Национальный институт образования

Факультативные занятия

К. О. Ананченко, И. А. Корнеева

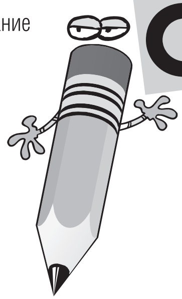
Алгебра учит рассуждать

8 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание



Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721
А64

Серия основана в 2010 году

Ананченко, К. О.
А64 Алгебра учит рассуждать. 8 класс : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / К. О. Ананченко, И. А. Корнеева. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 156 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-19-0426-2.

Пособие содержит теоретический материал и практические задания, решение которых предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем при изучении основного курса алгебры.

Предназначено учащимся 8 классов для использования на факультативных занятиях в соответствии с учебной программой.

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721

ISBN 978-985-19-0426-2

Предисловие

Уважаемые ученики! Вы изучаете факультативный курс математики, который предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем на уроках математики 8-го класса. Для вас важно научиться:

- точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения (определения, теоремы, правила и т. д.);
- правильно пользоваться математической терминологией и символикой;
- решать стандартные и нестандартные задачи;
- использовать общие и частные эвристические приемы по поиску решения новых задач;
- рассуждать и доказывать.

Важное место в процессе изучения факультативного курса будет занимать *самостоятельная математическая деятельность*.

Вы должны стремиться к тому, чтобы ваши умения и навыки по выполнению тех или иных алгебраических действий удовлетворяли таким требованиям, как:

правильность (без ошибок и недочетов выполнять все операции, входящие в действие);

осознанность (уметь указывать или формулировать правило, теорему, формулу, в соответствии с которой действуешь);

автоматизм (каждую операцию выполнять быстро, свернуто);

рациональность (выбирать наиболее короткий, «экономный» путь действия);

обобщенность (уметь выполнить действие в различных ситуациях);

прочность (сохранять в течение длительного времени приобретенные умения или навыки).

Процесс решения задач включает следующие взаимосвязанные этапы:

- анализ задачи (стандартной или нестандартной);
- принятие решения относительно способа деятельности;
- исполнение решения;
- контроль и самоконтроль.

Учебное пособие представлено в модульной программе, которая позволяет приобрести определенный опыт самостоятельной учебной деятельности, самоопределиться и оценить свои возможности овладения учебным материалом.

Модуль учебной программы. Вся программа состоит из модулей. Их число определяется целями обучения, содержанием и объемом учебного материала.

Модули этой программы охватывают в комплексе все аспекты содержания факультативных занятий по алгебре. Каждый учебный модуль представляет собой законченный блок информации, целевую программу действий и методическое руководство по ее реализации. Его можно рассматривать как программу обучения, индивидуализированную по содержанию, уровню самостоятельности, темпу учебной деятельности ученика.

***Учебные элементы* (*УЭ*).** Каждый модуль разбит на учебные элементы. Их число определяется содержанием, объемом материала учебного модуля и логикой изложения.

В предлагаемой модульной программе каждый учебный элемент включает целевую установку, теоретическую и практическую части.

Цель. Она формулируется для каждого учебного элемента и адресована вам.

Теоретическая часть. Она, как правило, содержит учебный материал, с которым вы познакомились на уроке. Поэтому он представлен кратко: или в виде учебного приема, или логических схем, или в виде сущности некоторых теоретических фактов, которые напоминаются посредством примеров.

В этой части модульной программы, как правило, представлено достаточное количество решенных алгебраических задач, которые могут служить примером оформления решения задач в самостоятельных и контрольных работах.

Практическая часть. Здесь посредством системы задач идет углубление и расширение учебного материала, изученного на уроках математики.

Технология модульного обучения позволяет кардинально поменять вашу роль и роль учителя в учебном процессе. Вы учитесь самостоятельно (или с определенной дозой помощи), а учитель организует, координирует, консультирует, контролирует вашу учебную деятельность.

В каждом учебном элементе вы встретитесь с рубрикой ***«Ваш помощник»***. В ней имеются ответы к некоторым заданиям, краткие указания или полное решение. В противном случае (т. е. если они отсутствуют) учитесь самоконтролю, обращайтесь за помощью к товарищу, за консультацией к учителю.

Рубрикой ***«Математическая мозаика»*** завершаются некоторые модули этого пособия. В ней вы найдете исторические сведения, интересные факты, связанные с математикой, софизмы, шутки.

Алгебра есть не что иное, как математический язык, приспособленный для обозначения отношений между количествами.

И. Ньютон

Модуль 1 ЧИСЛОВЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

УЭ-1. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Цель: уяснить смысл понятия «числовое неравенство», знать свойства числовых неравенств и уметь их применять при доказательствах и решении задач.

Теоретическая часть

Понятие числового неравенства. Для любых неравных действительных чисел a и b можно сказать, какое число больше, а какое — меньше.

При решении многих задач важную роль играют следующие утверждения:

1. *Два действительных числа a и b равны (обозначают $a = b$) тогда и только тогда, когда их разность равна нулю, т. е. $a - b = 0$.*

2. *Число a больше числа b (обозначают $a > b$) тогда и только тогда, когда разность $a - b$ положительна, т. е. $a - b > 0$.*

3. *Число a меньше числа b (обозначают $a < b$) тогда и только тогда, когда разность $a - b$ отрицательна, т. е. $a - b < 0$.*

Пример 1. Доказать, что $99^{20} < 9999^{10}$. Составим разность данных чисел и оценим ее:

$$99^{20} - 9999^{10} = 99^{10} \cdot 99^{10} - (99 \cdot 101)^{10} =$$

$$= 99^{10} \cdot 99^{10} - 99^{10} \cdot 101^{10} = 99^{10}(99^{10} - 101^{10}) < 0.$$

Следовательно, $99^{20} < 9999^{10}$.

Пример 2. Доказать, что если $|a| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

Если a — неотрицательное число, то $|a| = a$ и $a < \varepsilon$. С другой стороны, по условию ε — положительное число; тогда $-\varepsilon$ — отрицательное число. И так как a — неотрицательное число, то $-\varepsilon < a$. Из того, что $-\varepsilon < a$ и $a < \varepsilon$, следует, что $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

Если a — отрицательное число, то $|a| = -a$ и $-a < \varepsilon$, т. е. $-\varepsilon < a$. Кроме того, $a < 0$, а $\varepsilon > 0$, тогда $a < \varepsilon$.

В этом случае из того, что $-\varepsilon < a$ и $a < \varepsilon$, следует, что $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

Обратное утверждение также верно. Пусть $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

Докажем, что $|a| < \varepsilon$. Если $a > 0$, то $a = |a|$. И из условия $a < \varepsilon$ получаем $|a| < \varepsilon$. Если же $a < 0$, то $-a = |a|$. Из условия $-\varepsilon < a$ следует: $|a| < \varepsilon$.

Свойства числовых неравенств. Перечислим теоремы, выражающие свойства некоторых числовых неравенств (буквами здесь обозначены действительные числа).

Свойство 1. Если $a < b$, то $b > a$; если $a > b$, то $b < a$.

Свойство 2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Свойство 3. Если $a < b$ и c — любое действительное число, то

$$a + c < b + c.$$

Итак, *если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство*.

Следствие. Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

Свойство 4. Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$. Если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.

Итак, *если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число и сохранить знак исходного неравенства, то получится верное неравенство;*

если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

Следствие. Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Свойство 5. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Итак, *если сложить почленно два верных неравенства одного знака и сохранить этот знак, то получится верное неравенство.*

Свойство 6. Если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$.

Итак, *два верных неравенства противоположного знака можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого вычитали другое неравенство.*

Свойство 7. Если a, b, c, d — положительные числа, $a < b$ и $c < d$, то $ac < bd$.

Итак, *если перемножить почленно два верных неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное неравенство, имеющее тот же знак, что и данное неравенство.*

Следствие 1. Если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$, где n — натуральное число.

Следствие 2. Если $0 < a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Практическая часть

Задание 1. Возьмите чистый лист бумаги и на нем запишите ответы на все устные упражнения, приведенные ниже. Затем свои ответы сверьте с ответами товарищей или учителя.

1. Верно ли неравенство:

а) $-5 < 0$; б) $\pi > 0$;

в) $-127 > 7$; г) $-39 < 39$;

д) $0 < -1$; е) $13 \leq 13$;

ж) $3{,}89 < 3{,}8$; з) $-0{,}45 < -0{,}21$;

и) $3 \leq 5 < 7$; к) $-1 \leq 0 < 3$;

л) $-0{,}24 > -0{,}49$; м) $-1{,}5 < -1{,}3$?

2. При каких значениях a верно неравенство:

а) $a < -a$; б) $-a < a$; в) $-a > a$?

3. Сравните числа a и b, если разность $a - b$ равна:

а) $-0{,}3$; б) 0;

в) 7; г) $(-1)^{21}$;

д) $(-3)^{-2}$.

4. Известно, что $a < b$ ($a > b$). Может ли разность $a - b$ выражаться числом:

а) $0{,}5$; б) -7; в) $(-0{,}1)^{10}$;

г) 2^{-5}; д) $-|-8|$?

5. Как расположены на координатной прямой точки, изображающие a и b, если:

а) $a - b = -3$; б) $a - b = 2{,}5$;

в) $b - a = -2{,}7$; г) $b - a = 0$?

6. Объясните, почему можно утверждать, что неравенство верно при любых значениях переменной:

а) $x + 21 < x - 4$; б) $y^2 + 0{,}1 > 0$;

в) $(2 - x)^2 \geq 0$; г) $-y^2 - 3 < 0$.

7. При каких значениях переменной a верно неравенство:

а) $-a < |a|$; б) $a < |a|$; в) $a \leq |a|$?

8. Укажите наибольшее целое k, удовлетворяющее неравенству:

а) $k < 4$; б) $k \leq 4$; в) $k < -4$;

г) $k \leq 2$; д) $k \leq -0{,}8$; е) $k < 0$;

ж) $k \leq 0$; з) $k \leq -\pi$.

9. Укажите наименьшее целое m, удовлетворяющее неравенству:

а) $m > -3$; б) $m \geq -3$;

в) $m > 0$; г) $m \geq \pi$.

С некоторыми видами из следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Решите, какие из заданий вам необходимо выполнить. В случае трудностей обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 2. Известно, что $a < b$, где a и b — действительные числа. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям неравенства прибавить действительное число c;
б) из обеих частей неравенства вычесть действительное число c;
в) обе части неравенства умножить на -3;
г) обе части неравенства разделить на $0{,}5$;
д) обе части неравенства разделить на -1.

Задание 3. Известно, что $a < b$, где a и b — действительные числа. Поставьте вместо * знак < или > так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $-17a * -17b$; б) $\frac{a}{6} * \frac{b}{6}$;

в) $-0{,}5a * -0{,}5b$; г) $0{,}7a * 0{,}7b$.

Задание 4. Определите знак действительного числа a, если известно, что:

а) $3a < 2a$; б) $6a > a$;

в) $-2a < 2a$; г) $-10a > -3a$.

Задание 5. Пусть a — положительное число и $a < 1$. Докажите, что:

а) $a^2 < a$; б) $a^3 < a^2$.

Задание 6. Верно ли, что:

а) если $a < b$, то $\frac{a}{b} < 1$; б) если $\frac{a}{b} < 1$, то $\frac{a}{b} < 1$?

Задание 7. Сложите почленно неравенства:

а) $21 > 3$ и $13 > 4$; б) $-2 < 5$ и $-7 < 3$;

в) $4 > -2$ и $-2 > -7$; г) $-5 < -3$ и $-7 < -1$.

Задание 8. Вычтите почленно из первого неравенства второе:

а) $3 < 5$ и $7 > 1$; б) $11 > 4$ и $-2 < 5$;

в) $14 > -3$ и $-3 < -2$; г) $-13 > -10$ и $-6 > -17$.

Задание 9. Перемножьте почленно неравенства:

а) $7 < 8$ и $2 < 3$; б) $18 > 7$ и $3 > 2$;

в) $15 > 11$ и $5 > 4$; г) $2 < 21$ и $3 < 5$.

Задание 10. Пусть $a > 2$, $b > 3$, $c > 1$. Докажите, что:

а) $a + b + c > 6$; б) $abc > 6$;

в) $2ab + 3abc > 30$; г) $a^2 + b^2 + c^2 > 13$.

Задание 11. Докажите, что:

а) если $a > 2$ и $b > 5$, то $5a + 2b > 20$;
б) если $a > 3$, то $a^2 + 6 \geq 15$;
в) если $a > b$, то $1 - a < 2 - b$.

Задание 12. Верно ли утверждение:

а) если одно действительное число больше другого, то и куб первого числа больше куба второго;
б) если модуль одного действительного числа больше модуля другого, то и квадрат первого числа больше квадрата второго?

Задание 13. Пусть $a > b$ и числа a, b — отрицательные.

Докажите, что:
а) $a^n > b^n$, если n — нечетное натуральное число;
б) $a^n < b^n$, если n — четное натуральное число.

Задание 14. 9 ручек стоят дороже, чем 11 карандашей. Что дороже — 15 ручек или 17 карандашей?

Задание 15. Пассажир сдает в багажное отделение рюкзак, чемодан, саквояж и корзинку. Чемодан тяжелее, чем рюкзак, саквояж и рюкзак тяжелее, чем корзинка и чемодан вместе, а корзинка и саквояж вместе весят столько, сколько вместе весят чемодан и рюкзак. Какой из этих грузов самый тяжелый, а какой — самый легкий?

УЭ-2. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Цель: знать методы доказательства неравенств и уметь их применять.

Теоретическая часть

Понятие доказательства неравенства. Некоторые неравенства обращаются в верное числовое неравенство при всех допустимых значениях переменных или на некотором заданном множестве значений переменных. Например, неравенства $a^2 \geq 0$, $(a - b)^2 \geq 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ верны при любых действительных значениях переменных, а неравенство $\sqrt{a} \geq 0$ — при любых действительных неотрицательных значениях a.

Иногда возникает задача доказательства неравенства.

Доказать неравенство — значит показать, что данное неравенство обращается в верное числовое неравенство при всех допустимых значениях переменных или на заданном множестве значений этих переменных.

Методы доказательства неравенств. Заметим, что общего метода доказательства неравенств не существует. Однако некоторые методы можно указать.

1. *Метод оценки знака разности между левой и правой частями неравенства.* Составляется разность левой и правой частей неравенства и устанавливается, положительна или отрицательна эта разность при рассматриваемых значениях переменных (для нестрогих неравенств надо установить, неотрицательна или неположительна эта разность).

Пример 1. Доказать, что для любых действительных чисел a и b имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \qquad (*)$$

Доказательство. Составим разность левой и правой частей неравенства:

$$a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Так как квадрат любого действительного числа есть число неотрицательное, то $(a - b)^2 \geq 0$, а значит, $a^2 + b^2 \geq 2ab$ для любых действительных чисел a и b. Равенство в (*) имеет место в том и только в том случае, когда $a = b$.

Пример 2. Доказать, что если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, т. е. среднее арифметическое неотрицательных действительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического.

Доказательство. Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{ab} + \left(\sqrt{b}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0. \text{ Значит, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

2. *Дедуктивный метод доказательства неравенств.* Сущность этого метода заключается в следующем: с помощью ряда преобразований выводят требуемое неравенство из некоторых известных (опорных) неравенств. В качестве опорных могут использоваться, например, неравенства: $a^2 \geq 0$ при любом $a \in \boldsymbol{R}$; $(a-b)^2 \geq 0$ при любых $a, b \in \boldsymbol{R}$; $(a^2+b^2) \geq 2ab$ при любых $a, b \in \boldsymbol{R}$; $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Пример 3. Доказать, что для любых действительных чисел a и b имеет место неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac.$$

Доказательство. Из верных неравенств $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ и $(c-a)^2 \geq 0$ следует, что $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2+c^2 \geq 2bc$, $c^2+a^2 \geq 2ac$. Сложив почленно все три неравенства и разделив обе части нового на 2, получим требуемое неравенство.

Исходное неравенство можно доказать и первым методом. В самом деле, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac = 0{,}5(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac) = 0{,}5((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2) \geq 0$.

Разность между $a^2+b^2+c^2$ и $ab+bc+ac$ больше или равна нулю, а это значит, что $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ (равенство справедливо тогда и только тогда, когда $a=b=c$).

3. *Метод оценок при доказательстве неравенств.*

Пример 4. Доказать неравенство

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\ldots+\frac{1}{200} > \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Легко заметить, что левая часть неравенства содержит 100 слагаемых, каждое из которых не меньше $\frac{1}{200}$. В таком случае говорят, что левую часть неравенства можно оценить снизу следующим образом:

$$\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+\ldots+\frac{1}{200} > \underbrace{\frac{1}{200}+\frac{1}{200}+\ldots+\frac{1}{200}}_{100\ \text{слагаемых}} = \frac{1}{200}\cdot 100 = \frac{1}{2}.$$

4. *Метод полной индукции*. Сущность метода состоит в рассмотрении всех частных случаев, охватывающих условие задачи в целом.

Пример 5. Доказать, что если $x > |y|$, то $x > y$.

Доказательство. Возможны два случая:
а) $y \geq 0$, тогда $|y| = y$. По условию $x > |y|$, значит, $x > y$;
б) $y < 0$, тогда $|y| > y$. По условию $x > |y|$, значит, $x > y$.

Практическая часть

Задание 1. Возьмите чистый лист бумаги и на нем запишите ответы на устные упражнения, приведенные ниже. Затем свои ответы сверьте с ответами или краткими указаниями, помещенными в конце этого учебного элемента в рубрике «Ваш помощник».

1. Сравните сумму квадратов двух неравных чисел a и b с их удвоенным произведением.

2. Докажите неравенство:

а) $a(a+b) \geq ab$;

б) $x^2 - xy + y^2 \geq xy$;

в) $x(x-y) \geq y(x-y)$;

г) $2bc \leq b^2 + c^2$.

3. Известно, что $a < 3$. Докажите, что $2a < 7$.

4. Известно, что $b > 7$. Докажите, что $6b > 40$.

Задание 2. Докажите, что при любом действительном x имеет место неравенство:

а) $3(x+1) + x - 4(2+x) < 0$;

б) $(x+2)(x+4) > (x+1)(x+5)$;

в) $(x-2)^2 > x(x-4)$;

г) $4x^2 + 1 \geq 4x$;

д) $\dfrac{(1+x)^2}{2} \geq 2x$;

е) $1 + 2x^4 > x^2 + 2x^3$.

Задание 3. Докажите, что:

а) $x^3 + 1 \geq x^2 + x$, если $x \geq -1$;
б) $x^3 + 1 \leq x^2 + x$, если $x \leq -1$.

Задание 4. Докажите, что если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$, то

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2.$$

Задание 5. Докажите неравенство, выделив полный квадрат:

а) $x^2 - 2xy + 9y^2 \geq 0$;

б) $x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x + y)$;

в) $10x^2 + 10xy + 5y^2 + 1 > 0$;

г) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$;

д) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$;

е) $(x + 1)(x - 2y + 1) + y^2 \geq 0$.

Задание 6. Докажите, что:

а) $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$;

б) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 > 0$;

в) $3x^2 + y^2 + 8x + 4y - 2xy + 22 \geq 0$;

г) $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 > 0$.

Задание 7. Докажите, что если $n \geq k \geq 1$, то $k(n - k + 1) \geq n$.

Задание 8. Докажите, что если $4a + 2b = 1$, то $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20}$.

Определите значения a и b, при которых имеет место равенство.

Задание 9. Докажите неравенство:

а) $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$;

б) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ при любых x и y;

в) $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$;

г) $x^n + y^n \geq x^{n-1}\text{y} + xy^{n-1}$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Задание 10. Верно ли, что:

а) если $a^2b \geq 0$, то $b \geq 0$;

б) если $a^2b > 0$, то $b > 0$?

Задание 11. Докажите, что:

а) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{77}{78}\cdot\frac{79}{80}<\frac{1}{9}$;

б) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}<0{,}01$.

Задание 12. Докажите, что:

а) $\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{149}+\frac{1}{150}>4\frac{2}{3}$;

б) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}<0{,}99$;

в) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}<0{,}999$.

