2;\ 1;\ 0)$, $\vec{b}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{c}(-3;\ -2;\ -1)$.

б) Найдите длину вектора: 1) $2\vec{a}+(-\vec{b})+(-3)\vec{c}$, если $\vec{a}(3;\ 4;\ 5)$, $\vec{b}(0;\ 4;\ -5)$, $\vec{c}(\frac{1}{2};\ 0;\ 2)$; 2) $\vec{a}\ +(-3\vec{b})+4\vec{c}$, если $\vec{a}\,(1;\ 5;\ 6)$, $\vec{b}\,(0;\ 4;\ -3)$, $\vec{c}(\frac{1}{3};\ -\sqrt{2};\ 0)$.

в) Найдите x, y и z, если: 1) $2\vec{a}+(-3)\vec{b}=2\vec{c}$, $\vec{a}(x;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}(3;\ y;\ 4)$, $\vec{c}(5;\ 2;\ 2z)$; 2) $3\vec{a}+2\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{a}\ (1;\ y;\ 1)$, $\vec{b}\,(x;\ 0;\ 2)$, $\vec{c}\,(3;\ 1;\ z)$.

г) Найдите координаты вектора: 1) $\sqrt{2}\vec{a}+(-\sqrt{2})\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$, если $\vec{a}(\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 2)$, $\vec{b}(0;\ 1;\ -1)$, $\vec{c}(1;\ -1;\ 0)$; 2) $\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}$, если $\vec{a}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{6}{5};\ -\frac{6}{7};\ \frac{6}{11}\right)$, $\vec{c}(1;\ 0;\ 1)$.

д) Найдите длину вектора: 1) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\left(-\frac{2}{5}\right)\vec{c}$, если $\vec{a}\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{5}{6};\ -\frac{6}{7};\ \frac{7}{8}\right)$, $\vec{c}\left(\frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6}\right)$; 2) $(-2)\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}\ (5;\ 4;\ 3)$, $\vec{b}(3;\ 2;\ 1)$, $\vec{c}(1;\ 0;\ -1)$.

89. а) Постройте отрезок AB и точку M так, чтобы: 1) $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

б) Постройте сумму трех некомпланарных векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ по правилу параллелепипеда.

в) Постройте два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и вектор $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

90. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ векторы: 1) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$; 3) $\overrightarrow{AD_1}$; 4) $\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{AM}$, где M — середина отрезка A_1C_1; 6) $\overrightarrow{AN}$, где N — середина ребра D_1C_1; 7) $\overrightarrow{AP}$, где P — середина ребра B_1C_1; 8) $\overrightarrow{AT}$, где T — середина ребра A_1D_1.

91. а) Даны три точки $A(1; 0; 1)$, $B(3; 3; 0)$, $C(9; 12; -5)$. Являются ли коллинеарными векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$?

б) В условиях предыдущей задачи запишите уравнения прямой AB.

в) В условиях задачи 91, а проверьте, принадлежит ли точка C прямой AB.

92. а) Точка M делит отрезок AB в отношении $1 : 2$ считая от конца A. Докажите, что $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, где O — произвольная точка пространства.

б) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ некомпланарны.

93. а) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, O — середина диагонали AC_1. Разложите вектор $\overrightarrow{AO}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, M — делит диагональ AC_1 в отношении $1 : 2$ считая от вершины A. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

94. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, K — делит ребро CC_1 в отношении $2 : 3$ считая от вершины C. Разложите вектор $\overrightarrow{AK}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, P — точка, делящая ребро BC в отношении 1 : 4 считая от вершины B. Разложите вектор $\overrightarrow{AP}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

95. а) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, O — середина диагонали BD_1. Разложите вектор $\overrightarrow{BO}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, M — делит диагональ BD_1 в отношении 1 : 2 считая от вершины D_1. Разложите вектор $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

в) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, P — делит ребро DD_1 в отношении 2 : 5 считая от вершины D_1. Разложите вектор $\overrightarrow{BP}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.

96. Приведите примеры уравнений параллельных прямых. Постройте эти прямые на координатной сетке.

§ 16. Скалярное произведение двух векторов

97. а) В условиях задачи 90, а найдите скалярное произведение двух векторов (ребро куба положите равным 2): 1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AM}$; 3) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AP}$; 4) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AT}$; 5) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$; 6) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AC_1}$; 7) $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{AC}$; 8) $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$.

б) В условиях задачи 97, а выберите различные пары векторов. Постройте угол между этими векторами и найдите его меру.

98. а) $PABC$ — тетраэдр, все ребра которого равны a. Точки M, N, R, K — середины соответственно ребер PA, PB, AC, BC. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$; 4) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{AC}$; 5) $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{AN}$; 6) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KP}$.

б) Докажите формулу $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}$.

в) Перпендикулярны ли векторы: 1) $\vec{a}(3; 4; 5)$ и $\vec{b}(2; 1; 4)$; 2) $\vec{c}(3; 4; 5)$ и $\vec{d}(2; 6; -6)$?

99. а) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не коллинеарны и имеют одинаковую длину. Найдите скалярное произведение суммы и разности этих векторов.

б) Подберите координаты двух векторов так, чтобы их скалярное произведение равнялось: а) 6; б) –6; в) 0. Нарисуйте эти векторы на координатной сетке.

