Национальный институт образования

Факультативные занятия

К. О. Ананченко, А. И. Караневская

Алгебра учит рассуждать

9 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание

Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721
А64

Серия основана в 2010 году

Ананченко, К. О.
А64 Алгебра учит рассуждать. 9 класс : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / К. О. Ананченко, А. И. Караневская. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 190 с. : ил. — (Факультативные занятия).
ISBN 978-985-19-0427-9.

Пособие содержит теоретический материал и практические задания, решение которых предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем при изучении основного курса алгебры.

Предназначено учащимся 9 классов для использования на факультативных занятиях в соответствии с учебной программой.

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Ананченко Константин Онуфриевич
Караневская Анна Ивановна

АЛГЕБРА УЧИТ РАССУЖДАТЬ. 9 КЛАСС

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 12.09.2012. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 5,96. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

ISBN 978-985-19-0427-9

Предисловие

Уважаемые ученики! Вы изучаете факультативный курс математики, который предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем на уроках математики 9-го класса.

Важное место в процессе изучения факультативного курса будет занимать *самостоятельная математическая деятельность*.

Учебное пособие составлено по модульной программе, которая позволяет приобрести определенный опыт самостоятельной учебной деятельности, самоопределиться и оценить свои возможности овладения учебным материалом. Программа состоит из четырех модулей, охватывающих в комплексе все аспекты содержания факультативных занятий по алгебре. Учебный модуль включает законченный блок информации, целевую программу действий и методическое руководство по ее реализации.

Каждый модуль разбит на учебные элементы. Их число определяется содержанием, объемом материала учебного модуля и логикой изложения.

В предлагаемой модульной программе каждый учебный элемент включает целевую установку, теоретическую и практическую части.

Цель формулируется для каждого учебного элемента.

Теоретическая часть, как правило, содержит учебный материал, с которым вы познакомились на уроке, поэтому он представлен кратко: в виде логических схем или некоторых теоретических фактов, которые иллюстрируются примерами.

В этой части модульной программы, как правило, представлено достаточное количество решенных алгебраических задач, которые могут служить примерным оформлением решения задач в самостоятельных и контрольных (экзаменационных) работах.

Практическая часть. Здесь предлагаются различные по сложности задачи, решение которых поможет вам углубить и расширить, привести в систему и скорректировать свои знания материала, изученного на уроках математики.

В каждом учебном элементе есть рубрика «Ваш помощник». В ней имеются ответы к некоторым заданиям, краткие указания или полное решение, в противном случае (т. е. если они отсутствуют) — учитесь самоконтролю, обращайтесь за помощью к товарищу, за консультацией к учителю.

Каждый модуль завершается рубрикой «Математическая мозаика». В ней вы найдете исторические сведения, интересные факты, связанные с математикой, софизмы, шутки.

Технология модульного обучения позволяет кардинально поменять вашу роль и роль учителя в учебном процессе. Вы учитесь самостоятельно (или с некоторой помощью), а учитель организует, координирует, консультирует, контролирует вашу учебную деятельность.

Учебное пособие будет полезно при повторении теоретического материала курса алгебры 9-го класса, решении стандартных и нестандартных задач, подготовке к профессиональной деятельности, требующей высокой математической культуры.

Желаем успехов!

Модуль 1 ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

УЭ-1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК»

Цель: знать определения линейной функции; уметь строить ее график; знать свойства линейной функции, уметь применять их при решении других задач.

Теоретическая часть

Понятие линейной функции. Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — любые действительные числа, называют **линейной**.

Примерами линейной функции являются:

$$y = -5x + 3\ (k = -5, b = 3);$$

$$y = 3x\ (k = 3, b = 0);$$

$$y = 2{,}7\ (k = 0, b = 2{,}7);$$

$$y = 0\ (k = 0, b = 0);$$

$$y = (2x - 1) - (3x + 2).$$

График линейной функции. Графиком линейной функции является прямая. Для построения графика функции $y = kx + b$ достаточно определить координаты двух точек графика и через них провести прямую. Удобно брать точки, в которых либо абсцисса, либо ордината равна нулю, т. е. точки пересечения данной прямой с осями координат: $A(0; b)$, $B\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$ (рис. 1).

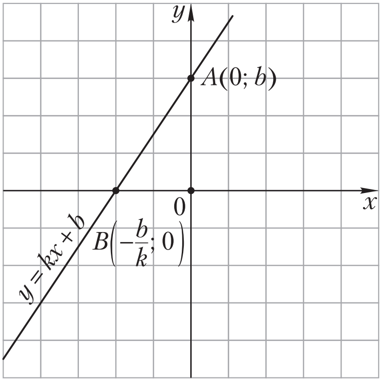


Рис. 1

Пример. Построить график функции $y = 2x - 3$.

Решение. Это линейная функция. Ее графиком является прямая. Для построения прямой достаточно знать координаты двух точек. Удобно брать точки пересечения этой прямой с осями координат. Составим таблицу.

x	0	1,5
y	–3	0

На координатной плоскости строим точки $A(0; -3)$ и $B(1{,}5; 0)$ и через них проводим прямую.

Геометрический смысл коэффициентов k ***и*** b***. Аналитическое задание линейной функции*** $y = kx + b$**.** Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая $y = kx + b$ с положительным направлением оси Ox; поэтому число k называют угловым коэффициентом.

Угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла ее наклона к положительному направлению оси Ox, т. е.

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Если $k > 0$, то этот угол — острый, если $k < 0$, то этот угол — тупой.

Коэффициент b является ординатой точки пересечения графика функции $y = kx + b$ с осью Oy.

На рисунке 2 показаны различные случаи расположения графика линейной функции.

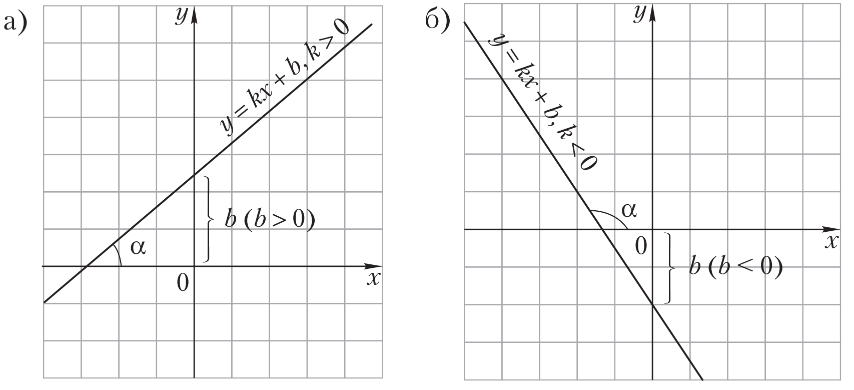


Рис. 2

Взаимное расположение графиков линейных функций. Пусть даны линейные функции $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Графики этих функций:

1) пересекаются тогда и только тогда, когда $k_1 \neq k_2$.

2) параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

3) совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

Заметим, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Свойства линейной функции.

1. Область определения.

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

2. Множество значений. Если

$$k \neq 0,\ \text{то}\ E(y) = (-\infty; +\infty);$$

если

$$k = 0,\ \text{то}\ E(y) = \{b\}.$$

3. Наибольшее и наименьшее значения.

а) Если $k \neq 0$, то функция не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значения;

б) если $k = 0$, то все значения функции равны.

4. Нули функции.

а) Если $k \neq 0$, то $y = 0$ при $x = -\frac{b}{k}$;

б) если $k = 0, b \neq 0$, то нулей нет;
в) если $k = 0, b = 0$, то $y = 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

5. Промежутки знакопостоянства.

а) Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ и $y < 0$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$;

б) если $k < 0$, то $y > 0$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ и $y < 0$ при $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$;

в) если $k = 0$, $b > 0$, то $y > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$;
г) если $k = 0$, $b < 0$, то $y < 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$;
д) если $k = 0, b = 0$, то $y = 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

6. Промежутки монотонности.

а) Если $k > 0$, то функция возрастающая;
б) если $k < 0$, то функция убывающая;
в) если $k = 0$, то функция ни возрастающая, ни убывающая.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Какая функция называется линейной?

2. Назовите формулы из курса физики, содержащие величины, находящиеся в линейной зависимости.

3. Какова область определения линейной функции?

4. Какова область значений функции $y = kx + b$? Существуют ли такие значения k и b, при которых область значений линейной функции состоит из одного числа?

5. При каких значениях k и b линейная функция: а) имеет единственный нуль; б) имеет бесконечное множество нулей; в) не имеет нулей?

6. Укажите промежутки знакопостоянства линейной функции при различных значениях параметров k и b.

7. Что является графиком линейной функции, заданной на множестве всех действительных чисел?

8. Сколько точек достаточно знать, чтобы построить график линейной функции?

9. При каких значениях параметра k угол наклона графика $y = kx + b$ к оси Ox является: а) острым; б) тупым?

10. При каких значениях параметра k и b график функции $y = kx + b$ параллелен оси Ox?

11. В какой точке график функции $y = kx + b$ пересекает ось Oy?

12. Как изменяется график линейной функции $y = kx + b$:
а) с изменением b при постоянном k;
б) с изменением k при постоянном b?

13. При каком условии графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:
а) параллельны;
б) взаимно перпендикулярны?

14. Схематически изобразите график линейной функции при:

а) $k > 0, b > 0$; б) $k > 0, b = 0$; в) $k > 0, b < 0$;

г) $k = 0, b > 0$; д) $k = 0, b = 0$; е) $k = 0, b < 0$;

ж) $k < 0, b > 0$; з) $k < 0, b = 0$; и) $k < 0, b < 0$.

15. Всякая ли прямая, расположенная в системе координат, является графиком какой-нибудь линейной функции?

16. Существует ли такая линейная функция y, для которой выполняется равенство $y(x) = y(x + 1)$?

С некоторыми видами последующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Решите, какие из заданий вам необходимо выполнить. В случае трудностей обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 2. Укажите линейную функцию среди данных функций:

а) $y = \dfrac{4}{x}$; $y = -3x + 1$; $y = 2x^2 + 1$; $y = x^3$;

б) $y = x^2$; $y = -3x^2 + 1$; $y = 2x - 5$; $y = \dfrac{5}{x}$.

Задание 3. Графиком какой из функций является горизонтальная прямая?

а) $y=-3x$; $y=3-x$; $y=x-3$; $y=-3$;

б) $y=-2x$; $y=x-2$; $y=2-x$; $y=2$.

Задание 4. а) График какой из функций: $y=-2x+1$, $y=3x-5$, $y=7$ образует с положительным направлением оси Ox острый угол?

б) График какой из функций: $y=8x+1$, $y=-4x+3$, $y=-5$ образует с положительным направлением оси Ox тупой угол?

Задание 5. Функция задана формулой $y=kx+8$. При каком значении k график данной функции параллелен графику функции:

а) $y=3x-8$;

б) $y=-5x+8$?

Задание 6. Дана линейная функция $y=-7{,}5x+2$. График какой из функций не пересекает график данной?

а) $y=7{,}5x$, $y=-7{,}5x+2$;

б) $y=-7{,}5x-2$, $y=7{,}5x+1$.

Задание 7. Определите, пересекаются или параллельны прямые, заданные формулами:

а) $y=-4x+1$ и $y=-4x+2$;

б) $y=\frac{1}{3}x-6$ и $y=\frac{1}{3}x+7$.

Задание 8. Определите, пересекаются или параллельны прямые, заданные формулами:

а) $y=6x-1$ и $y=-6x+1{,}5$;

б) $y=-9x+2$ и $y=9x-1{,}7$.

Задание 9. Для линейной функции $y=9x$ запишите какую-либо функцию, график которой:

а) не пересекает график этой функции;

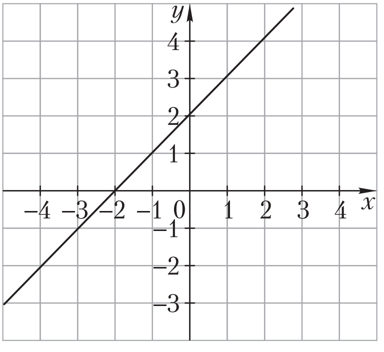
б) пересекает график этой функции.

Задание 10. Какие из функций: $y = -7x$, $y = x - 7$, $y = 5 - 3x$, $y = 5$, $y = -1 + 2x$, $y = 0{,}3x$ являются:

а) возрастающими;

б) убывающими?

Задание 11. а) На каком из рисунков: 3, *а* или 3, *б* изображен график функции $y = -x + 2$?

а)


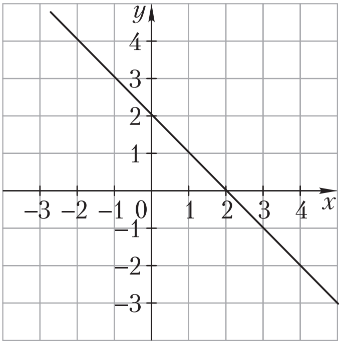
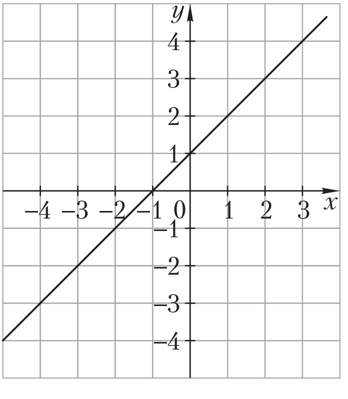
б)


Рис. 3

б) На каком из рисунков: 4, *а* или 4, *б* изображен график функции $y = x + 1$?

а)


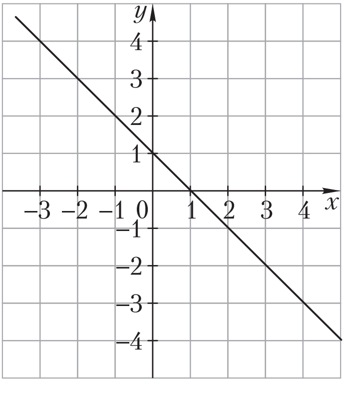
б)


Рис. 4

Задание 12. Чему равно значение функции:

а) $y = -3x + 7$ в точке $x_0 = -\frac{1}{3}$;

б) $y = -5x - 1$ в точке $x_0 = \frac{1}{5}$?

Задание 13. Найдите значение аргумента, при котором значение функции:

а) $y = -0{,}5x + 2$ равно 4;

б) $y = -1{,}5x - 3{,}5$ равно 1.

Задание 14. При каких значениях аргумента x функция:

а) $y = -3x - 2$ принимает отрицательные значения;

б) $y = 5 - 2x$ принимает положительные значения?

Задание 15. Укажите какие-либо линейные функции, графиками которых являются:

а) параллельные прямые;
б) пересекающиеся прямые.

Задание 16. а) Задайте формулой линейную функцию $y = kx + 2$, график которой проходит через точку $A(4;\, 6)$.

б) Задайте формулой линейную функцию $y = 3x + b$, график которой проходит через точку $B(4;\, 6)$.

Задание 17. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = -3x + 18$; б) $y = -5x + 20$.

Задание 18. Найдите точки пересечения с осями координат и постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{2}x - 1$; б) $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Задание 19. Постройте график функции:

а) $y = -2x - 2$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 1$;

в) $y = -\frac{1}{2}x + 1;$ г) $y = \frac{1}{3}x - 1;$

д) $y = -0{,}5x + 1;$ е) $y = 0{,}5x + 2;$

ж) $y = 1\frac{1}{2}x + 2;$ з) $y = 2\frac{1}{2}x + 1;$

и) $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x;$ к) $y = \frac{1}{3} - \frac{5}{6}x.$

Задание 20. Задайте формулой функцию, графиком которой является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку:

а) $A(4; 5);$ б) $B(4; -6).$

Задание 21. а) При каких значениях аргумента значение функции $y = 4x - 7$ меньше значений функции $y = 7x + 8$?

б) При каких значениях аргумента значение функции $y = 3x - 2$ больше значений функции $y = 7x + 6$?

Задание 22. Постройте графики функций и найдите координаты точки их пересечения:

а) $y = 4x - 1$ и $y = -x + 4;$

б) $y = -3x + 3$ и $y = x + 3.$

Задание 23. а) Проходит ли график функции $y = x + 4$ через точки пересечения графиков функций $y = 2x + 6$ и $y = -5x - 1$?

б) Проходит ли график функции $y = x + 5$ через точки пересечения графиков функций $y = 3x + 8$ и $y = -6x - 10$?

Задание 24. а) Задайте формулой линейную функцию, если ее график проходит через точку $A(2; 3)$ и не пересекает прямую $y = 3x - 5.$

б) Задайте формулой линейную функцию, если ее график проходит через точку $B(-1; 3)$ и не пересекает прямую $y = -7x + 2.$

Задание 25. Задайте уравнением прямую, если ее график:

а) составляет с положительным направлением оси Ox угол $45°$ и проходит через точку $M(-1; 2);$

б) составляет с положительным направлением оси Ox угол $45°$ и проходит через точку $N(0; 2).$

Задание 26. а) Известно, что график функции, заданной формулой $y = kx + 3$, проходит через точку $C(12;\ 10)$. Установите, является ли эта функция возрастающей.

б) Известно, что график функции, заданной формулой $y = kx + 5$, проходит через точку $O(-5;\ -8)$. Установите, является ли эта функция убывающей.

Задание 27. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = 3(x-1) - 0{,}5(2x-4)$;

б) $y = -5(x-1) - 0{,}4(5-10x)$.

Задание 28. а) График линейной функции проходит через точки $A(1;\ -3)$ и $B(2;\ -5)$. Задайте эту функцию формулой.

б) График линейной функции проходит через точки $C(-1;\ -3)$ и $D(2;\ 3)$. Задайте эту функцию формулой.

Задание 29. Задайте формулой линейную функцию по ее графику:

а) на рисунке 5, *а*; б) на рисунке 5, *б*.

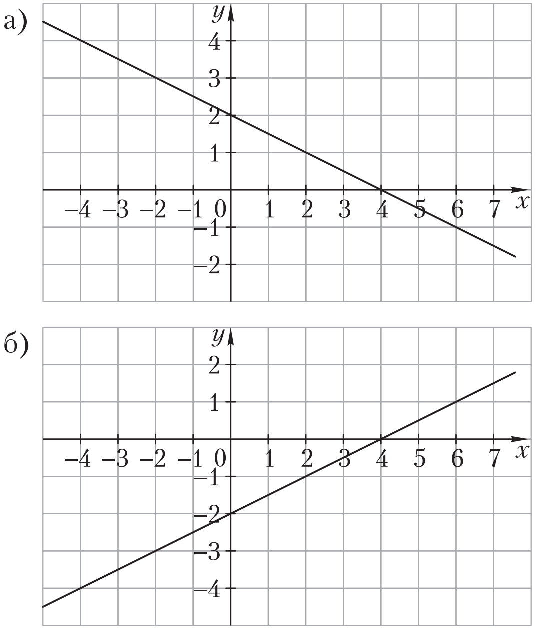


Рис. 5

Задание 30. а) Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $A(2; -1)$ и параллельна прямой $y = 3 - 5x$. Найдите значения коэффициентов k и b.

б) Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $B(-2; 22)$ и параллельна прямой $y = -7x + 4$. Найдите значения коэффициентов k и b.

Задание 31. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{x^2 - 4}{2x - 4}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 9}{3x + 9}$.

Задание 32. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{3x - 1}{4 - x} + \dfrac{2x + 3}{x - 4}$; б) $y = \dfrac{4x - 1}{3 - x} + \dfrac{3x + 2}{x - 3}$.

Задание 33. Докажите, что функция $y = kx + b$:

а) при $k > 0$ является возрастающей;
б) при $k < 0$ является убывающей.

Ваш помощник

К заданию 2. а) $y = -3x + 1$; б) $y = 2x - 5$.
К заданию 3. а) $y = -3$; б) $y = 2$.
К заданию 4. а) $y = 3x - 5$. б) $y = -4x + 3$.
К заданию 5. а) $k = 3$; б) $k = -5$.
К заданию 6. а) Не пересекает график функции $y = -7{,}5x + 2$, поскольку равны их угловые коэффициенты.
К заданию 7. а) Прямые параллельны, поскольку угловые коэффициенты равны: $k_1 = k_2 = -4$, а $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ и $b_1 \neq b_2$.
К заданию 8. а) Прямые пересекаются, поскольку угловые коэффициенты не равны: $k_1 = 6$, $k_2 = -6$.
К заданию 9. а) Например, $y = 9x + 2$, поскольку угловые коэффициенты равны: $k_1 = k_2 = 9$, а $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ и $b_1 \neq b_2$.
К заданию 10. а) $y = x - 7$, $y = -1 + 2x$, $y = 0{,}3x$;
б) $y = -7x$, $y = 5 - 3x$.
К заданию 11. а) На рисунке 3, *б* изображен график функции $y = -x + 2$, поскольку две точки $A(0; 2)$ и $B(2; 0)$ принадлежат прямой, являющейся графиком этой функции.
К заданию 13. а) -4; б) -3.

К заданию 14. а) $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$; б) $(-\infty;2{,}5]$.

К заданию 15. а) Например, $y=3x-1$ и $y=3x+2$, поскольку графики линейных функций $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$, а $b_1\neq b_2$.

К заданию 16. а) Решив уравнение $6=4k+2$, найдем $k=1$. Значит, искомую функцию можно задать формулой $y=x+2$.

К заданию 17. а) $A(0;\ 18)$, $B(6;\ 0)$; б) $A(0;\ 20)$, $B(4;\ 0)$.

К заданию 18. а) $x=0$, $y=-1$; $y=0$, $x=-2$; б) $x=0$, $y=1$; $y=0$, $x=3$.

Затем строим графики этих функций.

К заданию 20. а) Прямая, параллельная оси Ox, имеет угловой коэффициент $k=0$. В этом случае $y=Ox+b$. Подставив координаты данной точки $A(4;\ 5)$ в равенство $y=Ox+b$, получаем $b=5$. Затем строим график функции $y=5$.

К заданию 21. а) Согласно условию задачи $4x-7<7x+8$, откуда $x>-5$.

К заданию 22. а) $A(1;\ 3)$; б) $B(0;\ 3)$.

К заданию 23. а) Решив уравнение $2x+6=-5x-1$, найдем $x=-1$, тогда $y=4$. Легко показать, что через точку $A(-1;\ 4)$ не проходит график функции $y=x+4$. Ответ: не проходит. б) Ответ: не проходит.

К заданию 24. а) Поскольку график искомой линейной функции не пересекает прямую $y=3x-5$, то он параллелен данной прямой и имеет такой же угловой коэффициент $k=3$. Формула искомой линейной функции примет вид $y=3x+b$. Подставив координаты точки $A(2;\ 3)$ в данную формулу, получим $3=3\cdot 2+b$, откуда $b=-3$. Итак, $y=3x-3$. Ответ: $y=3x-3$. б) Ответ: $y=-7x-4$.

К заданию 25. а) $k=\operatorname{tg}45^\circ=1$. Формула прямой $y=kx+b$ примет вид $y=x+b$. Подставив координаты точки $M(-1;\ 2)$ в эту формулу, получим $2=-1+b$, откуда $b=3$. Итак, $y=x+3$.

К заданию 26. а) Подставив координаты точки $C(12;\ 10)$ в равенство $y=kx+3$, получим $10=12k+3$, откуда $k=\frac{7}{12}$. Поскольку $k>0\left(k=\frac{7}{12}\right)$, то линейная функция $y=\frac{7}{12}x+3$ является возрастающей. Ответ: является возрастающей. б) Ответ: не является убывающей.

К заданию 27. а) $y = 2x - 1$; б) $y = -x + 3$.

К заданию 28. а) $y = -2x - 1$. б) $y = 2x - 1$.

К заданию 29. а) Поскольку точка (0; 2) принадлежит графику функции $y = kx + b$, то имеем верное равенство $2 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = 2$. Следовательно, $y = kx + 2$. Так как точка (4; 0) также принадлежит графику функции $y = kx + 2$, то $0 = k \cdot 4 + 2$, откуда $k = -\frac{1}{2}$.
Итак, $y = -\frac{1}{2}x + 2$; б) $y = \frac{1}{2}x - 2$.

К заданию 30. а) $k = -5$. Так как прямая $y = -5x + b$ проходит через точку $A(2; -1)$, то $-1 = -10 + b$, откуда $b = 9$. Ответ: $k = -5$, $b = 9$. б) Ответ: $k = -7$, $b = 8$.

К заданию 31. а) $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

$\frac{x^2 - 4}{2x - 4} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = \frac{1}{2}x + 1$. Затем строим график функции $y = \frac{1}{2}x + 1$ с учетом области определения исходной функции.

К заданию 32. а) $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

$\frac{3x - 1}{4 - x} + \frac{2x + 3}{x - 4} = \frac{-3x + 1 + 2x + 3}{x - 4} = \frac{-x + 4}{x - 4} = -1$. Итак, строим график функции $y = -1$, где $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

УЭ-2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК»

Цель: знать определение функции обратной пропорциональности; уметь строить ее график; знать свойства функции, уметь их иллюстрировать с помощью графика и применять свойства обратной пропорциональности при решении других задач.

Теоретическая часть

Понятие обратной пропорциональности. Функцию, которая задается формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю действительное число, называют **обратной пропорциональностью**.

Графиком обратной пропорциональности является гипербола, которая состоит из двух ветвей (рис. 6, *а*, *б*).

а)
б)

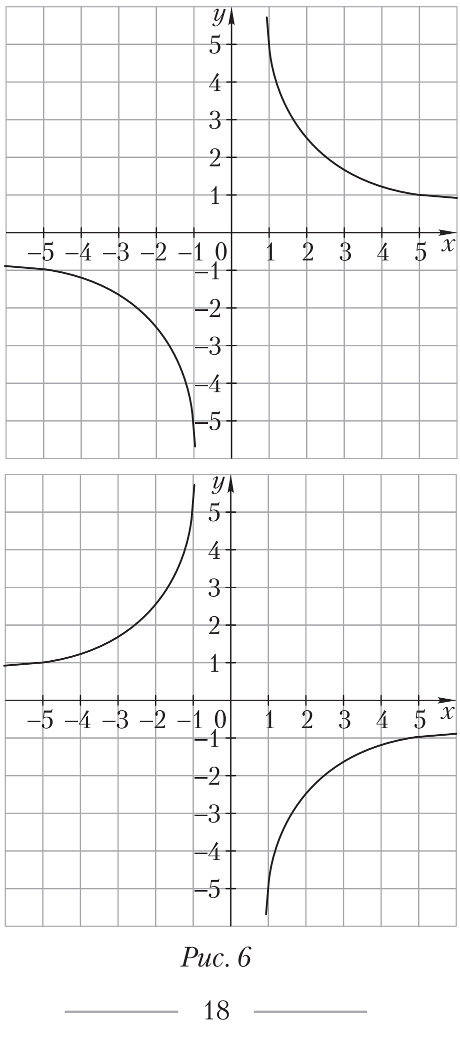


Рис. 6

Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$.

1. Область определения. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. Функция не имеет наименьшего и наибольшего значений.

4. Нули функции. Функция нулей не имеет.

5. Промежутки знакопостоянства.

а) Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$;

б) если $k < 0$, то $y > 0$ при $x < 0$ и $y < 0$ при $x > 0$.

6. Промежутки монотонности.

а) Если $k > 0$, функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

б) если $k < 0$, функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?

2. В каком случае переменную y называют обратно пропорциональной переменной x?

3. Как называют число k в равенстве $y = \dfrac{k}{x}$, если $k \neq 0$?

4. Сформулируйте свойства обратно пропорциональных переменных y и x.

5. Как называют кривую, являющуюся графиком функции $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$?

6. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \dfrac{k}{x}$:

а) при $k > 0$;

б) при $k < 0$?

7. Пересекает ли график функции $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ оси координат?

8. Сформулируйте свойства функции $y=\frac{k}{x}$:

а) при $k>0$;

б) при $k<0$.

9. Симметричен ли график функции $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ относительно начала координат?

10. Определите знак числа t, зная, что график функции $y=\frac{t}{x}$ расположен:

а) в первой и третьей координатных четвертях;

б) во второй и четвертой координатных четвертях.

Задание 2. а) Двигаясь со скоростью v $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, турист проходит расстояние от одного населенного пункта к другому, равное 25 км, за t ч. Задайте формулой зависимость v от t.

б) Двигаясь со скоростью v $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, автомобиль проезжает расстояние между городами, равное 102 км, за t ч. Задайте формулой зависимость v от t.

Задание 3. Из функций $y=\frac{4}{3}x$, $y=-7x$, $y=\frac{9}{x}$ выберите те, которые являются:

а) прямой пропорциональностью;

б) обратной пропорциональностью.

Задание 4. Определите знак числа t, зная, что график функции $y=\frac{t}{x}$ расположен:

а) в первой и третьей координатных четвертях;

б) во второй и четвертой координатных четвертях.

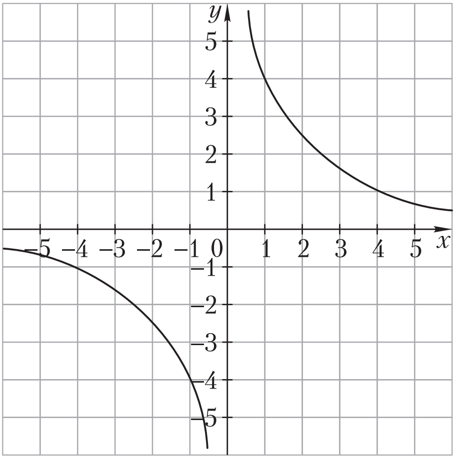
Задание 5. На каком из рисунков: 7, *а* или 7, *б* изображен график функции $y=\frac{4}{x}$?

Задание 6. Какая из функций $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{3}{x}$, $y = \frac{24}{x}$, $y = -\frac{25}{x}$ в промежутке $(0; +\infty)$ является:

а) убывающей;

б) возрастающей?

а)



б)

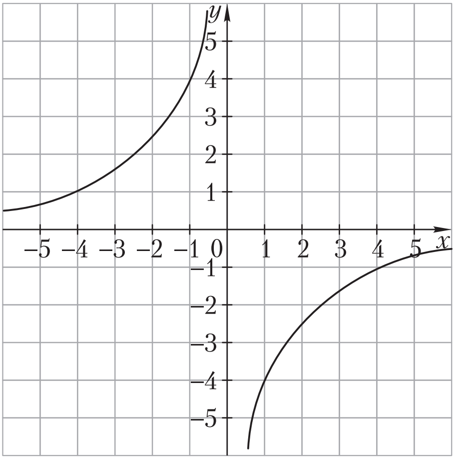


Рис. 7

Задание 7. График какого из уравнений: $x + y = 8$, $x^2 + y^2 = 8$, $xy = 8$, $\frac{y}{x} = 8$ изображен на рисунке 8?

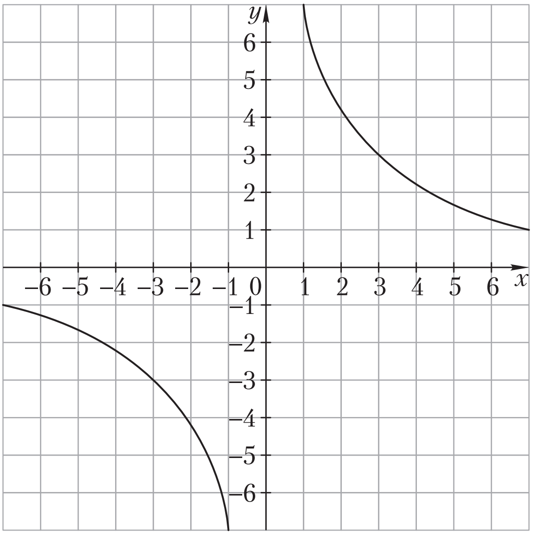


Рис. 8

Задание 8. Задайте формулой обратную пропорциональную зависимость, график которой проходит через точку:

а) $A(-2; 6)$; б) $B(-3; 5)$.

Задание 9. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

а) $C(2; -5)$; б) $D(-4; 3)$?

Задание 10. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = -\frac{4}{x}$; б) $y = \frac{3}{x}$; в) $y = -\frac{8}{x}$;

г) $y = \frac{10}{x}$; д) $y = -\frac{12}{x}$; е) $y = \frac{12}{x}$.

Задание 11. Задайте формулой обратную пропорциональность по ее графику (рис. 9).

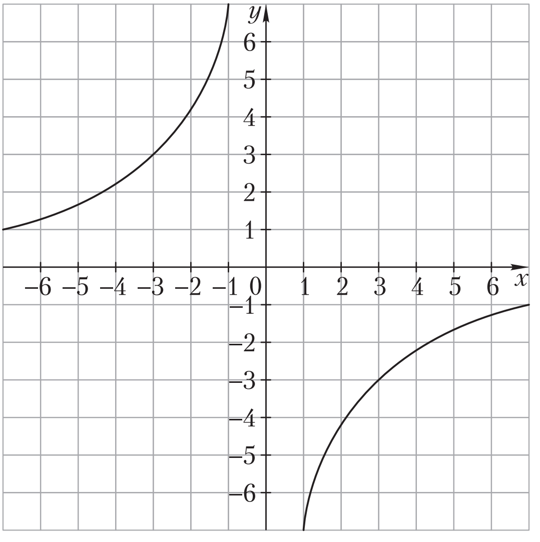


Рис. 9

Задание 12. Укажите промежутки возрастания и убывания, построив графики функций:

а) $y = \dfrac{6}{x}$; б) $y = -\dfrac{6}{x}$.

Задание 13. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Найдите:

а) $f(2{,}5) - f(7{,}5)$; б) $f(1{,}5) - f(4{,}5)$.