Задание 13. Что больше:

а) 127^{10} или 1025^7;

б) 53^{36} или 36^{53};

в) 3^{200} или 2^{300};

г) 99^{20} или 9999^{10}?

Задание 14. Докажите, что при любом действительном x имеет место неравенство:

а) $x^{12}-x^9+x^4-x-1>0$;

б) $x^8-x^6-4x^4-x^2-1>0$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. $a^2+b^2>2ab$, так как $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$.
2. а) $a^2+ab-ab=a^2\geq 0$;

   б) $x^2-xy-y^2-xy=(x-y)^2\geq 0$.
3. $(a<3)\Rightarrow(2a<6)\Rightarrow(6<7$ и $2a<7)\Rightarrow(2a<7)$.
4. Так как $b>7$, то $6b>42$, но $42>40$, значит, $6b>40$.

УЭ-3. ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

Цель: знать определения, уметь обозначать и изображать на координатной прямой различные числовые промежутки; записывать промежутки, изображенные на координатной прямой, в виде неравенства, указывать числа, принадлежащие и не принадлежащие данному промежутку; находить пересечение и объединение промежутков и записывать их с использованием знаков $\cup$, $\cap$.

Практическая часть

Задание 1. Изобразите на координатной прямой промежуток:

а) $[-1; 3]$; б) $(-2; 2)$;

в) $(1; \infty)$; г) $[3; \infty)$;

д) $(-\infty; 4)$; е) $(-\infty; -2]$;

ж) $(-\infty; +\infty)$.

Задание 2. Принадлежит ли промежутку $[-4{,}5; \pi)$ число: -3; -7; 0; $3{,}14$; $9{,}1$?

Задание 3. Укажите два положительных и два отрицательных рациональных числа, принадлежащих промежутку:

а) $(-1; 1)$; б) $[-4; 8)$.

Задание 4. Какие из целых чисел принадлежат промежутку:

а) $[-2; 2]$; б) $(-5{,}2; 6{,}25]$;

в) $(-3; -2)$; г) $(-1; 0)$?

Задание 5. Укажите наибольшее или наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:

а) $[-4; 5]$; б) $[-2{,}3; 1{,}7)$;

в) $(-\infty; 24]$; г) $(-3; +\infty)$.

Задание 6. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а) $[1; 7]$ и $[2; 4]$;

б) $(1; 5)$ и $(2; 4)$;

в) $[-2; 3)$ и $(-7; 2)$;

г) $(3; +\infty)$ и $(-\infty; 2)$;

д) $(-3; +\infty)$ и $(4; +\infty)$;

е) $(-\infty; +\infty)$ и $(\pi; 5)$.

Задание 7. Покажите штриховкой на координатной прямой объединение промежутков:

а) $[5; 9]$ и $[-3; 5]$;

б) $[3; 7)$ и $[7; 10]$;

в) $[5; +\infty)$ и $(3; +\infty)$;

г) $[1; 3]$ и $(-6; 2)$.

Задание 8. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков:

а) $[-5; 3]$ и $[-3; 7]$;

б) $(1; 0)$ и $[0; 5]$;

в) $(-\infty; 3]$ и $(1; +\infty)$;

г) $[-7; 12]$ и $[3; 4]$.

Задание 9. Пусть $\boldsymbol{Z}_0$ — множество целых чисел x, таких, что $-12 \le x \le -3$. Выпишите его элементы.

Задание 10. Изобразите на координатной прямой множество всех целых чисел, принадлежащих отрезку $[-5; 5]$.

Задание 11. Пусть $0 < a < b$. Докажите, что на координатной прямой:

а) точка $\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a; b]$;

б) точка $\frac{a-b}{2}$ — середина отрезка $[-b; a]$;

в) точка $\frac{b-a}{2}$ — середина отрезка $[-a; b]$;

г) точка $\frac{-a-b}{2}$ — середина отрезка $[-b; -a]$.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ЛИНЕЙНОЕ НЕРАВЕНСТВО С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

Цель: знать определения понятий «линейное неравенство», «решение неравенства», «равносильные неравенства»; знать, что значит решить неравенство; знать и уметь применять утверждения, на основе которых осуществляются равносильные переходы; уметь решать линейные неравенства в общем виде.

Теоретическая часть

Понятие линейного неравенства. Напомним, что называют линейным неравенством. Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, где a и b — некоторые действительные числа, x — переменная, называются **линейными**.

Примерами линейных неравенств являются: $2x > 3$; $7x < 8$; $0{,}5x < -1$.

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Например, число 1 — решение неравенства $7x < 8$, так как $7 \cdot 1 < 8$ — верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Например, неравенство $0 \cdot x > 1$ не имеет решений, поскольку при любом действительном x получается неверное числовое неравенство.

Важно знать и понимать понятие равносильности неравенств.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются **равносильными**. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.

Основная идея решения неравенства заключается в следующем: заменяем одно неравенство другим, более простым, но равносильным первому. Такие замены осуществляются на основе следующих утверждений:

1) если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное исходному;

2) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное исходному;

3) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное исходному.

Например, неравенство $-12 + 3x > 0$ равносильно неравенству $3x > 12$, а неравенство $3x > 12$ равносильно неравенству $x > 4$.

Решение линейного неравенства в общем виде. Пусть дано неравенство $ax > b$.

Если $a > 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x > \frac{b}{a}$ (свойство 2), значит, множество решений неравенства есть промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то неравенство $ax > b$ равносильно неравенству $x < \frac{b}{a}$ (свойство 3), и поэтому множество решений неравенства есть промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > b$, т. е. оно не имеет решений, если $b \geq 0$, и решением является множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$, если $b < 0$.

Алгоритм решения линейного неравенства в общем виде показан в таблице.

$ax > b,\ a, b \in \boldsymbol{R}$		
$a > 0$	b — любое число	$x > \frac{b}{a}$
$a < 0$	b — любое число	$x < \frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \geq 0$	решений нет
	$b < 0$	x — любое число

Практическая часть

Задание 1. Возьмите чистый лист бумаги и на нем запишите ответы на все устные упражнения, приведенные ниже. Затем свои ответы сверьте с ответами или краткими указаниями, помещенными в конце этого учебного элемента в рубрике «Ваш помощник».

1. Какие из чисел -10; 10; 0; -1; $0{,}5$; 1 являются решением неравенства $2x > 1$?

2. Являются ли равносильными неравенства:

а) $x - 2 > 4$ и $x > 6$; б) $2x > x$ и $x > -3$;

в) $5x < 60$ и $x < 12$; г) $5x > 60$ и $x > 15$;

д) $-3x < x - 4$ и $x > 1$; е) $24 - 4x < x - 39$ и $x > 9$?

3. Решите неравенство:

а) $3x > 9$; б) $-x > 2$;

в) $-x \le 0$; г) $\frac{1}{2}x \ge 7$;

д) $\frac{x}{6} < -3$; е) $-\frac{x}{3} > 10$.

4. Укажите множество решений неравенства:

а) $-3x > 15$; б) $-2x > 3$; в) $5x > x + 20$;

г) $0 \cdot x < 1$; д) $0 \cdot x > -2{,}5$; е) $0 \cdot x > 5$.

5. Решите неравенство:

а) $0 \cdot x > -8$; б) $0 \cdot x > 8$; в) $0 \cdot x > 0$;

г) $0 \cdot x \ge 0$; д) $0 \cdot x \le 0$; е) $0 \cdot x \le 5$;

ж) $0 \cdot x \ge 6$; з) $|x - 3| \ge -1$; и) $|x - 3| \le 0$.

6. Укажите множество решений неравенства:

а) $|x| < 2$; б) $|x| \le 2$; в) $|x| \le 0$;

г) $|x| < 0$; д) $|x| < -1$; е) $|x| > 2$;

ж) $|x| > -2$; з) $|x| > 0$; и) $|x| \ge 0$.

7. Решите уравнение:

а) $|x| = x$; б) $|x| = -x$;

в) $|x - 1| = 1 - x$; г) $|x - 1| = x - 1$.

С некоторыми видами из следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Решите, какие из заданий вам необходимо выполнить. В случае трудностей обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 2. Какие из чисел $-5{,}1$; $\frac{1}{3}$; -8; 0; $1{,}7$ являются решением неравенства $3x < 1$?

Задание 3. Являются ли равносильными неравенства:

а) $x - 2 < 2x$ и $-x < 2$;
б) $x < 4$ и $2x < 8$;
в) $-x < 3$ и $x < -3$;
г) $-x < 5$ и $x > -5$;
д) $-4x < -8x$ и $x < 2$;
е) $0 \cdot x > 3$ и $-7 > 0 \cdot x$?

Задание 4. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $3x > 18$;
б) $-4x > 5$;
в) $2x \le -1$;
г) $-0{,}4x \le 6$;
д) $7t > 0$;
е) $-4t > 0$;
ж) $-2t > -8$;
з) $-3t < -9$;
и) $3k > -1$;
к) $-3k > -1$;
л) $0 \cdot k \ge -2$;
м) $-2k \ge 0$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. 1 и 10.

2. а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) нет.

3. а) $(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -2)$; в) $[0; +\infty)$; г) $[14; +\infty)$; д) $(-\infty; -18)$; е) $(-\infty; -30)$.

4. а) $(-\infty; -5)$; б) $(-\infty; -1{,}5)$; в) $(5; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\varnothing$.

5. а) $\boldsymbol{R}$; б) $\varnothing$; в) $\varnothing$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $\boldsymbol{R}$; е) $\boldsymbol{R}$; ж) $\varnothing$; з) $\boldsymbol{R}$; и) $\{3\}$.

6. а) $(-2; 2)$; б) $[-2; 2]$; в) $\{0\}$; г) $\varnothing$; д) $\varnothing$; е) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; ж) $\boldsymbol{R}$; з) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; и) $\boldsymbol{R}$.

7. а) $[0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0]$; в) $[1; +\infty)$; г) $(-\infty; 1]$.

УЭ-5. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ, СВОДЯЩИХСЯ К ЛИНЕЙНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ

Цель: знать и уметь применять утверждения, на основе которых осуществляются равносильные переходы; научиться решать неравенства, сводящиеся к линейным.

Теоретическая часть

Рассмотрим примеры решения неравенств, сводящихся к линейным неравенствам.

Пример 1. Решить неравенство $3x + 9 > 0$.

Решение. Перенесем слагаемое 9 с противоположным знаком в левую часть неравенства: $3x > -9$.

Разделив обе части неравенства на положительное число 3, получим равносильное ему неравенство $x > -3$.

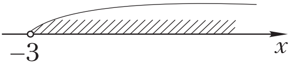


Рис. 1

Множество решений неравенства состоит из всех действительных чисел больше –3. Это множество представляет собой числовой промежуток $(-3; +\infty)$, изображенный на рисунке 1.

Ответ можно записать в виде числового промежутка $(-3; +\infty)$.

Ответ: $(-3; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{x}{3} - 2 \geq \frac{2x}{5} - 7$.

Умножив обе части неравенства на 15, получим равносильное ему неравенство: $5x - 30 \geq 6x - 105$.

Перенеся члены неравенства из одной части в другую с противоположным знаком, придем к неравенству $5x - 6x \geq 30 - 105$.

Откуда $-x \geq -75$.

Умножим обе части неравенства на -1, поменяв знак неравенства на противоположный: $x \leq 75$.

Ответ: $(-\infty; 75]$.

Практическая часть

Задание 1. Решите неравенство (устно):

а) $2x + 5 > 0$; б) $3 - 2x < 5$;

в) $5x + 6 \leq 3x - 8$; г) $x + 2 < 2x - 5$.

Задание 2. Решите неравенство:

а) $(3x+1)(x-1)-3x^2>5-2x$;
б) $(2x-5)^2-1<(2b-1)(2b+1)-15$;
в) $3c^2-(3c+2)(c-1)>8$;
г) $(3k-2)(2k+3)-(6k^2-85)\geq 99$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+4)<6$;
б) $3(t+1)(t+2)-(3t-4)(t+2)\geq 35$;
в) $2(3a-1)(2a+5)-6(2a-1)(a+2)<48$;
г) $3(1-4x)(x-1)+2(6x-4)(x+3)>59$.

Задание 4. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{3}{4}u-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{7}{12}u-0{,}3\right)<\left(\frac{2}{3}u-0{,}6\right)$;

б) $(0{,}4x-2)-(1{,}5x+1)\geq 3{,}6+(-4x-0{,}8)$;

в) $\left(1\frac{3}{4}-2\frac{5}{8}a\right)+(-1{,}6a-1)\leq 5{,}4+(-2{,}5-0{,}3a)$;

г) $\left(0{,}15b-\frac{3}{4}\right)+(2{,}3b-0{,}25)>3{,}12+(2-0{,}25b)$.

Задание 5. Решите неравенство:

а) $(2x-1)^2+5x<(1+2x)(2x-1)$;
б) $(x-1)^2-(1+x)(1-x)<2(1-x)^2$;
в) $(y-1)^2-2(4+y)(y-1)+(y+4)^2>5y$;
г) $(2y-1)^3-(2y+3)$.

Задание 6. Решите неравенство:

а) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x+2}{2}$;

б) $\frac{x-1}{4}+1>\frac{2-3x}{2}-\frac{x}{6}$;

в) $\frac{2x+1}{5}-\frac{2-x}{3}>1$;

г) $\frac{3x+7}{2}<\frac{12-5x}{3}$;

д) $\frac{5-x}{3}-\frac{1-x}{2}>\frac{x}{6}$;

е) $\frac{3x-1}{4}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{6}$.

Задание 7. Решите неравенство:

а) $3(2x-1)-\frac{3}{4}<\frac{x+2}{2}-7$;

б) $\frac{2x-1}{4}-\frac{3(x+1)}{2}<\frac{x-1}{2}+3$;

в) $3+\frac{2x-9}{2}>\frac{15-3x}{6}-\frac{9-12x}{3}$;

г) $\frac{\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{5}{6}x+1\right)}{5}<5$.

Задание 8. Найдите все значения $x \in \boldsymbol{N}$ и удовлетворяющие неравенству:

а) $7x-6<4x+9$;

б) $(2-1{,}2x)-(0{,}5x-6{,}5)>0$;

в) $-27{,}1+3x<7{,}1-5x$.

Задание 9. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}.$$

Задание 10. Длина стороны прямоугольника равна 12 дм. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы численное значение периметра прямоугольника было меньше численного значения периметра квадрата со стороной 9 дм?

Задание 11. Длина стороны прямоугольника равна 12 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы численное значение периметра прямоугольника было больше численного значения площади этого прямоугольника?

Задание 12. Туристы отправились на моторной лодке по течению реки и должны вернуться обратно к стоянке не позднее чем через 3 ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч?

Задание 13. Из города A со скоростью 12 км/ч выехал велосипедист. Через t ч вслед за ним из того же города отправляется мотоциклист со скоростью 30 км/ч. Найдите те значения t, при которых мотоциклисту понадобится менее 4 ч для того, чтобы догнать велосипедиста.

Ваш помощник

***К заданию* 1.** а) $(-2{,}5; +\infty)$; б) $(-1; +\infty)$; в) $(-\infty; -7]$; г) $(7; +\infty)$.

***К заданию* 2.** а) Нет решений; б) $(2; +\infty)$; в) $(6; +\infty)$; г) $[4; +\infty)$.

***К заданию* 3.** а) $(-\infty; -4)$; б) $[3; +\infty)$; в) $\left(-\infty; 5\frac{3}{4}\right)$; г) $(2; +\infty)$.

***К заданию* 4.** а) $\left(-\infty; 6\frac{9}{25}\right)$; б) $[2; +\infty)$; в) $\left[-\frac{86}{157}; +\infty\right)$; г) $\left(2\frac{4}{15}; +\infty\right)$.

***К заданию* 5.** а) $(-\infty; -2)$; б) $(-\infty; -1)$.

***К заданию* 6.** а) $(-\infty; 7)$; б) $\left(\frac{3}{23}; +\infty\right)$; в) $(2; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{3}{19}\right)$; д) $\boldsymbol{R}$; е) $(-\infty; 4{,}2)$.

***К заданию* 7.** а) $\left(-\infty; -\frac{9}{22}\right)$; б) $\left(-2\frac{5}{6}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -0{,}4)$.

УЭ-6. ЗАДАЧИ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Цель: научиться решать линейные неравенства с параметрами.

Теоретическая часть

Что значит решить неравенство с параметрами. Пусть дано неравенство $ax > b$, где x — переменная, a и b — любые действительные числа.

Если ставится задача для каждого значения a и b из множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел (или его подмножества) решить неравенство $ax > b$, то говорят, что нужно решить неравенство с параметрами.

Решить неравенство $ax > b$ (с переменной x и параметрами a и b) — это значит указать все его решения в зависимости от значений параметров a и b.

Учимся решать неравенства с параметрами. Рассмотрим примеры решения неравенств с параметрами.

Пример. Решить неравенство $ax < 1$, где x — переменная, a — параметр.

Решение. Очевидно, рассмотрение всех трех случаев: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ позволяет решить неравенство с параметром a.

Если $a > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $x < \frac{1}{a}$.

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x < 1$ и решением такого неравенства является любое действительное число (левая часть неравенства при любом x обращается в нуль, а правая — положительное число).

Если $a < 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству $x > \frac{1}{a}$.

Ответ: если $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$; если $a = 0$, то x — любое действительное число; если $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Решите неравенство:

а) $2x > 7$;
б) $-2x > 8$;
в) $2x < -3$;
г) $-0{,}4x < 6$;
д) $8y > 0$;
е) $-8y > 0$;
ж) $(a^2 + 1)x > -1$;
з) $-(b^2 + 1)y < 0$.

2. Решите неравенство:

а) $0 \cdot x > 7$;
б) $0 \cdot x > 13{,}5$;
в) $0 \cdot x > 0$;
г) $0 \cdot x < 7$;
д) $0 \cdot x < 13{,}5$;
е) $0 \cdot x < 0$;
ж) $0 \cdot x > -7$;
з) $0 \cdot x < -7$;
и) $0 \cdot x \le -7$.

3. Решите неравенство $ax > 5$, если:

а) $a < 0$; б) $a = 0$; в) $a > 0$.

4. Решите неравенство $ax > b$, если:

а) $a > 0$; б) $a < 0$;

в) $a = 0, b > 0$; г) $a = 0, b < 0$.

5. Решите неравенство $ax < b$, если:

а) $a > 0$; б) $a < 0$;

в) $a = 0, b > 0$; г) $a = 0, b < 0$.

6. Решите неравенство:

а) $0 \cdot x < 3$; б) $0 \cdot x < 5a^2 + 1$;

в) $0 \cdot x > -a$; г) $0 \cdot x > -2a^2 - 1$;

д) $0 \cdot x > 0$; е) $0 \cdot x < 2a - 3$;

ж) $0 \cdot x < a^2 - 2a + 1$; з) $0 \cdot x \geq 1 - 2a + a^2$;

и) $0 \cdot x \geq 1 - a^2$.

7. При каких значениях a одновременно имеют место неравенства:

а) $ax - 5 > 0$ и $x > \frac{5}{a}$; б) $ax - 5 > 0$ и $x < \frac{5}{a}$?

8. Можно ли утверждать, что при любом действительном a:

а) $|a| \geq a$; б) $2a > a$; в) $a + 1 > a - 1$?

Задание 2. Решите относительно x неравенство:

а) $ax > -7$; б) $(a - 3)x > 2$;

в) $(2a - 1)x < 4$; г) $ax < b$;

д) $(a - 4) < x < b - 1$; е) $(2a + 1)x > 2b - 7$;

ж) $(a - 1)x > 5a + 1$; з) $a(x - 1) > x - 2$.

Задание 3. Решите относительно x неравенство:

а) $ax > -2$; б) $(a - 5)x > 2$;

в) $(2a - 1)x < 2$; г) $(a^2 + 1)x > 7$;

д) $-(a^2 + 2)x < 0$; е) $(a - 5)x < a - 1$;

ж) $(a-1)x > 5a+1$; з) $(2a-1)x < 3a-2$;

и) $a(x-1) > x-2$; к) $ax > a(a-1)$.