в) 1) Известно, что $\vec{a}(1;\sqrt{2};3)$, $\vec{b}(0;-1;2)$. Найдите $\vec{a}\vec{b}$; 2) Пусть $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(x;4;5)$, $\vec{a}\vec{b}=6$. Найдите x.

§ 17. Уравнения плоскости и сферы

100. а) Запишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к вектору $\vec{n}$ с координатами: 1) 3, 1 и 2; 2) –2, 1 и –1; 3) 0, 1 и 3; 4) 1, 0 и 2; 5) 3, 2 и 0; 6) –2; –3 и 1.

б) Запишите координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного к плоскости, имеющей уравнение: 1) $3x+2y-z=0$; 2) $\frac{1}{2}x-2y+z=0$;

3) $x-y-z=0$.

101. а) Запишите уравнение плоскости, проходящей через конец вектора $\overrightarrow{OM}$ и перпендикулярной к этому вектору, если вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты: 1) 1, 2 и 3; 2) –1, 2 и 3; 3) –1, –2 и 3; 4) –1, –2 и –3.

б) Проверьте, проходит ли плоскость $2x+3y+6z=6$ через точки $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$ и $C(0;0;1)$.

в) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки: 1) $R(0;0;0)$, $N(1;1;1)$, $M(0;1;2)$; 2) $P(3;0;0)$, $Q(0;2;0)$, $S(0;0;1)$.

г) Как расположены относительно начала координат плоскости: 1) $2x-y+z=0$; 2) $5x+6y-z=0$; 3) $3x-y+2z=5$?

102. а) Найдите координаты точек пересечения координатных осей с плоскостями: 1) $2x-y+z=0$, 2) $3x-y+2z=5$.

б) Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к вектору $\vec{n}$, если: 1) $M(1;-2;-3)$, $\vec{n}(2;3;4)$; 2) $M(-4;2;3)$, $\vec{n}(3;2;1)$; 3) $M(1;1;1)$, $\vec{n}(1;0;-1)$.

в) Плоскость задана уравнением $2x-3y+4z-5=0$. Укажите координаты шести точек, из которых три принадлежат плоскости, а три — не принадлежат этой плоскости.

г) Запишите уравнения двух плоскостей так, чтобы их нормальные векторы оказались коллинеарными.

д) Запишите уравнения двух плоскостей так, чтобы их нормальные векторы оказались перпендикулярными.

103. а) Найдите координаты центра сферы и ее радиус:
1) $x^2+y^2+z^2=16$; 2) $x^2+y^2+z^2=4$; 3) $x^2+(y-2)^2+z^2=9$;
4) $(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=81$.

б) Запишите уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом, равным: 1) 5; 2) 7; 3) 9; 4) $\sqrt{2}$.

в) Запишите уравнение сферы с радиусом, равным 7, и центром с координатами: 1) 3, 1 и 2; 2) 1, 2 и 3; 3) 3, 2 и 1; 4) –2, 1 и –3.

104. а) Запишите уравнение сферы с центром в начале координат и проходящей через точку с координатами 2, 3 и 1.

б) Составьте задачи, аналогичные задаче 104, а, и решите их.

в) Являются ли уравнения $x^2+y^2+z^2+2x=0$ и $x^2+y^2+z^2+6y-2z=3$ уравнениями сферы?

105. а) Являются ли уравнения: 1) $x^2+y^2+z^2-2x-2y+4=0$; 2) $x^2+y^2-z^2=1$; 3) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$ уравнениями сферы?

б) Найдите координаты точек пересечения сферы
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$ с координатными осями.

в) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, начало системы координат совпадает с вершиной B, ребра BA, BC и BB_1 расположены соответственно на положительных полуосях осей Ox, Oy и Oz. Запишите уравнение описанной сферы (сферы, которая проходит через все вершины куба).

106. Найдите геометрическое место точек пространства, отношение расстояний которых до точек $O(0; 0; 0)$ и $A(0; 3; 0)$ равно 2.

107. Даны три вектора $\overrightarrow{OA}\,(1; 1; 0)$, $\overrightarrow{OB}\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$ и $\overrightarrow{OC}\,(2; 3; 1)$. Принадлежат ли точки O, A, B и C одной плоскости?

108. а) На плоскости ABC найдите точку M такую, что

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

б) $PABC$ — тетраэдр. Найдите точку M такую, что

$$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

в) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите точку M такую, что

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MD_1}=\vec{0}.$$

109. В вершине куба, ребро которого равно 1, приложены три силы величиной 1 Н, 2 Н, 3 Н и направленные соответственно по диагоналям граней куба. Найдите величину равнодействующей.

110. а) Докажите, что точка P принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB},$$

где векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — неколлинеарные.

б) Докажите, что точка P принадлежит плоскости ABC тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+(1-m-n)\overrightarrow{OC},$$

где векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ некомпланарные.

в) *Радиус-векторами* называются векторы, выходящие из одной точки (векторы с общим началом). Пусть радиус-векторы вершин треугольника ABC есть векторы $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и радиус-вектор этой точки $\vec{r}=\frac{1}{3}(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3)$.

г) Под *медианой тетраэдра* будем понимать отрезок, который соединяет вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани.

Пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ и $\vec{r}_4$ — радиус-векторы вершин P, A, B и C данного тетраэдра. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой *центроидом тетраэдра*, и радиус-вектор этой точки $\vec{r}=\frac{1}{4}(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3+\vec{r}_4)$.

д) Через середины противоположных ребер тетраэдра проведены прямые. Докажите, что они проходят через центроид тетраэдра.