Задание 14. а) Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = -\dfrac{4}{x}$ и $y = 6 - x$. Постройте графики данных функций и отметьте найденные точки.

б) Найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = \dfrac{8}{x}$ и $y = 3 - x$. Постройте графики данных функций и отметьте найденные точки.

Задание 15. Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{4x-12}{x^2-3x}$; б) $y=\dfrac{6x-12}{x^2-2x}$.

Задание 16. Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{2-7x}{x^2-2x}-\dfrac{6}{2-x}$; б) $y=\dfrac{-80}{(x-5)^2-(5+x)^2}$.

Задание 17. Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{2}{|x|}-\dfrac{2}{x}$; б) $y=\dfrac{-3}{x}+\dfrac{3}{|x|}$.

Задание 18. Докажите, что функция $y=\dfrac{k}{x}$:

а) при $k<0$ является возрастающей на промежутке $(0; +\infty)$;

б) при $k>0$ является убывающей на промежутке $(0; +\infty)$.

Задание 19. а) Функция задана формулой $y=\dfrac{1}{x}$. На сколько процентов уменьшится значение функции, если значение ее аргумента увеличить на 20 %?

б) Функция задана формулой $y=\dfrac{1}{x}$. На сколько процентов увеличится значение функции, если значение ее аргумента уменьшить на 20 %?

Ваш помощник

К заданию 2. а) $v=\dfrac{25}{t}$. б) $v=\dfrac{102}{t}$.

К заданию 9. а) $-5=\dfrac{k}{2}$, откуда $k=-10$.

К заданию 11. Поскольку точка (2; 2) принадлежит графику функции $y=\dfrac{k}{x}$, то имеет место равенство $2=\dfrac{k}{2}$, откуда $k=4$, и обратную пропорциональность можно задать формулой $y=\dfrac{4}{x}$.

К заданию 15. а) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty)$. $\frac{4x-12}{x^2-3x}=$ $=\frac{4(x-3)}{x(x-3)}=\frac{4}{x}$. Итак, $y=\frac{4}{x}$, $x\neq 0$ и $x\neq 3$. Строим график функции; б) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$. $\frac{6x-12}{x^2-2x}=\frac{6(x-2)}{x(x-2)}=\frac{6}{x}$. Строим график функции.

К заданию 16. а) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$. $y=-\frac{1}{x}$ и $x\neq 0$, $x\neq 2$. Строим график функции; б) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. $y=\frac{4}{x}$. Строим график функции.

К заданию 17. а) $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Если $x<0$, то $y=-\frac{4}{x}$; если $x>0$, то $y=0$. Строим график данной функции.

К заданию 19. а) $16\frac{2}{3}$ %. б) 25 %.

УЭ-3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИЯ $y=\sqrt{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК»

Цель: уметь строить график функции $y=\sqrt{x}$; знать ее свойства и уметь их иллюстрировать с помощью графика.

Теоретическая часть

Понятие функции $y=\sqrt{x}$. Функцию, заданную формулой вида $y=\sqrt{x}$, называют функцией **арифметического корня**.

Область ее определения $D(y)=[0;+\infty)$.

График функции строится по точкам. Для его построения удобно брать те значения аргумента, из которых легко извлекается квадратный корень.

Составим таблицу значений функции.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

График функции $y = \sqrt{x}$ показан на рисунке 10.

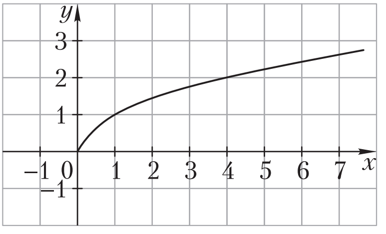


Рис. 10

Свойства функции $y = \sqrt{x}$.

1. Область определения. $D(y) = [0; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, наибольшего значения функция не имеет.

4. Нули функции. $y = 0$ при $x = 0$.

5. Промежутки знакопостоянства. $y > 0$ при $x > 0$.

6. Промежутки монотонности. Функция является возрастающей.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Какую функцию называют арифметическим квадратным корнем?

2. Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$?

3. Каково множество значений этой функции?

4. Проходит ли ее график через начало координат?

5. Какой вывод можно сделать о расположении графика этой функции в координатной плоскости?

6. Сформулируйте свойства функции $y = \sqrt{x}$.

Задание 2. Определите, проходит ли график функции $y = \sqrt{x}$ через точки:

а) $A(-100; 10)$; б) $B(100; -10)$.

Задание 3. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямая:

а) $y = 101$; б) $y = -100$?

Задание 4. Существует ли значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x} = -5$; б) $\sqrt{x} = 0{,}1$?

Задание 5. Пересекаются ли графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = -x$; б) $y = \sqrt{x}$ и $y = x$?

Задание 6. а) Площадь круга S может быть вычислена по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где d — диаметр круга. Запишите формулу, которая выражает зависимость переменной d от переменной S.

б) Площадь поверхности шара может быть вычислена по формуле $S = 4\pi r^2$, где r — радиус шара. Запишите формулу, выражающую зависимость переменной r от переменной S.

Задание 7. Найдите координаты пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой:

а) $y = 0{,}7$; б) $x = 0{,}64$.

Задание 8. Укажите все целые значения аргумента x, при которых целые значения функции $y = \sqrt{x}$:

а) меньше 5; б) меньше 7.

Задание 9. Запишите по убыванию значения функции $y = \sqrt{x}$:

а) $\sqrt{5{,}63}$; $\sqrt{5{,}78}$; $\sqrt{0{,}75}$; $\sqrt{2{,}35}$;

б) $\sqrt{4{,}52}$; $\sqrt{4{,}67}$; $\sqrt{1{,}69}$; $\sqrt{3{,}26}$.

Задание 10. Постройте график функции:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x}$.

Задание 11. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{x}-1$; б) $y=\sqrt{x}+1$.

Задание 12. а) При каком значении параметра a график функции $y=\sqrt{x+20}+a$ проходит через точку $A(5;\,8)$?

б) При каком значении параметра b график функции $y=$ $=\sqrt{x-3}+b$ проходит через точку $B(12;\,18)$?

Задание 13. Найдите координаты точки пересечения графиков:

а) $y=\sqrt{x}$ и $y=x-6$; б) $y=\sqrt{x}$ и $y=x-2$.

Задание 14. Докажите, что не имеют общих точек графики функций:

а) $y=\sqrt{x}$ и $y=x+0{,}5$; б) $y=\sqrt{x}$ и $y=0{,}5x+1$.

Задание 15. Докажите, что:

а) график функции $y=\sqrt{x}$ симметричен графику функции $y=x^2$ относительно прямой $y=x$ при $x\ge 0$;

б) график функции $y=-\sqrt{x}$ симметричен графику функции $y=x^2$ относительно прямой $y=x$ при $x\le 0$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) Не проходит; б) не проходит.

К заданию 3. а) Пересекает; б) не пересекает.

К заданию 4. а) Не существует; б) существует.

К заданию 5. а) Да, пересекаются в точке $A(0;\,0)$; б) да, $B(0;\,0)$.

К заданию 6. а) $d=2\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$. б) $r=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

К заданию 7. а) $A(0{,}49;\,0{,}7)$; б) $B(0{,}64;\,0{,}8)$.

К заданию 8. а) 0; 1; 4; 9; 16; б) 0; 1; 4; 9; 16; 25; 36.

К заданию 9. а) $\sqrt{5{,}78}$; $\sqrt{5{,}63}$; $\sqrt{2{,}35}$; $\sqrt{0{,}75}$; б) $\sqrt{4{,}67}$; $\sqrt{4{,}52}$; $\sqrt{3{,}26}$; $\sqrt{1{,}69}$.

К заданию 12. а) Подставив координаты точки $A(5;\,8)$ в аналитическое задание данной функции, получим: $8=5+a$, откуда $a=3$.

б) Подставив координаты точки $B(12; 18)$ в аналитическое задание данной функции, получим: $18 = 3 + b$, откуда $b = 15$.

К заданию 13. а) Решив уравнение $\sqrt{x} = x - 6$, находим: $A(9; 3)$; б) решив уравнение $\sqrt{x} = x - 2$, находим: $B(4; 2)$.

К заданию 14. а) Поскольку уравнение $\sqrt{x} = x + 0{,}5$, т. е. $x = x^2 + x + 0{,}25$, решений не имеет, то графики данных функций не пересекаются;

б) поскольку уравнение $\sqrt{x} = 0{,}5x + 1$, т. е. $x = 0{,}25x^2 + x + 1$, решений не имеет, то графики данных функций не пересекаются.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК»

Цель: знать и правильно использовать термины «квадратичная функция», «парабола», «вершина параболы»; уметь находить координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ и точки ее пересечения с осями координат; уметь строить график функции $y = ax^2 + bx + c$; знать и уметь применять свойства функции $y = ax^2 + bx + c$.

Теоретическая часть

Понятие квадратичной функции. Функция, которая задается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b, c — некоторые действительные числа и $a \neq 0$, называется **квадратичной*** **функцией**.

Примеры таких функций:

$$y = -3x^2 + 2x - 1 \qquad (a = -3, b = 2, c = -1);$$
$$y = \sqrt{2}x^2 + x \qquad (a = \sqrt{2}, b = 1, c = 0);$$
$$y = 0{,}4x^2 \qquad (a = 0{,}4, b = 0, c = 0).$$

* Также употребляется термин «квадратная функция».

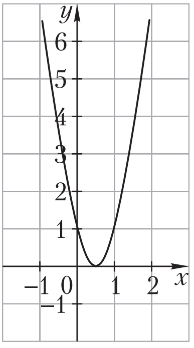


Рис. 11

График квадратичной функции. Отметим особенности графика этой функции.

1. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является кривая линия, называемая параболой. На рисунке 11 изображен график функции $y = 4x^2 - 4x + 1$.

2. Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ направлены по оси ординат вверх, при $a < 0$ — вниз.

3. Координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ вычисляют по формулам:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{ либо } y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

4. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ симметрична относительно прямой, проходящей через ее вершину параллельно оси ординат.

5. Абсциссы точек пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью Ox есть нули квадратичной функции. Чтобы их найти, надо решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $D > 0$, то парабола пересекает ось Ox в двух точках; если $D = 0$, то она касается оси Ox; если $D < 0$, то она не имеет общих точек с осью Ox.

Способ построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно построить следующим образом.

1. Определить направление ветвей параболы.
2. Найти координаты вершины параболы по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

и отметить вершину на координатной плоскости.

3. Определить точки пересечения параболы с осью абсцисс (нули квадратичной функции). Если функция не имеет нулей, то часто находят координаты точек пересечения параболы с прямой $y = c$, решая уравнение $ax^2 + bx = 0$.

4. Найти ординату точки пересечения параболы с осью Oy и отметить эту точку на оси ординат.

5. Отмеченные точки соединить непрерывной линией (если необходимо, можно найти несколько дополнительных точек графика функции).

Свойства квадратичной функции.

1. Область определения. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множество значений.

а) Если $a > 0$, то $E(y) = \left[-\dfrac{D}{4a}; +\infty\right)$;

б) если $a < 0$, то $E(y) = \left(-\infty; -\dfrac{D}{4a}\right]$.

3. Наибольшее и наименьшее значения.

а) При $a > 0$ $y_{\min} = y(x_0) = -\dfrac{D}{4a}$ при $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, а наибольшего значения функция не достигает;

б) при $a < 0$ $y_{\max} = y(x_0) = -\dfrac{D}{4a}$ при $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, а наименьшего значения функция не достигает.

4. Нули функции.

а) При $D > 0$ функция имеет два нуля:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

б) при $D = 0$ функция имеет один нуль (два равных нуля):

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a};$$

в) при $D < 0$ функция действительных нулей не имеет.

5. Промежутки знакопостоянства.

а) Если $a > 0$ и $D > 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ и $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$;

б) если $a > 0$, $D = 0$, то $y > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$ и $x \neq x_1$;

в) если $a > 0$, $D < 0$, то $y > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

Случаи г) $a < 0$, $D > 0$, д) $a < 0$, $D = 0$, е) $a < 0$, $D < 0$ рассмотрите самостоятельно.

6. Четность и нечетность.

а) При $b = 0$ функция четная;

б) при $b \neq 0$ функция ни четная, ни нечетная, поскольку ее график не симметричен ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат.

7. Промежутки монотонности.

а) При $a > 0$ функция возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ и убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$;

б) при $a < 0$ функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Укажите, какие из данных функций являются квадратичными:

а) $y = -\frac{1}{3}x + 2$, $y = -x^2 + 5x + 1$, $y = x^2 - x^3$, $y = x^2$;

б) $y = -8x^2$, $y = 2x - 11$, $y = x^2 + 4x + 3$, $y = x^3$.

2. Среди данных функций укажите те, графиком которых является парабола:

а) $y = -2x$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 2x^2 - 3x$;

б) $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = 3x + 1$, $y = 3x^2 - 5x + 1$, $y = \frac{3}{x}$.

3. Графиком какой из функций является парабола:

а) $y = 3x, y = \frac{3}{x}, y = 3 - x^2, y = -\frac{3}{x}$;

б) $y = 2x, y = -\frac{2}{x}, y = x^2 - 2, y = \frac{2}{x}$?

4. Является ли:

а) число −5 нулем функции $y = x^2 - 5x$;

б) число 3 нулем функции $y = -3x^2 + 9x$?

5. Найдите множество значений функции, заданной формулой:

а) $y = (x - 5)^2 + 3$;

б) $y = (x - 4)^2 - 1$.

6. а) На рисунке 12, *а* изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$, где b и c — некоторые действительные числа. Можно ли эту функцию задать формулой $y = x^2 + 2x - 3$?

б) На рисунке 12, *б* изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$, где b и c — некоторые действительные числа. Можно ли эту функцию задать формулой $y = x^2 - 5x + 4$?

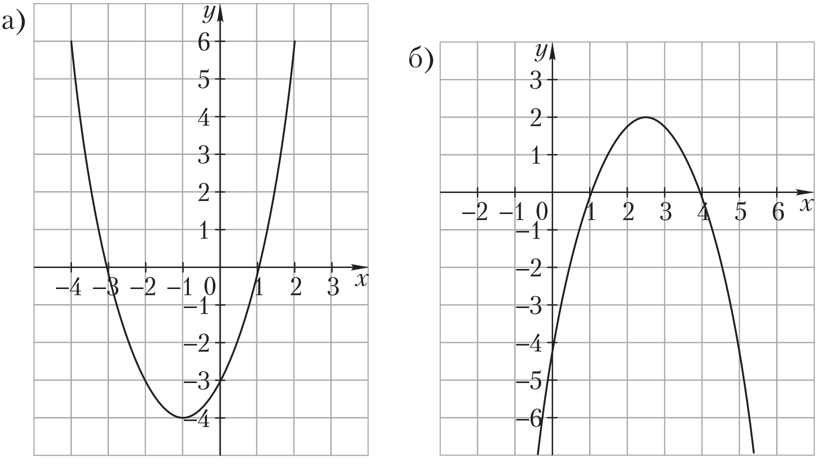


Рис. 12

Задание 2. а) Через какую из точек $A(-3; -19)$, $B(-3; 11)$, $C(-3; 17)$, $D(-3; -17)$ проходит график функции $y = 2x^2 - 1$?

б) Через какую из точек $M(-2; 10)$, $N(-2; -14)$, $P(-2; 6)$, $Q(-2; 14)$ проходит график функции $y = x^2 - 5x$?

Задание 3. а) Какая из функций $y = (x-5)^2$, $y = x^2 + 3x + 2$, $y = x^2 - 5x + 7$ принимает только положительные значения?

б) Какая из функций $y = -(x-3)^2$, $y = -x^2 + 3x - 9$, $y = x^2 + 5x + 6$ принимает только отрицательные значения?

Задание 4. При каком значении аргумента равны значения функций:

а) $y = 7x^2 - 5x + 6$ и $y = -4x + 5 + 7x^2$;

б) $y = 2 - 4x + 8x^2$ и $y = 8x^2 - 5x - 9$?

Задание 5. Чему равны абсциссы точек пересечения с осью Ox параболы:

а) $y = 2x^2 + 3x - 2$; б) $y = 2x^2 - 9x + 10$?

Задание 6. Найдите нули функции:

а) $y = 2x^2 + 5x + 2$; б) $y = 3x^2 + 10x + 3$.

Задание 7. При каких значениях аргумента x равны значения функций:

а) $y = x^2 - 22x + 27$ и $y = 2x^2 - 20x + 3$;

б) $y = 2 - 8x + 3x^2$ и $y = 2x^2 - 3x - 4$?

Задание 8. а) Дана функция $y = x^2 - 6x + 7$. Определите значение этой функции при $x = a - 1$.

Задание 9. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2x + 4$; б) $y = x^2 - 2x + 3$;

в) $y = (x+4)(x-2)$; г) $y = (x+1)(x-5)$.

Задание 10. а) Постройте график функции $y = -x^2 + 4x - 3$. С помощью графика укажите промежуток ее возрастания.

б) Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 3$. С помощью графика укажите промежуток ее убывания.

Задание 11. Постройте график функции:

а) $y = -x^2 + 2x - 1$; б) $y = -x^2 - 2x - 1$.

Задание 12. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 2x - 8$; б) $y = x^2 + x - 6$.

Задание 13. а) Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. С помощью графика укажите промежуток, на котором функция убывает.

б) Постройте график функции $y = x^2 + 4x - 5$. С помощью графика укажите промежуток, на котором функция возрастает.

Задание 14. а) Постройте график функции $y = x^2 - 4x$. С помощью графика укажите:

1) промежуток, на котором функция возрастает;
2) множество решений неравенства $x^2 - 4x \geq 0$.

б) Постройте график функции $y = x^2 - 6x$. С помощью графика укажите:

1) промежуток, на котором функция убывает;
2) множество решений неравенства $x^2 - 6x \leq 0$.

Задание 15. а) Постройте график функции $y = x^2 - 6x$. С помощью графика найдите:

1) промежуток, на котором функция возрастает;
2) множество решений неравенства $x^2 - 6x \leq 0$.

б) Постройте график функции $y = x^2 + 4x$. С помощью графика найдите:

1) промежуток, на котором функция убывает;
2) множество решений неравенства $x^2 + 4x \geq 0$.

Задание 16. а) Постройте график функции $y = -x^2 + 2x + 3$. С помощью графика укажите:

1) множество значений функции;
2) промежутки знакопостоянства.

б) Постройте график функции $y = -x^2 - 2x + 3$. С помощью графика укажите:

1) множество значений функции;

2) промежутки знакопостоянства.

Задание 17. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{(x+1)^3}{x+1}$; б) $y = \dfrac{(x-1)^3}{x-1}$.

Задание 18. а) Функция задана формулой $y = x^2 - 8x + 17$. Постройте график функции, симметричный графику данной функции относительно оси Ox.

б) Функция задана формулой $y = x^2 - 6x + 10$. Постройте график функции, симметричный графику данной функции относительно оси Oy.

Задание 19. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{(2x^2 - 3x + 1)(x+1)}{2x-1}$; б) $y = \dfrac{(2x^2 + 5x + 2)(x-2)}{2x+1}$.

Задание 20. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 - x}{x^2 - 4}$; б) $y = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4}$.

Задание 21. Найдите координаты вершины параболы, фрагмент которой изображен:

а) на рисунке13, *а*; б) на рисунке 13, *б*.

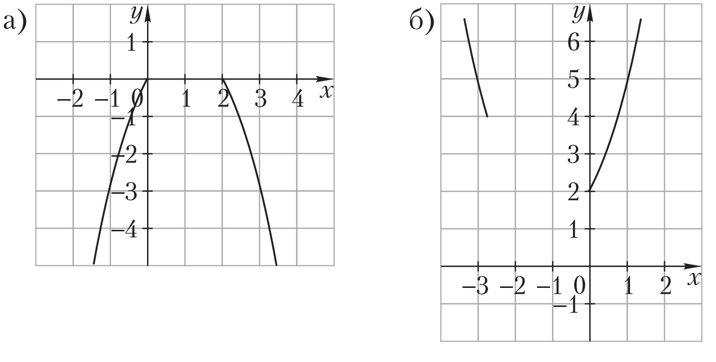


Рис. 13

Задание 22. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; б) $y = -x^2 + 3|x| - 2$.

Задание 23. Постройте график функции:

а) $y = |x^2 - 1|$; б) $y = |x^2 - 2|$.

Задание 24. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = |-x^2 + 4x - 3|$; б) $y = |-x^2 + 3x - 2|$.

Задание 25. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - \frac{|x|}{x}$; б) $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$.

Задание 26. Докажите, что:

а) функция $y = x^2 + 6x + 13$ не может принимать отрицательные значения;

б) функция $y = -x^2 - 4x - 5$ не может принимать положительные значения.

Задание 27. Докажите, что:

а) функция $y = 3x^2$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$;

б) функция $y = \frac{1}{3}x^2$ является возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$.

Задание 28. а) Известно, что x_1 и x_2 — нули функции $y = x^2 - 7x + 3$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

б) Известно, что x_1 и x_2 — нули функции $y = x^2 - 8x + 5$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

Задание 29. а) Известно, что x_1 и x_2 — нули функции $y = x^2 - 10x + 13$. Найдите значение выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

б) Известно, что x_1 и x_2 — нули функции $y = x^2 + 3x - 15$. Найдите значение выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

Задание 30. При каких значениях t не имеет нулей функция:

а) $y = 3x^2 + tx + 12$;

б) $y = 2x^2 - tx + 8$?

Задание 31. а) Число -3 является нулем функции $y = 2x^2 + 3x + t$. Найдите значение t и еще один нуль функции.

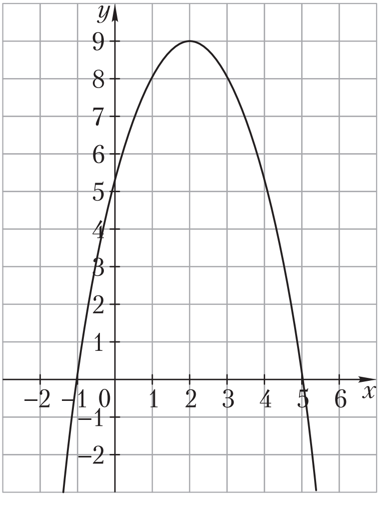
б) Число 4 является нулем функции $y = 3x^2 - 8x + t$. Найдите значение t и еще один нуль функции.

Задание 32. а) При каких значениях a и c вершина параболы $y = ax^2 + 6x + c$ находится в точке $A(1; 7)$?

б) При каких значениях b и c вершина параболы $y = 2x^2 + bx + c$ находится в точке $B(2; 5)$?

Задание 33. Определите знак каждого из коэффициентов аналитического задания квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, график которой изображен:

а) на рисунке 14, *а*;
б) на рисунке 14, *б*.

а) 

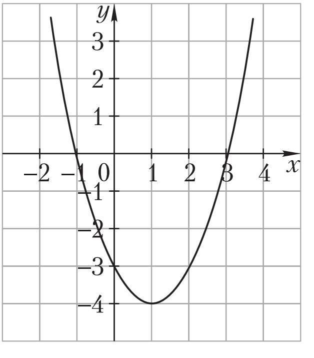
б) 

Рис. 14

Задание 34. Определите знаки коэффициентов уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, если:

а) ветви параболы направлены вверх, абсцисса ее вершины отрицательна, а ордината — положительна;

б) ветви параболы направлены вниз, абсцисса и ордината — отрицательны.

Ваш помощник

К заданию 1.

1. а) $y = -x^2 + 5x + 1$, $y = x^2$; б) $y = -8x^2$, $y = x^2 + 4x + 3$.

2. а) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x^2 - 3x$; б) $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = 3x^2 - 5x + 1$.

5. а) $[3; +\infty)$; б) $[-1; +\infty)$.

6. а) Можно. б) Можно.

К заданию 4. а) Решив уравнение $7x^2 - 5x + 6 = -4x + 5 + 7x^2$, найдем $x = 1$; б) решив уравнение $2 - 4x + 8x^2 = 8x^2 - 5x - 9$, найдем $x = -11$.

К заданию 17. а) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, $y = (x+1)^2$. Затем строим график; б) $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, $y = (x-1)^2$. Затем строим график.

К заданию 19. а) $D(y) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$$\frac{(2x^2 - 3x + 1)(x+1)}{2x-1} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)(x+1)}{2x-1} =$$

$$= \frac{(2x-1)(x^2-1)}{2x-1} = x^2 - 1.$$

С учетом области определения исходной функции строим график функции $y = x^2 - 1$.

К заданию 20. а) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$;

$$\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4} = \frac{(x^2-4)(x^2+1)}{x^2-4} = x^2 + 1.$$

Затем строим график функции.

К заданию 21. а) Можно найти нули квадратичной функции: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Следовательно, $y = a(x - 0)(x - 4)$, т. е. $y = ax(x - 4)$. Данная парабола проходит, например, через точку $A(1;\ 3)$, тогда $3 = -3a$, откуда $a = -1$. Данную параболу можно задать формулой $y = -x^2 + 4x$.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2;$$

$$y_0 = 4.$$

Координаты вершины $(2;\ 4)$;

б) $(-1;\ -1)$.

К заданию 25. а) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Если $x < 0$, то $y = x^2 + 1$; если $x > 0$, то $y = x^2 - 1$. Затем строим график данной функции.

К заданию 26. а) $x^2 + 6x + 13 = (x = 3)^2 + 4 \geq 0$ при любом x.

К заданию 28. а) По теореме Виета для квадратного уравнения $x^2 - 7x + 3 = 0$ имеем $x_1 + x_2 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = 3$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7^2 - 2 \cdot 3 = 43.$$

К заданию 29. а) По теореме Виета $x_1 + x_2 = 10$, $x_1 \cdot x_2 = 13$. Тогда $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \dfrac{100 - 26}{13} = \dfrac{74}{13} = 5\dfrac{9}{13}$.

К заданию 30. а) Данная функция не имеет нулей тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена $3x^2 + tx + 12$ отрицателен: $t^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 < 0$, $|t| < 12$, $-12 < t < 12$.

К заданию 33. а) $a < 0$, поскольку ветви параболы направлены вниз. $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы. Из рисунка видно, что $x_0 > 0$, следовательно, $-\dfrac{b}{2a} > 0$, т. е. $\dfrac{b}{a} < 0$. Так как $a < 0$, то получаем, что $b > 0$, $c > 0$, поскольку парабола пересекает ось Oy в точке с положительной ординатой; б) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

К заданию 34. а) Схематически изображаем параболу, ветви которой направлены вверх, абсцисса ее вершины отрицательна, а ордината — положительна.

Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a>0$.

$$x_0=-\frac{b}{2a};\ x_0<0 \text{ и } a>0, \text{ следовательно, } b>0.$$

Из схематического изображения параболы можно сделать вывод, что $y(0)=c$ и $c>0$;

б) из схематического изображения параболы можно сделать вывод, что $y(0)=c$ и $c<0$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Как возникло и развивалось понятие функции

Понятие «функция» прошло долгий путь развития. Идея этого понятия родилась вместе с понятием переменной величины и была тесно связана с геометрическими и механическими представлениями. Так, французские математики Рене Декарт (1596—1650) и Пьер Ферма (1601—1665) рассматривали функцию как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы. Английский ученый Исаак Ньютон (1643—1727) определял функцию как изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки. Для понятия «функция» Ньютон ввел свой термин «флюэнта». Впервые термин «функция» употребил в 1694 г. немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646—1716), который связывал функцию лишь с геометрическим образом.

В первой половине XVIII в. дальнейшее развитие науки привело к пониманию функции как формулы, связывающей одну переменную величину с другой. Так, швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667—1748) и член Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707—1783) считали, что каждая функция должна выражаться некоторой формулой, например $y=ax+b$, $y=x^2$,

$y = ax^2 + bx + c$ и т. д. Академик Эйлер писал: «Функция переменной величины есть аналитическое выражение, составленное каким-нибудь способом из этой переменной величины и из чисел либо из постоянных величин» (1748). Такая точка зрения на функцию сохранялась на протяжении всего XVIII в. В то время были исследованы важные классы функций.

В начале XIX в. французский математик Жан Фурье (1768—1830) утверждал, что в определении функции не существенно, каким образом (графиком, формулой, словом) каждому x поставлено в соответствие определенное значение y, важно только, чтобы это соответствие было установлено. Эта точка зрения получила развитие в трудах русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856), немецкого математика Петера Дирихле (1805—1859) и других ученых. Лобачевский определял понятие функции следующим образом: «Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y». Под это определение подпадает функция Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, \text{ если } x \text{ — рациональное число.} \end{cases}$$

Действительно, каждому значению x соответствует определенное значение $f(x)$. С точки зрения математики XVIII в. $f(x)$ — не функция, так как не существует формулы, по которой можно вычислять ее значения.

Функциональная символика

Обозначение функции φx (без скобок) впервые использовал в 1718 г. И. Бернулли. Современная символика для обозначения функций была введена Л. Эйлером, который в 1734 г. использовал обозначение $f(x)$ для произвольной функции.

Символы $D(f)$ и $E(f)$ для обозначения области определения и множества значений функции стали употребляться в XX в. французскими математиками. Академик А. Н. Колмогоров (1903—1987) предложил ввести эти знаки в школьный курс математики.

Символ $[x]$ ввел немецкий математик К. Гаусс (1777—1855) в 1808 г. для обозначения целой части числа x. Соответствие x — $[x]$

называют функцией антье (от франц. *entier* — целый) и обозначают $E(x)$. Этот знак предложил в 1798 г. французский математик А. Лежандр (1752—1833).

Интересно знать

Строго говоря, Р. Декарт не пользовался декартовыми координатами. Он выбирал горизонтальную прямую в качестве оси y, отмечал на ней начало отсчета, а расстояние точек от оси обозначал через x. Отрицательными координатами Р. Декарт не пользовался, и у него не было второй оси координат. Она была впервые введена в 1730 г. (через 80 лет после смерти Р. Декарта) французским математиком К. Рабюэлем (1669—1728).

Термин «координата» ввел Г. Лейбниц в 1692 г. Ему принадлежит идея использования в современном значении терминов «абсцисса» (1675) и «ордината» (1684).

Модуль 2 РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ УРАВНЕНИЙ

УЭ-1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОДСТАНОВКИ

Цель: знать, что называется решением системы и совокупности уравнений с двумя переменными и что значит решить систему или совокупность уравнений с двумя переменными; прочно овладеть умением решать систему уравнений методом подстановки.

Теоретическая часть

Метод подстановки. Сущность этого метода решения систем уравнений раскроем на конкретных примерах.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 3, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\dfrac{1}{x+y} = a$, $\dfrac{1}{x-y} = b$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} a + 2b = 3, \\ 3a + 4b = 7. \end{cases}$$

Далее получаем:

$$\begin{cases} -2a - 4b = -6, \\ 3a + 4b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ 3a + 4b = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем:

$$\left(\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=1,\\ \dfrac{1}{x-y}=1\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+y=1\\ x-y=1\end{cases}\right),$$

откуда находим: $x=1, y=0$.

Ответ: (1; 0).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(x+y)^2-2(x+y)-15=0,\\ xy=6.\end{cases}$$

Решение. Пусть $x+y=a$, тогда первое уравнение системы примет вид $a^2-2a-15=0$, откуда находим: $a=-3$ или $a=5$. Значит, первое уравнение системы равносильно совокупности двух уравнений:

$$x+y=-3 \text{ или } x+y=5.$$

Соответственно исходная система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases}x+y=-3,\\ xy=6\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}x+y=5,\\ xy=6.\end{cases}$$

Каждую из систем можно решить, например, методом подстановки. Заметим, что первая система не имеет решений.

Ответ: (2; 3), (3; 2).

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Имеет ли решения уравнение $x^2+(y+1)^2=0$?

2. Может ли пара положительных чисел быть решением уравнения $(x+6)(y-4)=0$?

3. Равносильны ли системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ x+3y=7 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ -x-3y=-7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x=3y=24, \\ x-y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=4, \\ x+2y=6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2y=4, \\ x+2y=6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ 4x+y=3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+y=1, \\ -4x-y=3? \end{cases}$

4. Выразите переменную y через переменную x, если:

а) $5x+5y=0;$ б) $x-y=7{,}5;$ в) $x-\frac{1}{5}y=4.$

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x=2, \\ 3x-y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=7, \\ y=\frac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y=3, \\ y(x-2y)=6. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y=3x, \\ y-x=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2=16, \\ y=5x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|=1, \\ y=3x+2. \end{cases}$

7. Имеет ли решение система:

а) $\begin{cases} x^2+(y+1)2=0, \\ x+3y=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=0, \\ x+3y=3\ ? \end{cases}$

8. Найдите $x+y$, если $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ x-y=2. \end{cases}$

9. Найдите xy, если $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{10}{11}, \\ x+y=5. \end{cases}$

10. Найдите xy, если $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y = 8. \end{cases}$

11. Найдите $x^2 + y^2$, если $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 30. \end{cases}$

12. Докажите, что система $\begin{cases} 9x^2 - 25y^2 = 100, \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ не имеет решения.

13. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 5x, \\ x - y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = -2xy + 9x, \\ x + y = 3. \end{cases}$

14. Составьте систему уравнений по условию:

а) сумма чисел x и y равна 36, а их разность равна 14;

б) разность чисел a и b равна 28, а треть первого числа на 8 больше половины второго числа.