Задание 4. Решите относительно переменной x неравенство:

а) $ax - x^2 \geq x - 1$;

б) $ax + 16 \leq 4x + a^2$;

в) $5 + ax \leq 5x + a$;

г) $(a^2 + a + 1)x - 3a > (2 + a)x + 5a$;

д) $(a^2 - 2a - 3)x - a < 0$;

е) $-\frac{2}{3}ax - 1 > -(x(a+1) + a)$;

ж) $2x + 3(ax - 8) + \frac{x}{3} < 4\left(x + \frac{1}{2}\right) - 5$;

з) $\frac{ax+1}{3} - \frac{x-49}{2} \geq \frac{a^2}{6}$;

и) $\frac{a^2x+1}{2} - \frac{a^2x+3}{3} < \frac{a+9x}{6}$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $(3{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $(-\infty; -1{,}5)$; г) $(-15; +\infty)$; д) $(0; +\infty)$; е) $(-\infty; 0)$; ж) $\left(-\frac{1}{a^2+1}; +\infty\right)$; з) $(0; +\infty)$.

2. а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; в) $\varnothing$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $\boldsymbol{R}$; е) $\boldsymbol{R}$; ж) $\boldsymbol{R}$; з) $\varnothing$; и) $\varnothing$.

3. а) Так как $a < 0$, то $(ax > 5) \Leftrightarrow \left(x < \frac{5}{a}\right)$, т. е. $\left(-\infty; \frac{5}{a}\right)$; б) так как $a = 0$, то неравенство имеет вид $0 \cdot 5 > 5$; множество его решений — пустое; в) так как $a > 0$, то $(ax > 5) \Leftrightarrow \left(x > \frac{5}{a}\right)$, т. е. $\left(\frac{5}{a}; +\infty\right)$.

4. а) Так как $a > 0$, то $(ax > b) \Leftrightarrow \left(x > \frac{b}{a}\right)$. Его решение — числовой промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$; б) так как $a < 0$, то $(ax > b) \Leftrightarrow \left(x < \frac{b}{a}\right)$. Его ре-

шение — числовой промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$; в) в этом случае неравенство имеет вид $0 \cdot x > b$, а так как $b > 0$, то множество решений данного неравенства — пустое; г) в этом случае неравенство имеет вид $0 \cdot x > b$, а так как $b < 0$, то его решением является любое действительное число, т. е. множество $\boldsymbol{R}$.

5. а) $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$; б) $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$; в) $\boldsymbol{R}$; г) $\varnothing$.

6. а) $\boldsymbol{R}$; б) $\boldsymbol{R}$; в) если $a > 0$, то множество $\boldsymbol{R}$; если $a < 0$, то $\varnothing$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $\varnothing$; е) если $a > \frac{3}{2}$, то решением является множество $\boldsymbol{R}$; если $a \le \frac{3}{2}$, то $\varnothing$; ж) если $a = 1$, то решением является $\varnothing$; если $a \ne 1$, то $\boldsymbol{R}$; з) если $a = 1$, то решением является множество $\boldsymbol{R}$; если $a \ne 1$, то $\varnothing$; и) если $|a| \le 1$, то решением является множество $\boldsymbol{R}$; если $|a| > 1$, то $\varnothing$.

7. а) При $a > 0$; б) при $a < 0$.

8. а) Да; б) нет; в) да.

УЭ-7. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Цель: знать определение решения системы (совокупности) неравенств и знаки, применяемые для их обозначения; уметь решать системы и совокупности простейших неравенств; уметь решать двойные неравенства.

Теоретическая часть

Понятие системы неравенств. Несколько неравенств с одной переменной образуют систему, если нужно найти множество всех общих решений заданных неравенств.

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой, например:

$$\begin{cases} 3x - 6 > 0, \\ 2x < 9. \end{cases}$$

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство.

Множество решений системы есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств.

Учимся решать системы неравенств. Рассмотрим примеры решения систем неравенств.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 14 < 0, \\ -3x + 9 < 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразовав каждое неравенство, входящее в систему, получим:

$$\begin{cases} x < 7, \\ x > 3. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства $(-\infty; 7)$, второго — $(3; +\infty)$. Очевидно, что множеством решений системы является пересечение этих двух множеств. Это пересечение можно найти с помощью координатной прямой.

Системе неравенств удовлетворяет любое число из интервала $(3; 7)$.

Ответ: $(3; 7)$.

Пример 2. Решить двойное неравенство $-1 < \dfrac{2x - 1}{3} < 1.$

Решение. Двойное неравенство можно рассматривать как систему неравенств

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{2x - 1}{3}, \\ \dfrac{2x - 1}{3} < 1. \end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{cases} 3 < 2x - 1, \\ 2x - 1 < 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x < 2. \end{cases}$$

Множество решений системы, а следовательно, и двойного неравенства — числовой интервал $(-1; 2)$ (рис. 2).

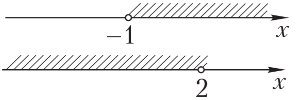


Рис. 2

Решение двойного неравенства можно найти по-другому: $-1 < \frac{2x-1}{3} < 1$.

Умножив неравенство почленно на 3, получим:

$$-3 < 2x - 1 < 3.$$

Прибавляя к каждой из частей неравенства 1, получаем равносильное исходному неравенство $-2 < 2x < 4$. Разделив полученное неравенство почленно на 2, приходим к неравенству

$$-1 < x < 2.$$

Ответ: $(-1; 2)$.

Понятие совокупности неравенств. Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность, если нужно найти все такие значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств.

Для обозначения совокупности неравенств используется прямая скобка [. Так, запись $\left[\begin{array}{l}2x-3<1,\\3x+1>10\end{array}\right.$ означает, что неравенства образуют совокупность. Иногда неравенства, образующие совокупность, записывают в строчку и отделяют друг от друга логической связкой «или». Например,

$$2x - 3 < 1 \text{ или } 3x + 1 > 10.$$

Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств, образующих совокупность, обращается в верное числовое неравенство, называется **решением совокупности неравенств**.

Множество решений совокупности есть **объединение множеств решений входящих в нее неравенств**.

Учимся решать совокупности неравенств. Определим, что значит решить совокупность систем неравенств.

Решить совокупность систем неравенств с переменной x — значит найти все такие значения x, которые удовлетворяют по крайней мере одной из заданных систем.

Другими словами, решением совокупности систем является объединение решений этих систем.

Рассмотрим примеры решения совокупностей неравенств.

Пример 3. Решить совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 3x > 27, \\ 4 - x < 0. \end{array}\right.$

Решение. Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 3x > 27, \\ -x < -4; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > 9, \\ x > 4. \end{array}\right.$$

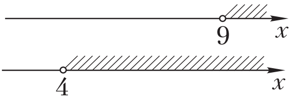


Рис. 3

Множество решений неравенства $x > 9$ — числовой промежуток $(9; +\infty)$, неравенства $x > 4$ — числовой промежуток $(4; +\infty)$. Пользуясь координатной прямой, находим, что объединением этих множеств является числовой промежуток $(4; +\infty)$ (рис. 3).

Ответ: $(4; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Является ли число -7 решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + 3 < 8, \\ 3x - 2 < 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 1 > 2, \\ -4x - 2 > 3? \end{cases}$

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 2, \\ x > 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \le 4, \\ x \ge 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x < 0, \\ x > -1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 0 \cdot x < 13, \\ x > 5. \end{cases}$

3. Решите двойное неравенство:

а) $-12 < 2x < 15$;

б) $-3 < -x < 9$;

в) $-3 \le x \le 5$.

4. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{10} > 0$;

б) $-\frac{10}{x} \le 0$;

в) $\frac{10}{x} < 0$;

г) $-\frac{x}{10} \le 0$.

5. Является ли число π решением совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x-2>0, \\ 2x+1<0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 1-5x>0, \\ 3x+9<0? \end{array}\right.$

6. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x-1>0, \\ x+1<0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} -6-3x>0, \\ 2x+7<0. \end{array}\right.$

7. Найдите множество решений:

а) $\begin{cases} x-3 \ge 3, \\ x-5 \le -5; \end{cases}$

б) $\left[\begin{array}{l} x+3 \ge 3, \\ x-5 \le 5; \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} -2x+2 \ge 0, \\ x+1 \le 0; \end{cases}$

г) $\left[\begin{array}{l} -2x+2 \ge 0, \\ x+1 \le 0. \end{array}\right.$

8. Установите соответствие между системами неравенств и множеством их решений: луч, открытый луч, полуинтервал, отрезок:

а) $\begin{cases} x+10 \ge 3, \\ x-5 \le 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+4>0, \\ 3x+6 \le 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+8>10, \\ 5x+20 \ge 40; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x+5>0, \\ 2x+40>2. \end{cases}$

9. Объясните, почему данная система неравенств не имеет решений:

а) $\begin{cases} x-5>x-4, \\ 3-x>0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-3|\le 0, \\ x<2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-5>0, \\ 5-x>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x|<7, \\ x>13. \end{cases}$

Задание 2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3-x>0, \\ 2x+1<6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x>2x+1, \\ 4x+2\ge -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+1\le 3, \\ 5<3x+1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1-x>5, \\ 5x+3>13. \end{cases}$

Задание 3. Придумайте систему двух линейных неравенств, имеющую множество решений:

а) $(-2; 4)$; б) $(3; +\infty)$;

в) $(-\infty; -1)$; г) пустое множество.

Задание 4. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6x-1>9-4x, \\ 3-2x<x+16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4-2x\le 5x+1, \\ 3x-4\ge 2x-10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x+7>2x+13, \\ 3x-8<2x+1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(2-3x)2(3-2x)>x, \\ 6<x^2-x(x-8); \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x-3>1+x, \\ 3-18x<4x-30; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x>4x+6, \\ 4x+3<2x+1. \end{cases}$

Задание 5. Решите двойное неравенство:

а) $3\le 2x\le 8$; б) $-2x<y-5<2$;

в) $3x-2<4x+1<3x+5$; г) $0\le \dfrac{5a-1}{4}\le 4$;

д) $-2\le \dfrac{2b+1}{3}$.

Задание 6. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x+12>-0{,}75, \\ \dfrac{1{,}5x+2}{4}<\dfrac{2x+3}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}<\dfrac{7x-5}{2}, \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>5\dfrac{x-2}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{5x-x}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7, \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0, \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0{,}7(x+8)<0. \end{cases}$

Задание 7. Укажите наибольшее и наименьшее целые числа, являющиеся решением системы:

а) $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0, \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0{,}7(x+8)<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-\dfrac{3(x-15)}{4}-2(15-2x)<0, \\ 1{,}2x-\dfrac{2x-4}{5}-0{,}6(1-2x)>0. \end{cases}$

Задание 8. Решите двойное неравенство:

а) $3\le 2x\le 8$; б) $-2<y-5<2$;

в) $3x-2<4x+1<3x+5$; г) $0\le\dfrac{5a-1}{4}\le 4.$

Задание 9. При каких действительных a значения дроби принадлежат числовому промежутку $[-2; 1]$?

Задание 10. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \le \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \le \frac{3}{2}$.

Задание 11. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 5x+3>0, \\ 2x-1>0; \end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l} 3x-1<\frac{x}{2}+2, \\ 2x-3<\frac{x}{4}+1; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} \frac{2x-3}{5}<x-2, \\ 5x-7<x-6; \end{array}\right.$

г) $\left[\begin{array}{l} 3x+1>2, \\ 4x-2>2. \end{array}\right.$

Задание 12. Решите неравенство:

а) $x(x-3)>0$;

б) $(x-1)(x-2)<0$;

в) $(2x-1)(x+1)>0$;

г) $x^2-9>0$.

Задание 13. Решите совокупность систем неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-3<1, \\ x-5>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x+1>0, \\ x+8<11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x}{7}-1<0, \\ \frac{2x}{3}-1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{3x}{4}<5, \\ \frac{3x}{2}+1>10. \end{cases}$

Задание 14. Решите неравенство:

а) $(x+2)(x-7)<0$;

б) $(x-3)(2x-5)>0$;

в) $(3-2x)(1+x)\ge 0$;

г) $(2x+8)(7-4x)\le 0$;

д) $-0{,}5x(x+3)<0$;

е) $(x^2+1)(5-x)(x+1)\le 0$.

Задание 15. Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{x^2+1}{x-3}>0$;

б) $\frac{x+3}{x^2+7}<0$;

в) $\frac{x}{x-1}<0$;

г) $\dfrac{x-5}{x-7} > 0$; д) $\dfrac{5-2x}{2x-7} \geq 0$; е) $\dfrac{5x-4}{2-x} \geq 0$;

ж) $\dfrac{2x-3}{1-x} < 0$; з) $\dfrac{15x+23}{5x+2} \leq 4$; и) $\dfrac{2-16x}{2x+1} > -6$.

Задание 16. В двузначном числе цифра десятков на 3 меньше цифры единиц. Найдите это число, если известно, что оно больше 21, но меньше 60.

Задание 17. Если к некоторому натуральному числу прибавить его четверть, то $\dfrac{2}{3}$ результата представляют собой число, большее 40, но меньшее 60. Найдите это число, если известно, что оно делится на 19.

Задание 18. Длина основания равнобедренного треугольника равна 14 см. Каким числом может быть выражена длина боковой стороны, если известно, что периметр треугольника меньше 60 см?

Задание 19. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) Является; б) не является.

2. а) $(6; +\infty)$; б) $[3; 4]$; в) $(3; 4)$; г) $\varnothing$; д) $(-1; 0)$; е) $(5; +\infty)$.

3. а) $(-6; 7{,}5)$; б) $(-9; 3)$; в) $[-3; 5]$.

4. а) $(0; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)$; г) $[0; +\infty)$.

5. а) Число π является решением данной совокупности, так как $\pi - 2 > 0$ — верное числовое неравенство; б) число π не является решением данной совокупности, так как $1 - 5 \cdot \pi > 0$ и $3 \cdot \pi + 9 < 0$ — неверные числовые неравенства.

6. а) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -2)$.

7. а) $\varnothing$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; -1]$; г) $(-\infty; 1]$.

8. а) Отрезок; б) полуинтервал; в) луч; г) открытый луч.

9. а) Первое неравенство системы не имеет решений; б) число 3 является единственным решением первого неравенства системы, но не является решением второго неравенства; в) пересечение множеств решений неравенств $x > 5$ и $x < 5$ — пустое множество; г) пересечение множеств решений данной системы — пустое множество.

***К заданию* 2.** а) $(-\infty; -2)$; б) $\left[-1; -\dfrac{1}{3}\right)$; в) $\left(\dfrac{4}{3}; 2\right]$; г) $\varnothing$.

***К заданию* 3.** а) $\begin{cases} 3x+1 > x-3, \\ x < 2x+12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(x-1) > 5, \\ 9x > 27. \end{cases}$

***К заданию* 4.** а) $(1; +\infty)$; б) $[-6; -1]$; в) $(3; 9)$; г) $\varnothing$; д) $(1,5; +\infty)$; е) $(-\infty; -3)$.

***К заданию* 5.** а) $(-1,6; +\infty)$; б) нет решений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Неравенства

Понятие неравенства, как и понятие равенства, возникло в глубокой древности. Без понятий «больше» и «меньше» нельзя было осмыслить понятия равенства, тождества, уравнения. Ряд неравенств приводит в своем знаменитом трактате «Начала» Евклид. Он, например, доказывает, что верно неравенство $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$, где $a \ge 0, b \ge 0$, т. е. среднее геометрическое двух неотрицательных чисел не больше их среднего арифметического. В «Математическом собрании» Паппа Александрийского (III в.) доказывается, что если $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$ (a, b, c и d — положительные числа), то $ad > bc$.

При этом все рассуждения проводились словесно с опорой в большинстве случаев на геометрическую терминологию. Современные знаки неравенства появились лишь в XVII—XVIII вв. Знаки < и > ввел английский математик Т. Гарриот (1560—1621). Символы ≦ и ≧ были введены в 1734 г. французским физиком и математиком Пьером Буге (1698—1758). Позже их стали записывать так: ≤, ≥.

Неравенства и системы неравенств широко используются как в теоретических исследованиях, так и при решении практических задач.

Интересно знать

Известный русский писатель А. С. Грибоедов, поступив в Московский университет, окончил за шесть с половиной лет курс трех факультетов: словесного, юридического и физико-математического.

Профессор математики Оксфордского университета Чарльз Лютвидж Латвидж Доджсон (1832—1898) издал под именем Льюиса Кэрролла ряд детских книг. На русском языке неоднократно издавались «Алиса в Стране Чудес» и «Алиса в Зазеркалье».

Кто сильнее?

Однажды в минуты отдыха друзья-мушкетеры Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян решили немного поразвлечься в перетягивании каната. Портос с д'Артаньяном легко перетянули Атоса с Арамисом. Но когда Портос стал в паре с Атосом, то победа над Арамисом с д'Артаньяном досталась им уже не так легко. А когда Портос с Арамисом выступили против Атоса с д'Артаньяном, то никакая из этих пар не смогла одолеть другую. Определите, как мушкетеры распределяются по силе.

Модуль 2 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

УЭ-1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Цель: систематизировать и обобщить знания по теме «Рациональные числа».

Теоретическая часть

Понятие рационального числа. *Рациональным числом* называют число, которое можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}$.

Числа, которые можно записать в виде дроби, называют **рациональными числами**. Всякое целое число является рациональным. Например, $8 = \frac{8}{1}$; $-7 = \frac{-7}{1}$; $0 = \frac{0}{5}$.

Название «рациональное число» происходит от латинского слова *ratio* — отношение (рациональное число — отношение целых чисел).

Множество рациональных чисел состоит из всех целых чисел, всех дробных чисел, положительных и отрицательных, и числа нуль. Множество рациональных чисел обозначают $\boldsymbol{Q}$. Отметим, что $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{Q}$.

Арифметический квадратный корень из рационального числа. Напомним определения понятия арифметического квадратного корня.

Арифметическим квадратным корнем из рационального числа *a* называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают так: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ называется **знаком арифметического квадратного корня**, число, стоящее под знаком корня, называется *подкоренным числом*. Запись $\sqrt{a}$ читается: «Арифметический квадратный корень из числа a» либо «Арифметическое значение квадратного корня из числа a».

Выполняя действие извлечения квадратного корня из рационального числа, не всегда получают рациональное число, т. е. операция извлечения квадратного корня не всегда выполняется на множестве $\boldsymbol{Q}$. Нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного рационального числа, ибо квадрат любого рационального числа не может быть отрицательным. Оказывается, что и не из каждого рационального положительного числа можно извлечь рациональный квадратный корень.

Этот факт подтверждает теорема:

Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Можно доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 3, 5, 7, 10.

Представление рационального числа в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Напомним основные правила *обращения периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь*.

Не существует правил действий над периодическими дробями. Поэтому их обращают в обыкновенные дроби по следующим правилам.

Правило 1. Правильная чистая периодическая дробь равна обыкновенной, числителем которой является период периодической дроби, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде.

Например:

$$0,(7)=\frac{7}{9};\ 2,(14)=2\frac{14}{99}.$$

Правило 2. Правильная смешанная периодическая дробь равна обыкновенной, в числителе которой находится разность числа, стоящего до второго периода, и числа, стоящего до первого периода, а в знаменателе столько девяток, сколько цифр в периоде, и столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Например:

$$0,7(4)=\frac{74-7}{90}=\frac{67}{90};$$

$$1,63(13)=1\frac{6313-63}{9900}=1\frac{6250}{9900}=1\frac{125}{198}.$$

Пример. Вычислить:

$$10{,}5 - 3\frac{1}{6}\left(7 - 4\frac{2}{3} : 3{,}5\right).$$

Решение.

1) $4\frac{2}{3} : 3{,}5 = 4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2} = \frac{14}{3} : \frac{7}{2} = \frac{14 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3};$

2) $7 - 1\frac{1}{3} = 5\frac{2}{3};$

3) $3\frac{1}{6} \cdot 5\frac{2}{3} = \frac{19}{6} \cdot \frac{17}{3} = \frac{323}{18} = 17\frac{17}{18};$

$$\begin{array}{r} 19 \\ {*}\;17 \\ \hline 133 \\ +\;19 \\ \hline 323 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 323 & 18 \\ \cline{2-2} -\;18 & 17 \\ \cline{1-1} 143 & \\ -\;126 & \\ \cline{1-1} 17 & \end{array}$$

4) $10{,}5 - 17\frac{17}{18} = 10\frac{1}{2} - 17\frac{17}{18} = (10 - 17) + \left(\frac{1}{2} - \frac{17}{18}\right) =$

$= -7 + \left(\frac{9}{18} - \frac{17}{18}\right) = -7 - \frac{4}{9} = -7\frac{4}{9}.$

Ответ: $-7\frac{4}{9}$.