111. а) Каждое ребро тетраэдра равно a. Найдите длину отрезка, соединяющего вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани.

б) Каждое ребро тетраэдра равно a. Докажите, что его противоположные ребра перпендикулярны.

в) Каждое ребро тетраэдра $PABC$ равно a, M — центроид грани ABC. Докажите, что медиана PM тетраэдра и ребро BC перпендикулярны.

г) Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — ромбы со стороной a и острым углом, равным $60°$. Углы при вершине B острые. Найдите длину диагонали BD_1 и косинус угла между прямыми D_1B и D_1D.

д) Докажите, что сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

112. а) Точки $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$ и $C(1; 2; 0)$ являются тремя последовательными вершинами параллелограмма. Найдите координаты четвертой его вершины и угол между диагоналями.

б) Найдите длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}\,(0; -4; 3)$ и $\vec{b}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

в) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}(2; 2; -1)$ и $\vec{b}(3; -1; 1)$ и образует с осью Oz тупой угол. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, зная, что $|\vec{c}|=\sqrt{30}$.

г) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол в $30°$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 10$. Найдите $|\vec{a}+\vec{b}|$.

д) Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}(0; -1; 2)$ и $\vec{b}(2; 1; 2)$.

е) Даны вершины треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$. Найдите его внутренний угол при вершине B.

РЕШЕНИЯ, ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

2. б) При формулировании определения должно быть сказано, что речь идет о двух прямых. в) Точки этой кривой, как и точки окружности, равноудалены от одной и той же точки — центра сферы. Эта кривая может не лежать в одной плоскости. Окружность же — плоская кривая.

3. а) Независимо от рисунка плоскость надо представлять неограниченной фигурой. Поэтому прямая a принадлежит плоскости α. в) Из планиметрии известно, что существует бесконечное множество точек. Все эти точки в планиметрии принадлежат одной плоскости. Аксиома 4 утверждает новый геометрический факт — существование точек, не принадлежащих одной плоскости. Эта аксиома позволяет перейти от двухмерной плоскости к трехмерному пространству.

4. а) Три точки всегда лежат в одной плоскости. Центры Земли, Луны и Солнца могут находиться на одной прямой в момент солнечного или лунного затмения.

5. а) Принадлежит. в) Принадлежит. д) Указанные плоскости совпадают в силу единственности плоскости, проходящей через три не лежащие на одной прямой точки.

6. г) Для совпадения двух плоскостей достаточно установить наличие трех общих точек, которые не лежат на одной прямой. Доказать, что две плоскости не совпадают (различны), можно методом от противного.

8. а) В основе данного практического приема лежит тот факт, что через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость. в) Учтите, что множество всех прямых, пересекающих две данные различные параллельные прямые, образует плоскость.

9. а) Вначале нужно провести искомую плоскость. б) Не всегда. Если три прямые имеют общую точку пересечения, то возможно, что они не лежат в одной плоскости. Выполните рисунок. в) Прямые AB и CD должны пересекаться или быть параллельными. г) 1) Секущая плоскость пересекает грани PBC и ABC по ребру BC. Осталось выяснить, как пересекает секущая плоскость грани PAC и PAB. Для этого ищите общие точки у секущей плоскости и у граней тетраэдра. 2) Рассмотрите треугольник DCB, проведите его высоту DM; ΔDMC — прямоугольный. Чтобы найти DM, достаточно найти DC. Отрезок DC можно найти из треугольника DAC по теореме Пифагора. Нужен не сам отрезок DC, а его квадрат $DC^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$. Тогда высота $DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

10. а) 1) Учтите, что если плоскость пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.

11. а) Некоторые из этих точек найдите подбором. б) Начните с середины ребра BC.

13. а) Оси колесных пар железнодорожного вагона параллельны между собой. Ось и рельс расположены на скрещивающихся прямых. в) Точку пересечения прямой и плоскости стройте как точку пересечения двух прямых (каких?). г) Чтобы установить, например, что две прямые — скрещивающиеся, достаточно указать плоскость, содержащую одну из этих прямых и пересекающую другую. д) Рассмотрите два случая: $A \notin a$ и $A \in a$. е) Выясните, каким образом располагаются данные прямые относительно друг друга. ж) Прямая c может пересекать прямые a и b, быть параллельной им; возможно также, что $c \dotminus a$ и $c \dotminus b$. Выполните рисунки.

14. а) Выполните рисунки. б) Проведите диагонали косого четырехугольника. в) Это утверждение не является верным. Приведите пример, когда плоскость пересекает одну из скрещивающихся прямых, но не пересекает (например, содержит) другую.

15. Возможны два случая: данные отрезки лежат по одну сторону от данной плоскости; они лежат по разные стороны от этой плоскости. В каждом случае необходимо вначале построить точку E. Постройте ее и проведите соответствующие вычисления.

17. Для построения угла между двумя скрещивающимися прямыми достаточно через точку одной из них провести прямую, параллельную другой.

18. Выясним, равносильны ли утверждения 1 и 2. Для этого надо проверить, истинны ли утверждения $1 \Rightarrow 2$ и $2 \Rightarrow 1$. Проверяем истинность первого. Пусть $AB \dot{-} CD$. Будет ли $AC \dot{-} BD$? Допустим, что AC и BD не являются скрещивающимися прямыми. Тогда они принадлежат некоторой плоскости. Если этой плоскости принадлежат точки A, B, C и D, то ей принадлежат и прямые AB и CD. Но этого быть не может по условию $AB \dot{-} CD$. Следовательно, если $AB \dot{-} CD$, то $AC \dot{-} BO$. Аналогично доказывается обратное предложение. Следовательно, утверждения 1 и 2 равносильны.