Задание 2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 12, \\ 3x - 5y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y = 11, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 5y = 540, \\ x + y = 138; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 2y = 16, \\ 5x + 3y = -5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x + 5y = -11, \\ 3x + 2y = -13; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x + 3y = 7, \\ 2x - 5y = 9; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 5x + 4y = -22, \\ 3x - 2y = 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0, \\ 5y - x - 6 = 0. \end{cases}$

Задание 3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5 - (x - 2y) = 13 - 4y, \\ 2x - 3y + 3 = -2(y - 3x); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} = 2, \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = -3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{9} - \dfrac{x-y}{3} = 2, \\ \dfrac{2x-y}{6} - \dfrac{3x+2y}{3} = -20; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 8(a-3b)+5b = 7a-12, \\ 3(a-9b)+9a = 46+11b; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} = 3, \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{8}{3}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{5a-1}{4} - \dfrac{3b-1}{2} = 5, \\ \dfrac{9a-17}{2} + \dfrac{5b+1}{3} = 16; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x-2-\dfrac{5x-3y}{7} = y-\dfrac{9y+11}{14}, \\ x-\dfrac{2y-5}{5} = 2y-3-\dfrac{4y-3x}{2}; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x-\dfrac{3-y}{9} = y+3-\dfrac{5y-3x}{6}, \\ y-\dfrac{22+9x}{8} = x+1-\dfrac{3y-5x}{4}. \end{cases}$

Задание 4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+y=2, \\ x^2-xy+6x=-4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x-y=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2+y^2=2(xy+2); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2+3xy+y=11, \\ x-y=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y-x=3, \\ x^2+x+y=11; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x^2-xy+3y^2+2x-5y-4=0, \\ x+2y=4. \end{cases}$

Задание 5. Найдите множество решений системы:

а) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ \dfrac{x}{y}=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=y=2, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+x=1, \\ \dfrac{1}{x-y}=-2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x+y+\dfrac{1}{y}=8, \\ \dfrac{2x+y}{y}=7. \end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1.

1. Да; $x=0$, $y=-1$.
2. Да; например, $x=7$, $y=4$; $x=8$, $y=4$.
3. а) Да; б) да; в) нет; г) нет.
4. а) $y=-x$; б) $y=x+7{,}5$; в) $y=5x-20$.
5. а) $(2; -2)$; б) $(8; 0{,}5)$; в) $(7; 2)$.
6. а) $(3; 9)$; б) $\{(-4; -20), (4; 20)\}$; в) $\{(-1; 1), (1; 5)\}$.
7. а) $(0; -1)$; б) не имеет.
8. 8.
9. 5,5.
10. 15.
11. 61.

14. а) $\begin{cases} x+y=36, \\ x-y=14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a-b=28, \\ \dfrac{1}{3}a-\dfrac{1}{2}b=8. \end{cases}$

УЭ-2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СЛОЖЕНИЯ

Цель: знать и уметь применять метод алгебраического сложения при решении некоторых систем уравнений.

Теоретическая часть

Метод сложения применяется тогда, когда при почленном сложении левых и правых частей уравнения после их умножения на некоторые числа можно получить уравнение с одной переменной, которое легко решается.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Имеет ли решение уравнение:

а) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = -1$;

б) $(x + y)^2 + (y - 5)^2 = 0$?

2. Какая из пар чисел (–2; –1), (–1; 3), (3; –1), (–3; 1) является решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = -5, \\ y - x = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x + y = 5, \\ x + y = 2\ ? \end{cases}$

3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = -4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = 21. \end{cases}$

4. Укажите множество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -\dfrac{x}{2} + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x(x+y)=21, \\ y(x+y)=28; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x(x-y)=14, \\ y(x-y)=10. \end{cases}$

6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-y=0, \\ -x+y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=0, \\ 2x-4y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x-0\cdot y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0\cdot x+y=0, \\ 0\cdot x-0\cdot y=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=-4, \\ 0\cdot x+0\cdot y=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0, \\ 0\cdot x+0\cdot y=0. \end{cases}$

7. В какой точке пересекаются прямые $x+2y=0$ и $2x+9y=0$?

Задание 2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x-y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1x+2y=15, \\ -11x+10y=9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x-2y=6, \\ 7x+2y=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -8x+3y=1, \\ 8x+4y=20. \end{cases}$

Задание 3. Найдите множество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} -5x+2y=1, \\ -5x+4y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-5y=-22, \\ 3x+2y=18; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -8x+3y=7, \\ -4x-5y=7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}1a+0{,}2b=0{,}3, \\ 0{,}4a+0{,}5b=0{,}9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 1{,}2u-3{,}4v=12, \\ 2{,}5u+1{,}4v=25; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 0{,}5z-\dfrac{t}{3}=1, \\ \dfrac{2t}{3}+0{,}25z=8. \end{cases}$

Задание 4. Составьте уравнение вида $y=kx+b$, график которого проходит через точки:

а) $A(1;\,5)$, $B(2;\,3)$;

б) $C(2; 7)$, $D(-1; -11)$;

в) $M(2; 8)$, $N(-2; 14)$;

г) $P(5; 5)$, $Q(-10; -19)$.

Задание 5. График линейной функции проходит через точки $A(1; -2)$ и $B(-1; 4)$. Задайте эту функцию формулой.

Задание 6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{m}{4} + \dfrac{n}{4} = 2, \\ \dfrac{m}{6} + \dfrac{n}{3} = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{2p}{9} + \dfrac{q}{4} = 11, \\ \dfrac{q}{3} + \dfrac{5p}{12} = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{c+d}{3} + \dfrac{d}{5} = -2, \\ \dfrac{2c-d}{3} - \dfrac{3c}{4} = 1{,}5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{c+3}{2} - \dfrac{d-2}{3} = 2, \\ 4 = \dfrac{c-1}{4} + \dfrac{d+1}{3}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{1-2a}{5} + \dfrac{2-2b}{4} = -2, \\ \dfrac{3a+1}{5} - \dfrac{2+3b}{4} = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{15a-2b}{4} + \dfrac{3a+2b}{6} = 8, \\ \dfrac{b+3a}{3} - \dfrac{a-2b}{2} = 5. \end{cases}$

Задание 7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4(3x-2) - 2(y-3) = 20 - 2(7-4x), \\ 31 + 3(5x-3) = 2(6x-y) + 5(3+2y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+3)^2 - 2(x-2)^2 = (y+2)^2 - (y-3)^2, \\ 13y - 2x(4-x) = (2+x)^2 + (3-x^2); \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-3)(2+y) = (3+x)(y-4), \\ (3+x)(y-1) + (2+x)(y-3) = 10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{2a}{3} + \dfrac{2b+3a}{2} = 3a - \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{5b-a}{6} - \dfrac{7b-1}{8} = \dfrac{b-a+6}{4} - 1{,}5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{4b+11}{5} - \dfrac{3(2a-b)}{2(b-4)} = \dfrac{7+8b}{10}, \\ \dfrac{3a+4}{2} = \dfrac{3a+5b}{2(2a-3)} + \dfrac{3a-2}{2}. \end{cases}$

Задание 8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 4y + xy = 12, \\ 2x + xy - 2y = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3xy + 4y = 0, \\ 3xy + x - 3y = 1. \end{cases}$

Задание 9. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y - x = 4, \\ 3x^2 + y - 2x = -1. \end{cases}$

Задание 10. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 23 - 2y, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 2, \\ x^2 + 2xy + 5y^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 12x^2 + 2y^2 - 6x + 5y = 3, \\ 18x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 + (2y+1)x - 2 = 0, \\ x^3 + (y-3)x + 2 = 0. \end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1.

1. а) Нет; б) да (–5; 5).

2. а) $(-3; 1)$; б) $(-1; 3)$.

3. а) $\{(2; 1)\}$; б) $\{(1; 5)\}$; в) $\{(5; 2), (-5; -2), (-5; 2), (5; -2)\}$;

4. а) $\{(-2; -5)\}$; б) $\{(-3; 2)\}$; в) $\{(2{,}5; -0{,}5)\}$; г) $\{(6; 4)\}$.

5. а) $\{(-3; -4), (3; 4)\}$ (сложить почленно уравнения системы); б) $\{(-7; -5), (7; 5)\}$.

6. а) $\{(0; 0)\}$; б) $\{(2y; y) \mid y \in \boldsymbol{R}\}$; в) $\{(x; y) \mid x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}\}$; г) $\{(x; 0) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$; д) нет решений; е) $\{(x; y) \mid x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}\}$.

7. В точке $(0; 0)$.

УЭ-3. РЕШЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Цель: ознакомиться с некоторыми способами решения симметрических систем уравнений.

Теоретическая часть

Введем сначала понятие симметрического многочлена. Многочлен $P(x; y)$ называется **симметрическим**, если он не изменяется при замене переменной x на y и переменной y на x, т. е. если выполняется равенство $P(x; y) = P(y; x)$ для любых x и y. Например, симметрическими являются многочлены $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$, $x^2y + xy^2$ и др.

Система уравнений

$$\begin{cases} P(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0 \end{cases}$$

называется **симметрической**, если оба многочлена $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ являются симметрическими многочленами.

Заметим, что если пара чисел $(\alpha; \beta)$ является решением симметрической системы, то и пара чисел $(\beta; \alpha)$ также является ее решением.

Простейшим примером симметрической системы является система вида

$$\begin{cases} x - y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Данную систему удобно решать не методом подстановки, а методом, основанным на следующем утверждении:

если t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения $t^2 - at + b = 0$, то система $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases}$ имеет два решения: $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$ и не имеет других решений.

В самом деле, пусть t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения $t^2 - at + b = 0$, тогда по теореме Виета

$$t_1 + t_2 = a \text{ и } t_1 \cdot t_2 = b,$$

а следовательно, $t_1 + t_2 = a$ и $t_1 \cdot t_2 = b$ — истинные числовые равенства, т. е. пары чисел $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$ являются решениями системы $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$

Воспользовавшись методом от противного, можно доказать, что рассматриваемая система уравнений других решений не имеет (докажите самостоятельно).

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = -1. \end{cases}$$

Решение. Составим вспомогательное квадратное уравнение

$$t^2 - 4t - 1 = 0$$

и найдем его корни:

$$t = 2 \pm \sqrt{5},$$

$$t = 2 - \sqrt{5} \text{ или } t = 2 + \sqrt{5}.$$

Значит, решениями данной системы уравнений будут пары чисел $(2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5})$ и $(2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5})$.

Ответ: $(2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5})$, $(2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5})$.

Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Очевидно, что данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x + (-y) = a, \\ x(-y) = -b. \end{cases}$$

Составляем вспомогательное квадратное уравнение

$$t^2 - at - b = 0.$$

Если найдем его корни t_1 и t_2, то решениями исходной системы соответственно будут пары чисел $(t_1; -t_2)$ и $(t_2; -t_1)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 18. \end{cases}$$

Решение. Представим данную систему в виде

$$\begin{cases} x + (-y) = 7, \\ x(-y) = -18. \end{cases}$$

Из вспомогательного уравнения $t^2 - 7t - 18 = 0$ находим $t_1 = -2$, $t_2 = 9$. Тогда

$$\begin{cases} x = -2, \\ -y = 9 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 9, \\ -y = -2, \end{cases}$$

откуда получаем решение системы $(-2; -9)$, $(9; 2)$.

Ответ: $(-2; -9)$, $(9; 2)$.

Для решения других симметрических систем уравнений часто используют прием, основанный на введении новых переменных u и v с помощью равенств

$$u = x + y,\ v = xy,$$

где $x + y$ и xy — так называемые элементарные симметрические многочлены.

Можно доказать, что каждый симметрический многочлен $P(x; y)$ может быть записан как многочлен от новых переменных u и v. Например:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v.$$

Новая система уравнений (относительно u и v), как правило, решается проще, чем исходная. Решив ее, можно найти решения $(x; y)$ исходной системы, учитывая, что $x + y = u$, а $xy = v$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^2 + y^2 = 14. \end{cases}$$

Решение. Система является симметрической. Запишем ее в виде

$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ (x + y)^2 - 2xy = 14. \end{cases}$$

Заметим, что симметрическая система упрощается при замене переменных по формулам $x + y = u$, $xy = v$. Поэтому в данном случае, полагая $x + y = u$, $xy = v$, получим:

$$\left(\begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 - 2v = 14 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} v = 5 - u, \\ u^2 - 2(5 - u) - 14 = 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} v = 5 - u, \\ u^2 + 2u - 24 = 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} v = 5 - u, \\ \left[\begin{array}{l} u = -6, \\ u = 4 \end{array}\right. \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} u = -6, \\ v = 11 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u = 4, \\ v = 1 \end{cases}\right).$$

Таким образом, приходим к совокупности систем относительно переменных x и y:

$$\begin{cases} x+y=-6, \\ xy=11 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=4, \\ xy=1. \end{cases}$$

Для первой системы вспомогательное квадратное уравнение $t^2+6t+11=0$ не имеет решений, а значит, не имеет решений и система.

Для второй системы $t^2-4t+1=0$. Решив это уравнение, получим $t=2+\sqrt{3}$ или $t=2-\sqrt{3}$.

Отсюда

$$x=2+\sqrt{3} \text{ и } y=2-\sqrt{3} \text{ или } x=2-\sqrt{3} \text{ и } y=2+\sqrt{3}.$$

Ответ: $(2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.

Практическая часть

Задание 1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=22; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=18; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=5, \\ xy=14; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2y-x=2, \\ 2xy=3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x-3y=5, \\ 5xy=-2. \end{cases}$

Задание 2. Двумя способами решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^2y^2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2-y^2=40, \\ xy=21; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2-y^2=21, \\ xy=10. \end{cases}$

Задание 3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 - xy = 44, \\ xy = -24. \end{cases}$

Задание 4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ x + y + xy = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x+y) = 30; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(x+y) - xy = 5, \\ xy - x - y = -1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2xy + y = 10, \\ x - 2xy + y = -2. \end{cases}$

Задание 5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x + y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2 y + xy^2 = 30; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + xy + y = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ (x^2 + y^2)(x+y) = 65. \end{cases}$

Задание 6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 481, \\ x^2 + y^2 + xy = 37. \end{cases}$

Задание 7. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = -\dfrac{13}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 y + y^2 x = 20, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1.

а) $\{(5+\sqrt{3}; 5-\sqrt{3}), (5-\sqrt{3}; 5+\sqrt{3})\}$; б) $\{(2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}), (2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})\}$; в) $\{(6; 3), (-3; -6)\}$; г) $\{(7; 2), (-2; -7)\}$.

К заданию 2.

а) $\{(-1; -2), (-1; 2), (1; -2), (1; 2), (-2; -1), (-2; 1), (2; -1), (2; 1)\}$; б) $\{(-1; -2), (1; 2)\}$; д) $\{(-7; -3), (7; 3)\}$.

К заданию 3. а) $\{(5; 3), (-5; -3), (3; 5), (-3; -5)\}$.

К заданию 4. а) $\{(1; 2), (2; 1)\}$; б) $\{(2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1)\}$.

К заданию 5. а) $\{(2; 3), (3; 2)\}$; б) $\{(2; 3), (3; 2), (1; 5), (5; 1)\}$.

К заданию 6. а) $\{(1; 2), (2; 1), (-3; 1), (1; -3)\}$; б) $\{(-3; -4), (-4; -3), (3; 4), (4; 3)\}$.

К заданию 7. а) $\{(4; 6), (6; 4)\}$; б) $\{(-10; 15), (15; -10)\}$;
г) $\left\{(1; 4), (4; 1), \left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}; \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right), \left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)\right\}$.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ОДНОРОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Цель: научиться решать системы, содержащие однородные многочлены.

Теоретическая часть

Понятие однородного многочлена. Напомним, что многочлен от двух переменных x и y называют **однородным многочленом** степени k, если одночлены, суммой которых он является, имеют одну и ту же степень, равную k. Например, многочлен $x^2-7xy+5y^2$ является однородным многочленом от x, y второй степени. Под **однородным уравнением** понимают уравнение, левая и правая части которого представляют собой однородные многочлены.

Решение систем, содержащих однородные многочлены. Пусть задана система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

в которой одно из уравнений является однородным уравнением степени k, где $k \in \boldsymbol{N}$. Рассмотрим примеры.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение заданной системы — однородное уравнение второй степени. Решим его как квадратное относительно переменной x с параметром y:

$$x = \frac{3y \pm \sqrt{9y^2 - 8y^2}}{4},$$

откуда получаем: $x = y$, $x = 0{,}5y$.

Значит, данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = y, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 0{,}5y, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8. \end{cases}$$

Системы этой совокупности легко решаются подстановкой значения x из первого уравнения во второе (решение проведите самостоятельно).

Ответ: $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Практическая часть

Задание 1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y^2 - 2xy = -15, \\ x^2 - xy + y^2 = 21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 6y^2 = 5xy, \\ 3x^2 + 2xy - y^2 = 15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 28, \\ -3x^2 + 3xy + y^2 = 28; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 0, \\ -5x^2 + 3xy + 2y^2 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ -x^2 + xy + y^2 = 5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 2, \\ -5x^2 - 2xy + y^2 = -2. \end{cases}$

Задание 2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} -5x^2 + y^2 = -1, \\ 7x^2 + 3xy = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^3 - x^3 = -19, \\ xy(x - y) = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy - y^2 = -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2, \\ y^2 + xy = 4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y^3 - x^3 = -7, \\ xy^2 + x^2y = 6. \end{cases}$

Задание 3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 = 0, \\ 3y^2 - xy^2 = 8x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 3y^2 = 1, \\ 2x^2 - xy + y^2 = 2. \end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\{(3\sqrt{3}; \sqrt{3}), (-3\sqrt{3}; -\sqrt{3}), (4; 5), (-4; -5)\}$; б) $\left\{(2; 1), (1; 2), \left(\frac{3\sqrt{30}}{8}; \frac{\sqrt{30}}{8}\right), \left(-\frac{\sqrt{30}}{8}; -\frac{\sqrt{30}}{8}\right)\right\}$; г) $\{(0; 0)\}$.

К заданию 2. в) $\{(2\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-2\sqrt{2}; \sqrt{2}), (1; 3), (-1; -3)\}$; е) $\{(2; 1)\}$.

К заданию 3. а) $\left\{(0; 0), (2; 4), (1; 2), \left(\frac{1}{3}; 1\right), \left(\frac{8}{3}; 8\right)\right\}$; б) $\{(1; 0), (-1; 0), (1; 1), (-1; -1)\}$.

УЭ-5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Цель: научиться применять специальные приемы решения систем уравнений.

Теоретическая часть

Рассмотрим некоторые системы уравнений, для решения которых приходится применять специальные приемы.

Почленное сложение и вычитание уравнений системы. Мы применили этот прием при решении систем линейных уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 5y^2 = -2, \\ 3x^2 + 2xy + y^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Сложив почленно уравнения системы, получим однородное уравнение второй степени $4x^2 - 4y^2 = 0$, т. е.

$$(x+y)(x-y) = 0.$$

Значит, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - 2xy - 5y^2 = -2. \end{cases}$$

Решим эту совокупность.

Ответ: $(-1;\ 1),\ (1;\ -1),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Почленное умножение и деление уравнений системы. Использование этого приема основано на следующем утверждении:

если a и b — действительные числа, отличные от нуля $(ab \neq 0)$, то системы

$$\begin{cases} f(x,y)=a, \\ g(x,y)=b, \end{cases} \begin{cases} f(x,y)\cdot g(x,y)=ab, \\ g(x,y)=b, \end{cases} \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{a}{b}, \\ g(x,y)=b \end{cases}$$

попарно равносильны.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x^3+x^2y+y^2x=14. \end{cases}$$

Решение. Разложив выражение x^3-y^3 на множители и вынеся x за скобки в левой части второго уравнения системы, получим

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=7, \\ x(x^2+xy+y^2)=14. \end{cases}$$

Разделив почленно первое уравнение на второе, перейдем к следующей системе:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=7, \\ \dfrac{x-y}{x}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Далее получим

$$\begin{cases} x=2y, \\ 8y^3-y^3=7, \end{cases}$$

откуда $x=2, y=1$.

Ответ: (2; 1).

Практическая часть

Задание 1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^3y + xy^3 = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

Задание 2. Площадь прямоугольного треугольника равна 90 см^2. Сумма площадей квадратов, построенных на его катетах, равна 369 см^2. Найдите катеты треугольника.

Задание 3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 68 см. Площадь его равна 960 см^2. Найдите катеты треугольника.

Задание 4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ y^2 + xy = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y = 0{,}75, \\ y^2 + x = 0{,}75; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + xy = 4y, \\ y^2 + xy = 4x. \end{cases}$

Задание 5. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + xy = 0, \\ x - y - xy = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x^2 - 2xy = -1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ xy + 4y^2 = 7. \end{cases}$

Задание 6. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y = 5, \\ 2x^2 - xy - 3x - y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 2, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = -22; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y = -10, \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y = -5. \end{cases}$

Задание 7. Разделив почленно первое уравнение на второе, решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

Задание 8. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy^2 = 2, \\ x^2 y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy^2 = 50, \\ x^2 y = 20. \end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\{(2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2)\}$; г) $\{(0; 0)\}$.

К заданию 2. 15 см; 12 см.

К заданию 3. 60 см; 32 см.

К заданию 4. а) $\{(-2; -3), (2; 3)\}$; б) $\{(-2; 1), (2; -1)\}$; в) $\{(-1,5; 1,5), (0,5; -0,5)\}$.

К заданию 5. в) $\{(-2; -5), (5; 2)\}$; г) $\{(1; 1)\}$; е) $\{(12; -3,5), (3;1), (-12; 3,5), (-3; -1)\}$.

К заданию 6. а) $\{(-1; y), y \in \boldsymbol{R}, (2; -1)\}$; г) $\{(2; -5), (3; 2)\}$.

К заданию 7. а) $\{(2; -1), (-1; 2)\}$; б) $\{(3; -1), (1; -3)\}$.

К заданию 8. а) $\{(2; 1)\}$; б) $\{(2; 5)\}$.

УЭ-6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Цель: научиться применять приемы решения систем уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.

Теоретическая часть

Рассмотрим на конкретных примерах некоторые приемы решения систем, содержащих переменные под знаком модуля.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x| + y = 4, \\ x + 3|y| = 6. \end{cases}$$

Решение. Применим прием перебора случаев: 1) $x \geq 0$, $y \geq 0$;

2) $x \geq 0, y < 0$; 3) $x < 0, y \geq 0$; 4) $x < 0, y < 0$. Раскрывая знак модуля, исходную систему заменяем совокупностью систем, равносильных ей:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y = 4, \\ x + 3y = 6 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x \geq 0, \\ y < 0, \\ x + y = 4, \\ x - 3y = 6 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ y \geq 0, \\ -x + y = 4, \\ x + 3y = 6 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \\ -x + y = 4, \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

Решим совокупность.

Ответ: (3; 1), (–1,5; 2,5), (–9; –5), (4,5; –0,5).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 6 + |x - 2|, & (1) \\ |x - 2| + |y - 4| = 2. & (2) \end{cases}$$

Решение. 1-й способ. Воспользуемся методом подстановки:

$$\begin{cases} |x - 2| = y - 6, \\ |x - 2| + |y - 4| = 2; \end{cases} \begin{cases} |x - 2| = y - 6, \\ y - 6 + |y - 4| = 2. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы

$$y - 6 + |y - 4| = 2.$$

Оно равносильно системе:

$$\left(\begin{cases} 8 - y \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} y - 4 = 8 - y, \\ y - 4 = -8 + y \end{array} \right. \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y \leq 0, \\ y = 6 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (y = 6).$$

Из уравнения (1) получим $x = 2$. Таким образом, решением системы является единственная пара чисел (2; 6).

2-й способ. Из первого уравнения системы следует, что $y \ge 6$, тогда $|y-4| \ge 2$, а значит, $|y-2| = 0$, откуда получим $x = 2$, и, следовательно, $y = 6$.

Ответ: (2; 6).

Практическая часть

Задание 1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 3|y| - x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3|x| + 2y = 1, \\ 2|x| - y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x| + y = 5, \\ x + 4y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2|x| + 3y = 8, \\ 2x - |y| = -4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} |x-2| + y^2 = 2 - x, \\ y = x^2 + 2x - 15; \end{cases}$ е) $\begin{cases} |y-1| + x^2 = 1 - y, \\ x = y^2 - 2y - 8. \end{cases}$

Задание 2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 37, \\ |x - y| = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 9, \\ |2x + y| = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ |x - y| = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$

Задание 3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3y^2 - x^2 = 7, \\ |x + y + 1| = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2 + xy = 16, \\ |2x + y + 3| = 3. \end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\{(2; 1), (5; -2)\}$; б) $\{(1; -1), (-1; -1)\}$; е) $\{(0; -2)\}$.
К заданию 2. а) $\{(6; -1), (1; -6), (-1; 6), (-6; 1)\}$.
К заданию 3. а) $\{(5; -4), (-1; 2), (-11; 8), (-1; -2)\}$.

УЭ-7. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Цель: научиться применять геометрическую интерпретацию решения системы уравнений с двумя переменными для наглядной иллюстрации аналитического решения, определения количества ее решений, нахождения точных или приближенных решений.

Теоретическая часть

Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} f_1(x; y) = 0, \\ f_2(x; y) = 0. \end{cases}$$

Построим на координатной плоскости *Oxy* графики этих уравнений. Очевидны следующие утверждения:

1) если графики уравнений не пересекаются, то данная система решений не имеет;

2) если графики уравнений пересекаются, то координаты каждой точки их пересечения являются решением данной системы.

Геометрической интерпретацией решения системы уравнений пользуются для наглядной иллюстрации аналитического решения, определения количества ее решений, нахождения точных либо приближенных решений.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y = 25 \end{cases}$ аналитическим способом и дать геометрическую интерпретацию ее решения.

Решение. Для решения системы аналитическим способом воспользуемся методом подстановки:

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ (25 - 7y)^2 + y^2 = 25; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ 625 - 350y + 49y^2 + y^2 - 25 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ y^2 - 7y + 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 25 - 7y, \\ y = 3 \text{ или } y = 4. \end{cases}$$

Итак, решениями системы являются пары чисел (4; 3) и (–3; 4).

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения данной системы уравнений с двумя переменными. Графиком первого уравнения системы является окружность радиусом, равным 5 единицам, с центром в начале системы координат (рис. 15), а графиком второго уравнения — прямая AB, которая строится по двум любым ее точкам. Графики этих уравнений пересекаются в точках $A(-3; 4)$ и $B(4; 3)$. Значит, координаты этих точек $\big((-3; 4)$ и $(4; 3)\big)$ являются решениями системы уравнений с двумя переменными.

Ответ: (–3; 4), (4; 3).

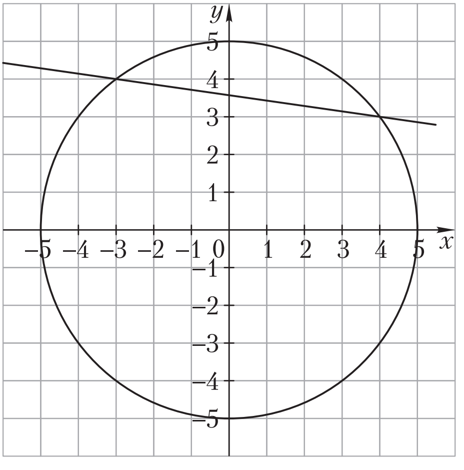


Рис. 15

Практическая часть

Задание 1. Решите аналитически систему уравнений и дайте геометрическую интерпретацию решения:

а) $\begin{cases} x-5=y, \\ xy=14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-4)(y-3)=0, \\ x+y=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=5, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x-5)(y-3)=0, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y=0{,}5x, \\ x^2+y^2=36. \end{cases}$

Задание 2. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} xy=1, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ y=-0{,}5x^2+2? \end{cases}$

Задание 3. Найдите графически координаты точек пересечения:

а) окружности с центром в точке $A(-1;\,4)$ и радиусом 3 и прямой, проходящей через точки $B(0;\,6)$ и $C(3;\,3)$;

б) двух окружностей, имеющих соответствующие центры в точках $O_1(-2;\,3)$ и $O_2(6;\,3)$ и радиусы $r_1=3, r_2=5$.

Задание 4. Решите аналитически систему уравнений и дайте геометрическую интерпретацию решения:

а) $\begin{cases} y=2x+1, \\ x^2+y^2-2x+4y=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=6x-8y, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

Задание 5. Найдите с помощью графиков число решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} y=|x|, \\ y=(x+7)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x}, \\ y=-x^2+2x+1. \end{cases}$

Задание 6. Найдите площадь фигуры, образованной пересечением множеств точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $x^2+y^2\le 16$ и $y\ge|x|$.

Задание 7. При каких значениях t система $\begin{cases} y = |x| + 2, \\ x^2 + (y - t)^2 = 1 \end{cases}$ имеет два решения?

Задание 8. Для каждого значения параметра t определите число решений системы:

а) $\begin{cases} y = 6 - x, \\ x^2 + y^2 = t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x - 4, \\ x^2 + y^2 = t. \end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\{(-2; -7), (7; 2)\}$; б) $\{(3; 5), (5; 3)\}$.
К заданию 2. а) 4; б) 2.
К заданию 3. а) $\{(-1; 7), (2; 4)\}$; б) $\{(1; 3)\}$.
К заданию 7. $t = 3$.

УЭ-8. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель: актуализация основных знаний, умений и навыков, полученных на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Понятие дробно-рационального уравнения. Алгебраическое уравнение называют **дробно-рациональным**, если его запись содержит хотя бы одну алгебраическую дробь, знаменатель которой не является многочленом нулевой степени.

1-й способ. Чтобы решить дробно-рациональное уравнение:

1) находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

2) заменяют данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;

3) решают полученное целое уравнение;

4) выполняют проверку, исключая из корней целого уравнения те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{36}{9x-x^2}-\frac{x-5}{9-x}=0.$$

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$\frac{1}{x}+\frac{36}{x(9-x)}-\frac{x-5}{9-x}=0.$$

Общий знаменатель дробей $x(9-x)$. Заменим данное уравнение целым и решим его:

$$9-x+36-x^2+5x=0.$$

Тогда $x^2-4x-45=0$, откуда $x_1=-5, x_2=9$.

Проверка. Если $x_1=-5$, то $-5(9-5)\neq 0$, и поэтому число -5 является корнем уравнения. Если $x_2=9$, то $9(9-9)=0$, число 9 не является корнем уравнения.

Ответ: -5.

2-й способ. Чтобы решить дробно-рациональное уравнение:

1) представляют его в виде $\frac{u(x)}{v(x)}=0$, где $u(x)$ и $v(x)$ — целые выражения;

2) заменяют уравнение $\frac{u(x)}{v(x)}=0$ равносильной ему системой $\begin{cases}u(x)=0,\\ v(x)\neq 0;\end{cases}$

3) решают уравнение $u(x)=0$;

4) для каждого корня уравнения $u(x)=0$ проверяют выполнимость условия $v(x)\neq 0$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}.$$

Решение. Преобразуя левую часть данного уравнения, получим:

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{x(x-3)}-\frac{3}{2(x+3)}=0;$$

$$\frac{2x-2(x+3)-3x(x-3)}{2x(x-3)(x+3)};$$

$$\frac{x^2-3x+2}{2x(x-3)(x+3)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ x(x-3)(x+3)\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \end{array}\right. \\ x(x-3)(x+3)\neq 0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 2.

Практическая часть

Задание 1. Найдите корни уравнения:

а) $4\left(\frac{x+1}{x^2}\right)^2+5\frac{x+1}{x^2}+1=0;$

б) $\left(\frac{2-x^2}{x}\right)^2-2\frac{x^2-2}{x}=-1;$

в) $\frac{x^4}{(2x+3)^2}-\frac{2x^2}{2x+3}+1=0.$

Задание 2. Решите уравнение, введя подстановку:

а) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5;$

б) $\dfrac{x^2-3x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x^2-3x}=2{,}5;$

в) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=3\dfrac{1}{3};$

г) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{5}{2}.$

Задание 3. Решите уравнение:

а) $x+\dfrac{1}{x}=7\dfrac{1}{7};$

б) $x+\dfrac{1}{x}=5{,}2;$

в) $\dfrac{x^2-1}{x+7}+\dfrac{x+7}{x^2-1}=2\dfrac{1}{2};$

г) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=4{,}25.$

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x-25}{100}-\dfrac{x-15}{110}=\dfrac{110}{x-15}-\dfrac{100}{x-25};$

б) $\dfrac{x-49}{50}+\dfrac{x-50}{49}=\dfrac{49}{x-50}+\dfrac{50}{x-49}.$

Задание 5. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{1}{x^2+2x-3}+\dfrac{18}{x^2+2x+2}=\dfrac{18}{x^2+2x+1};$

б) $\dfrac{1}{2x^2-x+1}+\dfrac{3}{2x^2-x+3}=\dfrac{10}{2x^2-x+7};$

в) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1;$

г) $\dfrac{10}{1+x+x^2}=6-x-x^2;$

д) $\dfrac{4}{x^2-3x+2}-\dfrac{3}{2x^2-6x+1}+1=0;$

е) $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}.$

Задание 6. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$;

б) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1.$

Задание 7. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+10}=\frac{21}{20}$;

б) $\frac{29}{2x-5}-\frac{20}{x-2}-\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{x-1}=0.$

Задание 8. Решите уравнение:

а) $x\left(\frac{5-x}{x+1}\right)\left(x+\frac{5-x}{x+1}\right)=6$;

б) $20\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

Задание 9. Найдите множество корней уравнения:

а) $\frac{x^3-3x^2}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2}=0$;

б) $(3x+5)\cdot\frac{8x-1}{9x^2-25}=0$;

в) $\frac{16x^2-49}{81x^2-1}\cdot(1-9x)=0$;

г) $(x-3)(x+2)\cdot\frac{7}{x^2-4}=0$;

д) $\frac{5x+1}{x+3}\cdot\frac{3x-6}{x-2}=0$;

е) $(x^2-6x+9)\cdot\frac{-(x-2)}{x-3}=0.$

Задание 10. Решите уравнение:

а) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=0$;

б) $\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2-1=0.$

Ваш помощник

К заданию 1. а) -2; б) -2; 1; в) -1; 3.