Практическая часть

Задание 1. Продумайте ответы на вопросы.

1. Какие числа составляют множество всех рациональных чисел? Как обозначается это множество? Приведите примеры рациональных чисел.

2. Существует ли взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел и множеством всех точек на координатной прямой?

3. Всегда ли выполнимы действия сложения, умножения, вычитания и деления на множестве $\boldsymbol{Q}$?

4. Что называется арифметическим квадратным корнем? Сколько существует арифметических квадратных корней из неотрицательного рационального числа a?

5. Всегда ли уравнение $x^2 = a$ имеет рациональные корни при $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$, и если имеет, то сколько?

6. Могут ли быть равными: а) квадраты неравных чисел; б) арифметические квадратные корни из неравных чисел?

7. Назовите два рациональных числа, расположенных между числами $-0{,}13427$ и 0.

Задание 2. Выполните устно.

1. Представьте в виде отношения целого числа к натуральному числу следующие числа: а) $1\frac{3}{4}$; б) 0,4; в) $-1\frac{2}{3}$; г) -17; д) 0.

2. Какие из чисел -80; $-12{,}5$; -2; $-\frac{3}{4}$; 0; 6; 17; $20\frac{1}{6}$ являются: а) натуральными; б) целыми; в) рациональными, но не натуральными; г) рациональными, но не целыми?

3. Верно ли, что:

а) $-4 \in \boldsymbol{N}$; $-4 \in \boldsymbol{Z}$; $-4 \in \boldsymbol{Q}$;

б) $3{,}6 \in \boldsymbol{N}$; $3{,}6 \in \boldsymbol{Z}$; $3{,}6 \in \boldsymbol{Q}$;

в) $14 \in \boldsymbol{N}$; $14 \in \boldsymbol{Z}$; $14 \in \boldsymbol{Q}$?

4. Пусть $x \in \boldsymbol{Q}$, $y \in \boldsymbol{Q}$. Какому из числовых множеств принадлежит $x + y$; $x - y$; xy; $\frac{x}{y}$?

5. Укажите два таких рациональных числа, чтобы их сумма, произведение, частное были равны между собой.

6. Укажите несколько рациональных чисел, заключенных между:

а) 6 и 6,1;

б) $-0{,}02$ и 0;

в) -201 и $-2\ 00$;

г) $\frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$.

7. Укажите такие рациональные числа k и q, при которых имеет место соотношение:

а) $\frac{k}{q} = 0$; б) $\frac{k}{q} = 1$; в) $\frac{k}{q} = -1$;

г) $\frac{k}{q} > 1$; д) $\frac{k}{q} < 1$; е) $\frac{k}{q} \cdot \frac{q}{k} > 1 \cdot \frac{q}{k}$.

8. Могут ли два взаимно обратных числа иметь противоположные знаки?

9. Вычислите:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{9 \cdot 10}.$$

10. Решите уравнение:

а) $x^2 = 25$; б) $\frac{1}{2}x^2 = 2$; в) $x^2 = 3$.

11. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{121} = 11$; б) $\sqrt{400} = 20$;

в) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$; г) $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

12. Какие из данных выражений имеют смысл:

а) $\sqrt{900}, \sqrt{-900}, -\sqrt{900}$;

б) $\sqrt{3^2}, \sqrt{-3^2}, -\sqrt{3^2}, -\sqrt{(-3)^2}$?

13. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{25}$; б) $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{10\,000}$;

г) $\sqrt{0{,}81}$; д) $\sqrt{0{,}16}$; е) $\sqrt{0{,}04}$;

ж) $\sqrt{\frac{25}{4}}$; з) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; и) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

14. Почему уравнение не имеет корней:

а) $\sqrt{x} = -3$; б) $\sqrt{x} + 2 = 0$;

в) $-\sqrt{x} = 3$; г) $3\sqrt{x} = -12$?

15. Докажите, что:

а) число 7 есть арифметический квадратный корень из 49;

б) число 0,5 есть арифметический квадратный корень из 0,25;

в) число $-1{,}3$ не является арифметическим квадратным корнем из 1,69.

16. Докажите, что:

а) $\sqrt{81}=9$; б) $\sqrt{4{,}84}=2{,}2$;

в) $\sqrt{16{,}81}=4{,}1$; г) $\sqrt{0{,}0324}=0{,}18$.

17. Вычислите арифметический квадратный корень из числа:

а) 25; б) 121; в) 0,36;

г) 2,56; д) $\frac{16}{9}$; е) $6\frac{1}{4}$.

18. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{100}$; б) $\sqrt{1600}$; в) $\sqrt{\frac{1}{9}}$;

г) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; д) $\sqrt{0{,}81}$; е) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$;

ж) $\sqrt{0{,}01}$; з) $\sqrt{0{,}000001}$.

19. Даны дроби: а) $\frac{9}{70}$; б) $\frac{4}{26}$; в) $\frac{3}{16}$; г) $\frac{11}{50}$. Не пользуясь алгоритмом деления, выясните, какие из обыкновенных дробей обращаются в конечные десятичные дроби.

20. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби рациональное число: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{7}{30}$.

21. Каково наименьшее рациональное число, большее числа 5,7, в бесконечную запись которого не входят цифры 0, 1, 2, 3?

22. Запишите рациональное число в виде периодический дроби: $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$.

23. Представьте в виде обыкновенной дроби: 0,(4); 0,(5); 0,(21); 1,(137).

С некоторыми видами из следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Решите, какие из заданий вам необходимо выполнить. В случае трудностей обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 3. Докажите, что если a и b — рациональные числа и $a < b$, то число $\frac{a+b}{2}$ лежит между ними.

Задание 4. Докажите, что между любыми двумя рациональными числами содержится бесконечное множество рациональных чисел.

Задание 5. Укажите несколько рациональных чисел, заключенных между:

а) 6 и $6{,}1$;

б) $-0{,}01$ и 0;

в) -102 и -101;

г) $\frac{1}{7}$ и $\frac{2}{7}$.

Задание 6. Найдите x из пропорции:

а) $0{,}12 : 0{,}5 = 0{,}2x : 7{,}2$;

б) $13\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3} = 26 : 0{,}2x$;

в) $5\frac{3}{5} : 2\frac{1}{3} = 1{,}4x : 3\frac{1}{9}$;

г) $3\frac{1}{3}x : 1{,}5 = 4\frac{2}{7} : \frac{3}{14}$.

Задание 7. Найдите x из пропорции

$$\frac{x \cdot 34\frac{2}{5}}{0{,}4 + 8\left(5 - 0{,}8 \cdot \frac{5}{8}\right) - 5 : 2\frac{1}{2}} = \frac{90}{1\frac{7}{8} \cdot 8 - 8{,}9 + 2{,}6 : \frac{2}{3}}.$$

Задание 8. Вычислите:

а) $\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{11 \cdot 13} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \frac{2}{15 \cdot 17} + \frac{2}{17 \cdot 19}$;

б) $\frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \frac{3}{11 \cdot 14} + \frac{3}{14 \cdot 17} + \frac{3}{17 \cdot 20} + \frac{3}{20 \cdot 23}$.

Задание 9. Вычислите:

а) $5\frac{4}{45}-4\frac{1}{15}+3\frac{29}{30}:(55{,}65:5{,}3-9{,}48)$;

б) $4\frac{7}{8}:\left(\dfrac{3{,}1-0{,}04-\frac{17}{20}}{\frac{9}{28}+\frac{3}{7}+16{,}25}\right)\cdot 1{,}6$;

в) $\dfrac{8{,}4\cdot\left(1\frac{5}{8}+\frac{17}{18}\right)-15\frac{59}{60}}{646{,}8:21}$.

Задание 10. Вычислите:

а) $\dfrac{1{,}37^2+2{,}74\cdot 3{,}63+3{,}63^2}{0{,}874\cdot 0{,}729+0{,}271\cdot 0{,}874+0{,}126}$;

б) $\dfrac{(6{,}63^2+5{,}4\cdot 3{,}37+1{,}23\cdot 3{,}37):260-0{,}111}{2{,}35+101{,}22:8{,}4}$;

в) $\dfrac{(7{,}8^2+13{,}7\cdot 2{,}2-5{,}9\cdot 2{,}2):15{,}6-2{,}12}{7{,}95+41{,}088:2{,}56}$;

г) $\dfrac{3{,}67^2-3{,}67\cdot 2{,}13+1{,}54\cdot 6{,}33}{5{,}77^2-4{,}23^2}$;

д) $(8{,}516^3+8{,}484^3):17-8{,}516\cdot 8{,}484$.

Задание 11. Вычислите:

а) $\dfrac{1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25$;

б) $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90$.

Задание 12. Найдите число, 7,5 % которого равно A, где

$$A = \frac{\left(8\frac{7}{55} - 6\frac{17}{110}\right) \cdot 1\frac{3}{217}}{\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20}\right) : 1\frac{7}{8}}.$$

Ваш помощник

***К заданию* 2.**

1. а) $\frac{7}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $-\frac{5}{3}$; г) $-\frac{17}{1}$; д) $\frac{0}{n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

2. а) 6; 17; б) –80; –2; 0; 6; 17; в) –80; –12,5; –2; $-\frac{3}{4}$; 0; $20\frac{1}{6}$; г) –12,5; $-\frac{3}{4}$; $20\frac{1}{6}$.

3. а) Неверно; верно; верно; б) неверно; неверно; верно; в) верно; верно; верно.

4. Множеству рациональных чисел.

5. $\frac{1}{2}$ и –1, так как $\frac{1}{2} + (-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} : (-1) = -\frac{1}{2}$.

6. Например: а) 6,01; 6,02; 6,03; б) –0,01; –0,001; –0,005; в) –200,5; –200,4; –200,3; г) 0,3; 0,32; 0,38.

7. а) $k = 0$, q — любое рациональное число, отличное от 0; б) $k = q$, $q \neq 0$; в) $k = -q$, $q \neq 0$; г) $k > q > 0$ либо $k < q < 0$; д) $0 < k < q$ либо $q < k < 0$; е) таких рациональных чисел k и q не существует.

8. Нет.

9. $1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$.

10. а) –5; 5; б) –2; 2; в) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

11. *Доказательство*: а) $11 > 0$ и $11^2 = 121$, следовательно, $\sqrt{121} = 11$; б) $20 > 0$ и $20^2 = 400$, следовательно, $\sqrt{400} = 20$.

12. а) Да; нет; да; б) да; нет; да; да.

13. а) 5; б) 7; в) 100; г) 0,9; д) 0,4; е) 0,2; ж) $\frac{5}{2}$; з) $1\frac{1}{3}$; и) $1\frac{2}{5}$.

16. а) $9 > 0$ и $9^2 = 81$.

17. а) 5; б) 11; в) 0,6; г) 1,6; д) $\frac{4}{3}$; е) $\frac{5}{2}$.

18. а) 10; б) 40; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{3}{5}$; д) 0,9; е) $\frac{7}{2}$; ж) 0,1; з) 0,001.

19. а) $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, не обращается; б) $26 = 2 \cdot 13$, не обращается; в) $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, обращается; г) $50 = 2 \cdot 5^2$, обращается.

20. $\frac{1}{2} = 0{,}5000...$; $\frac{1}{4} = 0{,}25000...$; $\frac{1}{8} = 0{,}125000...$; $\frac{7}{30} = 0{,}2333...$.

21. 5,74444... .

22. $\frac{2}{9} = 0{,}(2)$; $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$; $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$.

23. $0{,}(4) = \frac{4}{9}$; $0{,}(5) = \frac{5}{9}$; $0{,}(21) = \frac{21}{99}$; $1{,}(137) = \frac{1136}{999}$.

***К заданию* 6.** а) 8,64; б) 13; в) $5\frac{1}{3}$; г) 9.

***К заданию* 7.** 9.

***К заданию* 8.** а) $\frac{14}{95}$; б) $\frac{21}{46}$.

***К заданию* 10.** а) 25; б) 0,01; в) 0,12; г) 21; д) 0,001024.

***К заданию* 11.** а) 12; б) 9.

***К заданию* 12.** 200.

УЭ-2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Цель: углубить и расширить знания о множестве действительных чисел.

Теоретическая часть

Понятие действительного числа. Число, которое может быть представлено в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, называется **иррациональным**.

Примерами иррациональных чисел являются:

1) число 7,030033000333...;

2) число π, бесконечная непериодическая дробь 3,141592653689793...;

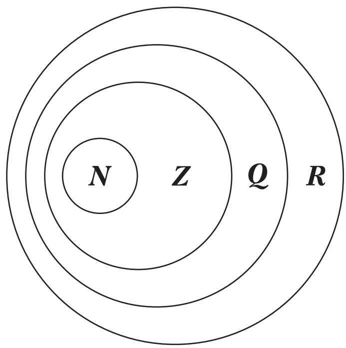
3) число 0,101001000100001..., у которого за каждой единицей идет группа нулей, содержащая на один больше, чем предыдущая группа.

Множество бесконечных непериодических дробей (положительных и отрицательных) образует множество иррациональных чисел.

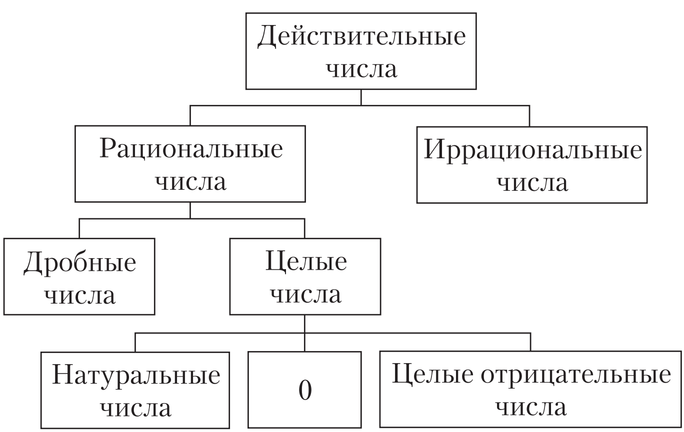
Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных чисел. Это множество обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби: $a = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n \ldots$, где a_0 — целое число, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — десятичные знаки, т. е. некоторые цифры десятичной системы счисления.

Соотношение между числовыми множествами N, Z, Q и R. Оно представлено на схеме:



Разбиение множества всех действительных чисел на непересекающиеся подмножества показано на схеме:



Понятие противоположных чисел. Два действительных числа называют **противоположными**, если их сумма равна 0.

Например, -3 и 3; $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$ — противоположные числа.

Число 0 противоположно самому себе.

Понятие взаимно обратных действительных чисел. **Взаимно обратными числами** называют два действительных числа, произведение которых равно 1.

Например, $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{3}$; $3\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{2}$; $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ — взаимно обратные числа.

Число 1 обратно самому себе. Для числа 0 обратного числа не существует.

Сравнение двух действительных чисел. Говорят, что число a больше числа b, и пишут $a > b$, если разность $(a-b)$ — положительное число; если же разность $(a-b)$ — отрицательное число, то говорят, что число a меньше числа b, и пишут $a < b$; число a равно числу b, если $a-b=0$.

Для любых заданных действительных чисел a и b имеет место одно и только одно из соотношений: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

При сравнении двух бесконечных десятичных дробей (не имеющих периода) пользуются следующим правилом:

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots < b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

если $a_k = b_k$ и $a_i < b_i$ при всех $k < i$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Заметим, что если целые части двух десятичных дробей разные, то та дробь больше, у которой целая часть больше. Если целые части одинаковы, то надо обратиться к наименьшему разряду, для которого цифры дробей различны: та из дробей больше, у которой цифра этого разряда больше.

Действия над действительными числами. Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить.

При выполнении действий в практических задачах действительные числа заменяют их приближенными значениями. Повышая точность, с которой берутся приближенные значения, получают более точное значение результата.

Свойства действий над действительными числами:

1) $a+b=b+a$ — переместительный закон сложения;

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ — сочетательный закон сложения;

3) $a + 0 = a$;

4) $a + (-a) = 0$;

5) $a \cdot b = b \cdot a$ — переместительный закон умножения;

6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — сочетательный закон умножения;

7) $a \cdot (b + c) = ab + bc$ — распределительный закон умножения относительно сложения;

8) $a \cdot 1 = a$;

9) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, где $a \neq 0$;

10) $a \cdot 0 = 0$.

Понятия среднего арифметического и среднего геометрического действительных чисел. **Средним арифметическим** нескольких чисел называют число, которое получается при делении суммы этих чисел на число слагаемых.

Например, среднее арифметическое чисел 30, 70 и 95 есть число, равное числу $\frac{30 + 70 + 95}{3}$, т. е. числу 65.

Средним геометрическим n положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ называют корень n-й степени из произведения этих чисел, т. е. $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$.

Обобщенное неравенство Коши имеет вид:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Практическая часть

Задание 1. Продумайте ответы на вопросы.

1. Какие числа называются иррациональными? Приведите примеры иррациональных чисел.

2. Может ли рациональное число быть равно иррациональному?

3. Назовите:

а) два иррациональных числа меньше 5;

б) два отрицательных иррациональных числа;

в) два иррациональных числа, расположенных между числами -2 и -1.

Задание 2. Возьмите чистый лист бумаги и на нем запишите ответы ко всем устным упражнениям, приведенным ниже. Свои ответы сверьте с ответами или краткими указаниями, помещенными в конце учебного элемента в рубрике «Ваш помощник».

1. Укажите среди данных чисел натуральные, рациональные, иррациональные: 0,5; –6,2; $\sqrt{3}$; π; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{5}$; 2; 9; $\sqrt{25}$; $\sqrt{6}$; 0,22212(221); 2,01001(0001).

2. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{1}{3}$; б) 0,(32); в) $\frac{8}{3}$.

3. Сравните действительные числа:

а) 0,(21) и 0,21;

б) $\sqrt{10}$ и 1,375;

в) π и 3,1416.

4. Назовите:

а) два иррациональных числа, меньших 7;

б) два иррациональных числа, расположенных между числами –3 и –1.

5. Может ли рациональное число быть равным иррациональному?

6. Назовите десятичные приближения с недостатком и с избытком с точностью до 0,01 числа:

а) 14,372; б) 2,1264; в) 0,1751.

7. Какие из следующих чисел являются рациональными, какие — иррациональными:

а) $\sqrt{16}$; б) $\sqrt{18}$; в) 0;

г) $-\sqrt{7}$; д) 0,444...; е) 3,010010001...?

8. Найдите множество чисел, состоящее из объединения (пересечения) множества рациональных и множества иррациональных чисел.

9. Сравните числа 0,1845 и 0,184184...; π и 3,1415.

10. В числе 0,12345678910111213...30 вычеркните после запятой сорок семь цифр так, чтобы полученное число было наибольшим.

11. Каким из множеств принадлежит число 0,(3): $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{R}_+$; $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}_+$; $\boldsymbol{R}$?

12. Расположите в порядке возрастания числа: 0,466; $\frac{7}{15}$; 0,4636363...; 0,463736; 0,4656565... .

13. Объясните, с какой закономерностью идут цифры в бесконечной десятичной дроби:

а) 5,3287177177177...;

б) 0,1010010001000010...;

в) 1,252255222555222255...;

г) 0,41041410414141410414...;

д) 0,14916221364964... .

14. Не выполняя деления, скажите, конечной или бесконечной десятичной дробью можно выразить данную обыкновенную дробь: $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{6}$; $\frac{17}{20}$; $\frac{1}{123}$; $\frac{33}{576}$; $\frac{8}{75}$.

15. При каких значениях a и b верны равенства $a + b = 0$, $a - b = 0$, $a \cdot b = 0$, $\frac{a}{b} = 0$?

16. Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $-\frac{5}{7}$;

г) $\frac{7}{8}$; д) $3\frac{7}{9}$; е) 0,(5);

ж) 0,(66); з) 1,(37).