19. Вначале постройте эти углы. Для этого через точку B проведите прямую, параллельную AC, а через точку C — прямую, параллельную AB. Пусть K — точка пересечения этих прямых. Рассмотрите треугольники PBK и PCK.

20. а) 1) План решения первой задачи может быть таким: найти стороны треугольника PAO; зная стороны этого треугольника, по теореме косинусов можно найти $\cos \angle PAO$. Осуществите этот план. При решении других задач данной серии также рекомендуется вначале устно составить план. б) 3) Чтобы найти угол PMK, надо учесть, что: KM — медиана треугольника AKP; треугольник AKP — равнобедренный ($KA = KP$). Далее следует воспользоваться свойством медианы равнобедренного треугольника; 4) Примените теорему косинусов к треугольнику BMC; 7) Сравните косинусы этих углов. в) 1) Решение задачи можно провести по такому плану: найти стороны PA и AO треугольника PAO; найти косинус угла PAA_1 из треугольника PAA_1; вычислить PO, применяя теорему косинусов к треугольнику PAO.

21. а) 1) a; 2) $\angle POA = \angle POB = \angle POC = \angle POD = 90°$;
3) $PA = PB = PC = PD = a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; 4) $\cos \angle PAO = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 5) $\cos \angle PAD = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
б) 3) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. в) 2) $60°$. д) $a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

22. а) 1) В плоскости PAB через точку M проводим прямую, параллельную AB. Эта прямая будет искомой. Точка пересечения ее с плоскостью PBC находится как точка пересечения проведенной прямой с ребром PB. Аналогично задача решается в остальных случаях. б) Отрезок. в) Каждый раз необходимо вначале указать, в какой плоскости проводится искомая прямая.

23. а) Таких плоскостей можно провести бесконечное множество. Одной из искомых плоскостей является плоскость PAB. Она проходит через точку M и параллельна AB. В плоскости PAB через точку M проведите прямую, параллельную AB. Если теперь через построенную прямую провести какую-либо плоскость, то она будет параллельна AB. б) Искомая плоскость — единственная.

25. а) 1) Через точку A и прямую a нужно провести плоскость. В этой плоскости через точку A провести прямую, параллельную a. Если теперь через построенную прямую провести произвольную плоскость, то она будет параллельна данной прямой. Таких плоскостей можно провести бесконечное множество. 2) Надо провести прямые, параллельные соответственно двум данным пересекающимся прямым. Но вначале надо построить плоскости, в которых бы эти прямые можно было провести. б) См. решение задачи 25, а. в) Решается, как и задача 25, б. г) Через точку A проведите прямую, параллельную прямой a. Любая плоскость, проходящая через построенную прямую, будет параллельна данным прямым. Для построения указанной прямой надо вначале построить плоскость, в которой эту прямую можно провести. д) Параллельно друг другу.

26. а) Искомой плоскостью будет плоскость BDC_1.

29. а) Два куба. б) Прямая CB перпендикулярна к плоскости ACK.

31. а) Прямые, проходящие через точки O и P и середины сторон квадрата, будут перпендикулярны к прямым AB, BC, CD и DA. б) Ответ такой же, как и в предыдущей задаче. в) В этом случае треугольник, образованный двумя сторонами ромба и его диагональю, — равносторонний. Нетрудно провести высоты этого треугольника. Тогда перпендикуляр к стороне ромба, проходящий через точку O, можно провести параллельно указанным высотам. Можно найти также отношение, в котором основание перпендикуляра делит сторону ромба. Перпендикуляр, проходящий через точку P, строится, как и в предыдущих задачах. г) Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $AD = 8$, $\angle A = 60°$. Попытаемся построить какой-либо перпендикуляр к стороне AB (проходящий пока не через точку O). Опустим такой перпендикуляр из точки D. Получим прямоугольный треугольник с углом в 30° при вершине D. Тогда катет, противолежащий этому углу, будет равен $8 : 2 = 4$, т. е. стороне AB. Это означает, что диагональ BD перпендикулярна к стороне AB. Поэтому $OB \perp AB$ и $OD \perp DC$. Чтобы провести перпендикуляр через точку O к сторонам AD и BC, проведите вначале перпендикуляр к этим сторонам через вершину B. Перпендикуляры из точки P проводятся так же, как и в предыдущих задачах. д) Легче всего построить вначале прямые, проходящие через точку O перпендикулярно к основаниям трапеции и боковой стороне, лежащей на стороне прямого угла. Несколько сложнее построить перпендикуляр к другой боковой стороне. Рассмотрите равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является данная боковая сторона трапеции. Проведите перпендикуляр к гипотенузе из вершины прямого угла. После этого можно заметить, что диагональ трапеции перпендикулярна к данной боковой стороне. Перпендикуляры, проходящие через точку P, строятся аналогично; е) Перпендикуляры, проведенные через точку O к основаниям равнобедренной трапеции, проходят через их середины. Проведите перпендикуляр из точки O к боковой стороне трапеции. Выясните, в каком отношении его основание делит боковую сторону. Для этого рассмотрите прямоугольный треугольник, образованный боковой стороной и отрезками диагоналей. Острые углы этого треугольника равны 30° и 60°. Проведенный перпендикуляр в этом треугольнике является высотой. Положив боковую сторону равной x, можно установить, что высота отсекает от боковой стороны (гипотенузы) отрезок, равный $\frac{x}{4}$. Этого достаточно для построения искомого перпендикуляра. Перпендикуляр к другой боковой стороне строится аналогично. После этого нетрудно провести перпендикуляры через точку P. ж) Перпендикуляр, проведенный из точки A к стороне BC, пройдет через ее середину. Прямая, проходящая через вершину A и перпендикулярная к стороне AC, будет параллельна медиане, проведенной из вершины B. Этим можно воспользоваться при построении искомого перпендикуляра. Аналогично проводится прямая, проходящая через точку A перпендикулярно к стороне AB. После этого проводятся перпендикуляры через точку P.