К заданию 2. а) -1; 0,5; б) 1; 4; $\dfrac{7 \pm \sqrt{33}}{4}$; в) -6; 6; г) 1.

К заданию 3. а) 7; $\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{1}{5}$; в) -3; 5; $\dfrac{7 \pm \sqrt{73}}{4}$; г) $2 \pm \sqrt{3}$.

К заданию 4. а) -85; 125; б) 0; 99.

К заданию 5. а) -4; 2; -1 ± 2; б) $-0{,}5$; 1; д) 0; 3; е) -3; 1.

К заданию 6. а) -2; 0; б) 0; 1.

К заданию 7. а) -5; -11; $-8 \pm 2\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

К заданию 8. а)1; 2.

К заданию 9. а) 2; 3; б) 0,125; г) 3; е) 2.

К заданию 10. а) 0; б) -1; 2.

УЭ-9. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ЧИСЛА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Цель: приобрести прочные умения и навыки в решении задач на числа с помощью уравнений и их систем.

Теоретическая часть

1. Если двузначное число состоит из x десятков и y единиц, то его можно записать в виде $\overline{xy} = 10x + y$.

2. Если при делении натурального числа a на натуральное число b получается в неполном частном q и в остатке r, то $a = bq + r$.

Пример 1. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

Решение. Пусть $\overline{xy}$ — искомое число. Тогда, исходя из условия задачи, можно составить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 10x + y - 9 = 10y + x. \end{cases}$

Решая систему, находим $x = 3$, $y = 2$ ($x = -2$ не удовлетворяет условию). Итак, 32 — искомое число.

Ответ: 32.

Пример 2. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке будет 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

Решение. Пусть $\overline{xy}$ — данное двузначное число. Тогда

$$\begin{cases} 10x + y = 3xy + 9, \\ (x + y)^2 - xy = 10x + y. \end{cases}$$

Решив систему и отобрав нужные решения, найдем $x = 6$, $y = 3$. Значит, 63 — искомое число.

Ответ: 63.

Практическая часть

Задание 1. а) Если цифры некоторого двузначного числа переставить и полученное число сложить с искомым, то получится 77; если же искомое число разделить на число, полученное перестановкой цифр, то как в частном, так и в остатке получится 2. Найдите это число.

б) Двузначное число при делении на сумму его цифр дает в частном 4 и в остатке 3. Если же число, составленное из тех же цифр, записанных в обратном порядке, разделить на разность цифр единиц и десятков, то в частном получится 26 и в остатке будет 1. Найдите это число.

Задание 2. а) Найдите двузначное натуральное число, у которого число десятков на два больше числа единиц, если при делении этого числа на произведение его цифр в частном получится 2, а в остатке будет 16.

б) Найдите двузначное натуральное число, у которого число единиц на 2 больше числа десятков, если при делении этого числа на произведение его цифр в частном получится 2, а в остатке будет 5.

Задание 3. а) Сумма квадратов цифр некоторого трехзначного числа равна 74, а цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найдите это число, если известно, что разность между ним и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.

б) Сумма цифр некоторого трехзначного числа равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это число, если известно, что сумма трех попарных произведений цифр этого числа равна 31.

Задание 4. а) Среднее арифметическое двух положительных чисел на 6 больше половины меньшего из этих чисел, а среднее геометрическое их на 6 меньше большего числа. Найдите меньшее из этих чисел.

б) Среднее геометрическое двух положительных чисел на 12 меньше большего из этих чисел, а меньшее число на 8 меньше их среднего арифметического. Найдите большее из этих чисел.

Ваш помощник

К заданию 1. а) 52; б) 35.
К заданию 2. а) 64; б) 35.
К заданию 3. а) 813; б) 137.
К заданию 4. а) 3; б) 18.

УЭ-10. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ ПО СУШЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Цель: приобрести прочные умения и навыки в решении задач на движение по суше с помощью уравнений и их систем.

Практическая часть

Задание 1. а) Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, выехали одновременно два велосипедиста. Скорость первого на 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости второго, поэтому он прибыл в город B на 2 ч раньше. Найдите скорости обоих велосипедистов.

б) Расстояние между двумя станциями железной дороги 120 км. Первый поезд проходит это расстояние на 50 мин быстрее, чем второй. Скорость первого поезда больше скорости второго на 12 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите скорости обоих поездов.

Задание 2. а) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 90 км, и встретились через 3 ч. Найдите скорость каждого из них, если первый проехал до встречи расстояние, в 2 раза большее, чем второй.

б) Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 420 км, и встретились через 3 ч. Найдите скорость второго автомобиля, если скорость первого равна 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Задание 3. а) Два поезда выходят одновременно из пунктов A и B, расстояние между которыми 45 км, и встречаются через 20 мин. Поезд, вышедший из пункта A, прибывает в пункт B на 9 мин раньше, чем другой поезд в пункт A. Найдите скорость каждого поезда.

б) Два мотоциклиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 240 км, и через 3 ч встречаются. Не останавливаясь, они продолжают движение с той же скоростью, и первый прибывает в B на 2 ч 30 мин раньше, чем второй в A. Определите скорости каждого мотоциклиста.

Задание 4. а) Два мотоциклиста одновременно выезжают из пунктов A и B навстречу друг другу. После приезда в A и B соответственно они без остановки поворачивают и едут обратно. Первая встреча произошла в 30 км от A, а вторая — через 1 ч 12 мин после первой. Найдите скорость мотоциклиста, выехавшего из A.

б) Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 28 км. Через час езды они встретились и, не останавливаясь, продолжали ехать с той же скоростью. Первый прибыл в пункт B на 35 мин раньше, чем второй в пункт A. Найдите скорость каждого велосипедиста.

Задание 5. а) Автомобиль едет из пункта A в пункт B сначала 2 мин с горы, а затем 7 мин в гору. Обратный путь он проделывает за 15 мин. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

б) Автомобиль едет из пункта A в пункт B сначала 5 мин в гору, а затем 3 мин с горы. Обратный путь он проделывает за 16 мин. Во сколько раз быстрее автомобиль едет с горы, чем в гору?

Задание 6. а) Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два пешехода. Когда первый пешеход прошел четверть пути от A до B, второму до середины пути оставалось идти 1,5 км, а когда второй пешеход прошел половину пути от B до A, первый находился на расстоянии 2 км от второго. Найдите расстояние от A до B, если известно, что второй пешеход шел быстрее первого.

б) Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт B. Когда первый проехал треть пути, второму оставалось до середины пути ехать 2,5 км. Когда второй проехал половину пути, первый отставал от него на 3 км. Найдите расстояние от A до B.

Задание 7. а) Из пункта A в пункт B выехал грузовик. Через час из пункта A выехал легковой автомобиль. Через 2 ч после выезда он догнал грузовик и прибыл в пункт B на 3 ч раньше грузовика. Сколько времени грузовик ехал от A до B?

б) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Спустя 3 ч из пункта A в пункт B отправился мотоциклист. После обгона велосипедиста он за один час достиг пункта B. При этом он опередил велосипедиста на 1,5 ч. Сколько времени ехал велосипедист?

Задание 8. а) Расстояние AB пассажирский поезд проходит за 2 ч, а электричка — за 3 ч. Из A в B вышел пассажирский поезд, а из B в A одновременно с ним — электричка. Через какое время поезда встретятся?

б) Расстояние AB пассажирский поезд проходит за 2 ч, а электричка — за 3 ч. Из A в B вышел пассажирский поезд, а из B в A одновременно с ним — электричка. Через какое время после встречи поездов электричка прибудет в A?

Задание 9. а) Пешеход выходит из A, а велосипедист выезжает в это же время из B навстречу пешеходу. Встречаются они через 12 мин и продолжают движение. Велосипедист приезжает в A на 18 мин раньше, чем пешеход приходит в B. Сколько времени затратит на дорогу каждый из них?

б) Из A в B выехал велосипедист, а навстречу ему из B в A выбежал бегун и вышел пешеход. Отношение времен до встречи велосипедиста с бегуном и пешеходом равно 5 : 6. Известно, что бегун пробежал весь путь за 4 ч, а велосипедист проехал весь путь за 2 ч. За какое время прошел этот путь пешеход?

Ваш помощник

К заданию 1. а) $12\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $15\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. б) $48\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $36\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 2. а) $10\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $20\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. б) $60\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 3. а) $v_2 = 60\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $v_1 = 75\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. б) $48\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $32\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 4. а) $50\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. б) $12\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $16\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 5. а) В 7 раз. б) В 5 раз.

К заданию 6. а) 12 км. б) 30 км.

К заданию 7. а) 12 ч. б) 7,5 ч.

К заданию 8. а) 1 ч 12 мин. б) 1 ч 78 мин.

К заданию 9. а) 18 мин и 36 мин. б) 8 ч.

УЭ-11. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ЗАДЕРЖКУ В ПУТИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Цель: приобрести прочные умения и навыки в решении задач на задержку в пути с помощью уравнений и их систем.

Практическая часть

Задание 1. а) Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на $15\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите первоначальную скорость поезда.

б) Половину пути мотоциклист ехал со скоростью 45 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, затем задержался у переезда на 10 мин, после чего он увеличил скорость на 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, чтобы наверстать потерянное время. Какое расстояние проехал мотоциклист?

Задание 2. а) Расстояние между двумя пунктами поезд должен пройти за 10 ч. Пройдя первые 9 ч с намеченной скоростью, он снизил скорость на 7 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и прибыл в конечный пункт с опозданием на 6 мин. Найдите первоначальную скорость поезда.

б) Турист планировал идти от станции в деревню со скоростью 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. В середине пути он решил искупаться и для того, чтобы наверстать потерянные 30 мин, увеличил скорость на 1 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите расстояние от станции до деревни.

Задание 3. а) Поезд был задержан у семафора на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью, на 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ большей, чем полагалось по расписанию. Найдите скорость поезда по расписанию.

б) Поезд задержали на станции на 10 мин. Чтобы ликвидировать опоздание на перегоне в 175 км, поезд увеличил скорость на 5 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите скорость поезда по расписанию.

Ваш помощник

К заданию 1. а) Пусть x — скорость поезда по расписанию, $x+15$ — увеличенная скорость, тогда по условию задачи можем составить уравнение $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = 0{,}2$, решив которое, получаем $x = 60$. Итак, первоначальная скорость поезда 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 2. а) $77\ \frac{км}{ч}$; б) 12 км.

К заданию 3. а) $50\ \frac{км}{ч}$; б) $70\ \frac{км}{ч}$.

УЭ-12. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ ПО ВОДЕ

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

При решение задач данного типа следует помнить формулы:

$$v_{\text{по теч}} = v_{\text{соб}} + v_{\text{теч}},\ v_{\text{против теч}} = v_{\text{соб}} - v_{\text{теч}},$$

$$v_{\text{соб}} = \frac{v_{\text{по теч}} + v_{\text{против теч}}}{2}.$$

Пример. Катер проплыл 15 км по течению реки и 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет $4\ \frac{км}{ч}$.

Решение. Пусть собственная скорость катера $x\ \frac{км}{ч}$. Тогда $\frac{15}{x+4} + \frac{4}{x} = 1$; $x^2 - 15x - 16 = 0$; $x_1 = 16$; $x_2 = -1$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $16\ \frac{км}{ч}$.

Практическая часть

Задание 1. а) Два теплохода, скорости которых в стоячей воде одинаковы, выходят навстречу друг другу из находящихся на реке пунктов A и B. Дойдя до A и B соответственно, они поворачивают и идут обратно. Известно, что время до второй встречи в 3,5 раза больше, чем время до первой встречи. Во сколько раз скорость течения реки меньше скорости теплоходов в стоячей воде?

б) Два теплохода одновременно отходят от пристаней A и B, расположенных на реке, навстречу друг другу. Течение реки постоянно и направлено от A к B. Встречаются теплоходы через 4 ч. Определите, сколько времени затратит на путь каждый теплоход, если известно, что в B теплоход прибыл на 6 ч раньше, чем в A.

Задание 2. а) Турист на лодке проплыл против течения 10 км и по течению 18 км, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения реки равна 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

б) Моторная лодка прошла 45 км по течению реки и 22 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения реки равна 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Задание 3. а) Из пункта A вниз по реке пустили плот. Через час вслед за ним вышел катер, догнал плот и вернулся обратно, затратив на весь путь 24 мин. Найдите скорость катера в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Из пункта A вниз по реке пустили плот. Одновременно с ним из пункта B вышел катер, встретил плот и вернулся обратно, затратив на весь путь 50 мин. Найдите скорость катера в стоячей воде, если известно, что расстояние от A до B по реке составляет 10 км, а скорость течения реки равна 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) Скорость течения реки меньше скорости теплоходов в 3 раза.

б) Теплоходы затратили 6 ч и 12 ч.

К заданию 2. а) Пусть $x\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость лодки в стоячей воде, тогда, зная расстояние, можем составить уравнение $\frac{10}{x-2}+\frac{18}{x+2}=4.$ Решая его, получаем $x=7\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

б) Пусть $x\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость лодки в стоячей воде, тогда, зная расстояние, можем составить уравнение $\frac{45}{x+2}+\frac{22}{x-2}=5.$ Решая его, получаем $x=13\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 3. а) $18\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; б) $20\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

УЭ-13. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Цель: научиться решать задачи на движение по окружности.

Теоретическая часть

В задачах на движение тел по окружности нужно иметь в виду следующее.

1. Если два тела начали двигаться из одной точки в одном направлении с разными скоростями, то тело с большей скоростью может догнать другое тело, если разница между пройденными расстояниями будет равна длине окружности.

2. Если два тела начали двигаться из одной точки в разных направлениях с разными скоростями, то в момент их встречи сумма пройденных расстояний равна длине окружности.

Пример 1. Две точки движутся по окружности длиной 2 м. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 20 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 50 с. Определить скорости точек.

Решение. Пусть скорости точек соответственно составляют $x\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и $y\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а $x > y$. Тогда

$$\begin{cases} 20x + 20y = 2, \\ 50x - 50y = 2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 0{,}07$, $y = 0{,}03$.

Ответ: $0{,}07\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $0{,}03\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Пример 2. По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 1 мин. Определить скорости точек.

Решение. Пусть первая точка проходит полный оборот за x с, а вторая — за y с. Тогда скорость первой точки составляет $\frac{60}{x}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{3600}{x}\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}$, а второй — $\frac{60}{y}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{3600}{y}\ \frac{\text{м}}{\text{мин}}$. Пусть $x < y$. Тогда из условия задачи следует, что $x - y = 5$.

Поскольку точки движутся в одном направлении и встречаются через 1 мин, то $\frac{3600}{x} - \frac{3600}{y} = 60$. Составим систему:

$$\begin{cases} y - x = 5, \\ \frac{3600}{x} - \frac{3600}{y} = 60. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x = 15$, $y = 20$. Значит, скорости точек соответственно равны $\frac{60}{15} = 4\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, $\frac{60}{20} = 3\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Ответ: $4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Практическая часть

Задание 1. а) По окружности длиной 30 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 60 с. Найдите скорости точек.

б) Два спортсмена бегают по круговой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если они начнут пробег с общего старта в одном направлении, то еще раз сойдутся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый спортсмен?

Задание 2. а) Две точки движутся по окружности длиной 12 м с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Определите скорости точек.

б) Две точки движутся с постоянной скоростью по окружности длиной 1 м. При движении в противоположных направлениях они встречаются через каждые 2 с. При движении в одном направлении из одной точки одна точка настигает другую через 6 с. Найдите их скорости.

Задание 3. а) Две точки движутся по окружности. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 6 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 30 с. Найдите, за сколько секунд каждая точка проходит окружность.

б) Две точки движутся по окружности. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Найдите, за сколько секунд каждая точка проходит окружность.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $1{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; б) $\frac{1}{80}$; $\frac{1}{90}$.

К заданию 2. а) $0{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $0{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; б) $\frac{1}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\frac{1}{6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

К заданию 3. а) 15 с; 20 с; б) 24 с; 40 с.

УЭ-14. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА РАБОТУ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

В задачах на работу за неизвестное, как правило, надо принимать производительность. Если x — производительность станка, то это означает число деталей в минуту, в час или в день. Бывают такие задачи, в которых не сказано, какая работа выполняется. В таких случаях всю работу заменяют единицей.

В задачах на трубы, из которых что-то льется, производительность обозначает объем жидкости, протекающей через трубу за единицу времени.

Итак, если k — производительность, t — время работы, A — объем выполненной работы, то $A = k \cdot t$.

Пример. Два подъемных крана, работая вместе, разгрузили баржу за 6 ч. За какое время может разгрузить баржу каждый кран, работая отдельно, если один из них может разгрузить на 5 ч скорее, чему другой?

Решение. Пусть первый кран самостоятельно разгрузит баржу за x ч, тогда второй — за $(x+5)$ ч. Если 1 — вся работа, то производительность первого крана составит $\frac{1}{x}$, второго — $\frac{1}{x+5}$. Поскольку оба крана разгружают баржу за 6 ч, то $6 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right) = 1$; $x^2 - 7x - 30 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = -3$ — не удовлетворяет условию задачи.

Итак, первый кран разгрузит баржу за 10 ч, а второй — за 15 ч.

Ответ: 10 ч; 15 ч.

Практическая часть

Задание 1. а) Рабочий за первый день изготовил треть всех деталей, за второй день — 70 % от количества деталей, изготовленных за первый день. За третий день были изготовлены оставшиеся 260 деталей. Сколько всего деталей изготовил рабочий за три дня?

б) Переводчик за первую неделю перевел половину книги, за вторую — 60 % от количества страниц, переведенных за первую неделю. За третью неделю было переведено 48 оставшихся страниц. Сколько всего страниц было переведено?

Задание 2. а) Насос выкачивает воду из бассейна за 1,5 ч. Проработав 15 мин, насос остановился. Определите объем бассейна, если в нем осталось 30 м^3 воды.

б) На прокладку траншеи требуется затратить 10 ч. Экскаватор проработал 8 ч, после чего ему осталось пройти 50 м. Найдите общую длину траншеи.

Задание 3. а) Два завода по плану должны были выпустить за месяц 360 станков. Первый завод выполнил план на 112 %, а второй — на 110 %. Вместе заводы выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод?

б) Бригада по плану должна изготовить 360 деталей. Первые 8 дней она перевыполняла дневной план на 20 %. В оставшиеся дни она перевыполняла план на 25 %. В результате бригада изготовила на 82 детали больше, чем требовалось по плану. Сколько дней работала бригада?

Задание 4. а) На машиностроительном заводе разработали новый тип деталей для генераторов. Из 875 кг металла изготавливают теперь на 3 детали нового типа больше, чем деталей старого типа из 900 кг. Какова масса деталей нового и старого типов, если две детали нового типа по массе меньше одной детали старого типа на 0,1 т?

б) Для восстановления церквей отливают колокола двух типов из одного и того же металла. Масса колокола первого типа 256 кг, второго типа — 400 кг. На все колокола второго типа ушло на 16 кг меньше металла, чем на все колокола первого типа. Определите, сколько отлито колоколов каждого типа, если всего использовано 18 416 т металла.

Задание 5. а) Швейная бригада по плану должна сшить 360 костюмов за определенное число дней. В рамках этого срока за первые 8 дней она перевыполняет дневное задание на 20 %, за остальные дни — на 25 %. В итоге бригада сшила на 82 костюма больше. Сколько дней она работала?

б) Обувная фабрика за первую неделю выполнила 20 % месячного плана, за вторую — 120 % от количества продукции, выработанной за первую неделю, а за третью неделю — 60 % продукции, выработанной за первые две недели. Определите месячный план выпуска обуви, если известно, что для его выполнения необходимо за последнюю неделю месяца изготовить 1480 пар обуви.

Ваш помощник

К заданию 1. а) 600 деталей; б) 240 страниц.
К заданию 2. а) 36 м^3; б) 250 м.
К заданию 3. а) 24 и 16 станков; б) 18 дней.
К заданию 5. а) 18 дней; б) 5000 пар.

УЭ-15. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ НА СМЕСИ И СПЛАВЫ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Цель: приобрести прочные умения и навыки в решении задач на смеси и сплавы с помощью уравнений и их систем.

Теоретическая часть

Пусть дан некоторый сплав, состоящий из веществ A, B и C, массы которых соответственно m_a, m_b, m_c. Масса всего сплава $M = m_a + m_b + m_c$. Величину, равную $\frac{m_a}{M}$, называют концентрацией вещества A в сплаве; $\frac{m_a}{M} \cdot 100\,\%$ — процентное содержание вещества A в сплаве.

Пример 1. Смешали 30%-й раствор соляной кислоты с 10%-м и получили 600 г 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение. Пусть 30%-го раствора было взято x г, а 10%-го — y г. Тогда $x + y = 600$. В первом растворе соляной кислоты содержится $0{,}3x$ г, во втором — $0{,}1y$, а в полученной смеси — $600 \cdot 0{,}15 = 90$ г.

Значит, $0{,}3x + 0{,}1y = 90$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 0{,}3x + 0{,}1y = 90, \end{cases}$$

откуда $x = 150$, $y = 450$.

Ответ: 150 г, 450 г.

Пример 2. Из бака, наполненного спиртом, отлили часть спирта и долили до прежнего объема водой, затем из бака отлили столько же литров смеси, сколько в первый раз отлили спирта, после чего в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта отлили из бака в первый и во второй раз, если в баке содержалось 64 л?

Решение. Пусть отлили из бака в первый раз x л спирта. Тогда в баке осталось $(64 - x)$ л спирта. После того как бак долили водой, в нем стало 64 л смеси. Значит, концентрация спирта в смеси составляет $\frac{64 - x}{64}$. Поскольку во второй раз отлили x л смеси, то спирта отлили $\frac{64 - x}{64} \cdot x$ л. Из условия следует, что из бака отлили $64 - 49 = 15$ л спирта, т. е. $x + \frac{64 - x}{64} \cdot x = 15$, откуда $x_1 = 8$, $x_2 = 120$ — не удовлетворяет условию задачи.

Во второй раз отлили $\frac{(64 - 8) \cdot 8}{64} = 7$ (л).

Ответ: 8 л, 7 л.

Практическая часть

Задание 1. а) Смешали 30%-й и 50%-й растворы серной кислоты и получили 45%-й раствор. Найдите отношение масс первоначально взятых растворов.

б) Соединили два сплава с содержанием цинка 30 % и 60 % и получили сплав, содержащий 40 % цинка. Найдите отношение масс исходных сплавов.

Задание 2. а) В первом сосуде находится 0,3 л 40%-го раствора кислоты, а во втором — 0,5 л 30%-го раствора той же кислоты. Какое количество 90%-го раствора кислоты нужно добавить в каждый сосуд, чтобы концентрации растворов стали одинаковыми, а количество раствора в первом сосуде стало вдвое меньше, чем во втором?

б) В первом сосуде находится 0,7л 20%-го раствора кислоты, а во втором — 0,3 л 10%-го раствора той же кислоты. Какое количество 80%-го раствора кислоты нужно добавить в каждый сосуд, чтобы концентрации растворов стали одинаковыми, а количество раствора в первом сосуде стало вдвое больше, чем во втором?

Задание 3. а) Имеется два раствора воды и иной жидкости. Взяли некоторое количество первого раствора, в котором 60 % воды, и долили $\frac{1}{2}$ л второго — получился раствор с 32%-м содержанием воды. Затем к тому же объему первого раствора добавили $\frac{3}{2}$ л второго, теперь воды оказалось 18 %. Сколько взяли литров первого раствора?

б) Имеется два раствора, содержащие воду и иную жидкость. В первом — 4 % воды. Сначала в емкость с первым раствором долили $\frac{1}{4}$ л второго, затем — еще $\frac{1}{2}$ л. В первом случае содержание воды составило 32 %, а во втором — 46 %. Найдите процентное содержание воды во втором растворе.

Задание 4. а) Имеется два раствора соли в воде, первый — 40%-й, второй — 60%-й. Их смешали, добавили 5 кг воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го и 60%-го растворов?

б) Имеется три слитка. Масса первого — 5 кг, второго — 3 кг, и каждый из них содержит 30 % меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56 % меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60 % меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание меди в нем.

Задание 5. а) Из двух сплавов, первый из которых содержал 1 кг, а второй — 3 кг серебра, получили новый сплав, содержащий 12 % серебра. Определите процентное содержание серебра в первом сплаве, если известно, что во втором оно было на 12 % больше, чем в первом.

б) Из двух сплавов, первый из которых содержал 8 кг меди, а второй — 10 кг, получили новый сплав, содержащий 36 % меди. Определите процентное содержание меди в первом сплаве, если известно, что во втором оно было на 8 % больше, чем в первом.

Ваш помощник

К заданию 1. а) 1 : 3; б) 2 : 1.
К заданию 2. а) 0,3л; 0,7л; б) 0,9 л; 0,5 л.
К заданию 3. а) 0,5 л; б) 60 %.
К заданию 5. а) 6 %; б) 32 %.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Об Омаре Хайяме

Омар Хайям (ок. 1048—1131) — персидский поэт, математик и философ. Математические сочинения, дошедшие до наших дней, характеризуют его как выдающегося ученого своего времени. В трактате «О доказательствах задач алгебры и алмукабулы» он дал систематическое изложение решения линейных, квадратных и кубических уравнений.

Им описаны всевозможные виды уравнений третьей степени и рассмотрен геометрический способ их решения.

Омар Хайям известен также своими четверостишиями (рубаи), которые имеют философский смысл. Приведем некоторые из них.

Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало.
Два важных правила запомни для начала:
Ты лучше голодай, чем что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало.

Ты при всех на меня накликаешь позор:
Я безбожник и пьяница, чуть ли не вор!
Я готов согласиться с твоими словами.
Но достоин ли ты выносить приговор?

Задача Омара Хайяма

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}=1\frac{1}{4}$.

Уравнения в форме ребусов

Восстановите цифры x, y и k, зная, что:

а) $\frac{x+y}{k}=\frac{\overline{xy}}{10}\ (y\neq 0)$;

б) $\frac{x+y}{k}=(1{,}2)x$.

Модуль 3 РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

УЭ-1. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ПОМОЩЬЮ СХЕМАТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ГРАФИКА КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Цель: приобрести умения и навыки в решении квадратных неравенств способом схематического изображения параболы.

Теоретическая часть

Примерами неравенств второй степени являются неравенства: $x^2+2x-48>0$, $2x^2-7x+6<0$, $x^2-1{,}6\geq 0$, $2x^2-x\leq 0$.

Неравенство, левая часть которого — многочлен второй степени, а правая часть равна нулю, называют **квадратным неравенством** или **неравенством второй степени с одной переменной**.

Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c<0$ называются **строгими**, а неравенства вида $ax^2+bx+c\geq 0$ и $ax^2+bx+c\leq 0$ — **нестрогими**.

Неравенства $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c>0$ можно решать с помощью схематического изображения графика квадратичной функции и нахождения промежутков, в которых эта функция принимает положительные или отрицательные значения.

Чтобы решить неравенство $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c<0$, необходимо выполнить следующие действия:

1) определить направление ветвей параболы по знаку коэффициента, стоящего при x^2;

2) найти нули функции или установить, что их нет;

3) схематически изобразить график функции $y=ax^2+bx+c$;

4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает положительные или отрицательные значения.

Заметим, что при рассмотренном способе решения неравенств не находят ни координаты вершины параболы, ни координаты точек пересечения параболы с осью Oy. Можно не изображать ось Oy.

Важно лишь знать, куда направлены ветви параболы — вверх или вниз — и есть ли нули функции.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + 13x - 7 < 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = 2x^2 + 13x - 7$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Выясним, как расположена эта парабола относительно оси Ox, найдя нули функции. Для этого решим квадратное уравнение $2x^2 + 13x - 7 = 0$:

$$D = 13^2 + 4 \cdot 2 \cdot 7 = 169 + 56 = 225, \sqrt{D} = 15;$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 15}{4}; x_1 = -7, x_2 = 0{,}5.$$

Значит, парабола пересекает ось Ox в двух точках, абсциссы которых равны -7 и $0{,}5$. Изобразим схематически график данной функции (рис. 16).

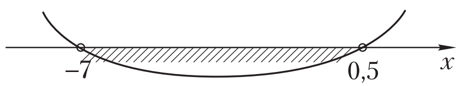
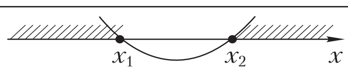
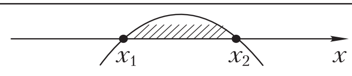
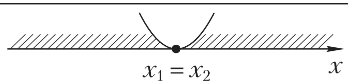
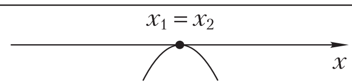


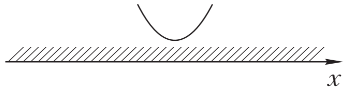
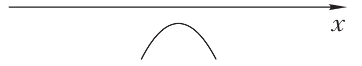
Рис. 16

Найдем, что функция принимает отрицательные значения, когда x принадлежит интервалу $(-7; 0{,}5)$. Следовательно, множеством решений неравенства $2x^2 + 13x - 7 < 0$ является интервал $(-7; 0{,}5)$.

Ответ: $(-7; 0{,}5)$.

Задание. Проанализируйте, каким может быть множество решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ в зависимости от знаков коэффициента a и дискриминанта D, пользуясь таблицей.

D \ a	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 Ответ: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	 Ответ: $(x_1; x_2)$
$D = 0$	 Ответ: $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	 Ответ: $\varnothing$

D \ a	$a > 0$	$a < 0$
$D < 0$	 Ответ: $\boldsymbol{R}$	 Ответ: $\varnothing$

Способ решения нестрогих квадратных неравенств. Графическое решение нестрогих неравенств вида $ax^2 + bx + c \geq 0$ или $ax^2 + bx + c \leq 0$ приводит к отысканию нулей квадратичной функции и промежутков, на которых функция принимает неотрицательные или неположительные значения.

Пример 2. Решить неравенство $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$.

Решение. Графиком функции $y = -2x^2 - 5x + 3$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдем нули этой функции, решив уравнение $-2x^2 - 5x + 3 = 0$:

$$D = 5^2 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 + 24 = 49, \sqrt{D} = 7;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{-4}; x_1 = -3, x_2 = 0{,}5.$$

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках с абсциссами -3 и $0{,}5$. Изобразим схематически график данной функции (рис. 17).

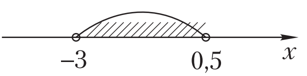


Рис. 17

Находим: $y \geq 0$ при $x \in [-3; 0{,}5]$. Значит, множество решений неравенства $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ — отрезок $[-3; 0{,}5]$.

Ответ: $[-3; 0{,}5]$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Какое неравенство называют неравенством второй степени?

2. В чем сущность решения неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ ($ax^2 + bx + c > 0$) с помощью схематического изображения графика квадратичной функции?

3. Как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси Ox, если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$: а) равен нулю; б) больше нуля; в) меньше нуля?

4. На рисунке 18, *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* показаны графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Определите знак: 1) коэффициента a; 2) дискриминанта D.

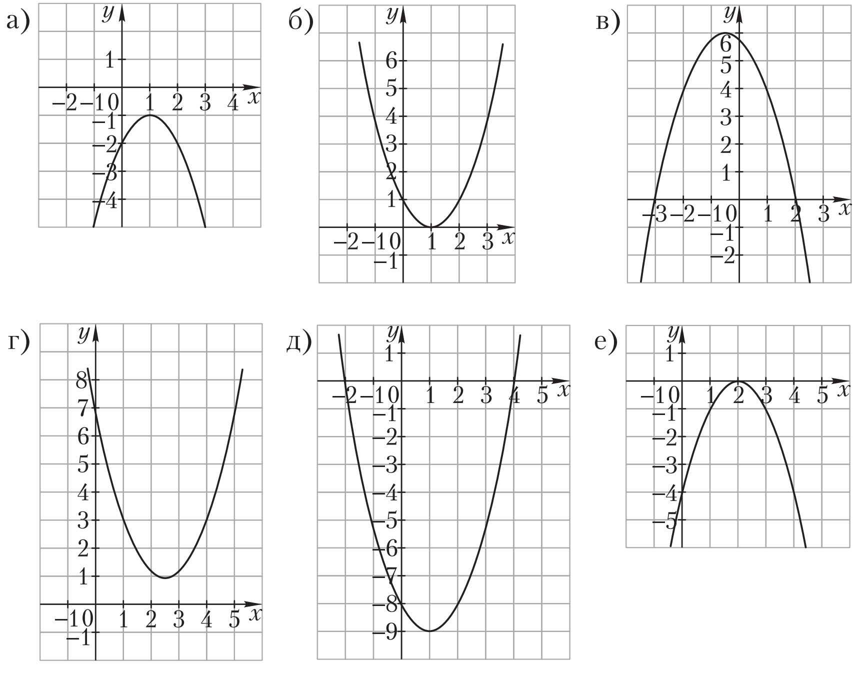


Рис. 18

5. Какие точки параболы играют существенную роль при нахождении промежутков, в которых функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные (положительные) значения?

6. На примере неравенств $x^2 - 3x + 2 > 0$ и $-3x^2 + 11x + 4 < 0$ покажите, как можно решать неравенства второй степени с помощью графика квадратичной функции.

7. Сформулируйте алгоритм решения квадратного неравенства, например вида $ax^2+bx+c<0$, с помощью схематического изображения параболы $y=ax^2+bx+c$.