17. Сравните действительные числа:

а) 3,5732218904 и 3,5723218904;

б) 7,2537(4) и 7,253745;

в) $\sqrt{37} - \sqrt{36}$ и $\sqrt{35} - \sqrt{37}$.

18. Укажите число x, находящееся в интервале:

а) $x \in \boldsymbol{N}$, $\sqrt{x} < x < \sqrt{18}$;

б) $x \in \boldsymbol{R}$, $1{,}45 < x < 1{,}46$;

в) $x \in \boldsymbol{R}$, $\sqrt{5} < x < \sqrt{7}$.

19. Приведите пример двух иррациональных чисел, таких, что:
а) их сумма (разность) — иррациональное число;
б) их сумма (разность) — рациональное число;
в) их произведение (частное) — иррациональное число;
г) их произведение (частное) — рациональное число.

20. Может ли:
а) сумма двух рациональных чисел быть числом иррациональным;
б) сумма двух иррациональных чисел быть числом рациональным;
в) сумма двух действительных чисел быть числом рациональным?

21. При каких действительных значениях x имеет место равенство $x + |x| = 0$?

С некоторыми видами из следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Решите, какие из заданий вам необходимо выполнить. В случае трудностей обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 3. Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{8}$;

г) $\sqrt{10}$; д) $\sqrt{12}$.

Задание 4. Докажите, что числа 2,6 и 2,7 являются десятичными приближениями соответственно с недостатком и с избытком числа $\sqrt{7}$ с точностью до 0,1.

Задание 5. Найдите три первых десятичных знака бесконечной десятичной дроби, выражающей результат действия:

а) $2 + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; в) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$;

г) $\sqrt{3} - \sqrt{5}$; д) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; е) $\pi \cdot \sqrt{5}$;

ж) $\dfrac{2}{3{,}4}$; з) $\dfrac{0{,}03217}{0{,}02154}$.

Задание 6. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух действительных чисел, одно из которых — рациональное число, отличное от нуля, а другое — иррациональное, являются иррациональными числами.

Задание 7. Может ли сумма рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

Задание 8. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?

Задание 9. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух действительных чисел, одно из которых — рациональное, а другое — иррациональное, является иррациональным числом.

Задание 10. Могут ли быть иррациональными числа a и b, если рациональны числа:

а) $a+b$ и $a-b$;

б) $a-b$ и ab;

в) ab и $\frac{a}{b}$;

г) $a+b$ и $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

Задание 11. Докажите, что сумма, разность и произведение чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где $a \in \boldsymbol{Q}$ и $b \in \boldsymbol{Q}$, также могут быть представлены в таком же виде.

Задание 12. Число r — рациональное, число α — иррациональное. Рационально или иррационально число:

а) $\sqrt{r+\alpha}$;

б) $r+\sqrt{\alpha}$?

Задание 13. а) Докажите, что $\sqrt{mn}$ — иррациональное число, если $\sqrt{\frac{m}{n}}$ — иррациональное число ($m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$); б) верно ли обратное утверждение?

Задание 14. Числа a, b и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — рациональные. Докажите, что $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — рациональные числа.

Задание 15. Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

в) $1-\sqrt{3}$;

г) $2+\sqrt{5}$.

Задание 16. Значение какого выражения больше:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ или $\sqrt{3}+3$;

б) $\sqrt{12}-\sqrt{15}$ или $\sqrt{10}-\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{5}+\sqrt{30}+\sqrt{50}$ или $\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{60}$;

г) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{102\sqrt{5}}}$ или $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$?

Ваш помощник

***К заданию* 2.**

1. Числа 2; 9 и $\sqrt{25}$ — натуральные; числа 0,5; –6,2; $\frac{2}{3}$; 2; 9; $\sqrt{25}$; 0,22212(221) и 2,01001(0001) — рациональные; числа $\sqrt{3}$; π; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$ — иррациональные.

2. а) 0,5000...; б) 0,3232...; в) 2,6666... .

3. а) $0,(21) > 0,21$; б) $\sqrt{10} > 1,375$; в) $\pi < 3,1416$.

4. Например: а) π, 2π; б) $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$.

5. Не может.

6. а) Недост. ≈ 14,37, изб. ≈ 14,38; б) недост. ≈ 2,12, изб. ≈ 2,13; в) недост. ≈ 0,17, изб. ≈ 0,18.

7. Числа $\sqrt{16}$; 0; 0,444... — рациональные, а остальные — иррациональные числа.

8. Объединение — $\boldsymbol{R}$, пересечение — $\varnothing$.

9. $0,1845 > 0,184184...$; $\pi > 3,1415$.

10. 0,9993.

11. $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Q}\cap\boldsymbol{R}_+$; $\boldsymbol{Q}\cap\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}_+$; $\boldsymbol{R}$.

12. 0,4636363...; 0,463736; 0,4656565...; 0,466; $\frac{7}{15}$.

13. а) 5,328(717);

б) $0{,}1010010001\ldots1\underbrace{00\ldots0}_{k}1$;

в) $1{,}252255\ldots2\underbrace{\ldots}_{k}2\;5\underbrace{\ldots}_{k}5$.

14. Конечные: $\frac{3}{5}$; $\frac{17}{20}$; бесконечные: $\frac{2}{6}$; $\frac{1}{123}$; $\frac{33}{576}$; $\frac{8}{75}$.

15. $a = -b$; $a = b$; $a = 0$ или $b = 0$; $a = 0$ и $b \neq 0$.

16. а) 0,666...; б) 0,6000...; в) –0,714285714; г) 0,875000...; д) 3,777...; е) 0,555...; ж) 0,6666...; з) 1,373737... .

17. а) $3{,}5732218904 > 3{,}5723218904$; б) $7{,}2537(4) < 7{,}253745$; в) $\sqrt{37} - \sqrt{36} > \sqrt{35} - \sqrt{37}$.

18. а) 2; б) 1,454; в) $\sqrt{6}$.

19. а) π, 2π; б) π, π (разность); π, $-\pi$ (сумма); в) 2π и 7π; г) π, $\frac{1}{\pi}$ (произведение), π, 2π (частное).

20. а) Нет; б) да, например, $\sqrt{7} + (3 - \sqrt{7}) = 3$; в) да, например, $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

21. При $x \leq 0$.

УЭ-3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

Цель: владеть понятием «координатная прямая»; знать, что множество всех действительных чисел находится во взаимно однозначном соответствии со множеством всех точек координатной прямой; уметь различать понятия «координатная прямая» и «числовая прямая» и правильно употреблять эти термины в своих рассуждениях; уметь изображать действительные числа на координатной прямой.

Теоретическая часть

Понятие координатной прямой. Для геометрического изображения действительных чисел пользуются координатной прямой.

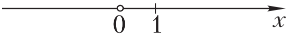


Рис. 4

Координатной прямой называют прямую с выбранными на ней началом отсчета и единичным отрезком (рис. 4).

Построение на координатной прямой точки, соответствующей некоторому действительному числу. Вы знаете, как на координатной прямой можно отметить точку, соответствующую некоторому рациональному числу. На рисунке 5 показано, как на координатной прямой можно построить точки, соответствующие некоторым иррациональным числам — квадратным корням из натуральных чисел, не являющихся точными квадратами.

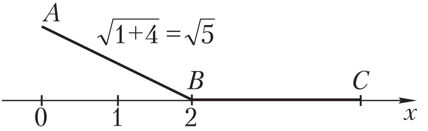


Рис. 5

Способ изображения действительных чисел на координатной прямой разберите самостоятельно.

Соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек координатной прямой. Взаимно однозначное соответствие между действительными числами x и изображающими их точками $M\,(x)$ координатной прямой позволяет говорить о числах, пользуясь геометрической терминологией.

Если точка M координатной прямой соответствует некоторому действительному числу r, то это число называют **координатой точки.** В таком случае пишут $M\,(r)$.

Пусть координатная прямая расположена горизонтально и за положительное направление на ней принимается направление слева направо. Тогда неравенство $x < y$ означает, что точка $M\,(x)$ лежит слева от точки $N\,(y)$. Говорят, что число x лежит «левее» числа y.

Само множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел называют **числовой прямой**, а его элементы, т. е. числа, — **точками числовой прямой**.

Координатная прямая — это, просто говоря, прямая, на которой по определенному правилу изображают действительные числа. Заметим, что «координатных прямых» много, а «числовая прямая» одна — множество всех действительных чисел.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Известно, что на координатной прямой точка $A(a)$ находится правее точки $B(b)$. Какое число больше: a или b?

2. Какая из двух точек находится правее на координатной прямой:

а) $A(2)$ или $B(3)$; б) $A(-2)$ или $B(-3)$;

в) $A(2)$ или $B(-3)$; г) $A(-3)$ или $B(2)$?

3. Какая из двух точек находится на координатной прямой правее:

а) $A(x)$ или $B(-x)$; б) $A(x)$ или $B(x+1)$; в) $A(x)$ или $B(x-a)$?

4. Существуют ли на плоскости прямые, содержащие только такие точки, обе координаты которых:

а) рациональные числа;

б) иррациональные числа?

5. Какая точка координатной плоскости симметрична относительно оси Oy точке: $A(3; 6)$, $B(0; 0)$, $C(-3; 2)$, $D(3; -2)$, $E(-5; -3)$?

6. Между какими натуральными числами на координатной прямой расположено число $\sqrt{6}$?

С некоторыми видами следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Решите, какие из следующих заданий вам необходимо выполнить. В случае затруднений обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 2. Изобразите на координатной прямой числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, а также противоположные им.

Задание 3. Постройте на координатной прямой точки: $A(7)$; $B(-2)$; $C\left(-\frac{5}{2}\right)$; $D\left(-\frac{5}{3}\right)$; $E\left(\sqrt{3}\right)$; $F\left(-\sqrt{5}\right)$.

Задание 4. Покажите на координатной прямой, что если $a > b$, то $-a < -b$. Рассмотрите следующие случаи: a и b — положительны; a и b — отрицательны; a — положительно и b — отрицательно; $a = 0$ и b — отрицательно.

Задание 5. Существуют ли на плоскости прямые, содержащие только такие точки, обе координаты которых рациональны; только такие точки, обе координаты которых иррациональны? Ответ обоснуйте.

Задание 6. Постройте на координатной прямой точки: $A(-5)$, $B(6{,}2)$, $C(1)$. Найдите расстояния: $|AC|$, $|AB|$, $|BC|$.

Задание 7. Дана координатная прямая и на ней точки A и B, изображающие действительные числа a и b.

а) Отметьте на этой прямой точки, изображающие числа: $-a$; $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a-b}{2}$; $\frac{2a+b}{3}$.

б) Какое число изображает точка C, симметричная точке B относительно точки A?

в) Какое число изображает точка D, симметричная середине отрезка AB относительно точки B?

Задание 8. Расположите на координатной прямой числа $\frac{2}{a}$, -1, $\frac{a+1}{a-1}$ в порядке возрастания, если известно, что $-2 < a < 0$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.** Ответы к устным упражнениям:

1. $a > b$.

2. а) B; б) A; в) A; г) B.

3. а) Если $x > 0$, то точка A правее точки B; если $x = 0$, то точки A и B совпадают; если $x < 0$, то точка A левее точки B.

4. а) Нет; б) нет.

5. $(-3; 6)$, $(0; 0)$, $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $(5; -3)$.

6. 2 и 3, так как $4 < 6 < 9$.

УЭ-4. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Цель: знать определение модуля действительного числа; понимать геометрическую интерпретацию модуля действительного числа и уметь применять ее при решении задач; знать свойства модуля и уметь применять при решении задач; иметь представление о расстоянии между двумя точками координатной прямой и уметь использовать его при решении задач.

Теоретическая часть

Модулем действительного числа *x* называют само это число x, если $x \geq 0$, и противоположное ему число $-x$, если $x < 0$.

Модуль числа a обозначают $|a|$ и записывают:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически модуль действительного числа есть расстояние от точки, изображающей данное число на координатной прямой, до начала отсчета (рис. 6).

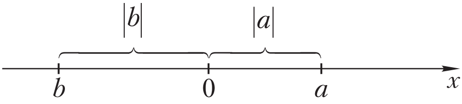


Рис. 6

Решение уравнений и неравенств с модулями на основе геометрического смысла модуля. Пользуясь понятием «расстояние между двумя точками координатной прямой», можно решать уравнения вида $|x - a| = b$ или неравенства вида $|x - a| < b$, где вместо знака $<$ может стоять любой из знаков $\leq$, $>$, $\geq$.

Пример. Решить уравнение $|x - 1| = 2$.

Решение. Переформулируем задачу геометрически. Поскольку $|x - 1|$ — это расстояние на координатной прямой между точками с координатами x и 1, значит, требуется найти координаты таких точек, расстояние от которых до точек с координатой 1 равно 2.

Короче, на координатной прямой нужно найти множество координат точек, расстояние от которых до точки с координатой 1 равно 2.

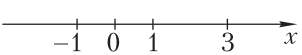


Рис. 7

Решим эту задачу. Отметим на координатной прямой точку, координата которой равна 1 (рис. 7). На две единицы от этой точки удалены точки, координаты которых равны -1 и 3. Значит, искомое множество координат точек есть множество, состоящее из чисел -1 и 3.

Ответ: -1; 3.

Как найти расстояние между двумя точками координатной прямой. Число, выражающее расстояние между точками $A(x_A)$ и $B(x_B)$, называют расстоянием между числами x_A и x_B.

Для любых двух точек $A(x_A)$ и $B(x_B)$ координатной прямой расстояние

$$AB = |x_B - x_A|.$$

Основные свойства модуля действительного числа:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| = |-a|$.
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0$.
5. $|a|^2 = a^2$.
6. $|a| \geq a$.
7. $|a+b| \leq |a| + |b|$.
8. $|a-b| \leq |a| + |b|$.
9. $|a-b| \geq |a| - |b|$.
10. $\sqrt{a^2} = |a|$.

При $b > 0$ имеем:

11. $|a| = b$ тогда только тогда, когда $a = -b$ или $a = b$.
12. $|a| < b$ тогда только тогда, когда $-b < a < b$.
13. $|a| > b$ тогда только тогда, когда $a < -b$ или $a > b$.
14. $|a| = a$ тогда только тогда, когда $a \geq b$.
15. $|a| = -a$ тогда только тогда, когда $a \leq 0$.

Практическая часть

Задание 1.

1. Раскройте знак модуля:

а) $|-5|$; б) $|5|$;

в) $|0|$; г) $|\pi|$.

2. Сравните между собой числа:

а) $|\sqrt{2}|$ и $-\sqrt{2}$; б) $|-\pi|$ и π; в) $|0|$ и 0;

г) $|-7{,}3|$ и $-7{,}3$; д) $-|-3|$ и -3; е) $|a|$ и 0;

ж) $-4|a|$ и 0; з) $2|a|$ и $|2a|$.

3. Как при помощи знака модуля записать, что по крайней мере одно из чисел a, b или c отлично от нуля?

4. Как при помощи знака равенства записать, что каждое из чисел a, b и c равно нулю?

5. Найдите значение выражения:

а) $|a| - a$;

б) $a + |a|$.

6. Решите уравнение:

а) $|x| = 3$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -2$;

г) $|x - 3| = 4$; д) $|2x - 5| = 0$; е) $|3x - 7| = -9$.

7. Что можно сказать о числах x и y, если:

а) $|x| = x$; б) $|x| = -x$; в) $|x| = |y|$?

8. Решите уравнение:

а) $|x - 2| = x - 2$; б) $|x - 2| = 2 - x$;

в) $|x - 3| = |7 - x|$; г) $|x - 5| = |x - 6|$.

9. Что можно сказать о числе y, если имеет место равенство:

а) $|x| = y$; б) $|x| = -y$?

10. Решите неравенство:

а) $|x| > x$; б) $|x| \geq x$; в) $|x| > -x$;

г) $|x| \geq -x$; д) $|x| \leq x$; е) $|x| \leq -x$.

11. Укажите все значения a, для которых имеет место равенство:

а) $|a| = a$; б) $|a| = -a$; в) $a - |-a| = 0$;

г) $|a|a = -1$; д) $\dfrac{|a|}{a} = 1$.

12. Найдите все значения b, для которых имеет место неравенство:

а) $|b| \geq 1$; б) $|b| < 1$; в) $|b| \leq 0$;

г) $|b| \geq 0$; д) $1 < |b| < 2$.

Задание 2. Исходя из определения модуля действительного числа, решите уравнение:

а) $|x - 3| = 2$; б) $|4 - x| = 0{,}5$;

в) $1 - |x| = 0{,}5$; г) $|3 - 2x| = 6$;

д) $|2x - 5| = 0$; е) $|3x - 7| = -9$.

Задание 3. Укажите на координатной прямой множество таких точек, для которых справедливо соотношение:

а) $|x - 3| = 1{,}5$; б) $|x + 1{,}5| = 2$;

в) $|x - 2| < 0{,}5$; г) $|x + 2{,}5| < 2{,}5$;

д) $|x - 3| > 3$; е) $|x + 2| > 1{,}7$.

Задание 4. Расстояние между точками, изображающими действительные числа α и β на координатной прямой, равно $|\alpha - \beta|$. Пользуясь этим, решите уравнение:

а) $|x - 1| = 3$; б) $|x| + |x - 3| = 5$;

в) $|x - 6| + |x - 6| = 0$; г) $|x - 2| + |3 - x| = 6$;

д) $|x - 1| + |x - 2| = 3$; е) $|x + 3| - |x - 1| = 4$;

ж) $|x - 1| = 2\,|x - 4|$; з) $|x - 1| + |x - 2| = |x - 3|$.

Задание 5. Докажите, что:

а) $a \le |a|$;

б) $-a \le |a|$;

в) $-|a| \le a \le |a|$.

Задание 6. Докажите, что $|a + b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \ge 0$.

Задание 7. Докажите, что:

а) $|a + b| \le |a| + |b|$;

б) $|a + b| \ge |a| - |b|$;

в) $|a + b| \ge |a| - |b|$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) 5; б) 5; в) 0; г) $-\pi$.

2. а) $\left|\sqrt{2}\right| > -\sqrt{2}$; б) $|-\pi| = \pi$; в) $|0| = 0$; г) $|-7{,}3| > -7{,}3$; д) $-|-3| = -3$; е) если $a = 0$, то $|a| = 0$; если $a \neq 0$, то $|a| > 0$.

3. $|a| + |b| + |c| \neq 0$ либо $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

4. $|a| + |b| + |c| = 0$ либо $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

5. а) Если $a \geq 0$, то $|a| - a = 0$; если $a < 0$, то $|a| - a = -2a$.

6. а) $\{-3; 3\}$; б) $\{0\}$; в) $\varnothing$; г) $\{-1; 7\}$; д) $\{2{,}5\}$; е) $\varnothing$.

7. а) $x \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) $x = y$ или $x = -y$.

8. а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2]$; в) $\{5\}$; г) $\{5, 5\}$.

9. а) $y \geq 0$; б) $y \leq 0$.

10. а) $(-\infty; 0)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(0; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $[0; +\infty)$; е) $(-\infty; 0]$.

11. а) $a \geq 0$; б) $a \leq 0$; в) $a \geq 0$; г) $a = -1$; д) $a > 0$.

12. а) $b \leq -1$ или $b \geq 1$; б) $-1 < b < 1$; в) $b = 0$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $-2 < b < -1$ или $1 < b < 2$.

УЭ-5. МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Цель: уяснить сущность метода промежутков и уметь применять его к решению уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.

Теоретическая часть

Сущность метода промежутков. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, часто решают, используя метод промежутков. Сущность метода промежутков состоит в следующем:

1) находят нули подмодульных выражений;

2) разбивают координатную прямую нулями подмодульных выражений на промежутки;

3) на каждом полученном промежутке уравнение записывают без знака модуля, решают его и из найденных решений выбирают те, которые принадлежат рассматриваемому промежутку;

4) найденные множества решений объединяют и записывают ответ.

Учимся решать уравнения с модулем методом промежутков. Рассмотрим пример.

Пример. Решить уравнение $|x-1|+|x-2|=x$.

Решение. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль при $x=1$ и $x=2$. Заметим, что такие числа часто называют нулями подмодульных выражений. Они разбивают координатную прямую на промежутки.