32. а) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, $\frac{a\sqrt{5}}{2}$, a. в) Расстояния до двух вершин ромба равны $\frac{\sqrt{4H^2+a^2}}{2}$; до двух других вершин равны $\frac{\sqrt{4H^2+3a^2}}{2}$. Расстояния до прямых, содержащих стороны, равны $\frac{\sqrt{16H^2+3a^2}}{4}$. Расстояния до прямых, содержащих диагонали, равны H. д) Расстояния до вершин равны H и $\sqrt{H^2+a^2}$; расстояния до прямых, содержащих стороны, равны H и $\frac{\sqrt{4H^2+3a^2}}{2}$. е) Расстояния до вершин равны H и $\frac{\sqrt{2H^2+c^2}}{2}$. Расстояния до прямых, содержащих стороны, равны H и $\frac{\sqrt{4H^2+3c^2}}{2}$.

33. а) Квадрат стороны PA равен сумме квадратов сторон PC и CA. Значит, на основании теоремы, обратной теореме Пифагора, $\angle PCA$ — прямой. Аналогично устанавливается, что $\angle PCB$ тоже прямой. Если сторона PC перпендикулярна к сторонам CB и CA, то она перпендикулярна и к плоскости CAB. Следовательно, PC — искомый перпендикуляр к плоскости CAB. Данное $AB = 5$ — лишнее. б) Пусть M — середина стороны BC. Тогда $PM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. На основании теоремы, обратной теореме Пифагора, угол PMA — прямой. Так как сторона PM перпендикулярна к сторонам BC и AM, то она перпендикулярна и к плоскости ABC. Следовательно, PM — искомый перпендикуляр. Все данные задачи использовались при решении. Лишних данных нет.

34. а) Рассмотрите три прямоугольных треугольника. С их помощью можно получить формулу Эйлера: $\cos\varphi = \cos\beta\cos\gamma$. б) 45°.

35. а) Воспользуйтесь теоремой косинусов, применив ее один раз к треугольнику PAB, другой раз — к треугольнику OAB: $AB^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\varphi$, $AB^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\beta$, где a — длины наклонных PA и PB, а b — длины их проекций OA и OB. Тогда $a^2(1 - \cos\varphi) = b^2(1 - \cos\beta)$, $\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\beta} = \frac{b^2}{a^2} < 1$, $1 - \cos\varphi < 1 - \cos\beta$, $\cos\varphi > \cos\beta$, $\varphi < \beta$. Решение показывает, что задание угла γ — лишнее. б) Как и при решении задачи

35, а, имеем: $\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\beta}=\frac{b^2}{a^2}=\sin^2\gamma$, $1-\cos\varphi=\sin^2\gamma-\sin^2\gamma\cos\beta$, $\cos\varphi=1-\sin^2\gamma+\sin^2\gamma\cos\beta$, $\cos\varphi=\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\cos\beta$. Отсюда $\cos\beta=\frac{\cos\varphi-\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}$. в) $-\frac{1}{3}$.

36. а) Примените теоремы косинусов дважды: вначале к треугольнику PAB, затем — к треугольнику OAB. Запишите равенство двух выражений для стороны AB.

37. а) Прямая a перпендикулярна к плоскости α и пересекает ее в точке A, а прямая b параллельна этой плоскости. Для обоснования ответа через точку A проведите прямую, параллельную прямой b. б) См. доказательство теоремы 10.3. в) Выполните построение такое, как и при решении задачи 37, а.

38. а) Рассмотрите середины ребер куба. Воспользуйтесь тем, что если концы отрезка равноудалены от двух точек, то каждая точка этого отрезка равноудалена от этих точек.

39. а) PO — искомый перпендикуляр к плоскости α (O — точка пересечения диагоналей ромба). г) 1) Вначале проведите перпендикуляры из точки O к сторонам трапеции. Воспользуйтесь тем, что $\angle ABO=90°$.

40. б) Можно допустить, что указанными условиями вершина P однозначно не определяется. Пусть существует еще вершина P_1, лежащая с P по одну сторону от плоскости основания ABC, обладающая такими же свойствами: $P_1A=a$, $P_1B=b$, $P_1C=c$. Пусть O — середина отрезка PP_1. Докажите, что прямые OA, OB и OC перпендикулярны к прямой PP_1 и, следовательно, лежат в одной плоскости ABC (см. задачу 40, а), перпендикулярной к отрезку PP_1 и проходящей через его середину. Это значит, что точки P и P_1 лежат по разные стороны от плоскости ABC. Получили противоречие: по выбору этих точек они лежат по одну сторону от плоскости ABC. Следовательно, точки P и P_1 совпадают.