Задание 2. С помощью графика функции $y=-x^2+4x-3$ укажите множество решений неравенства:

а) $-x^2+4x-3>0$;
б) $-x^2+4x-3\geq 0$;
в) $-x^2+4x-3<0$;
г) $-x^2+4x-3\leq 0$.

Задание 3. С помощью графика функции $y=x^2+2x-3$ укажите множество решений неравенства:

а) $x^2+2x-3<0$;
б) $x^2+2x-3\leq 0$;
в) $x^2+2x-3>0$;
г) $x^2+2x-3\geq 0$.

Задание 4. Решите неравенство:

а) $x^2-9x+20<0$;
б) $x^2-10x+25>0$;
в) $-x^2+6x-8>0$;
г) $x^2-10x+21<0$;
д) $x^2-8x+19>0$;
е) $-x^2+7x-12>0$.

Задание 5. Решите неравенство:

а) $2x^2+3x-2>0$;
б) $-3x^2-x+2\geq 0$;
в) $2x^2-x+4<0$;
г) $-3x^2+5x+2>0$;
д) $-2x^2+4x-5\leq 0$;
е) $-9x^2+24x+20>0$;
ж) $10x^2-29x+10\geq 0$;
з) $-4x^2+12x-9>0$.

Задание 6. Запишите какое-либо квадратное неравенство, решением которого является множество:

а) $(-\infty;4)\cup(5;+\infty)$;
б) $(4;7)$;
в) $\{10\}$;
г) $\boldsymbol{R}$.

Задание 7. На координатной прямой найдите длину числового отрезка, каждое число из которого является решением неравенства:

а) $x^2-x\leq 12$;
б) $x^2+9x\leq -14$;
в) $x^2-2x-15\leq 0$;
г) $x^2+8x-9\leq 0$.

Задание 8. Сколько целых чисел являются решениями неравенства:

а) $x^2-6x\leq 16$;

б) $2x^2+7x-15<0$;

в) $x^2 + 2x - 4 \le 0$;

г) $x^2 + \frac{1}{30}x - \frac{7}{5} \le 0$?

Задание 9. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2 - x - x^2}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{9x^2 - 3x - 2}}$?

Задание 10. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{-4x^2 = 2x - 0{,}25}$;

б) $y = \frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 + 2x + \frac{1}{3}}}$;

в) $y = \sqrt{-5x^2 + 3x + 2}$;

г) $y = \frac{4 - x}{\sqrt{9x^2 - 12x + 4}}$.

Задание 11. Решите уравнение:

а) $|2x^2 + x - 6| = 2x^2 + x - 6$;

б) $|2x^2 + x - 6| = -2x^2 - x = 6$;

в) $\sqrt{(3x^2 - 7x + 4)^2} = 3x^2 - 7x + 4$;

г) $\sqrt{(3x^2 - 7x + 4)^2} = -3x^2 + 7x - 4$.

Задание 12. Найдите значения параметра a, при которых не имеет действительных корней уравнение:

а) $ax^2 + 2ax + 4 = 0$;

б) $(2x - 1)(x + 1) = a$;

в) $(3x - 1)(x + 2) = a$;

г) $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$.

Задание 13. Найдите значения параметра a, при которых квадратное уравнение $(a - 2)x^2 + 3(a - 2)x + a + 3 = 0$:

а) имеет два различных действительных корня;
б) не имеет действительных корней;
в) имеет два равных корня;
г) имеет корень, равный 4.

Ваш помощник

К заданию 2. а) $(\ 1; 3)$; б) $[1; 3]$; в) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

К заданию 3. а) $(-3; 1)$; б) $[-3; 1]$; в) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

К заданию 4. а) $(\ 4; 5)$; д) $\boldsymbol{R}$.

К заданию 5. е) $\left(\frac{4-6\sqrt{6}}{3}; \frac{4+6\sqrt{6}}{3}\right)$; з) нет решений.

К заданию 7. а) 7; б) 5; в) 8; г) 10.

К заданию 8. а) 11; б) 6; в) 5; г) 3.

К заданию 9. а) $[-2; 1]$; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

К заданию 10. а) 0,25; б) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

К заданию 11. а) $(-\infty; -2] \cup [1{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; 1] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

К заданию 12. а) $[0; 4)$.

К заданию 13. в) 6.

УЭ-2. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

Цель: приобрести умения и навыки, необходимые для применения метода интервалов к решению квадратных неравенств.

Теоретическая часть

Понятие непрерывности функции. Заметим, что графики функций $y = x + 1$ (рис. 19, *а*) и $y = -x^2 + 4x - 3$ (рис. 19, *б*) можно изобразить, не отрывая ручки от бумаги, — одним непрерывным движением. Поэтому о них говорят, что это непрерывные функции, или «функция $y = x + 1$ непрерывна в каждой точке», «функция $y = -x^2 + 4x - 3$ непрерывна в каждой точке».

График функции $y = \frac{4}{x}$ (рис. 19, *в*) или график функции $y = \frac{|x|}{x}$ (рис. 19, *г*) нельзя изобразить, не отрывая ручки от бумаги: изобразив левую часть графика, придется оторвать ручку от бумаги, чтобы изобразить его правую часть. В этом случае говорят так: «функция $y = \frac{4}{x}$ (соответственно $y = \frac{|x|}{x}$) непрерывна в каждой точке интервала $(-\infty; 0)$ и интервала $(0; +\infty)$, а в точке O непрерывности нет». Эту точку называют точкой разрыва.

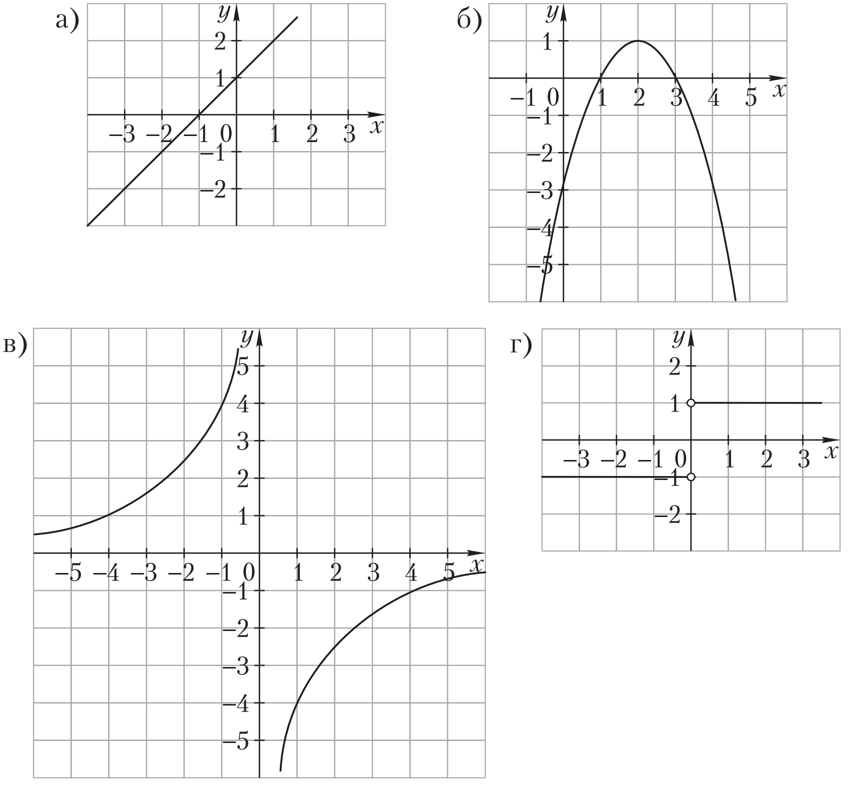


Рис. 19

Если график функции $y = f(x)$ можно изобразить сплошной линией, не отрывая ручки от бумаги на некотором интервале $(a; b)$, то говорят, что эта *функция непрерывна на интервале (a; b)*, или *непрерывна в каждой точке интервала (a; b)*.

Отметим одно важное свойство непрерывных функций: если на интервале $(a;\ b)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Метод интервалов. Для многих функций, в частности для квадратичной, область определения можно разбить на конечное число интервалов $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_n; +\infty)$, для каждого из которых истинно следующее: на этом интервале она непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет постоянный знак. На этом факте основан метод решения неравенств с одной переменной, называемый **методом интервалов**.

Рассмотрим схему применения метода интервалов для решения квадратных неравенств. Заметим, что решить неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ $(ax^2 + bx + c > 0)$ — это значит найти все значения x, при которых функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения (соответственно положительные значения). В зависимости от знака дискриминанта квадратного трехчлена могут представиться три случая.

1. $D > 0$. В этом случае имеется два различных действительных числа x_1 и x_2, которые являются нулями квадратичной функции. Они разбивают область определения на интервалы: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$, в каждом из которых значение этой функции имеет постоянный знак («+» или «–»).

Определять знак значения квадратичной функции на каждом из полученных интервалов можно по-разному:

1) знак значения функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком коэффициента a во всех точках интервалов $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$ и противоположен знаку коэффициента a во всех точках интервала $(x_1; x_2)$;

2) определить знак значения квадратичной функции в какой-либо «удобной» точке из каждого интервала;

3) перейти к другому аналитическому заданию этой функции:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — различные действительные числа, причем $x_1 < x_2$.

Найти знак значения этой функции в каждом из промежутков $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_n; +\infty)$ можно, пользуясь рисунком 20.

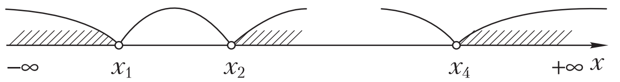


Рис. 20

Пример 1. Решить неравенство $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 + 2x - 3$. Ее нули: $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$.

На координатной прямой отметим нули этой функции (их отметим светлыми кружками, поскольку нули функции не являются решениями строгого неравенства) и выделим дугами интервалы (рис. 21, *а*).

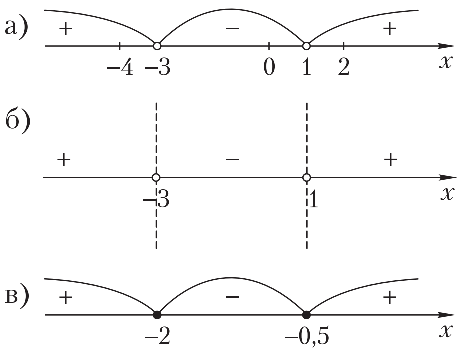


Рис. 21

Покажем различные способы определения знаков значений функции в этих интервалах:

1) так как $a = 1$, т. е. $a > 0$, то $y < 0$ во всех точках интервала $(-3; 1)$, $y > 0$ во всех точках интервалов $(-\infty; -3)$ и $(1; +\infty)$;

2) выберем из каждого интервала такое значение x, при котором проще всего вычислить значение y и соответственно определить его знак. В качестве таких чисел выберем, например, числа $x = -4$, $x = 0$ и $x = 2$. Находим: $y(-4) > 0$, $y(0) < 0$ и $y(2) > 0$. Отметив на рисунке полученные знаки, можно записать ответ: $(-3; 1)$;

3) функцию $y = x^2 + 2x - 3$ аналитически можно задать и так:

$$y = (x + 3)(x - 1).$$

Если $x > 1$, то $x + 3 > 0$, $x - 1 > 0$ и $y > 0$. На рисунке 21, *б* это отмечено знаком «+» справа от точки 1.

Если $-3 < x < 1$, то $x + 3 > 0$, $x - 1 < 0$ и $y < 0$. На рисунке 21, *б* это отмечено знаком «–» между точками –3 и 1.

Если $x < -3$, то $x + 3 < 0$, $x - 1 < 0$ и $y > 0$. На рисунке 21, *б* это отмечено знаком «+» слева от точки –3.

Итак, функция $y = x^2 + 2x - 3$ принимает отрицательные значения при $-3 < x < 1$. Значит, множество решений неравенства — интервал (–3; 1).

Ответ: (–3; 1).

Множеством решений нестрогого квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$ ($ax^2 + bx + c \leq 0$) является объединение двух множеств: множества решений строгого неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) и множества решений уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 2. Решить неравенство $2x^2 + 5x + 2 \leq 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = 2x^2 + 5x + 2$. Решив уравнение $2x^2 + 5x + 2 = 0$, находим ее нули: $x_1 = -2$, $x_2 = -0{,}5$.

Отметим на координатной прямой нули этой функции, т. е. точки –2 и –0,5 (их изобразим темными точками, поскольку нули функции включаются в решения нестрогих неравенств), и определим знаки ее значений в образовавшихся интервалах (рис. 21, *в*). Мы видим, что множество решений неравенства состоит из чисел –2 и –0,5 и чисел, заключенных между ними, т. е. представляет собой отрезок $[-2; -0{,}5]$.

Ответ: $[-2; -0{,}5]$.

2. $D = 0$. Тогда функция $y = ax^2 + bx + c$ обращается в нуль в единственной точке x_0.

Точка x_0 разбивает координатную прямую на два интервала: $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$. Знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком коэффициента a при всех $x \neq x_0$.

Пример 3. Решить неравенство $x^2 - 16x + 64 > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 16x + 64$. Решив уравнение $x^2 - 16x + 64 = 0$, находим, что $x_0 = 8$ является нулем этой функции. Значит, $x^2 - 16x + 64 > 0$ при любом x, не равном 8.

Ответ: $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

3. $D < 0$. Тогда квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ нулей не имеет. В этом случае при любых значениях x эта функция принимает значения одного знака, совпадающего со знаком коэффициента:

1) если $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при всех значениях x;

2) если $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при всех значениях x.

Важно знать и уметь применять следующие факты:

1) при $a > 0$ и $D < 0$ множеством решений квадратных неравенств $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c \geq 0$ является множество всех действительных чисел, а при $a < 0$ — пустое множество;

2) при $a > 0$ и $D < 0$ множеством решений неравенств $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c \leq 0$ является пустое множество, а при $a < 0$ — множество всех действительных чисел.

Пример 4. Решить неравенство $-3x^2 + x - 1 < 0$.

Решение. Вычислим дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства: $D = 1 - 4(-3)(-1) < 0$. Значит, квадратичная функция $y = -3x^2 + x - 1$ при всех x принимает значения одного знака, а именно отрицательного (этот знак совпадает со знаком первого коэффициента). Таким образом, решением данного квадратного неравенства является множество всех действительных чисел.

Ответ: $\boldsymbol{R}$.

Практическая часть

Задание 1. Решите неравенство:

а) $x^2 + 5x - 6 > 0$;
б) $-x^2 + x + 2 < 0$;
в) $x^2 + 3x + 7 > 0$;
г) $x^2 + 3x + 7 \leq 0$;
д) $-2x^2 + 5x + 3 > 0$;
е) $6x^2 - x - 2 < 0$;
ж) $2x^2 + 5x + 9 \leq 0$;
з) $4x^2 - 4x + 15 > 0$;
и) $49x^2 - 28x + 4 \leq 0$;
к) $4x^2 - 28x + 49 > 0$.

Задание 2. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$;
б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$.

Задание 3. При каких действительных значениях x многочлен $2x^2 + x - 3$ принимает значения меньше 7?

Задание 4. Найдите сумму всех целых решений неравенства:

а) $2x^2 - 9x + 4 < 0$;
б) $2x^2 - 3x - 2 \le 0$;
в) $-2x^2 + 5x - 2 \ge 0$;
г) $-2x^2 + 7x - 3 \ge 0$.

Задание 5. Найдите длину числового отрезка, каждое число из которого не является решением неравенства:

а) $x^2 - 5x + 6 > 0$;
б) $2x(x-1) > 2(x+1)$;
в) $2x^2 + 5x + 2 > 0$;
г) $x(x+1) > 2(1 - 2x - x^2)$.

Задание 6. Найдите произведение всех целых решений неравенства:

а) $(1-2x)^2 - (x+7)(x-1) - 5 \le 0$;

б) $(1-x)^2 + (x+1)(x-2) - 1 \le 0$.

Задание 7. Найдите сумму квадратов всех целых решений неравенства:

а) $\dfrac{x-1}{4} + \dfrac{3-2x}{2} > \dfrac{3x+x^2}{8}$;
б) $\dfrac{x^2 - x}{6} + x + 1 \le \dfrac{9+2x}{3}$.

Задание 8. Найдите количество целых решений неравенства $3x(x-2) < 2x(x+4) - (x-16) \le 0$, принадлежащих отрезку $[0; 9]$.

Задание 9. Найдите наибольшее целое отрицательное число, являющееся решением неравенства:

а) $(5x+7)(x-2) \le 21x^2 - 11x + 3$;
б) $(3-2x)(x-1) + (3x-1)(x+4) < 0$;
в) $10(2x+3)(x-3) + (7x+3)^2 \ge 20(x+3)(x-1)$.

Задание 10. Найдите четыре таких последовательных целых числа, что куб второго из них больше произведения трех остальных.

Задание 11. Решите уравнение:

а) $|x^2 + 3x - 4| = x^2 + 3x - 4$;

б) $|x^2 + 3x - 4| = 4 - 3x - x^2$;

в) $|2x^2 - 5x + 1| = 2x^2 - 5x + 1$;

г) $|x^2 - 7x + 12| = 7x - 12 - x^2$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $(-\infty; -6) \cup (1; +\infty)$; в) $\boldsymbol{R}$; г) нет решений.

К заданию 2. а) $[-3; 1]$.

К заданию 3. $(2,5; +\infty)$.

К заданию 4. а) 6; б) 3; в) 3; г) 6.

К заданию 5. а) 1; б) 3,5; в) 1,5; г) $2\frac{1}{3}$.

К заданию 6. а) 6; б) 0.

К заданию 7. а) 285; б) 44.

К заданию 8. 10.

К заданию 9. а) -1; б) -1; в) -1.

К заданию 10. -1; 0; 1; 2 или 0; 1; 2; 3.

К заданию 11. а) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; б) $[-4; 1]$.

УЭ-3. РЕШЕНИЕ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Понятие целого рационального неравенства. Примерами целых рациональных неравенств могут служить неравенства

$$0{,}5x^4 < x^2 - 3,$$

$$\frac{(x^2 - 3)(0{,}5 - x)}{7} > x^2 + \frac{3}{4}x.$$

Неравенство с одной переменной, обе части которого являются целыми рациональными выражениями, называют **целым рациональным неравенством**.

Любое целое рациональное неравенство с переменной x можно преобразовать в равносильное ему неравенство вида $f(x) > 0$ или

$f(x) < 0$, где $f(x)$ — многочлен стандартного вида. По степени многочлена определяется степень неравенства.

Метод интервалов. Рассмотрим схему применения метода интервалов для решения целых рациональных неравенств видов

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) < 0,$$

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) > 0,$$

где x — переменная, $x_1, x_2, ..., x_n$ — не равные друг другу числа.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где x — аргумент, а $x_1, x_2, ..., x_n$ — ее нули, среди которых нет равных друг другу.

Будем считать, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Область определения рассматриваемой функции ее нулями можно разбить на конечное число интервалов $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, ..., $(x_n; +\infty)$. На каждом из данных интервалов знак значений функции сохраняется, а при переходе через нуль знак значений функции изменяется с «+» на «−» или с «−» на «+».

Пример 1. Решить неравенство $(x+2)(x-1)(x-3)(x-6) > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)(x-6) > 0.$$

Отметим на координатной прямой нули этой функции, т. е. числа −2, 1, 3 и 6, и выделим дугами интервалы (рис. 22).

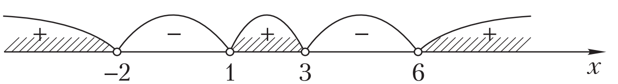


Рис. 22

Определим знаки значений функции в каждом из интервалов. Удобно начинать с крайнего справа интервала. В этом промежутке каждый из множителей $x+2$, $x-1$, $x-3$, $x-6$ принимает положительные значения, а потому положительным числом является их произведение. Знаки значений функции в остальных интервалах определяем, зная, что при переходе через нуль знак значения функции изменяется на противоположный (см. рис. 22). Тогда множеством решений неравенства $(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)>0$ будет объединение интервалов, в которых поставлен знак «+».

Ответ: $(-\infty; -2)\cup(1; 3)\cup(6; +\infty)$.

Заметим, что существенным является требование, чтобы среди нулей функции $y=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ не было равных друг другу. В противном случае в произведении может получиться двучлен $(x-a)$ в четной степени, т. е. $(x-a)^{2k}$, $k\in \boldsymbol{N}$, а он справа и слева от точки $x=a$ принимает положительные значения (рис. 23, *а*), т. е. при переходе через точку a знак значений этой функции не будет меняться.

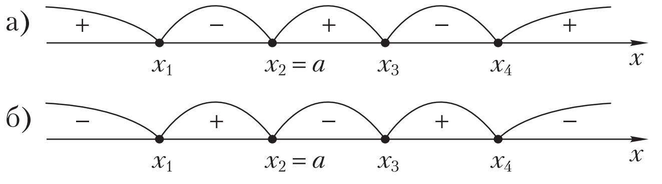


Рис. 23

Заметим, что двучлен $(x-a)$ в нечетной степени, т. е. $(x-a)^{2k+1}$, $k\in \boldsymbol{N}$, принимает положительные значения для всех чисел x, находящихся на координатной прямой справа от точки a, и отрицательные значения для всех x, находящихся слева от этой точки (рис. 23, *б*). Этот факт также следует иметь в виду при решении целых рациональных неравенств.

Пример 2. Решить неравенство $(x+2)(x+1)^3(x-1)^2>0$.

Решение. Отметим на координатной прямой нули функции

$$f(x)=(x+2)(x+1)^3(x-1)^2$$

и интервалы знакопостоянства, на которые эта функция разбивается ее нулями (рис. 24).

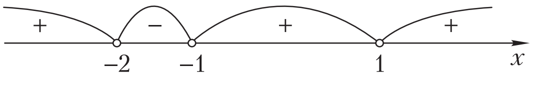


Рис. 24

При $x > 1$ функция принимает положительные значения, так как все множители, стоящие в левой части неравенства, положительны. Определим знаки значений данной функции в каждом из остальных интервалов, учитывая, что при переходе через точки -2 и -1 знак изменится, а при переходе через точку 1 — сохранится (рис. 24). Из рисунка видно, что множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -2)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. В чем заключается сущность метода интервалов в решении неравенств вида:

а) $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) < 0$,

б) $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) > 0$?

Задание 2. На примерах неравенств

$$(x-1)(x-5) < 0 \text{ и } (x-1)^2(x-3)^3(x-5)^4(x-6) < 0$$

объясните процесс решения целых рациональных неравенств методом интервалов.

Задание 3. Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-1)(x-2) < 0$; б) $(x+3)(x-5) \geq 0$.

Задание 4. При каких значениях x выражение:

а) $(x+5)^2(x-4)$ принимает положительные значения;

б) $(x-1)^3(x-2)$ принимает положительные значения?

Задание 5. Решите неравенство:

а) $(x-3)(x+1) > 0$;

б) $(1+2x)(2x-1) < 0$;

в) $(x+2)(x-1)(x-3) > 0$;

г) $(2-x)(3x-6)(2x-5)^2 > 0$;

д) $(x-2)^3(x+1)(2-x)^2 < 0$;

е) $(x+3)^2(x-2)(5+x)^3 < 0$.

Задание 6. Решите неравенство:

а) $(x+2)(5-x)(x-1)^2<0$;

б) $(x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5)\geq 0$;

в) $(x-1)^3(x+3)(x-6)^3(x+2)>0$;

г) $(x^2-16)^3(x+7)<0$;

д) $(x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)\leq 0$.

Задание 7. Функция задана формулой $f(x)=(x-2)^4(x+1)^5x^2$. Укажите все значения x, при которых:

а) $f(x)<0$; б) $f(x)\leq 0$;

в) $f(x)>0$; г) $f(x)\geq 0$.

Задание 8. Функция задана формулой

$$q(x)=(x-1)(x-2)^2(x+1)^3(x+4)^4.$$

Укажите все значения x, при которых график функции расположен:

а) выше оси Ox; б) ниже оси Ox.

Задание 9. Решите неравенство, предварительно разложив на множители многочлен в левой части:

а) $a^3+3a^2-a-3<0$; б) $18a^3-9a^2-8a+4>0$;

в) $x^3+2x^2-5x-6<0$; г) $1-a^2+a^3-a^5<0$.

Задание 10. Решите неравенство:

а) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24>0$;

б) $3x^2(x-4)^2<32-5(x-2)^2$.

Задание 11. а) Найдите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства $x^3-10x^2+27x-18>0$.

б) Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства $x^3-11x^2+38x-40<0$.

Задание 12. Найдите наибольшее целое число x из множества решений неравенства:

а) $x^3-3x^2+4\leq 0$; б) $x^3-3x+2\leq 0$.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Цель: приобрести умения и навыки в решении дробно-рациональных неравенств, которые удовлетворяют таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Понятие дробно-рационального неравенства. Примерами таких неравенств могут служить неравенства

$$\frac{3x+2}{x-1} < 4;\ 2+\frac{3}{x+1} > \frac{2}{x}.$$

Неравенство с одной переменной, обе части или хотя бы одна часть которого являются дробно-рациональными выражениями, называется **дробно-рациональным**.

Если в дробно-рациональном неравенстве перенести все члены в левую часть и представить полученное дробно-рациональное выражение в виде частного двух многочленов, то получим равносильное ему неравенство вида

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} > 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены.

Например, перенеся все слагаемые неравенства $2+\frac{3}{x+1} > \frac{2}{x}$ в левую часть и приведя к общему знаменателю, получим равносильное неравенство $\frac{2x^2+3x-2}{x(x+1)} > 0.$

Метод интервалов. Для решения неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ можно применять метод интервалов.

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, поступают так.

На координатной прямой отмечают точки, в которых эта функция не определена или обращается в нуль. Эти точки разбивают прямую на несколько интервалов, на каждом из которых данная функция непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет постоянный знак (этот факт будет доказан в старших классах). Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак данной функции в какой-либо точке рассматриваемого промежутка координатной прямой.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} > 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$. Ее область определения — все действительные значения x, кроме $x = 2$ и $x = 4$ (точки $x = 2$ и $x = 4$ отметим на координатной прямой светлыми кружками, поскольку они не входят в область определения функции (рис. 25)).

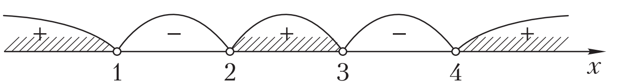


Рис. 25

Нули данной функции $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ (их отметим на координатной прямой светлыми кружками, поскольку они не входят во множество решений этого строгого неравенства (рис. 25)). Промежутки знакопостоянства данной функции можно определить, подставляя вместо x какое-нибудь значение в каждом из пяти образовавшихся интервалов (см. рис. 25).

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x+4)^2(x-6)} \le 0.$

Решение. Рассмотрим функцию $y=\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x+4)^2(x-6)}$. Ее область определения — все действительные значения x, кроме $x=-4$ и $x=6$ (точки $x = -4$ и $x = 6$ отметим на координатной прямой светлыми кружками, поскольку они не входят в область определения данной функции (рис. 26)).

Нули функции: $x_1=-2$ и $x_2=1$ (их отметим на координатной прямой темными кружками, поскольку они являются решениями нестрогого неравенства (см. рис. 26)). При $x>6$ функция принимает положительные значения (объясните почему). Определим знаки значений функции в каждом из оставшихся интервалов, учитывая, что при переходе через точки −2 и 6 знак изменяется, а при переходе через точку −4 сохраняется.

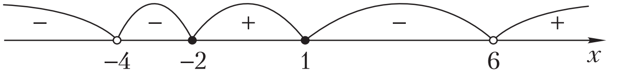


Рис. 26

Из рисунка видно, что множеством решений неравенства является объединение интервалов $(-\infty; -4)\cup(-4; -2)\cup(1; 6)$.

Ответ: $(-\infty; -4)\cup(-4; -2)\cup(1; 6)$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{3x+2}{x-2}>1.$

Решение. Преобразуем заданное неравенство:

$$\frac{3x+2}{x-2}-1>0;\quad \frac{2x+4}{x-2}>0.$$

Полученное неравенство равносильно неравенству

$$2(x+2)(x-2)>0.$$

Применим метод интервалов (рис. 27).

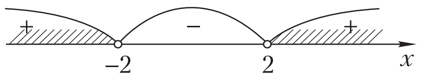


Рис. 27

Решением последнего неравенства, а следовательно, и исходного является любое число множества: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}.$$

Решение. Данное неравенство заменим равносильным, в левой части которого дробь, содержащая переменную, а в правой — нуль:

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{2} > 0,$$

$$\frac{2x+2-6+x-2}{2(x-2)} > 0,$$

$$\frac{3x-6}{x-2} > 0, \quad \frac{3(x-2)}{x-2} > 0.$$

Множество решений полученного неравенства — множество всех действительных чисел, кроме числа 2.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Какие неравенства называют дробно-рациональными? Приведите примеры таких неравенств.

2. Как можно найти промежутки знакопостоянства функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены?

3. Как можно решить методом интервалов:
а) строгое дробно-рациональное неравенство;
б) нестрогое дробно-рациональное неравенство?

Задание 2. Решите неравенство:

а) $\frac{x-1}{x-2}>0;$ б) $\frac{x-3}{x+1}>0;$ в) $\frac{4-2x}{1+3x}>0;$

г) $\frac{4-5x}{x+2}<0;$ д) $\frac{21x-7}{4x-1}>0;$ е) $\frac{x}{2-x}>0;$

ж) $\frac{8x-2}{x}\le 0;$ з) $\frac{x-1}{2x+3}<0;$ и) $\frac{x+2}{3x-1}>0.$

Задание 3. Решите неравенство:

а) $\frac{(x+3)(x-2)}{x-1}\le 0;$ б) $\frac{(x+1)^3}{(x-3)(x-5)}\ge 0;$

в) $\frac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}<0;$ г) $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)^2}\ge 0;$

д) $\frac{(x+8)^4(1-x)^3}{(x+5)(x-2)^2}\ge 0;$ е) $\frac{-(x+4)^4}{x^2(x-4)^6}\ge 0.$

Задание 4. Решите неравенство:

а) $\frac{x-4}{x^2-9x+14}>0;$ б) $\frac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8}\le 0;$

в) $\frac{x^4-10x^2+9}{6-2x}<0;$ г) $\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x-5}>0;$

д) $\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3}\le 0;$ е) $\frac{x^3-10x^2+39x-45}{x+2}\ge 0.$

Задание 5. Решите неравенство:

а) $\frac{3x+2}{x-3}>1;$ б) $\frac{5x+4}{x-2}>1;$ в) $\frac{0,5x+7}{2x+3}<1;$

г) $\frac{5x-4}{2x-3}>2;$ д) $\frac{7x-9}{2x+6}<-1;$ е) $\frac{3x-1}{x-5}>2;$

ж) $\frac{6x+1}{5x+3}<\frac{7}{8};$ з) $\frac{3x-2}{5x+1}<2;$ и) $\frac{-x+3}{2x+1}<-\frac{3}{4}.$

Задание 6. Решите неравенство:

а) $\frac{2x+3}{1-x}>5;$ б) $\frac{2x+3}{x+1}>2;$

в) $\frac{1-3x}{1-2x}<1;$ г) $\frac{3x-7}{2-5x}>-1.$

Задание 7. Решите неравенство:

а) $\frac{2}{x+2}<\frac{1}{x-3};$

б) $\frac{1}{1-x}<\frac{3}{x+3};$

в) $\frac{3}{2-x}>\frac{1}{x+3};$

г) $\frac{2}{x+3}<\frac{1}{2x-1}.$

Задание 8. Решите неравенство $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}<0$. В ответе запишите целые числа, удовлетворяющие неравенству.

Задание 9. Найдите действительные значения x, для которых:

а) $\left|\frac{x^2+x-2}{x+3}\right|=\frac{x^2+x-2}{x+3};$

б) $\left|\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+10}\right|=-\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+10}.$

Ваш помощник

К заданию 2. а) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

К заданию 3. а) $(-\infty;3]\cup(1;2]$.

К заданию 4. д) $[1; 3)$.

К заданию 5. а) $(-\infty;-2,5)\cup(3;+\infty)$.

К заданию 6. в) $(0; 0,5)$.

К заданию 8. $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$.

К заданию 9. а) $(-3;2]\cup[1;+\infty)$.

УЭ-5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ И СОВОКУПНОСТЕЙ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Цель: знать и уметь решать системы и совокупности неравенств с одной переменной.

Теоретическая часть

Понятие системы неравенств с одной переменной. Несколько неравенств с одной переменной образуют *систему*, если нужно найти множество всех общих решений заданных неравенств. Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой, например:

$$\begin{cases} 5 - x > 0, \\ x^2 - x - 2 \le 0. \end{cases}$$

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств с одной переменной — значит найти множество всех ее решений.

Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств. Следовательно, чтобы решить систему неравенств с одной переменной, необходимо решить каждое из неравенств, а затем найти пересечение множеств их решений.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 \le 9, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Решение. Решаем первое неравенство системы:

$$(x^2 \le 9) \Leftrightarrow (|x| \le 3) \Leftrightarrow (-3 \le x \le 3).$$

Решаем второе неравенство системы:

$$(x + 1 > 0) \Leftrightarrow (x > -1).$$

Изобразим на координатной прямой множества решений первого и второго неравенств (рис. 28) и найдем их пересечение.

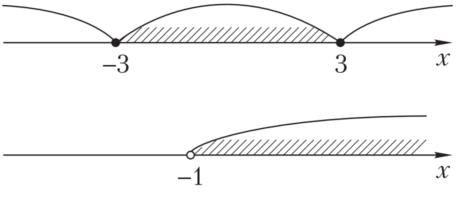


Рис. 28

Очевидно, что системе неравенств удовлетворяет любое число из полуинтервала $(-1; 3]$.