В нашем случае первый промежуток включает в себя все точки, лежащие левее точки 1; второй промежуток содержит в себе точки 1 и 2, а также все точки, лежащие между ними; третий промежуток состоит из всех точек, лежащих правее 2 (рис. 8).

Рис. 8

Заметим, что концы полученных промежутков можно относить к любому из смежных промежутков.

Будем искать решения данного уравнения на каждом из промежутков. Для этого решим три системы:

1) $\left(\begin{cases} x<1, \\ -x+1-x+2=x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<1, \\ x=1 \end{cases}\right)$. Решений нет;

2) $\left(\begin{cases} 1\le x\le 2, \\ x-1-x+2=x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1\le x\le 2, \\ x=1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x=1);$

3) $\left(\begin{cases} 1>2, \\ x-1+x-2=x \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x>2, \\ x=3 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x=3).$

Ответ: 1; 3.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Существуют ли такие значения переменной x, при которых имеет место равенство:

а) $|x-5|+|x-6|=-7$;

б) $-2|7 - x| - 3|1 + x| = 8$;

в) $|x - 2| + |x^2 - 4| = 0$?

2. Пусть a — любое действительное число. Укажите множество решений уравнения $|x| = a$ в зависимости от a.

3. При каких значениях x имеет место равенство:

а) $|x| = -x^2$; б) $|x| = x^2$;

в) $|x - 1| + |x^2 - 1| = 0$; г) $|5 + |3 - x|| = 0$?

Задание 2. Решите уравнение:

а) $|x - 1| + |x - 2| = 3$;

б) $|x - 2| - 3|3 - x| + x = 0$;

в) $|x + 5| + |x - 3| + |x - 1| = 0$;

г) $|x + 2| + 3|1 - x| - 2|6x - 3| = -1$;

д) $|3 - 2x| - |x + 1| + |2 - x| = |3 - 9x| + x - 5$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) Не существует; б) не существует; в) существует, $x = 2$.

2. a при $a > 0$, 0 при $a = 0$; нет решений при $a < 0$.

3. а) При $x = 0$; б) при $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$; в) при $x = 1$; г) таких значений x не существует.

***К заданию* 2.** а) 0; 3; б) $\frac{11}{5}$; 7; в) нет решений; г) 0; $\frac{6}{7}$; д) $1\frac{1}{3}$; $\frac{6}{7}$.

УЭ-6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $|ax + b| = c$

Цель: научиться решать уравнения $|ax + b| = c$, сводящиеся к совокупности уравнений.

Теоретическая часть

Понятие о решении уравнений вида $|ax + b| = c$. При решении уравнений вида

$$|ax + b| = c, \qquad (*)$$

где a, b и c — любые действительные числа, следует различать случаи, когда $c < 0$, $c = 0$, $c > 0$.

1) Если $c < 0$, то уравнение (*) не имеет корней, так как выражение $|ax + b|$ при любом действительном x принимает только неотрицательные значения.

2) Если $c = 0$, то уравнение (*) равносильно уравнению $ax + b = 0$.

3) Если $c > 0$, то уравнение (*) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} ax + b = c, \\ ax + b = -c, \end{array}\right.$$

т. е. $(|ax + b| = c) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} ax + b = c, \\ ax + b = -c \end{array}\right.\right)$, где $c > 0$.

Учимся решать уравнения с модулем.

Пример. Решить уравнение $|3x - 1| = 8$.

Решение. Имеем:

$$(|3x - 1| = 8) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} 3x - 1 = -8, \\ 3x - 1 = 8 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x = -2\frac{1}{3}, \\ x = 3 \end{array}\right.\right).$$

Ответ: $-2\frac{1}{3}$; 3.

Форма записи решения может быть и другой, т. е. без использования знака равносильности.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Вычислите:

а) $|-1{,}8|$; б) $|1{,}8|$; в) $|-\pi|$;

г) $|0|$; д) $|-1{,}8 \cdot 5|$.

2. Решите уравнение:

а) $|x| = 3$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -2$;

г) $|x - 3| = 4$; д) $|2x - 5| = 0$; е) $|3x - 7| = -9$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $|x| = 1{,}3$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -2{,}7$;

г) $|x-1|=3$; д) $|2x+7|=5$; е) $|4-5x|=8$;

ж) $|3-4x|=3$; з) $|5+|x||=3$; и) $||x|-2|=1$.

Задание 3. Найдите корни уравнения:

а) $||x+1|-4|=2$; б) $|3-|x+1||=5$;

в) $||x-1|-1|=1$; г) $|2-|1-|x|||=1$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

2. а) –3; 3; б) нет решений; в) нет решений; г) –1; 7; д) 2,5; е) нет решений.

***К заданию* 3.** а) –1,3; 1,3; в) нет решений; г) –3; 3.

УЭ-7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $|ax+b|=|cx+d|$, $|ax+b|=ax+b$ И $|ax+b|=-(ax+b)$

Цель: научиться решать уравнения данного вида.

Теоретическая часть

Решение уравнений вида $|ax+b|=|cx+d|$. При решении уравнения данного вида можно воспользоваться равносильностями:

1. $(|ax+b|=|cx+d|) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} ax+b=cx+d, \\ ax+b=-(cx+d) \end{array}\right.\right)$.

Эта равносильность имеет место в силу свойства модуля:

$$(|x|=|y|) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x=y, \\ x=-y \end{array}\right.\right).$$

2. $(|ax+b|=|cx+d|) \Leftrightarrow ((ax+b)^2=(cx+d)^2)$.

Эта равносильность имеет место в силу свойства модуля:

$$(|x|=|y|) \Leftrightarrow (x^2=y^2).$$

Пример 1. Решить уравнение $|2x - 1| = |x + 3|$.

Решение.

1-й способ. Имеем:

$$(|2x - 1| = |x + 3|) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} 2x - 1 = x + 3, \\ 2x - 1 = -x - 3 \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.\right).$$

2-й способ. Имеем:

$$(|2x - 1| = |x + 3|) \Leftrightarrow ((2x - 1)^2 = (x + 3)^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0) \Leftrightarrow ((2x - 1 - x - 3)\,(2x - 1 + x + 3) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x - 4)\,(3x + 2) = 0) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.\right).$$

Ответ: $-\dfrac{2}{3}$; 4.

Решение уравнений вида $|ax + b| = ax + b$ и $|ax + b| = -(ax + b)$. При решении уравнений данного вида целесообразно использовать равносильность:

1) $(|ax + b| = ax + b) \Leftrightarrow (ax + b \geq 0)$;
2) $(|ax + b| = -(ax + b)) \Leftrightarrow (ax + b \leq 0)$.

В самом деле, если a — любое действительное число, то равенство $|a| = a$ справедливо тогда и только тогда, когда $a \geq 0$, а равенство $|a| = -a$ — тогда и только тогда, когда $a \leq 0$.

Поэтому уравнение $|f(x)| = f(x)$, где $f(x)$ — выражение с одной переменной, равносильно неравенству $f(x) \geq 0$, а уравнение $|f(x)| = -f(x)$ равносильно неравенству $f(x) \leq 0$.

Пример 2. Решить уравнение $|3x - 9| = 3x - 9$.

Решение. Имеем:

$$(|3x - 9| = 3x - 9) \Leftrightarrow (3x - 9 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 3).$$

Ответ: $[3; +\infty)$.

Пример 3. Решить уравнение $|2x - 5| = 5 - 2x$.

Решение. Множество решений данного уравнения совпадает с множеством решений неравенства $2x - 5 \leq 0$. Множество решений его представляет собой числовой промежуток $(-\infty; 2{,}5]$.

Ответ: $(-\infty; 2{,}5]$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Что можно сказать о числах x и y, если:

а) $|x| = x$; б) $|x| = -x$; в) $|x| = |y|$?

2. Что можно сказать о числе y, если имеет место равенство:

а) $|x| = y$; б) $|x| = -y$?

3. Решите уравнение:

а) $|x - 2| = x - 2$;

б) $|x - 2| = 2 - x$;

в) $|x - 3| = |7 - x|$;

г) $|x - 5| = |x - 6|$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $|x + 3| = |x - 5|$; б) $|3x - 5| = |x + 2|$;

в) $|x - 1| = |x - 2|$; г) $|x + 6| = |10 + x|$;

д) $|x - 2| = 3|x + 3|$; е) $|x + 3| = -|x^2 - 9|$;

ж) $|x + 2| = -|x^2 - 16|$; з) $|x + 2| = |-x - 2|$.

Задание 3. Найдите корни уравнения:

а) $\big||x + 1| - |x - 3|\big| = |x|$;

б) $\big||x + 2| + |x - 6|\big| = |x|$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $|x| = x$; б) $|x| = -x$;

в) $|2x - 3| = 2x - 3$; г) $|2x - 3| = 3 - 2x$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $x \geq 0$; б) $x \leq 0$; в) $x = y$ или $x = -y$.

2. а) $y \geq 0$; б) $y \leq 0$.

3. а) $[2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2]$; в) 5; г) 5, 5.

***К заданию* 3.** а) -4; $\frac{2}{3}$; 2; 4.

УЭ-8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $|ax + b| = cx + d$

Цель: научиться решать уравнения с модулем данного вида.

Теоретическая часть

При решении уравнений вида $|ax + b| = cx + d$ можно поступать так:

1) применять метод промежутков;
2) использовать равносильности:

$$(|ax+b| = cx+d) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} cx+d \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} ax+b = cx+d, \\ ax+b = -(cx+d) \end{array} \right. \end{cases} \right).$$

Пример. Решить уравнение $|2x - 1| = 5x - 10$.

Решение.

1-й способ. Применим способ промежутков:

$$\begin{cases} 2x-1 \ge 0, \\ 2x-1 = 5x-10 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ -2x+1 = 5x-10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0{,}5, \\ x = 3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < 0{,}5, \\ x = \dfrac{11}{7}. \end{cases}$$

Ответ: 3.

2-й способ. Имеем: $(|2x - 1| = 5x - 10) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 5x-10 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-1 = 5x-10, \\ 2x-1 = -5x+10 \end{array} \right. \end{cases} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \ge 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = \dfrac{11}{7} \end{array} \right. \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x = 3).$$

Ответ: 3.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение (устно):

а) $|x| = -3$;

б) $|x| = 0$;

в) $|x| = 3$;

г) $\sqrt{x^2} = 9$;

д) $|x + 1| = -1$;

е) $|x - 1| = 3$;

ж) $|x - 1| = 0$;

з) $|x| = |x + 1|$;

и) $|x - 7| = |x - 9|$;

к) $|x - 3| = x - 3$;

л) $|x - 3| = 3 - x$;

м) $|7x| - 7x = 0$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $|x - 1| = 3x + 2$;

б) $|x + 2| = 2x + 5$;

в) $|x - 2| + 2x = 3$;

г) $|x + 1| - 2x = 5$;

д) $3|x| - 5x = 2$;

е) $\left|\frac{2}{3}x + 1\frac{5}{6}\right| + 2x = \frac{1}{2}$.

Задание 3. Найдите корни уравнения:

а) $|x - 3 - |x|| = 4$;

б) $||x - 3| - |x|| = -x$;

в) $||3 - 2x| - 1| = 2|x|$;

г) $||x - 3| - x| = 2x$;

д) $||3x - 1| - |2x + 1|| = 1$;

е) $||x - 3| - |x|| = |x + 1| + 5$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $|3x - |x - 2|| = 3x - 1$;

б) $|x - |2x + 1|| = -\frac{8}{3}x$;

в) $|x + |3 - 2x|| = 3 - x$;

г) $|2x + |x - |5 - x||| = 2x + 3$.

Ваш помощник

К заданию **1.** а) Нет решений; б) нет решений; в) –3; 3; г) –3; 3; д) нет решений; е) –2; 4; ж) 1; з) –0,5; и) 8; к) $x \geq 3$; л) $x \leq 3$; м) $x \geq 0$.

УЭ-9. МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Цель: уяснить сущность метода промежутков и уметь применять его к решению неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Теоретическая часть

Сущность метода промежутков. Чтобы решить, например, неравенство

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_x(x)| < g(x):$$

1) находят область допустимых значений неравенства;

2) находят нули подмодульных выражений;

3) разбивают область допустимых значений нулями подмодульных выражений на промежутки;

4) на каждом из полученных промежутков неравенство записывают без знака модуля и решают с учетом знака неравенства, задающего этот промежуток;

5) найденные множества решений объединяют и записывают ответ.

Учимся решать неравенства с модулем методом промежутков. Ознакомьтесь с примерами решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, методом промежутков.

Пример. Решить неравенство $|x+2| + |x-3| > x+5$.

Решение. Нули подмодульных выражений: числа -2 и 3, они разбивают координатную прямую на три промежутка, которые можно задать неравенствами: $x < -2$; $-2 \leq x \leq 3$ и $x > 3$. Будем искать решения неравенства на каждом из промежутков.

1) $\left(\begin{cases} x < -2, \\ -x-2-x+3 > x+5 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x < -2, \\ x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x < -2);$

2) $\left(\begin{cases}-2 \le x \le 3,\\ x+2-x+3 > x+5\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}-2 \le x \le 3,\\ x < 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow (-2 \le x < 0);$

3) $\left(\begin{cases}x > 3,\\ x+2+x-3 > x+5\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x > 3,\\ x > 6\end{cases}\right) \Leftrightarrow (x > 6).$

Находим объединение полученных решений и записываем ответ.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Решите неравенство:

а) $|x-3| \ge 2x+1$;

б) $|3x+1| \ge 7x-5$;

в) $|x-2| < \dfrac{x}{2}$;

г) $|x-1| < \dfrac{x+1}{2}$.

Задание 2. Решите неравенство:

а) $2\,|x+1| > x+4$;

б) $3\,|x-1| \le x+3$;

в) $4\,|x+2| < 2x+10$;

г) $3\,|x+1| \ge x+5$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $|x-2| + |x+3| > 5$;

б) $|2x+5| - |3x-4| \le 2x-4$;

в) $|5-2x| + |3x-4| \ge 2x+3$;

г) $|x-1| + 2\,|2x+3| - |2-x| > 5+|x|$.

Задание 4. Решите неравенство $|x+1| + |x-4| > 7$, указав наименьшее целое положительное x, удовлетворяющее этому неравенству.

УЭ-10. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВИДА $|f(x)| < a$ (вместо знака $<$ может стоять любой из знаков $\leq$, $>$, $\geq$)

Цель: научиться решать неравенства данного вида.

Теоретическая часть

Метод промежутков является наиболее универсальным при решении неравенств. Однако в некоторых случаях целесообразно использовать другие методы.

Метод равносильных переходов. Используют равносильные переходы, позволяющие избавиться от знака модуля. Приведем некоторые из них, применяемые при решении простейших неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

$$\boxed{|f(x)| < a}$$

1. Если $a > 0$, то $\left(|f(x)| < a\right) \Leftrightarrow \left(-a < f(x) < a\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a \end{cases}\right)$.

2. Если $a \leq 0$, то неравенство $|f(x)| < a$ решений не имеет.

$$\boxed{|f(x)| \leq a}$$

1. Если $a > 0$, то $\left(|f(x)| \leq a\right) \Leftrightarrow \left(-a \leq f(x) \leq a\right)$.
2. $\left(|f(x)| \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(f(x) = 0\right)$.
3. Если $a < 0$, то неравенство $\left(|f(x)| \leq a\right)$ решений не имеет.

$$\boxed{|f(x)| > a}$$

1. Если $a > 0$, то $\left(|f(x)| > a\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) < -a, \\ f(x) > a \end{array}\right.\right)$.

2. Если $a = 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| > 0$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$, из которой исключены корни уравнения $f(x) = 0$.

3. Если $a < 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| > a$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$.

$$\boxed{|f(x)| \geq a}$$

1. Если $a > 0$, то $\left(|f(x)| \geq a\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) \leq -a, \\ f(x) \geq a \end{array}\right.\right)$.

2. Если $a \leq 0$, то множество решений неравенства $|f(x)| \geq a$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$.

Учимся решать неравенства различными способами.

Пример 1. Решить неравенство $|x-1| < 3$.

Решение.

1-й способ. Поскольку $|x-1|$ можно рассматривать как расстояние на координатной прямой между точками x и 1, то по условию задачи нужно указать на координатной прямой все точки x, которые удалены от точки 1 меньше чем на 3 единицы (рис. 9).

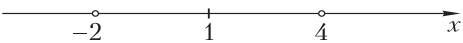


Рис. 9

Отсюда находим множество решений неравенства: $(-2; 4)$.

2-й способ. Поскольку

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{при } x-1 \geq 0, \\ -(x-1) & \text{при } x-1 < 0, \end{cases}$$

то заданное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 < 3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-1 < 0, \\ -(x-1) < 3. \end{cases}$$

Из первой системы получаем, что $1 \leq x < 4$, а из второй — что $-2 < x < 1$. Объединив промежутки $(-2; 1)$ и $[1; 4)$, получаем $(-2; 4)$ — решение заданного неравенства.

3-й способ. Данное неравенство $|x-1| < 3$ равносильно двойному неравенству $-3 < x-1 < 3$, т. е. $-2 < x < 4$.

Ответ: $(-2; 4)$.

Пример 2. Решить неравенство $|2x + 5| \geq 6$.

Решение.

1-й способ. Разделив обе части данного неравенства на положительное число 2, получим равносильное неравенство $|x + 2{,}5| \geq 3$.

Задачу можно переформулировать так: на координатной прямой найти все такие точки x, которые удалены от точки $-2{,}5$ на расстояние, большее или равное 3 (рис. 10). Получаем: $x \leq -5{,}5$ либо $x \geq 0{,}5$, т. е. объединение числовых промежутков $(-\infty; -5{,}5]$ и $[0{,}5; +\infty)$ является решением данного неравенства.

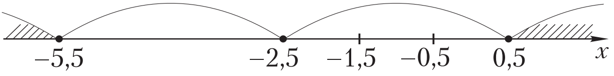


Рис. 10

2-й способ. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 5 \geq 6, \\ 2x + 5 \leq -6. \end{array}\right.$$

Выполнив равносильные преобразования, получим: $x \geq 0{,}5$ либо $x \leq -5{,}5$. Объединив решения полученных неравенств, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -5{,}5] \cup [0{,}5; +\infty)$.

Задание. Решите неравенство $|2x + 5| \geq 6$ третьим способом, основанным на раскрытии знака модуля.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Решите неравенство:

а) $|x| > 2$; б) $|x| \geq 2$; в) $|x| \leq 2$;

г) $|x| \leq -2$; д) $|x| > -2$; е) $|x| > 0$;

ж) $|x| \geq 0$; з) $\sqrt{x^2} \geq 0$; и) $\sqrt{x^2} > -3$.

2. Верно ли, что неравенство $|a| < 3$ равносильно неравенствам:

а) $a < -3$ или $a > 3$; б) $-3 < a < 3$;

в) $0 < a < 3$; г) $a < 3$?

3. Укажите множество решений неравенства:

а) $|4x| > 16$; б) $|4x| \le 9$;

в) $|x-4| > -3$; г) $|x-1| > 0$.

4. При каких значениях x верно неравенство:

а) $\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{|x|} > \dfrac{1}{2}$;

в) $|x^{-1}| > 0$; г) $|x|^{-1} < 0$?

5. Укажите множество решений неравенства:

а) $1 < |x| < 2$; б) $3 < |x| \le 5$.

6. Имеет ли решение неравенство $1 < |x| < -7$?

7. а) Известно, что неравенство $|x| \le t$ имеет единственное решение. Чему равно t?

б) Известно, что решением неравенства $|x| \le t$ является любое действительное число. Чему равно t?

Задание 2. Используя координатную прямую, решите уравнение или неравенство:

а) $|x-2| = 5$; б) $|x-2| < 5$; в) $|x-2| \le 5$;

г) $|x-2| > 5$; д) $|x-2| \ge 5$; е) $|x+3| \le 1$;

ж) $|x+3| < 1$; з) $|x+3| > 1$; и) $3|x+3| \ge 1$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $|x-1| < 3$; б) $|x-1| \le 3$; в) $|x+1| < 3$;

г) $|2x-5| > 5$; д) $|5x-1| < 14$; е) $|2x-5| \ge 1$.