41. а) Воспользуйтесь методом от противного. б) Воспользуйтесь теоремой 14.3. в) Установите связь данной задачи с предыдущей. г) Нельзя ли воспользоваться предыдущей задачей? е) Если плоскости не совпадают, то прямые либо параллельные, либо скрещивающиеся. ж) Нельзя.

42. а) Необходимо учесть, что данная и секущая плоскости пересекают плоскости граней по параллельным прямым.

43. б) 1) 7 см; 2) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ см, $\frac{2\sqrt{10}}{7}$ см. в) $\sqrt{a^2+b^2}$. г) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$. д) $\frac{a}{2}$. е) Можно.

46. в) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. г) $2b, b\sqrt{3}, b\sqrt{3}$.

47. а) $H\sqrt{6}$. б) 90°. в) 30°.

49. в) Сколько угодно.

51. а) Справедлив. б) Искомое расстояние равно половине диагонали грани. в) 4.

52. а) Через точку C проведите прямую, параллельную b, а через точку B — прямую, параллельную CD. Пусть M — точка пересечения построенных прямых. Рассмотрите ΔMCA. б) $\sqrt{m^2-4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ либо $\sqrt{m^2-4l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, в зависимости от взаимного расположения точек A и B на прямых a и b.

53. а) $2a$. б) 4. в) $\frac{1}{2}$. г) $\sqrt{23}$.

54. а) Можно. б) Допустим, что такое сечение возможно. Пусть $PABC$ — данный трехгранный угол, $\angle APB = \angle APC = 90°$, $\angle BPC = 120°$ и треугольник ABC равносторонний. Положим $PA = a$, $PB = b$. Так как треугольники APB и APC равны по катету и гипотенузе, то $PC = b$. Тогда $AB^2 = a^2 + b^2$, $AC^2 = a^2 + b^2$. По теореме косинусов, применяя ее к треугольнику PBC, находим $BC = b\sqrt{3}$. Положим, что $a^2 + b^2 = 3b^2$. Отсюда $a = b\sqrt{2}$. Итак, если b задать произвольно, а a положить равным $b\sqrt{2}$, то $AB = AC = BC = b\sqrt{3}$. Следовательно, требуемое сечение возможно и ввиду произвола выбора b таких сечений можно провести сколько угодно. в) Нельзя. Обратим внимание на очевидное: секущая плоскость должна пересекать все три ребра данного трехгранного угла. Рассуждая точно так же, как и при решении задачи 54, в, получим, что равенство сторон AB, BC и AC возможно при условии: $a = 0$. Это означает, что точка A совпадает с точкой P, а плоскость ABC — с плоскостью PBC. Такая плоскость не пересекает ребра PB и PC. Поэтому и получим отрицательный ответ.

55. а) Можно. Заметим, что секущая плоскость должна быть параллельна прямым, по которым пересекаются плоскости противоположных граней данного четырехгранного угла. Пусть H — точка пересечения прямых BC и AD, M — точка пересечения прямых AB и DC. Тогда PH и PM — как раз те прямые, которым должна быть параллельна секущая плоскость. Искомое сечение после этого получается как сечение данного четырехгранного угла плоскостью, проходящей, например, через точку A параллельно плоскости PHM. Выполните эти построения. б) Доказательства прямого и обратного утверждений можно провести с помощью обобщенной формулы Эйлера. в) Воспользуйтесь обобщенной формулы Эйлера.

56. а) Луч, являющийся биссектрисой трехгранного угла. б) Луч, который получается при пересечении плоскостей, перпендикулярных к плоскостям граней и проходящих через биссектрисы плоских углов.

57. а) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. б) 60°. в) 90°. г) 45°.

59. а) Пусть плоскость, проходящая через точку A и прямую a, пересекает плоскость α по прямой b. Прямые a и b — параллельны. Задача свелась к планиметрической: через точку A необходимо провести прямую, пересекающую прямые a и b так, чтобы прямыми a и b на искомой прямой отсекался отрезок заданной длины m. Проведите исследование решения задачи. б) Рассмотрите плоскость, проходящую через прямую a и точку O, и прямую, по которой эта плоскость пересекается с данной плоскостью α. в) Вначале постройте биссектрису линейного угла данного двугранного угла. г) Постройте плоскость, перпендикулярную к данной и проходящую через точки A и B. Рассмотрите прямую, по которой построенная плоскость пересекается с данной.

60. а—д. Начните с допущения, что искомая фигура (точка, прямая, треугольник и т. д.) построена. Постарайтесь заметить необходимые свойства этой фигуры, которыми можно было бы воспользоваться при ее построении.

61. а) Постройте вначале изображение высоты этого треугольника, проведенной из вершины A. б) Обратитесь к оригиналу, т. е. к ромбу, построенному без искажения. Подумайте, какие свойства оригинала можно перенести на его проекцию. в) Постройте вначале изображение перпендикуляра к прямой BC.

62. б) Обратитесь к оригиналу. в) Воспользуйтесь результатом задачи 62, б. г) Постройте изображение одного из диаметров эллипса и его середину. д) Постройте два сопряженных диаметра эллипса.