Ответ: $(-1; 3]$.

Понятие совокупности неравенств с одной переменной. Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств, то эти неравенства образуют *совокупность* неравенств, которая записывается с помощью прямой скобки [. Так, запись

$$\left[\begin{array}{l} x^2 > 0, \\ -2x + 3 \le 0 \end{array}\right.$$

означает, что неравенства $x^2 > 0$ и $-2x + 3 \le 0$ образуют совокупность неравенств.

Иногда неравенства, образующие совокупность, записывают в строчку и отделяют друг от друга логической связкой «или».

Например,

$$x^2 > 0 \text{ или } -2x + 3 \le 0.$$

Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в истинное числовое неравенство, называется **решением совокупности неравенств**.

Множество решений совокупности неравенств есть объединение множеств решений входящих в нее неравенств.

Соответствующим образом определяются система и совокупность уравнений и неравенств, совокупность систем неравенств и т. д., находятся множества их решений. Заметим, что уравнения, неравенства, их системы или совокупности называются **равносильными**, если множества их решений совпадают.

Пример 2. Решить неравенство $\left|x^2-8\right|>1$.

Решение. Имеем: $\left(\left|x^2-8\right|>1\right)\Leftrightarrow\left(x^2-8<-1 \text{ или } x^2-8>1\right)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left(x^2<7 \text{ или } x^2>9\right)\Leftrightarrow\left(|x|<\sqrt{7} \text{ или } |x|>3\right)\Leftrightarrow\left(-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}, \text{ или } x<-3, \text{ или } x>3\right)$.

Множеством решений исходного неравенства является объединение множеств решений всех полученных неравенств.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)\cup(3;+\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Что называют решением системы неравенств с одной переменной?
2. Что значит решить систему неравенств?
3. Что называют решением совокупности неравенств с одной переменной?
4. Что значит решить совокупность неравенств?

Задание 2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+5x-6<0, \\ x+3\geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2x-3\geq 0, \\ x+4\geq 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+6x+9\leq 0, \\ 5-2x<0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^2+9x\leq -7, \\ 2x+5\leq 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2-6x+5\geq 0, \\ x^2-25\leq 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2+x+8<0, \\ x^2+6x+5\geq 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 12x^2-(2x-3)(1+6x)>x, \\ (1+5x)(5x-1)-25x^2>x-6; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \dfrac{8-7x+2x^2}{2+x^2}>1, \\ x^3-x^2-6x\leq 0. \end{cases}$

Задание 3. Решите двойное неравенство и укажите наибольшее целое его решение:

а) $0 < x^2 + 6x \leq 7$; б) $x \leq x^2 + 20 \leq 9x$.

Задание 4. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \sqrt{16 - x^2} - 3\sqrt{x^2 - 4}$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12} - \dfrac{3}{x - 4}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$;

г) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 5x - 14}} - \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 20}}{5}$.

Задание 5. Решите неравенство:

а) $|x|(x^2 + 3x - 10) < 0$; б) $|x|(x^2 - 5x - 24) < 0$.

Задание 6. Найдите множество решений неравенства:

а) $\dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|} \leq 0$;

б) $\dfrac{x^2 - x - 12}{|x + 1|} \leq 0$.

Задание 7. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ |x - 1| \leq 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 > 1, \\ |x + 1| < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x - 1)^2 \leq 2, \\ |x| < 1. \end{cases}$

Задание 8. Найдите произведение всех целых решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} (x + 1)^2 \leq 9, \\ |x| > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + 1)^2 \leq 3, \\ |x| - 1 \leq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ |x + 1| > 0{,}5. \end{cases}$

Задание 9. Найдите длину числового отрезка, каждое число из которого не является решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} 5x \geq 2, \\ -0{,}3x^2 + 4{,}8 < 0, \\ -2x^2 + 17x + 19 \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2 - 5x \leq 0, \\ x - x^2 \geq 0, \\ -4x^2 - 5x + 21 \geq 0. \end{cases}$

Задание 10. Найдите множество значений x, удовлетворяющих системе неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 9{,}5x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x - 5 > 0, \\ 2x - 1 \leq 0; \end{array}\right. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 8{,}7x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2 + x < 0, \\ -3x + 9 > 0. \end{array}\right. \end{cases}$

Задание 11. Найдите множество решений:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0, \\ |x| > 1; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 \leq 4, \\ x^2 - x - 6 \geq 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x \geq -2, \\ |3 - 2x| < 1; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} 15 - 7x - 4x^2 \geq 0, \\ 21 + 23x - 20x^2 > 0; \end{array}\right.$

д) $\left|7 - x^2\right| > 9;$ е) $x^2 - 5|x| = 6 < 0;$

ж) $\left||2x - 1| - 3\right| > 2;$ з) $\left||x^2 - 4|x|| - 3\right| < 1.$

Задание 12. При каких значениях параметра t уравнение имеет действительные корни разного знака:

а) $0{,}5x^2 + (t + 1)x + t + 2{,}5 = 0;$

б) $0{,}5x^2 - (t + 2)x + 2a + 2{,}5 = 0?$

Ваш помощник

К заданию 2. а) $[-3;\ 1)$; е) нет решений.
К заданию 3. а) 1; б) 5.
К заданию 4. б) $(-\infty; -3] \cup (4; +\infty)$.
К заданию 5. а) $(-5; 0) \cup (0; 2)$.
К заданию 6. а) $[-3;\ 2)$.
К заданию 7. а) -3; б) -3; в) 0.

К заданию 8. а) -24; б) 0; в) 0.
К заданию 9. а) 3,6; б) 0,6.
К заданию 10. б) $(-8{,}7; 0)$.
К заданию 11. а) $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$; в) $\boldsymbol{R}$.
К заданию12. а) $t < -2{,}5$.

УЭ-6. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

Цель: закрепить умения и навыки в решении текстовых задач с помощью неравенств и их систем.

Теоретическая часть

В некоторых случаях для нахождения ответа на поставленные вопросы в текстовых задачах необходимо прибегать к составлению неравенств или их систем.

Пример 1. Длина основания равнобедренного треугольника равна 14 дм. Каким числом может быть выражена длина боковой стороны, если известно, что периметр треугольника меньше 60 дм?

Решение. Пусть длина боковой стороны равна x дм. Тогда, исходя из условия задачи, можно составить систему неравенств:

$$\begin{cases} x + x + 12 < 60, \\ x + x > 14, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 24, \\ x > 7, \end{cases}$$

т. е. $7 < x < 24$.

Ответ: любым числом из интервала (7; 24).

Пример 2. Бригада из 28 рабочих за 5 дней изготовила не более 300 деталей, а за 10 дней — не менее 500. Сколько деталей изготавливал каждый рабочий в день (считая производительность труда всех рабочих одинаковой)?

Решение. Пусть x — количество деталей, которое изготавливал один рабочий в день. Тогда по условию задачи можно составить систему

$$\begin{cases} 28 \cdot 5x \le 300, \\ 28 \cdot 10 \cdot x \ge 500, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x \le 300 : 140, \\ x \ge 500 : 280, \end{cases}$$

откуда получаем, что $1{,}79 < x < 2{,}14$. Единственным натуральным числом, удовлетворяющим данному двойному неравенству, является число 2. Следовательно, каждый рабочий в день изготавливал по 2 детали.

Ответ: 2 детали.

Пример 3. С каким количеством цинка нужно сплавить 18 кг меди, чтобы получить сплав, содержащий более 20 %, но менее 40 % меди?

Решение. Пусть x кг — искомая масса цинка, тогда $\frac{18}{18+x} \cdot 100$ — процентное содержание меди в сплаве. По условию задачи

$$20 < \frac{18}{18+x} \cdot 100 < 40,$$

$$1 < \frac{18}{18+x} \cdot 5 < 2,$$

$$18 + x < 90 < 36 + 2x.$$

Далее получаем:

$$\begin{cases} x < 72, \\ 90 < 36 + 2x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 72, \\ x > 27, \end{cases}$$

т. е. $27 < x < 72$.

Ответ: более 27 кг, но менее 72 кг.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Расскажите, как решают текстовую задачу с помощью составления неравенства.

2. В чем сходство и различие в решении текстовых задач с помощью составления уравнений и составления неравенств?

Задание 2. а) Туристы отправились на прогулку вдоль канала и должны возвратиться обратно не позднее чем через 3 ч. На какое расстояние они могут отойти от лагеря, если в одном направлении они будут идти со скоростью $5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а возвращаться — со скоростью $4\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$?

б) Если туристы будут проходить в день на 5 км больше, то они пройдут за 6 дней больше 90 км, а если на 5 км меньше, то за 8 дней они пройдут меньше 90 км. Оцените расстояние, которое проходят туристы за день.

Задание 3. Из города A со скоростью $v\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ выехал велосипедист. Через 3 ч вслед за ним из того же города отправился мотоциклист со скоростью $50\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите значения v, при которых мотоциклисту понадобится менее 2 ч, чтобы догнать велосипедиста.

Задание 4. а) Длина основания равнобедренного треугольника равна 36 м, а его периметр меньше 80 м. Какую длину может иметь боковая сторона треугольника?

б) Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 18 м, а его периметр больше 65 м. Какую длину может иметь основание треугольника?

Задание 5. С каким количеством воды при температуре 50 °C нужно смешать 6 л воды при температуре 15 °C, чтобы получить воду, температура которой выше 30 °C, но ниже 40 °C?

Задание 6. а) Если из знаменателя несократимой дроби вычесть 1, то получим число $\frac{1}{2}$, а если к ее числителю прибавить 20, то получится дробь, которая больше числа 2, но меньше числа 3. Найдите все такие дроби.

б) Если к числителю несократимой дроби прибавить 2, а к знаменателю прибавить 1, то получится дробь, большая $\frac{1}{2}$; если же из ее числителя вычесть 2, а к знаменателю прибавить 1, то получится дробь $\frac{1}{3}$. Найдите все такие дроби, если известно, что они меньше $\frac{1}{2}$.

Задание 7. Знаменатель несократимой дроби на 1 меньше квадрата ее числителя. Если к числителю и знаменателю этой дроби прибавить по 2, то дробь будет больше $\frac{1}{3}$, а если от числителя и знаменателя этой дроби отнять по 3, то дробь будет положительна, но меньше $\frac{1}{10}$. Найдите эту дробь.

Задание 8. а) Грузовик отправился из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 240 км, со скоростью $40\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. В это же время из B в A вышел легковой автомобиль. После встречи легковой автомобиль достиг пункта A через полчаса и немедленно повернул обратно. Какова должна быть скорость легкового автомобиля, чтобы он прибыл в пункт B раньше грузовика?

б) Из пунктов A и B, расстояние между которыми 384 км, выехали одновременно навстречу друг другу пассажирский и товарный поезда, причем скорость товарного была на $20\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше скорости пассажирского. Через 3 ч поезда еще не встретились, а через 4 ч оказалось, что встреча уже произошла и оба поезда, миновав место встречи, продолжают движение. Какой может быть скорость товарного поезда?

Задание 9. На реке, скорость течения которой $5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, в направлении ее течения расположены пристани A, B и C, причем B посередине между A и C. От пристани B одновременно отходят плот, который движется по течению к пристани C, и катер, который идет к пристани A, причем скорость катера в стоячей воде равна $v\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Дойдя до пристани A, катер разворачивается и движется по направлению к пристани C. Найдите все значения v, при которых катер прибывает в C позже, чем плот.

Задание 10. Две машинистки, работая одновременно, могут напечатать рукопись не менее чем за 2 ч. Если же будет работать только первая машинистка, то ей потребуется на набор рукописи на 3 ч меньше, чем работающей в одиночку второй машинистке. Какие значения может принимать время набора рукописи второй машинисткой, работающей самостоятельно?

Задание 11. Производительность первого автозавода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго составляла первоначально 95 % от производительности первого. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство на 23 % от числа машин, выпускаемых в сутки первым заводом, и стал выпускать их более 1000 в сутки. Сколько автомобилей в сутки выпускал первый завод, если каждый завод выпускает в сутки целое число машин?

Задание 12. Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено организовать в течение трех суток непрерывное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили рабочие первой бригады, распределив между собой время поровну. Известно, что во второй бригаде 3 девушки, остальные — юноши. Причем девушки дежурили по 1 ч, а юноши распределили остаток времени поровну. Оказалось, что сумма продолжительности дежурств юноши второй бригады и члена первой бригады меньше 9 ч. Сколько человек в было первой бригаде?

Задание 13. Несколько мальчиков решили купить магнитофон ценой от 170 до 195 у. е. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 у. е. больше. Сколько стоил магнитофон?

Задание 14. Сооружается участок железнодорожной насыпи длиной 100 м, поперечным сечением которого является равнобедренная трапеция с нижним основанием 5 м, верхним основанием не меньше 2 м и углом откоса 45°. Какую высоту h может иметь насыпь, чтобы объем земляных работ составил не менее 400 м^3, но не более 500 м^3?

Ваш помощник

К заданию 2. а) 0 км $< s < \dfrac{20}{3}$ км.

К заданию 3. $v < 20\ \dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 4. а) Больше 18 м, но меньше 22 м.
К заданию 5. Больше 4,5 л, но меньше 15 л.
К заданию 6. а) $\dfrac{4}{9}$ или $\dfrac{5}{11}$.

К заданию 7. $\dfrac{4}{15}$.

К заданию 8. а) $41\ \dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 9. $5\ \dfrac{\text{км}}{\text{ч}} < v < 15\ \dfrac{\text{км}}{\text{ч}}$.

К заданию 10. $t \geq 6$ ч.
К заданию 11. 900 автомобилей.
К заданию 12. 9 человек.
К заданию 13. 180 у. е.
К заданию 14. $1 \leq h \leq \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ м.

УЭ-7. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ, МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

Цель: приобрести умения и навыки в решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, отвечающие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Метод интервалов. Для решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля:

1) находят нули подмодульных выражений;

2) разбивают область допустимых значений неравенства нулями подмодульных выражений на промежутки;

3) на каждом полученном промежутке неравенство записывают без знака модуля и решают на этом промежутке;

4) найденные множества решений объединяют и записывают ответ.

Основным методом решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, является **метод промежутков**.

Пример 1. Решить неравенство $x^2-2x-8<7|x-4|$.

Решение. Выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль при $x=4$. Это число разбивает область допустимых значений неравенства — множество всех действительных чисел — на два промежутка: $(-\infty; 4)$ и $[4; +\infty)$. Поэтому данное неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x<4, \\ x^2-2x-8<-7(x-4) \end{cases} \text{или} \begin{cases} x\geq 4, \\ x^2-2x-8<7(x-4), \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x<4, \\ x^2+5x-36<0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x\geq 4, \\ x^2-9x+20<0. \end{cases}$$

Решив каждую из систем совокупности неравенств, находим объединение множеств их решений.

Ответ: $(-9; 4)\cup(4; 5)$.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}>2x$.

Решение. Нуль подмодульного выражения $(x=0)$ разбивает координатную прямую на два промежутка, заданных неравенствами $x<0$ и $x\geq 0$. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$1)\left(\begin{cases} x<0, \\ \dfrac{x^2+x-12}{x-3}>2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<0, \\ \dfrac{(x-3)(x+4)}{x-3}>2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<0, \\ x-3\neq 0, \\ x+4>2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<0, \\ x\neq 3, \\ x<4 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x<0);$$

2) $\left(\begin{cases} x \geq 0, \\ \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 3} > 2x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq 0, \\ \dfrac{x^2 - 5x + 12}{x - 3} < 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq 0, \\ x - 3 < 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (0 \leq x < 3).$

Ответ: $(-\infty; 3)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Приведите пример неравенства, содержащего три выражения с переменной, два из которых находятся под знаком модуля.

2. Опишите схему применения метода промежутков, используемого для решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Задание 2. Решите неравенство:

а) $|x - 6| > x^2 - 5x + 9$;

б) $x^2 + 2|x - 1| - 6 < 0$;

в) $x^2 - 7|1 - x| + 3 \geq 0$;

г) $|x - 1| + |x - 2| > x + 3$;

д) $|x - 3| + |x - 5| \geq 6 - x$;

е) $|1 - 3x| - |x + 2| < 2$;

ж) $3|x - 2| + |4 + 5x| \leq 10$;

з) $|x - 3| + |x^2 - 1| < 14 - x$;

и) $|x^2 - x| \geq |x - 3| + 1$;

к) $|x^2 + 2x| - |1 + 2x| > x^2 - x$;

л) $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| \geq 4$;

м) $|3x - 1| + |3x - 2| < 2 + |x + 5|$;

н) $|3x - 2| - 2|x - 1| \leq 2|x| - 1$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $\dfrac{1}{|x| - 5} < \dfrac{1}{3}$;

б) $\dfrac{|x - 3| - x}{x} \leq 3$;

в) $\dfrac{|2+x|+x}{x+1} \geq 1;$ г) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{|x|-1} \geq \dfrac{1}{|x|-1};$

д) $x^2-8x-\dfrac{3}{|4+x|} \leq -18;$ е) $x^2+10x-\dfrac{5}{|x+5|} \geq -1;$

ж) $\dfrac{|2-x|-x}{|3-x|-1} < 2;$ з) $\dfrac{3}{|3+x|-1} \geq |x+2|;$

и) $\dfrac{|2x-x^2|-2x-1}{|3x+x^2|+x^2-2} \leq 0.$

Задание 4. Решите неравенство:

а) $\dfrac{|x+7|}{x^2+8x+7} < 5;$ б) $\dfrac{6+|x|-x^2}{x^2+5x+6} < \dfrac{3}{2}-x.$

Ваш помощник

К заданию 2. а) $(1;\ 3)$; в) $(-\infty;\ -4] \cup (0{,}5;\ +\infty)$.

К заданию 3. а) $(-\infty;\ -8) \cup (-5;\ 5) \cup (8;\ +\infty)$.

К заданию 4. а) $(-\infty;\ -7) \cup (-7;\ -1) \cup (-0{,}8;\ +\infty)$.

УЭ-8. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ, МЕТОДОМ РАВНОСИЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Цель: научиться решать неравенства, содержащие переменную под знаком модуля, методом равносильных переходов.

Теоретическая часть

Напомним, что неравенства с одной переменной, имеющие одинаковое множество решений, называют равносильными. Основная идея решения неравенств заключается в замене одного неравенства другим, более простым, но равносильным первому.

1. ***Неравенства вида*** $\boldsymbol{|f(x)| < a}$ $\boldsymbol{(|f(x)| \le a,\ |f(x)| > a,\ |f(x)| \ge a).}$ Их решение может быть основано на следующих равносильностях.

1) Если $a > 0$, то $(|f(x)| < a) \Leftrightarrow (-a < f(x) < a)$.

2) Если $a > 0$, то $(|f(x)| \le a) \Leftrightarrow (-a \le f(x) \le a)$.

Если $a < 0$, то неравенство $|f(x)| \le a$ решений не имеет; неравенство $|f(x)| \le a$ равносильно уравнению $f(x) = 0$.

3) Если $a > 0$, то $(|f(x)| > a) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) < a, \\ f(x) < -a \end{array}\right.\right)$.

Если $a = 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| > 0$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$, исключая такие x, при которых $f(x) = 0$.

Если $a < 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| > a$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$.

4) Если $a > 0$, то $(|f(x)| \ge a) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) \ge a, \\ f(x) \le -a \end{array}\right.\right)$.

Если $a < 0$ либо $a = 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| \ge a$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$.

Пример 1. Решить неравенство $|x^2 - 5x + 5| \le 1$.

Решение. Имеем:

$$(|x^2 - 5x + 5| \le 1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 5x + 5 \le 1, \\ x^2 - 5x + 5 \ge -1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \le 0, \\ x^2 - 5x + 6 \ge 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 2, \\ x \ge 3 \end{array}\right. \end{cases}\right).$$

Ответ: $[1; 2] \cup [3; 4]$.

2. ***Неравенства вида*** $\boldsymbol{|f(x)| < g(x)}$ $\boldsymbol{(|f(x)| \le g(x),\ |f(x)| > g(x),\ |f(x)| \ge g(x)).}$ Их решение может быть основано на следующих равносильностях.

1) $\left(|f(x)| < g(x)\right) \Leftrightarrow \left(-g(x) < f(x) < g(x)\right)$.

2) $\left(|f(x)| \le g(x)\right) \Leftrightarrow \left(-g(x) \le f(x) \le g(x)\right)$.

3) $\left(|f(x)| > g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.\right)$.

4) $\left(|f(x)| \ge g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right.\right)$.

Пример 2. Решить неравенство $|x^2 - 1| < 2x + 2$.

Решение. В силу равносильности (1) имеем:

$$\left(|x^2 - 1| < 2x + 2\right) \Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} x^2 - 1 < 2x + 2, \\ x^2 - 1 > -2x - 2 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 < 0, \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\left\{\begin{array}{l} -1 < x < 3, \\ x \ne -1 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow (-1 < x < 3).$$

Ответ: $(-1; 3)$.

3. *Неравенства вида* $|f(x)| < |g(x)|$ $\left(|f(x)| \le |g(x)|,\ |f(x)| > |g(x)|,\ |f(x)| \ge |g(x)|\right)$. Их решение может быть основано на следующих равносильностях.

Если a и b – некоторые действительные числа, то неравенство $|a| < |b|$ истинно тогда и только тогда, когда $a^2 < b^2$.

1) $\left(|f(x)| < |g(x)|\right) \Leftrightarrow \left(f^2(x) < g^2(x)\right)$.

2) $\left(|f(x)| \le |g(x)|\right) \Leftrightarrow \left(f^2(x) \le g^2(x)\right)$.

3) $\left(|f(x)| > |g(x)|\right) \Leftrightarrow \left(f^2(x) > g^2(x)\right)$.

4) $\left(|f(x)| \ge |g(x)|\right) \Leftrightarrow \left(f^2(x) \ge g^2(x)\right)$.

Пример 3. Решить неравенство $|x - 4| < |x - 2|$.

Решение. Имеем:

$$|x - 4| < |x - 2| \Leftrightarrow \left((x - 4)^2 < (x - 2)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big(((x-4)-(x-2))(x-4+x-2)<0\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big(-2(2x-6)<0\big) \Leftrightarrow (x-3>0) \Leftrightarrow (x>3).$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Объясните, как можно решить неравенство:

а) $|f(x)|<a$; б) $|f(x)|<g(x)$; в) $|f(x)|<|g(x)|$.

2. Какой равносильной совокупностью неравенств можно заменить неравенство $|x-2|>3$?

3. Какой равносильной системой неравенств можно заменить неравенство $|x-1|<5$?

Задание 2. Решите неравенство:

а) $|x-3|<1$; б) $|x-3|\le 1$;

в) $|x-3|\le -1$; г) $|x-3|\le 0$;

д) $|x^2-5x+5|<1$; е) $|x^2-5x+5|\le 1$;

ж) $|x^2-5x+5|\le 0$; з) $|x^2-5x+5|\le -3$.

Задание 3. Найдите множество решений неравенства:

а) $\left|\dfrac{x-2}{2x+3}\right|<1$; б) $\left|\dfrac{x-2}{2x+3}\right|\le 0$; в) $\left|\dfrac{x-2}{2x+3}\right|\le -7$.

Задание 4. Решите неравенство:

а) $|2x^2-9x+15|\ge 20$; б) $|2x^2-9x+16|>20$;

в) $|2x^2-9x+15|>-20$; г) $|2x^2-9x+15|>0$;

д) $\left|\dfrac{x-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\ge 1$; е) $\left|\dfrac{x-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\ge 0$;

ж) $\left|\dfrac{x-3x+2}{x^2+3x+2}\right|>0;$ з) $\left|\dfrac{x-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geq -1.$

Задание 5. Решите неравенство:

а) $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|>2;$ б) $\left|\dfrac{x+18}{x}\right|<3;$

в) $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leq 1;$ г) $\left|\dfrac{1}{x}\right|\geq 2.$

Задание 6. Сколько целых значений x удовлетворяют неравенству $\left|\dfrac{3}{x+4}\right|>1$?

Задание 7. Решите неравенство:

а) $|2x-3|<|2-3x|;$ б) $|1-3x|\geq|2x+3|;$

в) $|-x^2+x-1|<|x^2-3x+4|;$ г) $|x-6|>|9-5x+x^2|;$

д) $\left|\dfrac{1}{x+2}\right|<\left|\dfrac{1}{x-1}\right|;$ е) $\left|\dfrac{2}{x-2}\right|\geq\left|\dfrac{3}{2x-1}\right|.$

Задание 8. Найдите множество решений неравенства:

а) $|x|\geq -|x(x-4)|;$ б) $|x|>-|x(x-4)|;$

в) $|x(x-4)|>-|x|;$ г) $|x(x-4)|\geq -|x|.$

Задание 9. Решите неравенство:

а) $|2x-3|<x;$ б) $3|x+1|\leq 3-x;$

в) $|4-3x|\leq 2-x;$ г) $|4-3x|\geq 2-x;$

д) $|2x-3|<2x-3;$ е) $|2x-3|\leq 2x-3;$

ж) $|2x-3|\leq 3-2x;$ з) $|2x-3|\geq 3-2x.$

Задание 10. Решите неравенство:

а) $|x^2-2x-3|<3x-3;$ б) $|x-6|<x^2-5x+9;$

в) $|x^2-3x+2|\geq 2x-x^2;$ г) $|x^2-4|+2x+1>0;$

д) $x^2-x-2<|5x-3|;$ е) $|x^3-1|>1-x.$

Задание 11. Найдите множество решений неравенства:

а) $\left|\dfrac{1-2x}{x+1}\right|-x\ge 0;$ б) $\left|\dfrac{6-7x}{x^2-4}\right|\ge -x^2-1;$

в) $\left|\dfrac{x^2+5x+8}{6+x}\right|<3-x;$ г) $\left|\dfrac{x^5}{1-x^4}\right|<-x^2-1.$

Задание 12. Решите неравенство:

а) $|x-1|\le x-1;$ б) $|x-1|<x-1;$

в) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|\le\dfrac{x-1}{x+2};$ г) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|<\dfrac{x-1}{x+2};$

д) $|x-2|>x-2;$ е) $|x-2|\ge x-2;$

ж) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|>\dfrac{x-1}{x+2};$ з) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|\ge\dfrac{x-1}{x+2}.$

Задание 13. Решите неравенство:

а) $\big||x-2|-x+3\big|<5;$

б) $\big|2x-|x+3|+1\big|\ge 2.$

Ваш помощник

К заданию 2. а) $(2; 4)$.

К заданию 3. б) 2.

К заданию 4. е) $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;+\infty)$.

К заданию 5. г) $[-0,5;0)\cup(0;0,15]$.

К заданию 6. 4.

К заданию 7. а) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

К заданию 8. а) $\boldsymbol{R}$.

К заданию 9. а) $(1; 3)$.

К заданию 10. б) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

К заданию 11. б) $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

К заданию 12. а) $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$.

К заданию 13. б) $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$.

УЭ-9. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ, МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Цель: овладеть методом введения новой переменной при решении неравенств.

Теоретическая часть

Если в неравенстве неоднократно встречается одно и то же выражение, то часто имеет смысл обозначить это выражение какой-либо новой буквой и попытаться сначала решить полученное неравенство относительно введенной переменной. Такой метод бывает особенно полезным, если неравенство становится более простым относительно новой переменной.

Пример 1. Решить неравенство $x^2 - 3|x| + 2 > 0$.

Решение. Обозначим $|x| = y$ и запишем неравенство относительно новой переменной y:

$$y^2 - 3y + 2 > 0.$$

Решив его, получим: $y < 1$ или $y > 2$.

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\left(\left[\begin{array}{l} |x| < 1 \\ |x| > 2 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} -1 < x < 1, \\ x > 2, \\ x < -2 \end{array}\right.\right).$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. В чем заключается сущность метода введения новой переменной?

2. Составьте какое-либо уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, которое можно решить, вводя новую переменную. Объясните, как его можно решить.

3. С помощью какой подстановки можно решить неравенство:

а) $(|x|-1)^2 > 3$; б) $x^2 - 3|x| + 2 < 0$;

в) $\left||x^2 - 4|x|| - 3\right| < 1$; г) $|x^2 - 3| + |x^2 - 4| < 11$?

Задание 2. Решите неравенство методом введения новой переменной:

а) $(|x|-8)\cdot(|x|-2) > 0$; б) $x^2 - 5|x| + 6 < 0$;

в) $|x^2 - 1| + |x^2 - 9| < 8$; г) $\dfrac{2}{|x|+1} < 2 - |x|$;

д) $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+|x|}\right| < 1$; е) $(|x|-3)\cdot(|x|-2) < 0$;

ж) $x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$; з) $|x^2 - 1| + |x^2 - 3| > 2$;

и) $\dfrac{5}{|x+1|+3} < -2|x+1| + 5$; к) $\left|\dfrac{3|x|-2}{|x|-1}\right| \geq 2$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $\dfrac{x^2 + |x| - 2}{x^2 + |x| - 6} > 0$; б) $\dfrac{|x|-5}{x^2 + |x| - 2} > \dfrac{5-|x|}{x^2 - 1}$;

в) $\left|\dfrac{4x^2+6}{x+x^2}\right| + \dfrac{2x^2+3}{x+x^2} - 6 < 0$;

г) $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right| + \left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| < 12$.

Задание 4. Найдите произведение целых решений неравенства

$$\left||x^2 - |x|| - 4\right| \leq 2.$$

Задание 5. Найдите количество целых решений неравенства

$$\left|\left|x^2-6|x|\right|-4\right|\geq 4,$$

принадлежащих промежутку $[-7; 7]$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) $(-\infty; -8)\cup(-2; 2)\cup(8; +\infty)$.
К заданию 3. б) $(-\infty; -5]\cup(-1; 1)\cup[5; +\infty)$.
К заданию 4. 36.
К заданию 5. 9.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Краткие исторические сведения о неравенствах

Понятие неравенства, как и понятие равенства, возникло в глубокой древности. Без понятий «больше» и «меньше» нельзя осмыслить понятия равенства, тождества, уравнения. Ряд неравенств привел в своем знаменитом трактате «Начала» Евклид. Он, например, доказал, что верно неравенство $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, где $a\geq 0$, $b\geq 0$, т. е. среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не больше их среднего арифметического. В «Математическом собрании» Паппа Александрийского (III в.) было доказано, что если $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ (a, b, c и d — положительные числа), то $ad>bc$. При этом все рассуждения проводились словесно, в большинстве случаев с опорой на геометрические интерпретации. Современные знаки неравенства появились лишь в XVII—XVIII вв. Знаки < и > ввел английский математик Т. Гарриот (1560—1621). Символы ≦ и ≧ были введены французским физиком и математиком Пьером Буге (1698—1758). Позже их стали записывать так: ≤, ≥.

Неравенства и системы неравенств широко используются как в теоретических исследованиях, так и при решении практических задач.

Интересно знать

Известный русский писатель А. С. Грибоедов поступил в Московский университет и окончил за шесть с половиной лет курс трех факультетов: словесного, юридического и физико-математического.

Профессор математики Оксфордского университета Чарльз Лютвидж Доджсон (1832—1898) издал под именем Льюиса Кэрролла ряд детских книг. На русском языке неоднократно издавались книги «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье».

Кто сильнее?

Однажды в минуты отдыха друзья-мушкетеры Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян решили посоревноваться в перетягивании каната. Портос и д'Артаньян легко перетянули Атоса и Арамиса. Но когда Портос стал в пару с Атосом, то победа над Арамисом и д'Артаньяном досталась им уже не так легко. А когда Портос и Арамис выступили против Атоса и д'Артаньяна, то никакая из пар не смогла одолеть другую.

Определите, как мушкетеры распределяются по силе.

«Нематематики» о математике

Процветание и совершенство математики тесно связано с благосостоянием государства.

Наполеон

Математики похожи на французов: что бы вы ни сказали, они все переведут на свой собственный язык. Получится нечто противоположное.

Гете

Модуль 4 ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

УЭ-1. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

Цель: знать и правильно использовать термин «область определения функции»; уметь находить область определения функций, заданных различными способами.

Теоретическая часть

Множество X, на котором задана функция $y = f(x)$, называют областью определения этой функции и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Напомним, что говорить о функции можно лишь тогда, когда указаны правило соответствия и область определения функции (явно и неявно). Если функция задана аналитически (т. е. с помощью формулы) и ее область определения не указана, то считают, что область определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$, т. е. с множеством тех значений x, при которых выражение имеет смысл.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Что значит задать функцию?
2. Что называют областью определения функции?
3. Если функция задана аналитически и не указаны допустимые значения для аргумента, то что следует понимать под областью определения этой функции?
4. Укажите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$;

в) $y = \sqrt{x-1}$; г) $y = (x-1)^2$.

5. Функция задана графически (рис. 29, *а*, *б*). Укажите ее область определения.

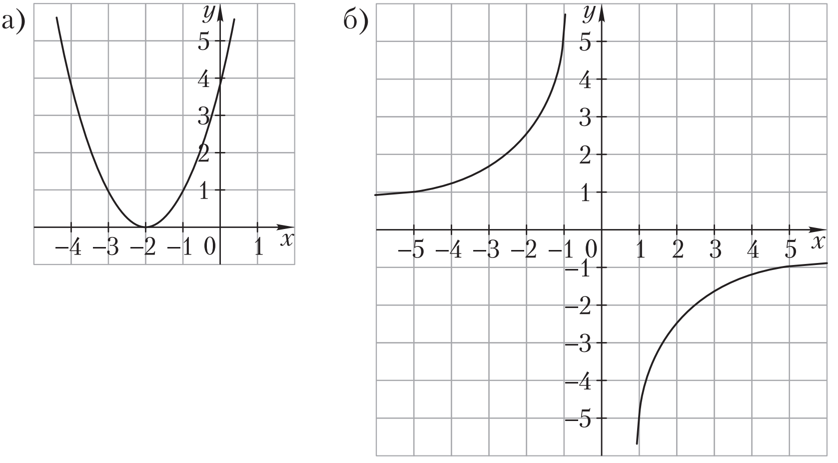


Рис. 29

6. Функция f задана таблицей.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	9	12	25	36

Укажите ее область определения.