Задание 4. Решите неравенство:

а) $|2x-6| \ge 4$; б) $|5x-8| < 11$; в) $|2x-3| \ge 5$;

г) $|5x-8| \le 0$; д) $|2x-7| \le -9$; е) $|2x-5| < -17$.

Задание 5. Подберите числа a и b так, чтобы множеством решений неравенства $|x-a| \le b$ был числовой отрезок: а) $[-1; 5]$; б) $(-1; 3)$.

Задание 6. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x-7 < 0, \\ |x+1| > 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| \ge 1, \\ |x-1| < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x+2)^2 > 4, \\ (x-1)^2 < 36. \end{cases}$

Задание 7. Решите неравенство:

а) $1 \le |3x - 2| \le 2$;

б) $3 < |-3x| \le 7$.

Задание 8. При каких значениях x значения дроби:

а) $\dfrac{|x-7|}{7-x}$ отрицательны;

б) $\dfrac{|x-7|}{2-|x|}$ не больше нуля?

Задание 9. Решите неравенство:

а) $||x| - 3| > 1$;

б) $|3 - |x - 2|| \le 2$.

Задание 10. Найдите множество решений неравенства

$$(x-2)(|x+5| - |x-1|) < 0.$$

Задание 11. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$||x+4| - 2x - 4| \le 4.$$

Задание 12. Решите неравенство:

а) $|1 - 2|x|| \ge 1$;

б) $|3|x| - 2| < 5$;

в) $||x-5| - 3| \ge 2$;

г) $||x+6| - 4| \le 2$;

д) $|||x-3| - 6| - 1| > 2$;

е) $|2x - |3 - x|| > 2$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; в) $[-2; 2]$; г) нет решений; д) $\boldsymbol{R}$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; ж) $\boldsymbol{R}$; з) $\boldsymbol{R}$; и) $\boldsymbol{R}$.

2. а) Неверно; б) верно; в) неверно; г) неверно.

3. а) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $\left[-\dfrac{9}{4}; \dfrac{9}{4}\right]$; в) $\boldsymbol{R}$; г) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

4. а) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; б) $(-2; 2)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $x < 0$.

5. а) $(-2; -1) \cup (1; 2)$; б) $[-5; 3) \cup (3; 5]$.

6. Не имеет.

***К заданию* 3.** а) $(-2;\ 4]$; б) $[-2;\ 4]$; в) $(-4;\ 2)$; г) $(-\infty;\ 0)\cup(5;\ +\infty)$; д) $(-2{,}6;\ 3)$; е) $(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$.

***К заданию* 4.** а) $(-\infty;\ 1]\cup[5;\ +\infty)$; б) $(-0{,}75;\ 2)$; в) $(-\infty;\ -1)\cup[4;\ +\infty)$; г) 1,6; д) нет решений; е) $\boldsymbol{R}$.

***К заданию* 5.** а) $a=2$, $b=3$, т. е. $|x-2|\le 3$.

УЭ-11. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВИДА $|f(x)| < g(x)$ (вместо знака < может стоять любой из знаков ≤, >, ≥)

Цель: научиться решать неравенства вида $|f(x)| < g(x)$, где вместо знака < может стоять любой из знаков ≤, >, ≥).

Теоретическая часть

$$\boxed{|f(x)| < g(x)}$$

$$1.\ \big(|f(x)| < g(x)\big) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x) \end{cases}\right).$$

$$2.\ \big(|f(x)| < g(x)\big) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) > 0, \\ f^2(x) - g^2(x) < 0 \end{cases}\right).$$

$$3.\ \big(|f(x)| < g(x)\big) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.\right).$$

$$\boxed{|f(x)| > g(x)}$$

$$1.\ \big(|f(x)| > g(x)\big) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x), \\ f(x) > g(x) \end{array}\right.\right).$$

2. $\left(|f(x)| > g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}\end{array}\right.\right).$

$$\boxed{|f(x)| < |g(x)|}$$

$$\left(|f(x)| < |g(x)|\right) \Leftrightarrow \left(f^2(x) < g^2(x)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(f(x) - g(x)\right)\left(f(x) + g(x)\right) < 0\right).$$

Рассмотрим решения некоторых неравенств с модулем.

Пример. Решить неравенство $|x - 4| < |x - 2|$.

Решение. В силу свойства модуля неравенство $|a| < |b|$ имеет место тогда и только тогда, когда $a^2 < b^2$, имеем:

$$(|x - 4| < |x - 2|) \Leftrightarrow ((x - 4)^2 < (x - 2)^2) \Leftrightarrow ((x - 4)^2 - (x - 2)^2 < 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-2(2x - 6) < 0) \Leftrightarrow (x - 3 > 0) \Leftrightarrow (x > 3).$$

Заметим, что неравенство $|ax + b| < |cx + d|$ равносильно неравенству

$$(ax + b)^2 < (cx + d)^2.$$

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Найдите множество решений неравенства:

а) $|x^2 - 9| \leq 0$; б) $|x| \geq -2x^2$;

в) $|x| > -2x^2$; г) $|x| > -|7 - x|$;

д) $|x| \geq -|x(x + 4)|$; е) $|x| > -|x(x + 1)|$;

ж) $|x(x + 1)| > -|x|$; з) $|x(x + 1)| \geq -|x|$.

2. Решите неравенство:

а) $|t| \geq t$; б) $|t| > t$; в) $|t| \geq -t$;

г) $|t| > -t$; д) $|t| < t$; е) $|t| \leq t$;

ж) $|t| < -t$; з) $|t| \leq -t$.

Задание 2. Решите неравенство:

а) $|x-3| \geq 2x+1$; б) $|3x+1| \geq 7x-5$;

в) $|x-2| < \dfrac{x}{2}$; г) $|x-1| < \dfrac{x+1}{2}$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $2\,|x+1| > x+4$; б) $3\,|x-1| \leq x+3$;

в) $4\,|x+2| < 2x+10$; г) $3\,|x+1| \geq x+5$.

Задание 4. Решите неравенство:

а) $|x-1| > |x+3|$; б) $|x-3| > |x-5|$;

в) $|x| > |2-x|$; г) $|x-5| \geq |x|$.

Задание 5. Решите неравенство:

а) $\big||x-2|-x+3\big| < 5$;

б) $\big|2x-|x+3|+1\big| \geq 2$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $(-3; 3)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; ж) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$.

2. а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений; в) $(-\infty; +\infty)$; г) нет решений; д) нет решений; е) $[0; +\infty)$; ж) нет решений; з) $(-\infty; 0]$.

***К заданию* 2.** а) $\left(-\infty;\ \dfrac{2}{3}\right]$; б) $(-\infty; 1{,}5]$; в) $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$; г) $\left(\dfrac{1}{3};\ 3\right)$.

***К заданию* 3.** а) ax^2; б) $[0; 3]$; в) $(-3; 1)$; г) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

***К заданию* 4.** а) $(-\infty; -1)$; б) $(4; +\infty)$; в) $(1; +\infty)$; г) $(-\infty; 2{,}5]$.

***К заданию* 5.** а) $(0; +\infty)$; б) $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Модуль 3 АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

УЭ-1. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ И ЕГО СВОЙСТВА

Цель: знать определение арифметического квадратного корня, его свойства и уметь применять их при решении задач.

Теоретическая часть

$$(\sqrt{a} = b) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a \end{cases}\right).$$

Свойства арифметического квадратного корня:

1. $(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geq 0$.

2. $\sqrt{a^2} = |a|$.

3. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geq 0, b \geq 0$.

4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geq 0, b > 0$.

5. $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$, если $0 \leq a \leq b$.

6. $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$, если $a \geq 0$ и n — четное натуральное число.

Пример 1. Доказать, что верно равенство $\sqrt{2{,}89} = 1{,}7$.

Доказательство. Так как $1{,}7 \geq 0$ и $1{,}7^2 = 2{,}89$, то $\sqrt{2{,}89} = 1{,}7$ — верное числовое равенство.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x} = 3$.

Решение. По условию задачи арифметический квадратный корень из переменной x равен 3. Число 3 — неотрицательное. Следовательно, $x = 3^2$, откуда $x = 9$.

Ответ: $\{9\}$.

Заметим, что решить уравнение — значит найти множество его корней; поэтому ответ при решении уравнения из примера 2 записан в такой форме.

Пример 3. Доказать, что уравнение $\sqrt{x} = -3$ не имеет корней.

Доказательство. 1-й способ. Уравнение $\sqrt{x} = -3$ не имеет корней, так как отрицательное число -3 не может быть значением арифметического квадратного корня.

2-й способ. Выражение $\sqrt{x}$, стоящее в левой части уравнения, может принимать только неотрицательные значения, а в правой части находится отрицательное число. Поэтому ни при каком значении x равенство не может быть верным. Значит, уравнение $\sqrt{x} = -3$ корней не имеет.

Пример 4. Сократить дробь $\dfrac{x^2 - 7}{x + \sqrt{7}}$.

Решение. Представим числитель данной дроби в виде разности квадратов:

$$x^2 - 7 = x^2 - (\sqrt{7})^2.$$

Тогда имеем:

$$\frac{x^2 - 7}{x + \sqrt{7}} = \frac{x^2 - (\sqrt{7})^2}{x + \sqrt{7}} = \frac{(x + \sqrt{7}) \cdot (x - \sqrt{7})}{x + \sqrt{7}} = x - \sqrt{7}.$$

Пример 5. Вычислить:

$$\sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}.$$

Решение. Так как $\sqrt{3} + 2 > 0$, а $\sqrt{3} - 2 < 0$, то имеем:

$$\sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = \left|\sqrt{3} + 2\right| + \left|\sqrt{3} - 2\right| = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2 = 4.$$

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Решите уравнение:

а) $x^2 = 9$; б) $x^2 = 0{,}49$; в) $x^2 = -1$;

г) $x^2 = 5$; д) $x^2 = \pi$; е) $x^2 = 0$.

2. Чему равны стороны квадрата, площадь которого равна:

а) 16 см^2; б) 81 см^2; в) 1 м^2; г) 900 дм^2?

3. Имеет ли числовое значение выражение:

а) $\sqrt{-(-7)}$; б) $-\sqrt{25}$;

в) $\sqrt{-9}$; г) $\sqrt{\frac{3}{4}-0{,}75}$?

4. При каких значениях переменной a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{a}$; б) $\sqrt{-a}$;

в) $\sqrt{a^2+1}$; г) $\frac{a^2}{\sqrt{a^4}}$?

5. Укажите допустимые значения переменной:

а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x^2}$; в) $(\sqrt{x})^2$;

г) $\sqrt{-x}$; д) $\sqrt{x^3}$.

6. Докажите, что:

а) $\sqrt{144}=12$; б) $\sqrt{169}=13$;

в) $\sqrt{196}=14$; г) $\sqrt{225}=15$.

7. Вычислите:

а) $\sqrt{64}$; б) $\sqrt{100}$; в) $\sqrt{0{,}25}$;

г) $\sqrt{121}$; д) $\sqrt{0}$; е) $\sqrt{0{,}04}$.

8. Могут ли быть равными:

а) квадраты неравных чисел;

б) арифметические квадратные корни из неравных чисел?

9. Рациональным или иррациональным числом является арифметический квадратный корень из простого числа?

10. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{81}=9$; б) $-\sqrt{81}=-9$;

в) $\sqrt{-81}=-9$; г) $\sqrt{81}=-9$?

11. Докажите, что:

а) $\sqrt{144}=12$; б) $\sqrt{\frac{49}{9}}=1\frac{4}{3}$.

12. Найдите значение корней:

а) $\sqrt{169}$; б) $\sqrt{225}$; в) $\sqrt{3{,}24}$;

г) $\sqrt{\dfrac{121}{64}}$; д) $\sqrt{6\dfrac{1}{4}}$; е) $\sqrt{13\dfrac{4}{9}}$.

13. Вычислите:

а) $\sqrt{25 \cdot 0{,}36}$; б) $\sqrt{18 \cdot 8}$;

в) $\sqrt{3 \cdot 27}$; г) $\sqrt{25^2 - 24^2}$;

д) $\sqrt{101^2 - 20^2}$; е) $\sqrt{100^2 - 96^2}$;

ж) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; з) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$.

14. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\dfrac{25}{4}}$; б) $\sqrt{5\dfrac{4}{9}}$; в) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{98}}$; д) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{52}}$.

15. Вычислите:

а) $\sqrt{121} \cdot \sqrt{225}$; б) $\sqrt{0{,}01} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{100}$;

в) $\sqrt{144} : \sqrt{36}$; г) $\sqrt{100} \cdot \left(\sqrt{625} : \sqrt{25}\right)$.

16. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{-2x}$; в) $\sqrt{-2(-x)}$;

г) $\sqrt{-x^2}$; д) $\sqrt{-x^2 + 1}$; е) $\sqrt{(-x)(-x)}$;

ж) $\sqrt{x^{2n}}$; з) $\sqrt{(-x)^{2n+1}}$; и) $\sqrt{-x^{2n}}$?

17. Найдите квадраты чисел:

а) $\sqrt{20}$; б) $-\sqrt{20}$; в) $\sqrt{1{,}69}$;

г) $\left(\sqrt{(-1{,}3)^2}\right)^2$; д) $\sqrt{3} + \sqrt{27}$; е) $\sqrt{27} - \sqrt{3}$.

18. Какое из чисел больше:

а) $\sqrt{14}$ или $\sqrt{14{,}5}$;

б) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ или $\sqrt{\frac{6}{5}}$;

в) $\sqrt{0{,}01}$ или $\sqrt{0{,}1}$?

19. Вычислите: $\sqrt{3^4}$; $\sqrt{2^6}$; $\sqrt{8^4}$; $\sqrt{1^{100}}$.

20. Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2}$; б) $\sqrt{x^4}$; в) $\sqrt{(-x)^4}$;

г) $\sqrt{y^3}$ при $y > 0$; д) $\sqrt{y^8}$ при $y < 0$.

21. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; б) $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

22. Всегда ли верно равенство $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? При каких значениях a и b оно верно?

23. Верно ли:

а) если $\sqrt{x^2} = 4$, то $|x| = 4$;

б) если $\sqrt{x^2} = 4$, то $x = -4$ или $x = 4$?

Задание 2. Вычислите:

а) $(\sqrt{361})^2$; б) $\left(\sqrt{(-25)^2}\right)^2$;

в) $2^2 \cdot \left((\sqrt{4})^2 - 1\right)$; г) $\left(\sqrt{(7^2 - 2^2) : 9}\right)^2$;

д) $\left(\sqrt{39^2 - 2 \cdot 39 \cdot 38 + 38^2}\right)^2$;

е) $\left(\sqrt{19^2 + 2 \cdot 19 \cdot 81 + 81^2}\right)^2$;

ж) $\left(\sqrt{18{,}7^2 + 22{,}6 \cdot 18{,}7 + 11{,}3^2}\right)^2$;

з) $\sqrt{5{,}9^2 + 6{,}2 \cdot 5{,}9 + 3{,}1^2}$.

Задание 3. Найдите значение выражения:

а) $(3-\sqrt{229})(3+\sqrt{229})$;

б) $(\sqrt{2005}-1)(1+\sqrt{2005})$;

в) $(\sqrt{2000}-\sqrt{2005})(\sqrt{2000}+\sqrt{2005})$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}=3$; б) $\sqrt{x}=-3$; в) $\sqrt{x-1}=6$;

г) $\sqrt{1-x}=6$; д) $\sqrt{|x|}=4$; е) $\sqrt{-x}=7$.

Задание 5. Вычислите:

а) $\sqrt{25^2-24^2}$;

б) $\sqrt{4{,}58^2-4{,}42^2}$;

в) $\sqrt{221^2-220^2}$;

г) $\sqrt{196{,}2^2-163{,}8^2}$;

д) $\sqrt{(313^2-312^2)(82^2-18^2)}$;

е) $-\frac{3}{10}\sqrt{\frac{115^2-15^2}{130}}-\frac{1}{17}\sqrt{\frac{273^2-16^2}{257}}$.

Задание 6. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$; б) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$;

в) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{15}-5)^2}$.

Задание 7. Вычислите:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;

б) $\sqrt{20+2\sqrt{19}}\cdot\sqrt{20-2\sqrt{19}}$;

в) $\sqrt{148}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{3}}$;

г) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Задание 8. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(x-3)^2}$, если $x\ge 3$;

б) $\sqrt{(y+3)^2}$, если $y<-3$;

в) $\sqrt{a^2-6a+9}$, если $a<3$;

г) $\sqrt{1+4b+4b^2}$, если $b\ge -0{,}5$.

Задание 9. При каких значениях a имеет место равенство:

а) $\sqrt{(a-1)^2}=a-1$; б) $\sqrt{(a-1)^2}=1-a$;

в) $\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$; г) $(\sqrt{a-1})^2=a-1$?

Задание 10. Найдите множество корней уравнения:

а) $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=1$;

б) $\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(x+2)^2}=4+\sqrt{(x-3)^2}$.

Задание 11. Решите уравнение:

а) $(x-3)\sqrt{x-2}=0$; б) $(x-1{,}4)\sqrt{1-x^2}=0$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) –3; 3; б) –0,7; 0,7; в) $\varnothing$; г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; д) $-\sqrt{\pi}$; $\sqrt{\pi}$; е) 0.
2. а) 4 см; б) 9 см; в) 10 см; г) 30 дм.
3. а) Имеет, это $\sqrt{7}$; б) имеет, это –5; в) не имеет; г) имеет, это 0.
4. а) $a\ge 0$; б) $a\le 0$; в) $a\in \boldsymbol{R}$; г) $a\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
5. а) $x\ge 0$; б) x — любое; в) $x\ge 0$; г) $x\le 0$; д) $x\ge 0$.
6. Доказательство может быть таким: а) $12>0$ и $12^2=144$; б) $13>0$ и $13^2=169$.
7. а) 8; б) 10; в) 0,5; г) 11; д) 0; е) 0,2.
8. а) Да, например, $-5\ne 5$, но $(-5)^2=5^2$; б) нет.
9. Иррациональным.
10. а) Верно; б) верно; в) неверно; г) неверно.

12. а) 13; б) 15; в) 1,8; г) $\frac{11}{8}$; д) 2,5; е) $\frac{11}{3}$.
13. а) 3; б) 12; в) 9; г) 7; д) 99; е) 28; ж) 8; з) 6.
14. а) 2,5; б) $\frac{7}{3}$; в) 3; г) $\frac{1}{7}$; д) 0,5.
15. а) 165; б) 9; в) 2; г) 50.
16. а) $x\ge 0$; б) $x\le 0$; в) $x\ge 0$; г) $x=0$; д) $-1\le x\le 1$; е) любое; ж) x — любое число; з) $x\ge 0$; и) $x=0$.
17. а) 20; б) 20; в) 1,09; г) 1,69; д) 48; е) 12.
18. а) $\sqrt{14{,}5}$; б) $\sqrt{\frac{5}{3}}$; в) $\sqrt{0{,}1}$.

19. 9; 8; 64; 1.

20. а) $|x|$; б) x^2; в) x^2; г) $y^{\frac{3}{2}}$; д) y^4.

21. а) $\sqrt{2}-1$; б) $3\cdot\sqrt{2}$.

22. Не всегда; верно, если $a\cdot b=0$.

23. а) Верно; б) верно.

***К заданию* 2.** а) 361; б) 625;

***К заданию* 3.** а) –220; б) 2004; в) –5.

***К заданию* 4.** а) 9; б) нет решений; в) 37; г) –35; д) –16; 16; е) –49.

***К заданию* 5.** Обозначив данное числовое выражение через A, получим:

а) $A=\sqrt{1\cdot 49}=7$;

б) $A=\sqrt{9\cdot 0{,}16}=3\cdot 0{,}4=1{,}2$;

в) $A=\sqrt{1\cdot 441}=21$;

г) $A=\sqrt{32{,}4\cdot 360}=\sqrt{11\,664}=108$;

д) $A=\sqrt{625\cdot 64\cdot 100}=25\cdot 8\cdot 10=2000$;

е) $A=-0{,}3\sqrt{\dfrac{100\cdot 130}{130}}-\dfrac{1}{17}\sqrt{\dfrac{257\cdot 289}{257}}=-0{,}3\cdot 10-\dfrac{1}{17}\cdot 17=-4$.