63. а) См. решение задачи 61, в. в) Обратитесь к оригиналу. Рассмотрите диаметр окружности, проведенной через одну из вершин равностороннего треугольника. Выясните, на какие части делит сторона треугольника радиус, лежащий на этом диаметре. Воспользуйтесь этим при построении изображения. г) Постройте изображения трех точек касания окружности сторон данного треугольника и трех точек пересечения окружности с медианами треугольника. Обратитесь к оригиналу. Найдите свойства оригинала, переносимые на изображение. д) При построении изображения окружности достаточно построить изображение ее центра и трех точек касания.

65. а) Установите, что плоскость сечения делит боковое ребро, к которому она перпендикулярна, в отношении $1:17$. б) $\frac{a^2\sqrt{26}}{12}$. в) Воспользуйтесь тем, что вершина правильной пирамиды ортогонально проектируется в центр основания. г) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

67. а) 1) Первые две координаты могут принимать любые значения, третья координата равна 0; 4) в этом случае точка лежит на оси абсцисс. Первая ее координата может принимать любые значения, вторая и третья координаты равны 0. б) Выполните рисунок.

68. а) Первые две координаты могут принимать любые значения, третья — всегда равна 9.

69. а) $M_1(3; \sqrt{11}; 4)$, $M_2(3; -\sqrt{11}; 4)$. б) $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $M_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $M_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $M_5\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $M_6\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $M_7\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $M_8\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}; -\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$. в) $M\left(0; 0; \frac{11}{4}\right)$. г) 1)—3) Точки T не существует.

71. а) 1) $B(-1; 6; 6)$. б) $A(-1; -1; -3)$.

72. б) Сумма произведений одноименных координат этих векторов равна 0. Векторы перпендикулярны друг к другу.

73. а) Можно.

74. а) Учтите, что точка O — начало координат и имеет все три нулевые координаты. Какое уравнение можно записать?

75. а) $\frac{x-5}{-5}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{3}$.

76. а) 1) Если $x=y=z=0$, то данные уравнения обратятся в верные числовые равенства. Значит, данная прямая проходит через начало координат. б) Например, через точку с координатами 13, 24 и 16. Эти координаты получаются, если данные отношения приравнять к 5.

77. а) Найдите координаты двух точек этой прямой, по координатам постройте точки и прямую, проходящую через эти точки. б) 1) Чтобы найти координаты точки пересечения прямой с плоскостью xOy, нужно положить $z = 0$. Тогда $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{2}=-\frac{1}{2}$. Отсюда найдите первые две координаты точки пересечения.

78. а) Обе прямые проходят через точку с координатами 0, 0 и 1. б) См. ответ к задаче 78, а.

86. а) Воспользуйтесь следующими преобразованиями: $(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AC})\Leftrightarrow(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{AP})\Leftrightarrow\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CP}$. б) Воспользуйтесь следующими преобразованиями: $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. в) Докажите, что $MM_1 = PP_1$, или установите, что $MP \parallel AB_1C_1D$. г) Установите, что $MP \parallel AB_1C_1D$.

91. а) Сравните координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$. в) $C \notin AB$.

92. б) Данные векторы некомпланарны, так как прямые AC_1 и B_1D лежат в плоскости AB_1C_1D, а прямая AA_1 пересекает эту плоскость.

93. а) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. б) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$.

94. а) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AA_1}$. б) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}+0\cdot\overrightarrow{AA_1}$.

95. а) $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$. б) $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}$. в) $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\frac{5}{7}\overrightarrow{BB_1}$.

97. а) 1) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos 45°=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4.$

98. а) 7) $\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{MR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PC}=$ $=-\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{PC}\right|^2=-\frac{1}{4}a^2$. б) Сумму $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ записать в виде $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. в) 1) Нет.

99. а) Сумма и разность этих векторов являются векторами-диагоналями ромба. А так как диагонали ромба перпендикулярны, то скалярное произведение суммы и разности векторов AB и AC равно 0.

100. а) 1) $3x+y+2z=0$. б) 1) 3, 2 и -1.

101. а) 1) Так как 1, 2 и 3 — координаты вектора, перпендикулярного к плоскости, и плоскость не проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид $x+2y+3z+D=0$. Учтем еще, что данная плоскость проходит через точку $M(1; 2; 3)$. Поэтому $1+4+9+D=0$. Отсюда $D=-14$. Получаем искомое уравнение: $x+2y-3z-14=0$. б) Проходит. в) 1) Так как плоскость проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид $Ax+By+Cz=0$. Учтем, что плоскость проходит еще через две другие точки. Тогда $A+B+C=0$, $B+2C=0$. Отсюда $B=-2C$, $C=A$. Поэтому $Ax-2Ay+Az=0$. Получаем искомое уравнение: $x-2y+z=0$. г) Во всех случаях они проходят через начало координат.

103. а) 4) Координаты центра сферы 2, -1, 0. Радиус сферы равен 9.

104. в) Первое уравнение можно записать в виде $(x+1)^2+y^2+z^2=1$. Оно является уравнением сферы, центр которой имеет координаты -1, 0 и 0, а радиус равен 1.

106. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка искомого геометрического места точек. Какое уравнение, связывающее координаты x, y и z, можно записать? Переписав равенство $MO=2MA$ в координатах, получим: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{x^2+(y-3)^2+z^2}$. Отсюда $3x^2+3y^2+$

$+ 3z^2 - 24y + 36 = 0$. Разделим обе части этого уравнения на 3 и выделим полный квадрат. Получим уравнение $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 4$. Оно является уравнением сферы с центром $(0; 4; 0)$ и радиусом, равным 2.

107. Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Убедитесь, что вектор c можно представить в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Для нахождения α и β составим уравнения: $\begin{cases} 2 = \alpha + \frac{1}{2}\beta, \\ 3 = \alpha + \beta, \\ 1 = 0 + \frac{1}{2}\beta. \end{cases}$ Отсюда $\beta = 2, \alpha = 1$. Следовательно, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ — компланарны, а поэтому точки O, A, B и C принадлежат одной плоскости.

108. а) Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. С помощью данного равенства можно получить следующие: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $3\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$. Это означает, что M — центроид треугольника ABC.

109. Примите данную вершину за начало координат, а исходящие из нее ребра пусть задают оси координат. Будем считать, что сила $\vec{F}_1$, равная 1 Н, лежит, например, в плоскости xOy. Тогда ее координаты равны $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ и 0. Найдите координаты двух других сил и координаты суммы всех трех сил. После этого можно найти величину равнодействующей. Она равна 5 Н.

110. а) Необходимость. Пусть точки A, B и P лежат на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны и можно записать $\overrightarrow{AP} = (1-m)\,\overrightarrow{AB}$. Выполнив последовательно несложные преобразования, можно получить $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BA} = m\,\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = m\,\overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=m\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{BO}$. Отсюда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$. Наконец, $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$. Достаточность докажите самостоятельно. б) См. решение задачи 110, а. в) Обозначим середины сторон BC, CA, AB соответственно через A_1, B_1, C_1. Радиус-вектор точки A_1 равен: $\vec{r}\,'=\frac{1}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_3)$. Тогда уравнение прямой AA_1, в соответствии с задачей 110, а, будет иметь вид: $\vec{r}=m\vec{r}_1+\frac{1-m}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_3)$. Точно так же запишем уравнение прямой BB_1: $\vec{r}=n\vec{r}_2+\frac{1-n}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_3)$. Для нахождения общей точки прямых AA_1 и BB_1 надо приравнять правые части последних двух равенств: $m\vec{r}_1+\frac{1-m}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_3)=n\vec{r}_2+\frac{1-n}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_3)$. Последнее равенство будет выполняться, если будут равны коэффициенты при $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_3$ в обеих частях этого равенства: $m=\frac{1-n}{2}$, $\frac{1-m}{2}=n$, $\frac{1-m}{2}=\frac{1-n}{2}$. Отсюда $m=n=\frac{1}{3}$. Таким образом, искомая точка M пересечения медиан имеет радиус-вектор: $\vec{r}=\frac{1}{3}(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3)$. Если бы мы начали находить точку пересечения медиан BB_1 и CC_1, то получили бы тот же результат. Значит, третья медиана проходит через ту же точку M. д) Пусть A_1, C_1, B_1 и D_1 — середины соответственно ребер AB, DC, BC и AD. Тогда радиус-векторы точек A_1, B_1, C_1 и D_1 запишутся так: $\vec{r}_{A_1}=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)$, $\vec{r}_{C_1}=\frac{1}{2}(\vec{r}_3+\vec{r}_4)$, $\vec{r}_{B_1}=\frac{1}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_3)$, $\vec{r}_{D_1}=\frac{1}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_4)$, где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ и $\vec{r}_4$ — радиус-векторы соответственно вершин A, B, C и D данного тетраэдра. Запишите теперь векторные уравнения прямых A_1C_1 и B_1D_1: $\vec{r}=\frac{m}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)+\frac{1-m}{2}(\vec{r}_3+\vec{r}_4)$, $\vec{r}=\frac{n}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_3)+\frac{1-n}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_4)$. Приравняв правые части двух последних равенств, можно получить: $\frac{m}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)+\frac{1-m}{2}(\vec{r}_3+\vec{r}_4)=\frac{n}{2}(\vec{r}_2+\vec{r}_3)+\frac{1-n}{2}(\vec{r}_1+\vec{r}_4)$, $m=n=\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что прямые A_1C_1 и B_1D_1 проходят через точку M, радиус-вектор которой $\vec{r}_M=\frac{1}{4}(\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3+\vec{r}_4)$, т. е. через центроид тетраэдра.

111. а) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Воспользуйтесь скалярным квадратом вектора, соединяющего вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани. б) Докажите, например, что $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{BC}$ перпендикулярны. Для этого рассмотрите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{PA}$ и $\overrightarrow{BC}$. Замените вектор $\overrightarrow{BC}$ разностью $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$. в) Убедитесь, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{BC}$ равно нулю. г) Представьте вектор $\overrightarrow{BD_1}$ как сумму векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. Найдите скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{BD_1}$. В итоге получите, что $BD_1 = a\sqrt{6}$. Для нахождения косинуса угла между прямыми D_1B и D_1D нужно найти скалярное произведение этих векторов. Зная его и длины векторов, найдите косинус искомого угла. Он равен $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

112. г) Постройте параллелограмм. д) Найдите координаты указанных векторов и их скалярное произведение.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рогановский Николай Максимович
Рогановская Елена Николаевна
Тавгень Олег Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. 10 КЛАСС

Многообразие идей и методов

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений
с белорусским и русским языками обучения

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 20.12.2010. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 8,20. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0494066 от 03.02.2009. Контактный телефон (017) 210-18-98.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Ул. М. Богдановича, 129а, 220123, Минск.
Для писем: а/я 135, 220123, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.