Задание 2. Является ли множество всех действительных чисел областью определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{3x}{2x+7}$;　　　б) $y = \dfrac{4x}{2x^2+3}$?

Задание 3. Верно ли, что множество всех действительных чисел является областью определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{x+4}{x^2+1}$;　　　б) $y = \dfrac{5-x}{x^2-1}$?

Задание 4. Принадлежит ли число 9 области определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{7-x}}$;　　　б) $y = \sqrt{10-x}$?

Задание 5. а) Укажите, какие из чисел –3; 0,5; 1; 8 принадлежат области определения функции, заданной формулой $y = \sqrt{2 - x}$.

б) Укажите, какие из чисел 5; 2; 100; –8 принадлежат области определения функции, заданной формулой $y = \sqrt{x - 3}$.

Задание 6. а) Из числовых промежутков $[4; +\infty)$; $(-\infty; 4]$; $(-\infty; 4)$ выберите тот, который является областью определения функции $y = \sqrt{4 - x}$.

б) Из числовых промежутков $(-\infty; -5)$; $(-\infty; -5]$; $[-5; +\infty)$ выберите тот, который является областью определения функции $y = \sqrt{5 + x}$.

Задание 7. Какой промежуток является областью определения функции, график которой изображен на рисунке 30, *а*, *б*:

а) $[-1; 3]$, $[-2; 3]$, $[-1; 2]$, $[-1; 1]$;
б) $[-1; 2]$, $[-1; 3]$, $[0; 2]$, $[-2; 2]$?

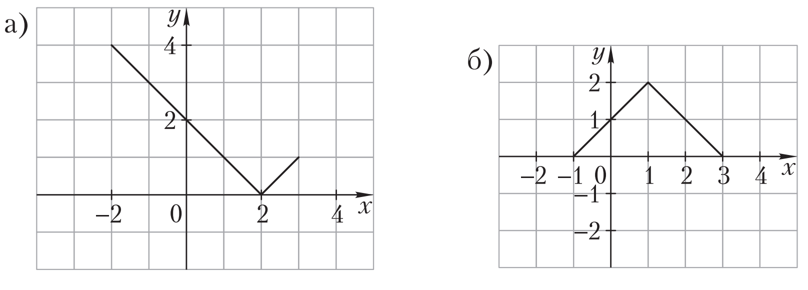


Рис. 30

Задание 8. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{15}{2x + 8}$; б) $y = \dfrac{17}{4x + 12}$.

Задание 9. При каком значении x не определена функция, заданная формулой:

а) $y = \dfrac{x + 2}{x + 3}$; б) $y = \dfrac{x + 4}{x + 5}$?

Задание 10. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{19}{x^2 - 9}$; б) $y = \dfrac{17}{x^2 - 25}$.

Задание 11. При каком значении переменной x не определена функция, заданная формулой:

а) $y = \dfrac{x-3}{x^2 - 4}$; б) $y = \dfrac{x-5}{x^2 - 1}$?

Задание 12. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{-2x-1}$; б) $y = \sqrt{-3x+2}$.

Задание 13. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{5} - 7}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{3} - 8}$.

Задание 14. Укажите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{7x-3}{\sqrt{3-6x}}$; б) $y = \dfrac{2x+5}{\sqrt{2x-1}}$.

Задание 15. Укажите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{4}{3 - |x|}$; б) $y = \dfrac{0{,}5}{|x| - 10}$.

Задание 16. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-5}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{4x-7}}{6-x}$.

Задание 17. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{2x+10} - \sqrt{9-3x}$; б) $y = \sqrt{3-9x} + \sqrt{x+10}$.

Задание 18. Укажите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

Задание 19. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{2x^2+3x-5}}$; б) $y=\dfrac{3-x}{\sqrt{5x^2+2x-3}}$.

Задание 20. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y=\sqrt{-3x^2+8x+3}$; б) $y=\sqrt{-3x^2+x+2}$.

Задание 21. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-2x-3}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{7-x}}{x^2-6x+5}$.

Задание 22. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-9}}$.

Задание 23. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2+7x-2}}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{14+3x-2x^2}}{9-x^2}$.

Задание 24. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{15x-x^2}-\dfrac{13}{\sqrt{x-3}}$;

б) $y=\sqrt{7x-x^2}+\dfrac{17}{\sqrt{x-5}}$.

Задание 25. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y=\sqrt{-x^2+x+20}-\dfrac{\sqrt{x^2}+2}{x-3}$;

б) $y=\sqrt{-x^2+3x+18}+\dfrac{\sqrt{x^2}-1}{x-5}$.

Задание 26. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{9-x}{\sqrt{20-8x-x^2}} + \sqrt{x+7}$;

б) $y = \dfrac{x+5}{\sqrt{10+3x-x^2}} + \sqrt{x+2}$.

Задание 27. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \sqrt{x^2-x-2} + \dfrac{9-x^2}{3-x}$;

б) $y = \sqrt{12+x-x^2} + \dfrac{x^2-4}{x+2}$.

Задание 28. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{18-3x} + \dfrac{\sqrt{x+3}}{2x^2+x-6}$;

б) $y = \sqrt{14-2x} + \dfrac{\sqrt{x+2}}{4x^2+4x-3}$.

Задание 29. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{9-8x-x^2} - \dfrac{x-2}{x^2-3x}$;

б) $y = \sqrt{12+4x-x^2} + \dfrac{8-x}{x^2+4x}$.

Задание 30. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-9}}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)^2}{x^2-16}}$.

Задание 31. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-6x+9}}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}}$.

Задание 32. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{\sqrt{8 - 2x - x^2}}{x + 3}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{5 - 4x - x^2}}{x + 2}$.

Задание 33. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 30}}{\left|42 + x - x^2\right|}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{\left|6 - 5x + x^2\right|}$.

Задание 34. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{2x - 11}{2 - \dfrac{7}{x - 2}}$; б) $y = \dfrac{4x - 9}{4 - \dfrac{5}{x - 1}}$.

Задание 35. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 - x - 12}}{x^2 - 25}}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x^2 + 2x - 15}}$.

УЭ-2. МНОЖЕСТВО (ОБЛАСТЬ) ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Цель: ознакомиться со способами нахождения множества значений функции.

Теоретическая часть

Множество значений, принимаемых зависимой переменной y, называют **множеством значений** функции $y = f(x)$ и обозначают $E(y)$ или $E(f)$.

Способы нахождения множества значений функции. Множество значений функции $y = f(x)$ можно найти:

1) как совокупность значений параметра t, при которых уравнение $f(x) = t$ имеет хотя бы одно решение;

2) построив график функции $y = f(x)$ и спроецировав его на ось Oy;

3) преобразовав формулу $y = f(x)$ к виду, содержащему выражения, множества значений которых известны;

4) по области ее определения, если она — конечное числовое множество;

5) зная наибольшее или наименьшее значения (при условии, что ее график можно изобразить, не отрывая ручку от бумаги).

Практическая часть

Задание 1. Какой из промежутков $[-1; 3]$, $[-1; 0]$, $[0; 2]$, $[2; 3]$ является областью значений функции, график которой изображен на рисунке 30, *б* (см. с. 145)?

Задание 2. а) Областью значений какой из функций $y = x^2 + 1$, $y = 1 - x$, $y = 1$, $y = 1 - x^2$ является промежуток $(-\infty; 1]$?

б) Областью значений какой из функций $y = x^2 + 4$, $y = 4 - x$, $y = 4$, $y = 4 - x^2$ является промежуток $[4; +\infty)$?

Задание 3. Найдите значение функции:

а) $y = \dfrac{x+4}{x-3}$ при $x = -1$; б) $y = \dfrac{x-5}{x+6}$ при $x = -2$.

Задание 4. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = x^0 - 2{,}5$; б) $y = -x^0 + 4{,}7$.

Задание 5. Принадлежит ли:

а) число 6 области значений функции $y = 3x^2 - 2x + 7$;

б) число 5 области значений функции $y = 5x^2 - 3x + 8$?

Задание 6. Оцените значение функции $y = 2x + 6$, если:

а) $-1 \le x \le 13$; б) $-15 < x < 0$.

Задание 7. Существует ли такое значение аргумента x, при котором функция:

а) $y = 4x^2 - 11x + 16$ принимает значение, равное 10;

б) $y = 16 - 8x - 5x^2$ принимает значение, равное 20?

Задание 8. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $y = \begin{cases} 2, \text{ если } x < -1, \\ x^2 + 1, \text{ если } -1 \le x \le 1, \\ 2, \text{ если } x > 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3, \text{ если } x < -2, \\ x^2 - 1, \text{ если } -2 \le x \le 2, \\ 3, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

Задание 9. Докажите, что:

а) число –5 не принадлежит области значений функции $y = \frac{-5x+3}{x}$;

б) число 2 не принадлежит области значений функции $y = \frac{2x+1}{x}$.

Задание 10. Найдите множество значений функции:

а) $y = \frac{x^2 - 9}{x+3}$;

б) $y = \frac{x^2 - 25}{x-5}$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) [–1; 3]; б) [–1; 3].

К заданию 4. а) Поскольку значение 0^0 не определено, то область определения функции $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. При $x \ne 0$ по определению $x^0 = 1$, поэтому множество значений данной функции состоит из одного числа: –2,5.

К заданию 6. а) Поскольку $-1 \le x \le 13$, то

$$-2 \le 2x \le 26,$$

$$4 \le 2x + 6 \le 32.$$

Итак, $4 \le y \le 32$.

К заданию 10. а) $\dfrac{x^2-9}{x+3}=x-3$. Данную функцию можно задать так: $y=x-3$, $D(y)=(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$. Так как значения $y(-3)=-6$ не существует, то множество значений функции $(-\infty;-6)\cup(-6;+\infty)$.

УЭ-3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Цель: овладеть способами нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Теоретическая часть

Пусть числовая функция $y=f(x)$ определена на множестве X.

Число M называют **наибольшим значением** функции $y=f(x)$ на множестве X, если существует такое число x_0 из X, что $f(x_0)=M$, и для любого числа x в X выполняется неравенство $f(x)\le M$.

Число m называют **наименьшим значением** функции $y=f(x)$ на множестве X, если существует такое число x_0 из X, что $f(x_0)=m$, и для любого числа x в X выполняется неравенство $f(x)\ge M$.

Практическая часть

Задание 1. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y=\dfrac{6}{x^2-4x+7}+5$; б) $y=\dfrac{4}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$;

в) $y=\dfrac{2x^2-4x+9}{x^2-2x+4}$; г) $y=\dfrac{6}{5+|3x^2+x-2|}-2$.

Задание 2. Найдите наименьшее значение функции:

а) $y=x^4-8x^2+7$;

б) $y=(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)+9$;

в) $y=x(x+1)(x+2)(x+3)-35$;

г) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$; д) $y = \dfrac{x^2-x}{x^2-x+2}$.

Задание 3. Найдите наибольшее значение функции:

а) $y = \dfrac{x^2}{x^4+36}$; б) $y = \dfrac{x^2}{x^4+16}$.

Задание 4. Найдите значения параметра t, при которых сумма квадратов корней уравнения наименьшая:

а) $x^2+(3-t)x+2t-18=0$;

б) $x^2+(2-t)x-t-3=0$.

Задание 5. При каких значениях параметра p сумма квадратов корней уравнения $x^2-px+p-2=0$ имеет наименьшее значение?

Ваш помощник

К заданию 1. а) 7; б) 4; в) $\dfrac{7}{3}$; г) $-1{,}6$.

К заданию 2. а) -9; б) 5; г) 0,75; д) $-\dfrac{1}{7}$.

К заданию 3. а) $\dfrac{1}{12}$; б) $\dfrac{1}{8}$.

К заданию 4. а) 1; б) 1.

К заданию 5. $p=1$.

УЭ-4. НУЛИ ФУНКЦИИ

Цель: знать и правильно использовать термин «нули функции»; уметь находить нули функции при различных способах ее задания; знать графическую интерпретацию нулей функции.

Теоретическая часть

Число x_0 из области определения функции называют **нулем функции**, если $f(x_0)=0$.

Чтобы найти нули функции, заданной формулой $y = f(x)$, следует решить уравнение $f(x_0) = 0$.

Нули функции представляют собой абсциссы точек ее графика, принадлежащих оси Ox (рис. 31).

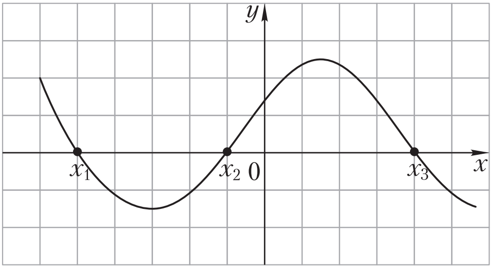


Рис. 31

Пример 1. Найти нули функции $y = x^2 - 3x - 18$.

Решение. Для того чтобы найти нули данной функции, необходимо и достаточно решить уравнение $x^2 - 3x - 18 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, находим: $x_1 = -3$, $x_2 = 6$.

Ответ: –3 и 6 — нули данной функции.

Пример 2. Найти нули функции $y = (x^2 - 9)\sqrt{x-2}$.

Решение. Имеем: $(x^2 - 9)\sqrt{x-2} = 0$, т. е.

$$(x-3)(x+3)\sqrt{x-2} = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные имеют смысл:

$$\begin{cases} x-3=0, \\ x-2\ge 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x+3=0, \\ x-2\ge 0, \end{cases} \text{или } x-2=0.$$

Решим эту совокупность.

Ответ: 2; 3.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Что называют нулем функции?
2. Как можно найти нули функции, заданной формулой $y = f(x)$?

3. Как геометрически можно интерпретировать нули функции?

4. Можно ли утверждать, что функция имеет нули, если ее график проходит через точку:

а) $A(0; 5,8)$; б) $B(9; 0)$; в) $C(0; 0)$?

5. Изобразите график какой-либо функции $y = f(x)$, если известно, что уравнение $f(x) = 0$:

а) не имеет корней;
б) имеет один корень;
в) имеет корни -2 и 3;
г) имеет два положительных корня;
д) имеет два отрицательных корня.

Задание 2. Функция задана графически. По какой оси координатной плоскости следует искать нули функции?

Задание 3. Как можно найти нули функции, если она задана таблицей?

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Задание 4. Какие числа являются нулями функции, заданной графиком, на промежутке $[-1; 3]$ (рис. 32)?

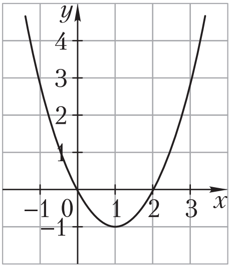


Рис. 32

Задание 5. Является ли:

а) число -4 нулем функции $y = \dfrac{16 - x^2}{x + 4}$;

б) число 5 нулем функции $y = \dfrac{25 - x^2}{x + 5}$?

Задание 6. Найдите нули функции:

а) $y = x^3 - 3x$; б) $y = 5x - x^2$.

Задание 7. Найдите нули функции:

а) $y = -x^3 + 4x$; б) $y = 9x - x^3$.

Задание 8. Найдите нули функции:

а) $y = \dfrac{25 - x^2}{5 + x}$; б) $y = \dfrac{36 - x^2}{6 + x}$.

Задание 9. Найдите нули функции, заданной формулой:

а) $y = x^3 - 4x^2 + 3x$; б) $y = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Задание 10. Найдите нули функции, заданной формулой:

а) $y = 3x^2 - 10x + 3$; б) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

Задание 11. Найдите нули функции:

а) $y = 9 - (x - 3)^2$; б) $y = 16 - (x - 2)^2$.

Задание 12. Найдите нули функции:

а) $y = \dfrac{x}{x + 3} - \dfrac{1}{x - 1}$; б) $y = \dfrac{3}{x^2 + 2} - \dfrac{1}{x}$.

УЭ-5. ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА

Цель: закрепить умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Числовые промежутки, на которых значения функции — числа одного знака, называют **промежутками знакопостоянства**.

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y = f(x)$ решают неравенства $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Практическая часть

Задание 1. Дана функция $y = -2x + 5$. Верно ли, что:

а) $y > 0$ при $x > 2{,}5$;

б) $y < 0$ при $x < 2{,}5$?

Задание 2. При каких значениях аргумента x принимает положительные значения функция:

а) $y = 3x + 1{,}2$; б) $y = -5x - 10{,}2$?

Задание 3. При каких значениях аргумента x принимает положительные значения функция:

а) $y = -\dfrac{4}{x+3}$; б) $y = \dfrac{3}{x-5}$?

Задание 4. При каких значениях аргумента x принимает положительные значения функция:

а) $y = \dfrac{5}{9-x}$; б) $y = -\dfrac{6}{x+10}$?

Задание 5. Найдите нули функции и промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = 9 + 6x$; б) $y = 7 - 2x$.

Задание 6. Найдите все значения аргумента, при которых принимает положительные значения функция, заданная формулой:

а) $y = \dfrac{x}{x-1}$; б) $y = \dfrac{x+1}{x}$.

Задание 7. Найдите все значения аргумента, при которых принимает отрицательные значения функция:

а) $y = x^3 - 9x^2 + 14x$; б) $y = x^3 - 11x^2 + 18x$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) Неверно, например, при $x = 3$ $y < 0$;
б) неверно, например, при $x = 0$ $y > 0$.

УЭ-6. ВОЗРАСТАЮЩИЕ И УБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Цель: закрепить умения и навыки, полученные на уроках математики по данной теме.

Теоретическая часть

Понятие о монотонности функции. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на подмножестве** X из множества $D(f)$, если для любых чисел $x_1 \in X, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на подмножестве** X из множества $D(f)$, если для любых чисел $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Другими словами, функция называется возрастающей на промежутке, если меньшему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции, и функция называется убывающей на промежутке, если меньшему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют **возрастающей** функцией, а если убывает — **убывающей**.

Убывающие и возрастающие функции называют еще *монотонными*.

Исследование функций на монотонность.

Чтобы установить, является функция $y = f(x)$ возрастающей или убывающей на некотором множестве X, достаточно:

1) составить разность $f(x_1) - f(x_2)$, где x_1, x_2 — произвольные числа из множества X такие, что $x_1 < x_2$;

2) сравнить эту разность с нулем:

а) если $f(x_1) - f(x_2) < 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $y = f(x)$ является возрастающей на множестве X;

б) если $f(x_1) - f(x_2) > 0$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $y = f(x)$ является убывающей на множестве X.

Чтобы доказать, например, что данная функция $y = f(x)$ не является возрастающей на промежутке X ($X \subset D(f)$), достаточно указать два числа x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_1 < x_2$ и $f(x_1) \geq f(x_2)$. Аналогично доказывается, что функция $y = f(x)$ не является убывающей на множестве X.

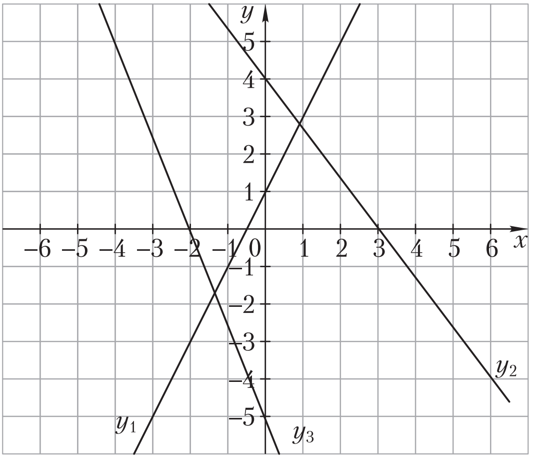
Пример. Доказать, что функция $y = x^2$ не является возрастающей.

Доказательство. Возьмем числа $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$ ($x_1 < x_2$). Неравенство $y(x_1) < y(x_2)$ не имеет места, так как $y(x_1) = (-1)^2 = 1^2 = y(x_2)$, т. е. $y(x_1) = y(x_2)$. Следовательно, данная функция не является возрастающей.

Практическая часть

Задание 1. а) Функции заданы графически (рис. 33, *а*). Укажите ту, которая является возрастающей.

б) Функции заданы графически (рис. 33, *б*). Укажите ту, которая является убывающей.



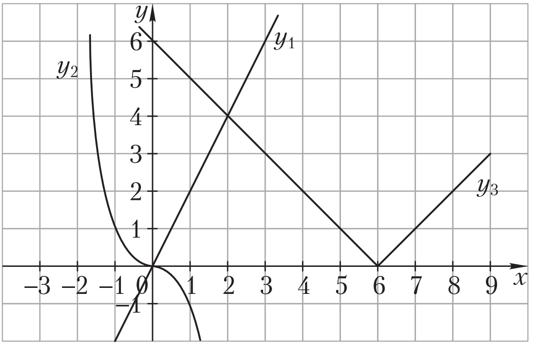


Рис. 33

Задание 2. Ломаная *ABCDE* является графиком функции f (рис. 34).

а) На каких промежутках функция f возрастает?
б) На каких промежутках функция f убывает?

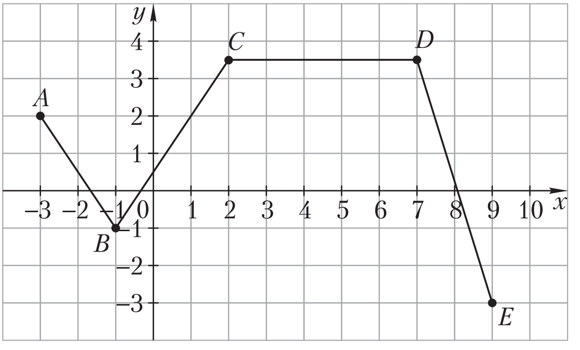


Рис. 34

Задание 3. а) Какие из функций $y=-\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ убывают на промежутке $(0; +\infty)$?

б) Какие из функций $y=\dfrac{4}{x}$, $y=-\dfrac{4}{x}$, $y=x^2$ возрастают на промежутке $(0; +\infty)$?

Задание 4. а) Среди функций $y=9x-1$, $y=10-x$, $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ укажите те, которые являются возрастающими на всей области определения.

б) Среди функций $y=-x+5$, $y=3x-1{,}5$, $y=x^2$ и $y=x^3$ укажите те, которые являются убывающими на всей области определения.

Задание 5. а) Функция f — возрастающая на всей области определения. Сравните $f(10)$ и $f(-35{,}1)$.

б) Функция h — возрастающая на всей области определения. Сравните $h(-20)$ и $h(27{,}7)$.

Задание 6. а) Функция f — возрастающая. Сравните $f\left(\dfrac{3}{8}\right)$ и $f\left(\dfrac{3}{7}\right)$.

б) Функция h убывающая. Сравните $h\left(\dfrac{2}{7}\right)$ и $h\left(\dfrac{3}{7}\right)$.

Задание 7. а) Функция f — возрастающая. Сравните $f\left(\frac{1}{3}\right)$ и $f\left(\frac{2}{5}\right)$.

б) Функция l — убывающая. Сравните $l\left(\frac{1}{4}\right)$ и $l\left(\frac{3}{5}\right)$.

Задание 8. Изобразите схематически график функции с областью определения $[-1; 4]$ и такой, чтобы функция:

а) убывала на всей области определения и имела только один нуль — число 2;

б) возрастала на всей области определения и имела только один нуль — число 1.

Задание 9. Изобразите схематически график функции с областью определения $[-3; 5]$ и такой, чтобы функция:

а) возрастала на отрезке $[-3; 0]$ и убывала на отрезке $[0; 5]$;

б) убывала на отрезке $[-3; 1]$ и возрастала на отрезке $[1; 4]$.

Задание 10. Постройте график и найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = \frac{4}{x}$; б) $y = -\frac{6}{x}$.

Задание 11. а) Постройте график функции $y = -2x^2$ и укажите промежутки монотонности.

б) Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ и укажите промежутки монотонности.

Задание 12. Оцените значения функции $y = -3x + 2$, если:

а) $-1 \leq x \leq 10$; б) $-2 \leq x \leq 4$.

Задание 13. а) Постройте график функции $y = (x + 1)(x - 3)$. С помощью графика найдите:

1) область значений функции;

2) промежутки монотонности.

б) Постройте график функции $y = (x + 2)(x + 4)$. С помощью графика найдите:

1) область значений функции;

2) промежутки монотонности.

Задание 14. Докажите, что:

а) функция $y = kx$ при $k > 0$ является возрастающей на всей области определения;

б) функция $y = kx$ при $k < 0$ является убывающей на всей области определения.

Задание 15. а) Графиком функции является ломаная ABC, где $A(-3; 3)$, $B(1; -1)$, $C(5; 1)$. Постройте этот график и с помощью его укажите:

1) область определения;
2) множество значений функции;
3) нули функции;
4) промежутки знакопостоянства;
5) промежутки монотонности.

б) Графиком функции является ломаная MPQ, где $M(-4; 4)$, $P(2; -2)$, $Q(6; 2)$. Постройте этот график и с помощью его укажите:

1) область определения;
2) множество значений функции;
3) нули функции;
4) промежутки знакопостоянства;
5) промежутки монотонности.

Задание 16. а) Постройте график функции $y = x^2 - 2x$. С помощью графика найдите промежутки монотонности.

б) Постройте график функции $y = -x^2 + 4x$. С помощью графика найдите промежутки монотонности.

Задание 17. Докажите, что линейная функция $y = kx + b$:

а) при $k > 0$ является возрастающей на всей области определения;

б) при $k < 0$ является убывающей на всей области определения.

Задание 18. Докажите, что функция $y = \frac{k}{x}$:

а) при $k > 0$ является убывающей на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

б) при $k < 0$ является возрастающей на области определения.

Задание 19. Докажите, что:

а) функция $y = \frac{7}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$;

б) функция $y = -\frac{11}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$.

Задание 20. Докажите, что:

а) функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей на всей области определения;

б) функция $y = -\sqrt{x}$ является убывающей на всей области определения.

Задание 21. Докажите, что:

а) при $a > 0$ функция $y = ax^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;

б) при $a < 0$ функция $y = ax^2$ убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

Задание 22. Докажите, что:

а) функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$;

б) функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Ваш помощник

К заданию 3. а) $y = \frac{1}{x}$. б) $y = -\frac{4}{x}$, $y = x^2$.

К заданию 4. а) $y = 9x - 1$, $y = \sqrt{x}$. б) $y = -x + 5$, $y = x^3$.

К заданию 5. а) Для возрастающей функции большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Поскольку $10 > -35{,}1$, то $f(10) > f(-35{,}1)$.

б) Для убывающей функции большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поскольку $-20 < 27{,}7$, то $h(-20) > h(27{,}7)$.

К заданию 6. а) Так как $\frac{3}{8} < \frac{3}{5}$, то $f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{3}{5}\right)$. б) Так как $\frac{2}{7} > \frac{3}{7}$, то $f\left(\frac{2}{7}\right) < f\left(\frac{3}{7}\right)$.

К заданию 7. а) Сравним числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$: $\frac{5}{15} < \frac{6}{15}$, следовательно, $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{2}{5}\right)$.

б) Сравним числа $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{5}$: $\frac{5}{20} < \frac{12}{20}$, следовательно, $l\left(\frac{1}{4}\right) < l\left(\frac{3}{5}\right)$.

К заданию 12. а) Функция $y = -3x + 2$ — линейная. Она является убывающей, поскольку $k = -3$ и $k < 0$. Поэтому на отрезке $[-1; 10]$ она принимает все значения от наибольшего $y = (-1) = -3(-1) + 2 = 5$ до наименьшего $y(10) = -30 + 2 = -28$.

б) Данная функция — убывающая. Поэтому на отрезке $[-2; 4]$ она принимает все значения от наибольшего $y(-2) = -3(-2) + 2 = 8$ до наименьшего $y(4) = -3 \cdot 4 + 2 = -10$.

К заданию 14. а) $D(y) = \boldsymbol{R}$. Пусть $x_1 < x_2$, определим знак разности $y(x_1) - y(x_2) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$. Так как $x_1 < x_2$, а $k > 0$, то $y(x_1) - y(x_2) < 0$, т. е. $y(x_1) < y(x_2)$.

По определению функция $y = kx$ является возрастающей на всей области определения при $k > 0$;

б) доказательство проводится аналогично, как в случае а).

К заданию 17. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем $x_1 < x_2$. Обозначим y_1 и y_2 соответствующие им значения функции, тогда $y_1 = kx_1 + b$ и $y_2 = kx_2 + b$. Рассмотрим разность $y_1 - y_2$: $y_1 - y_2 = kx_1 + b - (kx_2 + b) = k(x_1 - x_2)$.

а) Множитель $x_1 - x_2$ — отрицательное число, поскольку $x_1 < x_2$, а по условию $k > 0$, следовательно, $y_1 - y_2 < 0$, т. е. $y_1 < y_2$. Значит, при $k > 0$ функция $y = kx + b$ — возрастающая;

б) множитель $x_1 - x_2$ — отрицательное число, поскольку $x_1 < x_2$, а по условию $k < 0$, следовательно, $y_1 > y_2$. Значит, при $k < 0$ функция $y = kx + b$ — убывающая.

К заданию 18. а) Пусть $x_1 < x_2 < 0$. Составим разность и установим ее знак: $y(x_1) - y(x_2) = \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} > 0$, поскольку по условию $k > 0$, $x_1 - x_2 > 0$, $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$. Следовательно, данная функция убывает на промежутке $(-\infty; 0)$.

Если $0 < x_1 < x_2$ и $k > 0$, то легко показать, что $y(x_1) > y(x_2)$. Следовательно, функция убывает на промежутке $(0; +\infty)$;

б) аналогично доказывается, что при $k < 0$ данная функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$.

К заданию 20. а) Пусть $y_1 = \sqrt{x_1}$, $y_2 = \sqrt{x_2}$, где x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем $0 \le x_1 < x_2$. Докажем, что $y_1 < y_2$.

Допустим, что $y_1 \ge y_2$, т. е. $\sqrt{x_1} \ge \sqrt{x_2}$. Тогда по свойству степени с натуральным показателем меньшему неотрицательному числу соответствует меньший квадрат: $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \ge \left(\sqrt{x_2}\right)^2$, т. е. $x_1 \ge x_2$, а это противоречит условию. Значит, предположение неверно и $y_1 < y_2$. Следовательно, данная функция является возрастающей на всей области определения;

б) пусть $y_1 = -\sqrt{x_1}$, $y_2 = -\sqrt{x_2}$, где x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента, причем $0 \le x_1 < x_2$. Докажем, что $y_1 > y_2$.

Допустим, что $y_1 \le y_2$, т. е. $-\sqrt{x_1} \le -\sqrt{x_2}$, тогда $\sqrt{x_1} \ge \sqrt{x_2}$; $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \ge \left(\sqrt{x_2}\right)^2$; $x_1 \ge x_2$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно и $y_1 > y_2$. Следовательно, данная функция является убывающей на всей области определения.

К заданию 21. а) Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента из промежутка $[0; +\infty)$, $0 \le x_1 < x_2$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции, причем $y = ax_1^2$, $y = ax_2^2$. Докажем, что $y_1 < y_2$. Для этого рассмотрим разность:

$$y_1 - y_2 = ax_1^2 - ax_2^2 = a(x_1^2 - x_2^2) = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0,$$

поскольку $a > 0$ и $0 \le x_1 < x_2$ $(x_1 - x_2 < 0; x_1 + x_2 > 0)$. Большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Поэтому при $a > 0$ функция $y = ax^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;

б) этот случай рассмотрите самостоятельно.

УЭ-7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ГРАФИК ФУНКЦИИ»

Цель: приобрести определенный опыт в решении задач по теме «График функции».

Теоретическая часть

Напомним, что **графиком функции** называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

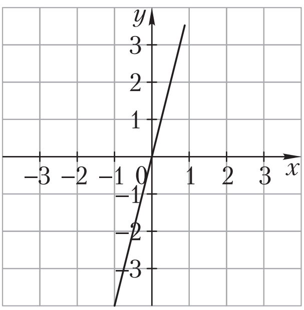


Рис. 35

Пример 1. Задать формулой функцию, график которой изображен на рисунке 35.

Решение. Так как на рисунке 35 изображена прямая, не параллельная осям координат, то она является графиком линейной функции, заданной формулой $y = kx$. Поскольку прямая проходит через точку $A(1; 4)$, то $4 = k \cdot 1$, т. е. $k = 4$ и функция задается формулой $y = 4x$.

Пример 2. Задать формулой функцию по ее графику (рис. 36).

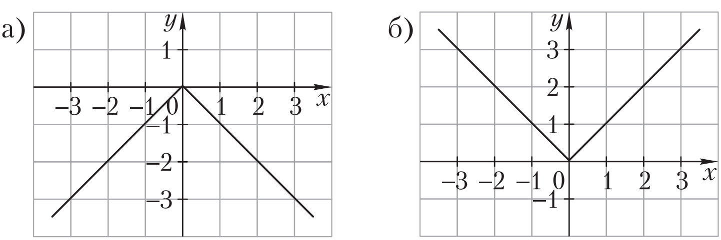


Рис. 36

Решение. Функция является четной, так как ее график (рис. 36, *а*) симметричен относительно оси Oy. При $x \geq 0$ графиком является часть прямой, проходящая через начало координат и точку $A(1; -1)$. Значит, $y = kx$ и $-1 = k \cdot 1$, т. е. $k = -1$, откуда $y = -x$.

Поскольку график функции симметричен относительно оси Oy, то при $x < 0$ имеем $y = x$.

Итак,

$$y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \geq 0, \\ x, \text{ если} x < 0. \end{cases}$$

Функцию можно задать формулой $y = -|x|$.

Для рисунка 36, *б* рассуждения проведите самостоятельно.

Практическая часть

Задание 1. Найдите координаты точки пересечения с осью Ox графика функции:

а) $y = \frac{3}{3x+2} - 1$; б) $y = 2 - \frac{2}{3x-4}$.

Задание 2. Найдите координаты точки пересечения с осью Oy графика функции:

а) $y = \frac{3x+6}{2x-3}$; б) $y = \frac{3x-2}{x+3}$.

Задание 3. Найдите координаты точки пересечения с осью Oy графика функции:

а) $y = 3\sqrt{2x+9} - 1$; б) $y = 5\sqrt{4-3x} + 2$.

Задание 4. Найдите координаты точки пересечения с осью Oy графика функции:

а) $y = |2x-5| - 3$; б) $y = 4 - |9-5x|$.

Задание 5. Найдите все значения x, при которых:

а) точки графика функции $y = 1 - \frac{4}{x-2}$ лежат ниже точек графика функции $y = \frac{5}{x^2 - 4x + 4}$;

б) точки графика функции $y = \frac{2}{x-3}$ лежат выше точек графика функции $y = \frac{8}{x^2 - 6x + 9} - 1$.

Задание 6. По графику функции $y = x^2$ найдите ее приближенное значение при x = 0,75 и вычислите относительную погрешность приближения.

Задание 7. По графику функции $y = \sqrt{x}$ найдите ее приближенное значение при x = 6,25 и вычислите относительную погрешность приближения.

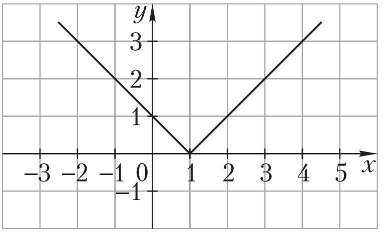


Рис. 37

Задание 8. По графику функции (рис. 37) укажите:

а) область определения;

б) область значений функции;

в) наибольшее или наименьшее значение;

г) нули функции, промежутки знакопостоянства;

д) промежутки монотонности;

е) четность или нечетность функции.

Задание 9. При каких значениях аргумента график функции $y = x^2 - 2x^2$ расположен в IV координатной четверти?

Задание 10. При каких значениях аргумента график функции $y = x^3 + 3x^2$ расположен во II координатной четверти?

Задание 11. Чему равна площадь треугольника, образованного пересечением графиков уравнений $y = |x|$ и $y = -0{,}5x + 3$?

Задание 12. Чему равна площадь треугольника, образованного пересечением графиков уравнений $y = |x|$ и $x^2 + y^2 = 16$?

Задание 13. Найдите периметр треугольника, образованного точками пересечения параболы $y = -0{,}5x^2 + 4$ с осями координат.

Задание 14. Найдите периметр треугольника, образованного точками пересечения параболы $y = x^2 - 3x - 4$ с осями координат.

Задание 15. Чем отличаются графики функций:

а) $y = x$ и $y = \dfrac{x^2}{x}$;

б) $y = x^2$ и $y = \frac{x^3}{x}$;

в) $y = x - 2$ и $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$;

г) $y = \frac{x - 3}{3 - x}$ и $y = -1$?

Задание 16. С помощью графика зависимости скорости тела от времени (рис. 38, *а*, *б*) опишите движение тела на каждом участке движения и постройте график пути.

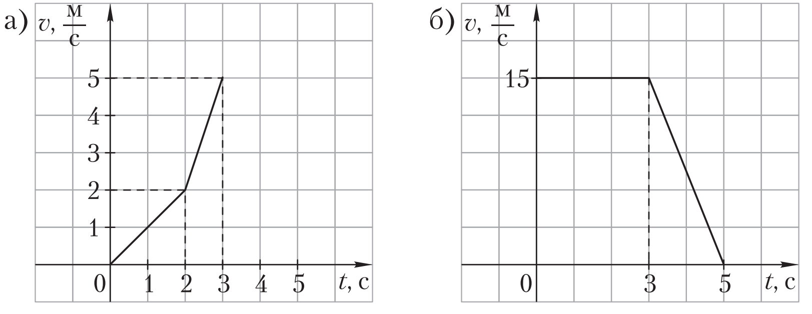


Рис. 38

Задание 17. Задайте формулой функцию по ее графику:

а) на рисунке 39, *а*; б) на рисунке 39, *б*.

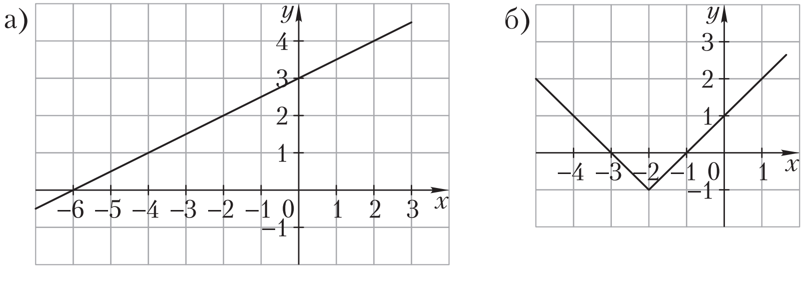


Рис. 39

Задание 18. По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 40) определите знаки коэффициентов a, b и c.

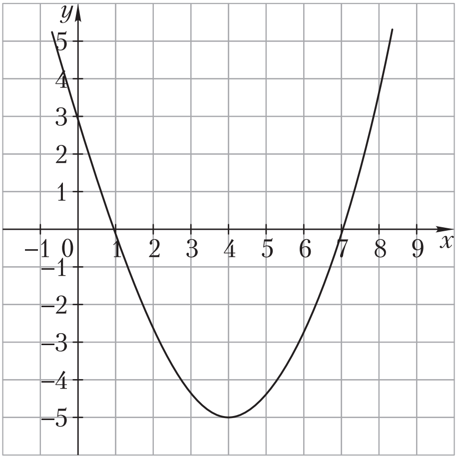


Рис. 40

Задание 19. а) Могут ли графики функций $y=(x-a)^2$ и $y=(x-b)^2$ $(a \neq b)$ иметь более одной общей точки? Найдите координаты точки пересечения этих графиков.

б) Могут ли графики функций $y=|x-a|$ и $y=|x-b|$ $(a \neq b)$ иметь более одной общей точки? Найдите координаты точки пересечения этих графиков.

Задание 20. а) Докажите, что графики функций $y=|x-2|$ и $y=|x+2|$ симметричны относительно оси Oy.

б) Докажите, что графики функций $y=(x-3)^2$ и $y=(x+3)^2$ симметричны относительно оси Oy.

Задание 21. а) График функции $y=ax+b$ проходит через точки пересечения графика функции $y=x^2-2x-3$ с осью ординат и положительной частью оси абсцисс. Найдите a и b.

б) График функции $y=ax+b$ проходит через вершину параболы $y=-x^2-3x-2$ перпендикулярно оси ординат. Найдите a и b.

Задание 22. а) Ось симметрии трапеции совпадает с осью Oy. Две вершины ее имеют координаты (–1; 1) и (–2; –1). Найдите координаты двух других вершин и координаты концов средней линии трапеции.

б) Координатные оси являются осями симметрии прямоугольника с длинами сторон 4 и 2. Найдите координаты вершин прямоугольника. Найдите уравнения прямых, на которых лежат стороны и диагонали прямоугольника.

в) Прямая проходит через точку $A(0; 5)$ и через середину отрезка, концы которого имеют координаты $B(1; 1)$ и $C(5; 6)$. Составьте уравнение прямой.

г) Точки $A(-1; 1)$, $B(-1; 4)$ и $C(-4; 4)$ являются вершинами квадрата. Найдите: координаты четвертой вершины; координаты точек пересечения прямой $y = x + 3$ со сторонами квадрата; длину отрезка прямой $y = x + 3$, находящегося внутри квадрата.

д) Прямая проходит через точки $A(1; 1)$ и $B(-2; 0)$. Найдите угловой коэффициент этой прямой.

е) Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечения прямых: $y = x + 3$, $y = x - 3$, $y = -x + 3$, $y = -x - 3$.

УЭ-8. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Цель: активизация опорных знаний; систематизация основных приемов построения графиков функций; развитие способностей конструирования способов деятельности в нестандартных ситуациях.

Теоретическая часть

Рассмотрим основные подходы к построению графиков функций.

1. Графики некоторых элементарных функций (линейной, квадратичной и др.) строят по точкам.

Пример 1. Построить график функции, заданной формулой $y = 2x + 3$.

Решение. Это линейная функция. Графиком ее является прямая. Для построения прямой достаточно знать координаты двух точек. Удобно взять точки пересечения данной прямой с осями координат: $A(0; 3)$, $B(-1{,}5; 0)$. Строим график (рис. 41).

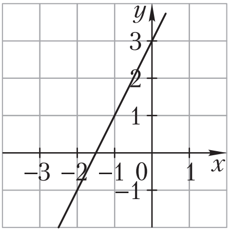


Рис. 41

2. Для построения графика некоторой функции $y = f(x)$ переходят к ее другому аналитическому заданию.

Пример 2. Построить график функции, заданной формулой
$y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$.

Решение. $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Данную функцию можно заменить тождественно равной $y = x - 1$, поскольку $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$. Строим ее график с учетом области определения (рис. 42).

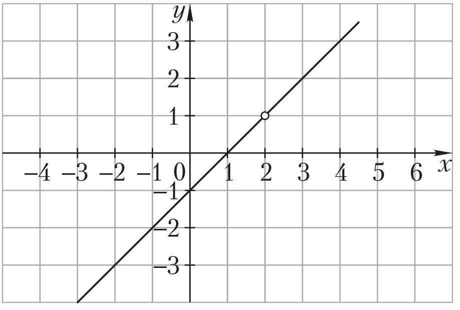


Рис. 42

3. График функции вида $y = af(kx + b) + c$ может быть получен из графика $y = f(x)$ при помощи геометрических преобразований.

4. Напомним некоторые способы построения графиков функции, аналитическое задание которых содержит знак модуля: $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$, $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ и др.

4.1. График функции $y = |f(x)|$.

По определению модуля

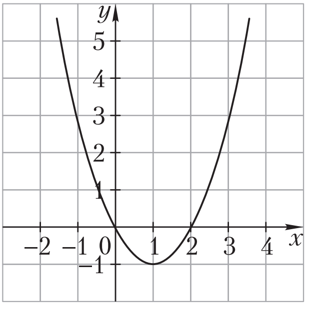
$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Это значит, что график функции $y = |f(x)|$ можно получить следующим образом: построить график функции $y = f(x)$, оставить без изменения все точки построенного графика, которые лежат выше оси абсцисс или на ней, а к части графика функции $y = f(x)$, лежащего ниже оси абсцисс, применить преобразование симметрии относительно оси Ox.

Пример 3. Построить график функции $y = |x^2 - 2x|$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 - 2x$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Построим данный график (рис. 43, *а*). Оставим без изменения все точки графика функции $y = x^2 - 2x$, лежащие выше оси абсцисс и на ней, а для точек, лежащих ниже оси абсцисс, применим преобразование симметрии относительно оси Ox. Получим график функции $y = |x^2 - 2x|$ (рис. 43, *б*).

а)



б)

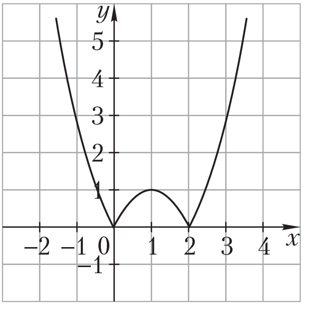


Рис. 43

4.2. График функции $y = f(|x|)$.

Функция $y = f(|x|)$ — четная, и поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. Следовательно, для построения графика исходной функции нужно построить график функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$, а при $x < 0$ график исходной функции получается преобразованием симметрии относительно оси Oy графика функции $y = f(x)$, построенного для $x \geq 0$.

Пример 4. Построить график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$.

Решение. Пусть $x \geq 0$, тогда $|x| = x$ и $y = x^2 - 2x - 3$. Графиком полученной функции является ветвь параболы, изображенная на рисунке 44, *а*. Подвергнув ее преобразованию симметрии относительно оси Oy, получим график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$ (рис. 44, *б*).

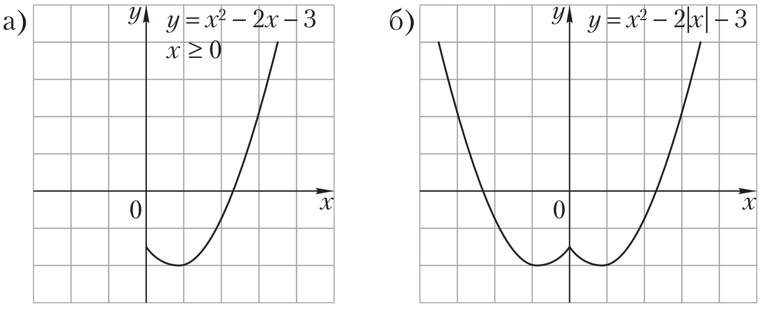


Рис. 44

4.3. График функции $y = |f(|x|)|$.

Для построения графика функции $y = |f(|x|)|$ нужно последовательно перейти от графика функции $y = f(x)$ к графику функции $y = f(|x|)$, а затем от него — к графику функции $y = |f(|x|)|$.

Пример 5. Построить график функции $y = |x^2 - 3|x| + 2|$.

Решение. Данная функция — четная, следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат. При $x \geq 0$ имеем $y = |x^2 - 3x + 2|$. Подвергнув построенную часть графика преобразованию симметрии относительно оси ординат, получим график исходной функции $y = |x^2 - 3|x| + 2|$ (рис. 45).

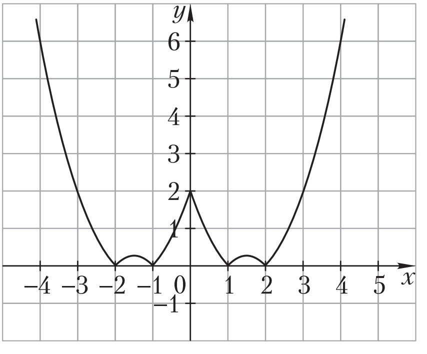


Рис. 45

4.4. График функции $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$.

Для построения графика функции $y = \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ поступим следующим образом: находим область определения функции и по определению модуля имеем: если $f(x) > 0$, то $y = 1$; если $f(x) < 0$, то $y = -1$. Затем с учетом области определения строим график исходной функции.

Пример 6. Построить график функции $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$.

Решение. Область определения данной функции $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Если $x < 1$, то $y = -1$. Если $x > 1$, то $y = 1$ (рис. 46).

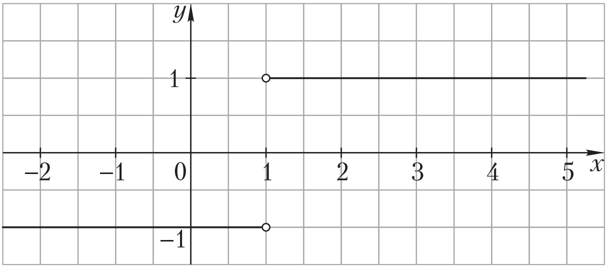


Рис. 46

4.5. График функции $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_n(x)|$.

Для построения графиков функций такого вида применяют метод промежутков. В этом случае от функции, заданной одной формулой, переходят к ее заданию разными формулами для разных числовых промежутков из области ее определения.

Пример 7. Построить график функции

$$y = |x+1| + |x-2| + |2x+8| - 9.$$

Решение. $D(y) = \boldsymbol{R}$. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль при $x = -4$, $x = -1$, $x = 2$. Полученные числа разбивают координатную ось на четыре промежутка. Рассмотрим исходную функцию на каждом из четырех промежутков: $(-\infty; -4)$, $[-4; -1]$, $(-1; 2)$ и $[2; +\infty)$.

$$y=\begin{cases}4x-6, & x<-4,\\ 0, & -4\le x\le -1,\\ 2x+2, & -1<x<2,\\ 4x-2, & x\ge 2.\end{cases}$$

Строим график на каждом из промежутков разбиения (рис. 47):

$$y=|x+1|+|x-2|+|2x+8|-9.$$

Заметим, что график любой функции вида

$$y=a_1|x-x_1|+a_2|x-x_2|+\ldots+a_n|x-x_n|+ax+b,$$

где a_1, ..., a_n, x_1, ..., x_n, a, b — некоторые числа, представляет собой ломаную с бесконечными крайними звеньями. Чтобы построить такую ломаную, достаточно знать все ее вершины (абсцисса вершины — нуль подмодульного выражения) и по одной точке на левом и правом бесконечных звеньях. Данный факт позволяет легко строить графики функций такого вида без раскрытия модулей и перехода к кусочному заданию функции.

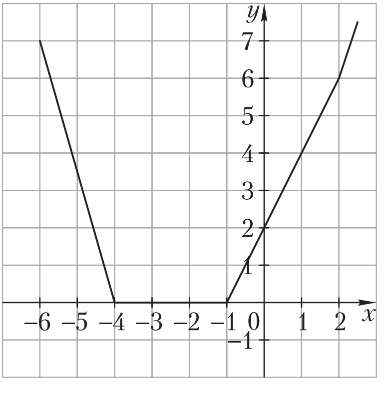


Рис. 47

Рассмотрим примеры построения графиков функций, в аналитическом задании которых имеется выражение, где под знаком модуля находится такое выражение, в записи которого один или несколько модулей.

Пример 8. Построить график функции, заданной формулой

$$y = \left| |x-1| - x \right|.$$

Решение. $D(y) = \boldsymbol{R}$. При построении графиков такого вида целесообразно начинать с раскрытия внутреннего модуля:

1) если $x \geq 1$, то $y = 1$;

2) если $x < 1$, то $y = |-x+1-x| = |1-2x|$. Рассмотрим два случая:

а) при $0{,}5 < x < 1$ $y = 2x - 1$;

б) при $x \leq 0{,}5$ $y = 1 - 2x$.

Строим график функции на каждом из промежутков $(-\infty; 0{,}5]$, $(0{,}5; 1)$, $[1; +\infty)$ (рис. 48).

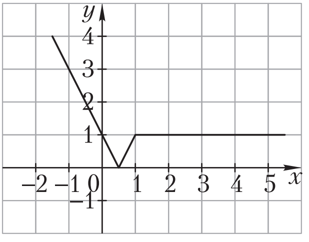


Рис. 48

5. В некоторых случаях построение графика функции производится на основании исследования функции.

Схема исследования может быть такой:

1) область определения функции;

2) область значений функции;

3) четность или нечетность;

4) нули функции и промежутки знакопостоянства;

5) промежутки возрастания и убывания;

6) график функции.

Пример 9. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1) $D(y) = \boldsymbol{R}$;

2) найдем $E(y)$, т. е. все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{1}{1+x^2} = a$ имеет хотя бы одно решение:

$$1 = ax^2 + a, \text{ т. е. } x^2 = \frac{1-a}{a}.$$

Это уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $\frac{1-a}{a} \geq 0$, т. е. при $0 < a \leq 1$. Следовательно, областью значений данной функции является множество (0; 1]. Очевидно, что функция принимает наибольшее значение, равное 1 при $x = 0$. График функции расположен внутри полосы, ограниченной прямыми $y = 0$ и $y = 1$;

3) функция является четной, так как ее область определения симметрична относительно нуля и $y(-x) = y(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно оси ординат;

4) очевидно, что функция нулей не имеет и при любых значениях аргумента принимает только положительные значения;

5) так как функция — четная, то установим, возрастает или убывает она на промежутке $[0; +\infty)$. Очевидно, что при увеличении x от 0 до $+\infty$ значение выражения $1 + x^2$ неограниченно возрастает, следовательно, выражение $\frac{1}{1+x^2}$ стремится к нулю, т. е. при $x \to +\infty$ имеем $y \to 0$.

В силу четности функции она на промежутке $(-\infty; 0]$ возрастает и при $x \to -\infty$ $y \to 0$;

6) строим график функции (рис. 49).

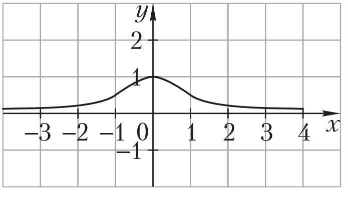


Рис. 49

Практическая часть

Здание 1. Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; б) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

Задание 2. Объясните устно, как по графику функции $y = f(x)$ построить график функции:

а) $y = f(x) + 2$; б) $y = f(x + 1)$;

в) $y = 2f(x)$;　　　　г) $y = f(2x)$;

д) $y = -f(x)$;　　　　е) $y = f(-x)$;

ж) $y = |f(x)|$;　　　　з) $y = f(|x|)$.

Задание 3. На рисунке 50 показан график функции, полученный из графика функции $y = ax^2$. Задайте данную функцию при помощи формулы.

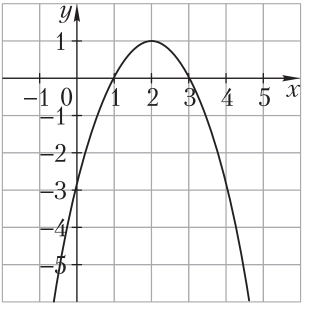


Рис. 50

Задание 4. Постройте график функции, выполнив переход к тождественно равной функции:

а) $y = \dfrac{x}{x^2}$;　　　　б) $y = \dfrac{x-1}{x^2 - x}$;

в) $y = \sqrt{x^2}$;　　　　г) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$;

д) $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x}$;　　　　е) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$;

ж) $y = x|x|$;　　　　з) $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$.

Задание 5. Как, зная график функции $y = \sqrt{x}$, построить график функции:

а) $y = \sqrt{x} - 1$;　　　　б) $y = \sqrt{x} + 2$;

в) $y = \sqrt{x - 1}$;　　　　г) $y = \sqrt{-x}$;

д) $y = \sqrt{1 - x}$;　　　　е) $y = 0{,}5\sqrt{x}$;

ж) $y = -0{,}5\sqrt{1 - x}$;　　　　з) $y = -0{,}5\sqrt{x - 2} + 1$?

Задание 6. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{2 - x}$; б) $y = \sqrt{x - 2}$.

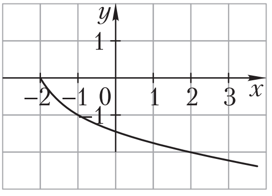


Рис. 51

Задание 7. На рисунке 51 показан график функции, который получен из графика функции $y = \sqrt{x}$. Задайте данную функцию при помощи формулы.

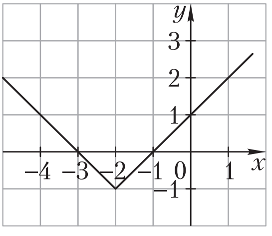


Рис. 52

Задание 8. На рисунке 52 показан график функции, который получен из графика функции $y = |x|$. Задайте данную функцию при помощи формулы.

Задание 9. Постройте график функции:

а) $y = |x| - 3$;

б) $y = 4 - |x|$.

Задание 10. Постройте график функции:

а) $y = x\sqrt{x^2}$; б) $y = \sqrt{x^2} - x$;

в) $y = \left(\sqrt{x - 1}\right)^2$; г) $y = \sqrt{(x - 1)^2}$.

Задание 11. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{4}{|x|}$; б) $y = -\dfrac{2}{|x|}$;

в) $y = \dfrac{2}{x} - \left|\dfrac{2}{x}\right|$; г) $y - \dfrac{3}{x} - \left|\dfrac{3}{x}\right|$;

д) $y = x + \dfrac{x}{|x|}$; е) $y = x - \dfrac{x}{|x|}$.

Задание 12. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{1}{|x - 1|}$;

б) $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$.

Задание 13. Постройте график функции:

а) $y = x|x| - 3x$; б) $y = 3x - x|x|$.

Задание 14. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - \dfrac{|x|}{x}$; б) $y = x^2 - \dfrac{x^2}{|x|}$;

в) $y = 1 - x|x|$; г) $y = 2x + x\sqrt{x^2}$.

Задание 15. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^3}{(\sqrt{x^2})^2} - 1$; б) $y = 4x - \dfrac{x^3}{(\sqrt{x})^2}$;

в) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2}} - 1$; г) $y = 4x - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2}}$.

Задание 16. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt[3]{x-1}$; б) $y = \sqrt[3]{x+1}$;

в) $y = \sqrt[3]{|x+1|}$; г) $y = \sqrt[3]{|x-1|}$.

Задание 17. а) Постройте график функции

$$y = x^2 - 4|x| + 3$$

и найдите, при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения.

б) Постройте график функции $y = -x^2 + 3|x| - 2$ и найдите, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения.

Задание 18. Постройте график функции:

а) $y = -x^2 + 4|x| - 3$; б) $y = |-x^2 + 3x - 2|$.

Задание 19. Постройте график функции:

а) $y = 2 - |x| - x^2$; б) $y = x^2 + 4|x| + 3$.

Задание 20. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(2-x)^2}$;

б) $y = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1-x)^2}$;

в) $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$;

г) $y=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}$.

Задание 21. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}+\sqrt[4]{(x^2+6x+9)^2}$;

б) $y=\sqrt[6]{(x^2+10x+25)^3}-\sqrt[6]{(x^2-4x+4)^3}$.

Задание 22. Постройте график функции:

а) $y=(|x+2|-1)(x+3)$; б) $y=(|2-x|)(x+4)$.

Задание 23. Постройте график функции:

а) $y=x^2-3x-(\sqrt{3x-9})^2$; б) $y=x^2-3x-\sqrt{(3x-9)^2}$;

в) $y=x(\sqrt{x-3})^2-3x+8$; г) $y=x\sqrt{(x-3)^2}-3x+8$.

Задание 24. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt[4]{x^2+2|x|+1}$; б) $y=\sqrt[4]{x^2-6|x|+9}$.

УЭ-9. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Числовой последовательностью или **последовательностью** называют числовую функцию $x_n=f(n)$, где n равно 1, 2, 3, ...

Значение функции $x_1=f(1)$, $x_2=f(2)$, ... называют **первым, вторым, ... членами последовательности**, а сами значения аргумента — **номерами членов последовательности**.

Член x_n называют **общим членом последовательности**.

Последовательность называют **возрастающей**, если она является возрастающей функцией, и **убывающей**, если она — убывающая функция. Возрастающие и убывающие функции называют монотонными.

Арифметическая прогрессия — это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.	**Геометрическая прогрессия** — это числовая последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число.
$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула n-го члена	
$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формулы суммы n первых членов	
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$
$S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$

Практическая часть

Арифметическая прогрессия

Задание 1. В арифметической прогрессии сумма 10 членов с четными номерами равна 25, а сумма с нечетными номерами равна 10. Найдите седьмой член прогрессии.

Задание 2. В арифметической прогрессии пятый член равен 2. При каком значении разности прогрессии сумма всевозможных произведений четвертого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наименьшей?

Задание 3. Тринадцатый член арифметической прогрессии равен 5. Найдите сумму первых двадцати пяти ее членов.

Задание 4. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии равна 20, а сумма первых ее двадцати членов равна 15. Найдите сумму первых 35 членов прогрессии.

Задание 5. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 7x + a = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 19x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

Задание 6. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 165, которые при делении на 7 дают в остатке 5.

Задание 7. Найдите сумму всех четных трехзначных натуральных чисел, делящихся на 7.

Геометрическая прогрессия

Задание 8. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 3, а сумма их квадратов равна 21. Найдите эти числа.

Задание 9. Числа a_1, a_2, a_3, a_4 составляют геометрическую прогрессию. Найдите a_1, a_2, a_3, a_4, если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$ и $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1{,}875.$

Задание 10. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 12x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b.

Задание 11. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 + bx + 16 = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите a и b.

Задание 12. Найдите сумму $4 + 44 + 444 + \ldots + \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ «четверок»}}$.

Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

Задание 13. В арифметической прогрессии 11 членов. Первый, пятый и одиннадцатый составляют геометрическую прогрессию. Выпишите все члены арифметической прогрессии, если первый член равен 24.

Задание 14. В арифметической прогрессии, содержащей 7 членов, первый член равен единице и сумма равна 91, геометрическая прогрессия содержит тоже 7 членов, причем первый и последний члены совпадают с членами данной арифметической прогрессии. Найдите десятый член геометрической прогрессии.

Задание 15. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим членам прибавить соответственно 1, 1 и 9, то получится три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Найдите исходные три числа.

Задание 16. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три составляют арифметическую прогрессию, причем сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних чисел равна 24.

Задание 17. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 155, а сумма первых двух членов геометрической прогрессии равна 9. Найдите эти прогрессии, если первый член арифметической прогрессии равен знаменателю геометрической прогрессии, а первый член геометрической прогрессии равен разности арифметической прогрессии.

Задание 18. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если к ним прибавить соответственно 3, 9, 11, 1, то вновь полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите исходные числа.

Задание 19. Первый и третий члены арифметической прогрессии соответственно равны первому и третьему члену геометрической прогрессии. Второй член арифметической прогрессии превышает второй член геометрической прогрессии на 0,25. Вычислите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2.

Задание 20. Разность арифметической прогрессии отлична от нуля. Числа, равные произведениям первого члена этой прогрессии на второй, второго — на третий и третьего — на первый, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

Задание 21. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычесть 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если же из второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии вычесть по единице, то снова получится геометрическая прогрессия. Найдите исходные числа.

Ваш помощник

К заданию 1. $-3{,}5$.
К заданию 2. -8.
К заданию 3. 125.
К заданию 4. -35.
К заданию 5. $a = 10$, $b = 88$.
К заданию 6. 1886.
К заданию 7. 35 392.
К заданию 8. 1; -2; 4 или 4; -2; 1.
К заданию 11. $a = -4$, $b = -36$.
К заданию 12. $\dfrac{4}{81\big(10(10^n - 1) - 9n\big)}$.
К заданию 15. 1; 5; 9 или 17; 5; -9.
К заданию 18. 1; 3; 9; 27.
К заданию 19. 2,5; 22,5.
К заданию 20. -2.
К заданию 21. 1; 3; 9 или $\frac{1}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{49}{9}$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Краткие исторические сведения о прогрессиях

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии содержались уже в древневавилонских клинописных табличках, как и в египетских папирусах, относящихся ко II тыс. до н. э. Например, в египетском папирусе Ахмеса (около 2000 лет до н. э.) имеется задача на геометрическую прогрессию со знаменателем 7: 224.

«У 7 лиц (или в 7 домах) по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей; каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя; каждый колос может дать 7 мер зерна. Сколько всего домов, кошек, мышей, колосьев и мер?» (*Ответ*: 19 607.)

С древнейших времен известны задачи и легенды, связанные с ростом членов геометрической прогрессии. Если $q > 1$, то члены геометрической прогрессии быстро растут и при сравнительно небольших номерах n получаются числа-гиганты. Широко известна одна из древнейших легенд об изобретателе шахмат. Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, которого звали Сета, и предложил, чтобы тот сам выбрал себе награду за остроумную игру. Изобретатель попросил за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Царь удивился скромности своего подданного. Но вскоре оказалось, что он не в состоянии выполнить «скромное» желание Сеты. Подсчет количества всех зерен сводится к нахождению суммы $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$, которая равна 18 446 744 073 709 551 615. Стольким количеством зерен можно было бы покрыть весь земной шар слоем примерно в 1 см толщиной. Такой урожай пшеницы можно собрать на планете, поверхность которой примерно в 2000 раз больше всей поверхности Земли.

В Древней Греции еще в V в. до н. э. были известны следующие формулы:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1).$$

Арифметической и геометрической прогрессиями пользовался также древнегреческий ученый, математик и механик Архимед в своем труде «Исчисление песчинок».

Особенно широко применялись прогрессии и их свойства математиками эпохи Возрождения. В XVI в. немецкий математик М. Штифель (1487—1567) использовал арифметические и геометрические прогрессии для упрощения вычислений. В XVII в. ученые (Г. Лейбниц, И. Ньютон и др.) от геометрической прогрессии перешли к рассмотрению степенных рядов.

Интересно знать

Слово «прогрессия» латинского происхождения (progressio) и буквально означает «движение вперед». Впервые встречается у римского философа А. Боэция (около 480—524). Сначала под прогрессией понимали любую бесконечную числовую последовательность. В XVII в. некоторые математики вместо термина «прогрессия» стали употреблять термин «ряд».

Знак ∺ для геометрической прогрессии ввел английский математик У. Оутред (1574—1660). Слово «геометрическая» в ее названии объясняется тем, что модуль каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому последующего и предыдущего членов. По аналогии знаком ÷ стали обозначать арифметическую прогрессию.

Арифметическая прогрессия и поэзия

В романе А. С. Пушкина «Евгений Онегин» о его герое сказано: «...Не мог он ямба от хорея, как мы ни бились, отличить».

Заметим, что ямб — стихотворный размер с акцентами (сильными местами) на четных слогах стиха. Например:

Мой друг, отчизне посвятим
Души прекрасные порывы!

В этом примере ударными являются второй, четвертый, шестой, восьмой и т. д. слоги, номера которых образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 2, и разностью, равной 2: 2, 4, 6, 8, ...

Хорей — стихотворный метр с акцентами на нечетных слогах. Например:

Сквозь волнистые туманы
Пробирается луна...

В этом примере ударными являются первый, третий, пятый, седьмой и т. д. слоги, номера которых также образуют арифметическую прогрессию, но ее первый член равен единице, а разность по-прежнему равна 2: 1, 3, 5, 7, ...

Содержание

Модуль 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Модуль 4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