***К заданию* 6.** а) $\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=\left|3-\sqrt{5}\right|=3-\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}=\left|\sqrt{5}-3\right|=3-\sqrt{5}$.

***К заданию* 7.** Обозначив данное выражение через M, получим:

а) $M=\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|\sqrt{3}-2\right|=\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1$;

б) $M=\sqrt{400-4\cdot 19}=\sqrt{400-76}=\sqrt{324}=18$;

в) $M=\sqrt{148}\cdot\sqrt{49-12}=\sqrt{148}\cdot\sqrt{37}=\sqrt{148\cdot 37}=74$;

г) $M=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-2-\sqrt{3}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$.

***К заданию* 8.** а) $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=x-3$, поскольку $x\ge 3$;

б) $\sqrt{(y+3)^2}=|y+3|=-y-3$, поскольку $y<-3$;

в) $\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|=3-a$, поскольку $a<3$;

г) $\sqrt{1+4b+4b^2}=\sqrt{(1+2b)^2}=|1+2b|=1+2b$, поскольку $b\ge -0{,}5$.

***К заданию* 9.** а) $|a-1| = a-1$, это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a \geq 1$;

б) $|a-1| = 1-a$, это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a \leq 1$;

в) $|a-1| = |a-1|$, это равенство имеет место при любом значении a.

***К заданию* 10.** Данное уравнение равносильно уравнению:

а) $|x-1| + |x-2| = 1$;

б) $|1-x| + |x+2| = 4 + |x-3|$.

Ответ: а) $[1; 2]$; б) -8; 2.

***К заданию* 11.** а) 2; 3; б) -1; 1.

УЭ-2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Цель: научиться выполнять преобразование выражений, содержащих квадратные корни.

Теоретическая часть

Вынесение множителя из-под знака корня:

$$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}, \text{ если } a \in \boldsymbol{R}, b \geq 0.$$

Внесение множителя под знак корня:

$$a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}, \text{ если } a < 0, b > 0;$$

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \text{ если } a > 0, b \geq 0.$$

Рассмотрим некоторые задачи, связанные с понятием «арифметический квадратный корень», и некоторые способы преобразований числовых выражений, содержащих радикалы.

Пример 1. Вынести в выражении $\sqrt{9x^3}$ множитель из-под знака корня.

Заметим, что если предложено выполнить преобразование и не сделано оговорок о значениях переменных, то будем предполагать, что входящие в выражение переменные принимают лишь те значения, при которых оно имеет смысл. Поэтому в данном примере

$x \ge 0$, поскольку выражение $\sqrt{9x^3}$ имеет смысл лишь при неотрицательных значениях x. Представим подкоренное выражение $9x^3$ в виде произведения $(3x)^2 x$, в котором множитель $(3x)^2$ является степенью с четным показателем. Тогда

$$\sqrt{9x^3} = \sqrt{(3x)^2 x} = 3x\sqrt{x}.$$

Пример 2. Вынести в выражении $\sqrt{27a^2}$ множитель из-под знака корня.

Данное выражение имеет смысл при любом a, и, поскольку $\sqrt{a^2} = |a|$, имеем:

$$\sqrt{27a^2} = \sqrt{9a^2} \cdot \sqrt{3} = 3|a|\sqrt{3} = \begin{cases} 3a\sqrt{3} \text{ при } a \ge 0, \\ -3a\sqrt{3} \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

Задание. Обоснуйте выполнимость преобразований следующих выражений и укажите, какие значения могут принимать входящие в них переменные:

а) $\sqrt{x^2 y} = \sqrt{x^2}\sqrt{y} = |x|\sqrt{y}$;

б) $\sqrt{x^5 y^2} = \sqrt{x^4 xy^2} = x^2\sqrt{x}|y| = x^2|y|\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x^6 y^5 z^2} = \sqrt{(x^3)^2 y^4 yz^2} = |x^3| \cdot y^2 \cdot \sqrt{y}\,|z| = |x^3| \cdot y^2 \cdot |z| \cdot \sqrt{y}$.

Пример 3. Внести в выражении $-5\sqrt{x^2}$ множитель под знак корня.

Отрицательный множитель -5 нельзя представить в виде арифметического квадратного корня, и поэтому множитель -5 нельзя внести под знак корня. Однако выражение $-5\sqrt{x^2}$ можно преобразовать, внеся под знак корня положительный множитель 5:

$$-5 \cdot \sqrt{x^2} = -1 \cdot 5 \cdot \sqrt{x^2} = -1 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} = -\sqrt{25x^2}.$$

Пример 4. В выражении $x\sqrt{5}$ внести множитель x под знак корня.

Множитель x может быть любым действительным числом (отрицательным либо неотрицательным). Поэтому рассмотрим два случая:

если $x \ge 0$, то $x\sqrt{5} = |x| \cdot \sqrt{5} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5x^2}$;

если $x < 0$, то $x\sqrt{5} = -|x| \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{5x^2}$.

Итак,

$$x\sqrt{5} = \begin{cases} \sqrt{5x^2} \text{ при } x \geq 0, \\ -\sqrt{5x^2} \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Задание. Обоснуйте выполнимость преобразований выражения:

а) $3x^3\sqrt{x} = \sqrt{(3x^3)^2 x} = \sqrt{9x^7}$;

б) $5y\sqrt{-y} = -\sqrt{(-5y)^2(-y)} = -\sqrt{-25y^3}$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. При каких значениях переменной a имеет смысл выражение:

а) $\frac{1}{a}$; б) $\sqrt{a}$; в) $(\sqrt{a})^2$;

г) $\sqrt{a^2}$; д) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; е) $\frac{8}{\sqrt{a^2}}$;

ж) $\frac{\sqrt{a}}{3}$; з) $\frac{7a}{\sqrt{a}-2}$?

2. Сократите дробь:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{a^2-3}{a-\sqrt{3}}$; в) $\frac{5x^2}{x+\sqrt{5}}$;

г) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; д) $\frac{a-7}{\sqrt{a}+\sqrt{7}}$; е) $\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}}$.

3. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{3x^2}, x < 0$; б) $\sqrt{x^3}, x > 0$;

в) $\sqrt{xy^2}, x > 0, y > 0$; г) $\sqrt{x^2y^5}, x < 0, y > 0$.

4. На примере выражений $2\sqrt{x}$ и $-2\sqrt{x}$ покажите, как можно внести множитель под знак корня.

5. При каких значениях переменной x верно равенство:

а) $x\sqrt{7} = \sqrt{7x^2}$; б) $(x-1)\sqrt{5} = \sqrt{5(x-1)^2}$?

6. На примере выражений $\sqrt{32x}$ и $\sqrt{3x^4}$ покажите, как можно вынести множитель из-под знака корня.

7. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $\sqrt{8(x-1)^4} = 2(x-1)^2\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{13(x-1)^2} = (1-x)\sqrt{13}$?

Задание 2. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt{64}$; г) $\sqrt{75}$;

д) $\sqrt{175}$; е) $\sqrt{108}$; ж) $\sqrt{245}$; з) $\sqrt{846}$.

Задание 3. Выполните действия ($a \geq 0,\ b > 0$):

а) $\sqrt{\dfrac{9a^2}{b^4}}$; б) $\sqrt{\dfrac{25a^2}{144b^{10}}}$;

в) $\sqrt{\dfrac{81a^{12}}{49b^7}}$; г) $\sqrt{\dfrac{225a^{14}}{576b^{34}}}$.

Задание 4. Вынесите множитель из-под знака корня ($a \geq 0, b > 0, c > 0$).

а) $\sqrt{a^3}$; б) $\sqrt{a^3b}$; в) $\sqrt{b^3}$;

г) $\sqrt{8a^2b^5c^7}$; д) $\sqrt{\dfrac{a}{4}}$; е) $\sqrt{\dfrac{a^4b}{c^3}}$;

ж) $\sqrt{\dfrac{25a^8b^2}{576c^7}}$; з) $\sqrt{\dfrac{50a^6c^7}{64b^3}}$.

Задание 5. Вынесите множитель из-под знака корня: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.

Задание 6. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{(1-x)^3}$, если $x \leq 1$;

б) $\sqrt{x^3(x-3)^5}$, если $x \geq 5$;

в) $\sqrt{x^5(x-7)^7}$, если $0 < x < 7$;

г) $\sqrt{x^3(x-2)^2}$, если $0 < x < 3$.

Задание 7. Упростите выражение:

а) $7a^2b^3\sqrt{a^4b^6} + ab^4\sqrt{a^6b^4}$ при $a < 0,\ b > 0$;

б) $4x^4y\sqrt{x^4y^6} + x^3\sqrt{x^6y^6}$ при $x > 0,\ y < 0$;

в) $3x^3\sqrt{x^8y^8} + x^3y\sqrt{x^6y^6}$ при $x < 0,\ y > 0$.

Задание 8. Вынесите множитель из-под знака корня ($x \geq 0,\ y \geq 0$):

а) $\sqrt{x^{2n}y^{6m}}$; б) $\sqrt{x^{2n+1}}$; в) $\sqrt{x^{6n+3}y^{2m+1}}$.

Задание 9. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{5}$; в) $7\sqrt{x}$; г) $10\sqrt{y}$.

Задание 10. Внесите положительный множитель под знак корня:

а) $-2\sqrt{2}$; б) $-4\sqrt{7}$; в) $-7\sqrt{x}$; г) $-0{,}3\sqrt{y}$.

Задание 11. Внесите множитель под знак корня:

а) $x\sqrt{3}$; $y\sqrt{x}$; $x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$; $y\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}}$ $(x > 0, y > 0)$;

б) $(x-2)\sqrt{\frac{1}{x-2}}$; $(y-2)\sqrt{\frac{1}{2-y}}$; $(z-3)\sqrt{\frac{1}{2z-6}}$.

Задание 12. Внесите множитель под знак корня:

а) $(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}$; б) $(1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{\sqrt{2}+3}$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1\. а) $a \neq 0$; б) $a \geq 0$; в) $a \geq 0$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $a > 0$; е) $a \neq 0$; ж) $a \leq 0$; з) $a \geq 0$ и $a \neq 4$.

2\. а) $\sqrt{2}$; б) $a+\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}-x$; г) $\sqrt{a}$; д) $\sqrt{a}-\sqrt{7}$; е) $1+\sqrt{3}$.

3\. а) $-x\sqrt{3}$; б) $\sqrt{x}$; в) $y\sqrt{x}$; г) $-xy^2\sqrt{y}$.

4\. $2\sqrt{x} = \sqrt{4\cdot x}$; $-2\sqrt{x} = -\sqrt{4\cdot x}$.

5\. а) $x \geq 0$; б) $x \geq 1$.

6\. $\sqrt{32x} = 4\sqrt{2\cdot x}$; $\sqrt{3x^4} = x^2\sqrt{3}$.

7\. а) При любом x; б) при $x \leq 1$.

К заданию 2. а) $\sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$;
б) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$;
в) $\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

К заданию 3. а) $\sqrt{\frac{9a^2}{b^4}} = \frac{3|a|}{b^2} = \frac{3a}{b^2}$, так как $a \geq 0$.

УЭ-3. ДЕЙСТВИЯ С КВАДРАТНЫМИ КОРНЯМИ

Цель: добиться того, чтобы ваши действия с квадратными корнями удовлетворяли таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Пример 1. Упростить сумму $\sqrt{25a^5} + 4a\sqrt{a^3} - a^3\sqrt{a}$.

Решение. Вынесем из-под знака корня в выражении $\sqrt{25a^5}$ множитель $5a^2$, а в выражении $\sqrt{a^3}$ — множитель a. Получим:

$$\sqrt{25a^5} + 4a\sqrt{a^3} - a^3\sqrt{a} = 5a^2\sqrt{a} + 4a^2\sqrt{a} - a^3\sqrt{a} =$$
$$= \sqrt{a}(5a^2 + 4a^2 - a^3) = \sqrt{a}(9a^2 - a^3).$$

Пример 2. Преобразовать произведение $(3\sqrt{7} - 6\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + 2\sqrt{2})$.

Решение. Вынеся общий множитель (число 3) за скобки в первом множителе, получим:

$$(3\sqrt{7} - 6\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + 2\sqrt{2}) = 3(\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + 2\sqrt{2}) =$$
$$= 3\left((\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{2})^2\right) = 3(7 - 8) = -3.$$

Пример 3. Сократить дробь $\frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}}$.

Решение. Пользуясь равенством $a = (\sqrt{a})^2$, которое выполняется при $a \geq 0$, любое неотрицательное число можно представить в виде квадрата некоторого числа, в частности $2 = (\sqrt{2})^2$. Значит, числитель данной дроби можно представить в виде разности квадратов двух выражений:

$$\frac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}=\frac{x^2-(\sqrt{2})^2}{x+\sqrt{2}}=\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x+\sqrt{2}}=x-\sqrt{2}.$$

Практическая часть

Задание 1. Упростите выражение:

а) $0{,}5\cdot\sqrt{128}+3\sqrt{2}+2\sqrt{72}$;

б) $5\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{27}-\sqrt{48}-\sqrt{9}$;

в) $\sqrt{80}+0{,}5\sqrt{20}+3\sqrt{45}+\sqrt{25}$;

г) $0{,}5\cdot\sqrt{75}+\sqrt{300}+3\sqrt{48}-\sqrt{147}+\sqrt{27}$;

д) $(15\sqrt{8}-14\sqrt{18})\cdot 3+(7\sqrt{45}-12\sqrt{245})\cdot 2$.

Задание 2. Выполните действия:

а) $4\sqrt{15\frac{1}{16}}+6\sqrt{2\frac{1}{4}}-\sqrt{252}-\sqrt{7}+\sqrt{343}$;

б) $\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}+5\sqrt{30}-2\sqrt{\frac{15}{2}}\right)\cdot 2\sqrt{\frac{3}{2}}$;

в) $3\sqrt{0{,}5}+4{,}5+(1{,}5\sqrt{200}-12\sqrt{1{,}125}-2)$;

г) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{32}-\sqrt{\frac{1}{18}}+\sqrt{18}\right):\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$;

д) $\left(\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{5}\sqrt{300}-\frac{1}{2}\sqrt{108}\right):\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\right)$.

Задание 3. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{9x^7}+0{,}5\sqrt{4x^3}-x\sqrt{x}+x\sqrt{x^3}$, если $x>0$;

б) $3\sqrt{0{,}04a^3b^3}-2\sqrt{0{,}25a^3b^5}+4b\sqrt{\frac{1}{16}a^3b^3}$, если $a>0$, $b>0$.

Задание 4. Выполните действия:

а) $(1+\sqrt{3})^2$;

б) $(2-\sqrt{5})^2$;

в) $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2$;

г) $(\sqrt{a^3b}+2\sqrt{ba^5})^2$;

д) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;

е) $(\sqrt{3}+1)^3+(\sqrt{3}-1)^3$;

ж) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$;

з) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$.

Задание 5. Докажите, что значения выражений $(\sqrt{2}-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $(\sqrt{2}+1)\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ — взаимно обратные числа.

Задание 6. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{15}-\sqrt{10})^2+10\sqrt{6}$; б) $(\sqrt{6}+\sqrt{15})^2-6\sqrt{10}$.

Задание 7. Выполните деление:

а) $(12\sqrt{45}-6\sqrt{20}):3\sqrt{5}$; б) $(8\sqrt{75}+4\sqrt{12}):2\sqrt{3}$;

в) $(18\sqrt{44}-21\sqrt{99}):3\sqrt{11}$; г) $(\sqrt{28}-\sqrt{252}+2\sqrt{63}):\sqrt{7}$.

Задание 8. Разложите на множители:

а) $13-x^2$; б) $2y^2-3$;

в) $-4x^2+19$; г) $x-5$, если $x\geq 0$;

д) $1-3y$, если $y\geq 0$; е) $x-y$, если $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Задание 9. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-11}{\sqrt{11}+a}$; б) $\dfrac{b+\sqrt{6}}{6-b^2}$; в) $\dfrac{2-\sqrt{c}}{c-4}$;

г) $\dfrac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$; д) $\dfrac{4a-9b}{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$; е) $\dfrac{a+\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+a}$.

Задание 10. Упростите выражение:

а) $(2\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2})(\sqrt{18}-\sqrt{20}+2\sqrt{2})$;

б) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}+\sqrt{20}-4\sqrt{2})$.

Задание 11. Докажите, что число a является корнем уравнения:

а) $x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{3}-1=0$, $a=1-\sqrt{3}$;

б) $x^2-\sqrt{5}x-2\sqrt{5}-4=0$, $a=2+\sqrt{5}$.

Задание 12. Выполните действия:

а) $\dfrac{1}{6-3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{6+3\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{3}{2-2\sqrt{2}}+\dfrac{5}{2+2\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$;

г) $\dfrac{5}{4+\sqrt{11}}\dfrac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}}-\dfrac{10}{\sqrt{19}+3}$.

Задание 13. Выполните действия:

а) $2\sqrt{2}-3\sqrt{8}+2\sqrt{50}+3\sqrt{98}$;

б) $\sqrt{125}+2\sqrt{45}-8\sqrt{20}+\sqrt{180}$;

в) $\dfrac{9}{10}\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{3}{2}}+2\sqrt{\dfrac{1}{6}}+\sqrt{6}+\sqrt{54}$;

г) $24\sqrt{\dfrac{1}{24}}+\sqrt{\dfrac{4}{3}}-\dfrac{2}{3}\sqrt{18\dfrac{3}{4}}+3\sqrt{16\dfrac{1}{3}}-\sqrt{196}$;

д) $(5\sqrt{20}-6\sqrt{10}+2\sqrt{40})\cdot 3\sqrt{5}$;

е) $(2\sqrt{40}-10\sqrt{10}+\sqrt{200}):2\sqrt{2}$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.** а) $19\sqrt{2}$; б) $2{,}5\sqrt{3}-3$; в) $14\sqrt{5}+5$; г) $20{,}5\sqrt{3}$; д) $-18(2\sqrt{2}+7\sqrt{5})$.

***К заданию* 2.** Обозначив данное выражение через A, получим:

а) $A = 4\sqrt{\frac{81}{16}} + 6\sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 7} - \sqrt{7} + \sqrt{7 \cdot 49} =$
$= 9 + 9 - 2 \cdot 3\sqrt{7} - \sqrt{7} + 7\sqrt{7} = 18;$

б) $A = 6\frac{\sqrt{5}}{2} + 10\sqrt{45} - \frac{4\sqrt{45}}{2} = 3\sqrt{5} + 30\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 27\sqrt{5};$

в) $A = 3\frac{1}{\sqrt{2}} + 4{,}5 + 1{,}5 \cdot 10\sqrt{2} - 12\sqrt{\frac{1125}{1000}} - 2 =$
$= \frac{3}{\sqrt{2}} + 4{,}5 + 15\sqrt{2} - 12\sqrt{\frac{9}{8}}2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2{,}5 + 15\sqrt{2} - 12\sqrt{\frac{9}{8}} =$
$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2{,}5 + 15\sqrt{2} - \frac{18\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 5 + 30\sqrt{2} - 18\sqrt{2}}{2} =$
$= \frac{15\sqrt{2} + 5}{2} = \frac{5\left(3\sqrt{2} + 1\right)}{2};$

г) $A = \frac{\sqrt{32} \cdot 6\sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{2}} - 6 \cdot \sqrt{\frac{3}{18 \cdot 2}} + 6 \cdot \frac{\sqrt{18} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} + 18\sqrt{3} =$
$= 23\sqrt{3};$

д) $A = \frac{2\sqrt{75} \cdot 2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{300} \cdot 2\sqrt{5}}{5} - \sqrt{108} \cdot \sqrt{5} =$
$= 4\sqrt{15} + 4\sqrt{15} - 6\sqrt{15} = 2\sqrt{15}.$

***К заданию* 3.** а) $x^2\sqrt{x}(x + 1)$; б) $0{,}6ab\sqrt{ab}$.

***К заданию* 4.** а) $2\left(2 + \sqrt{3}\right)$; б) $9 - 2\sqrt{5}$; в) $9a - 12\sqrt{ab} + 4b$; д) 10; е) $12\sqrt{3}$; з) $40\sqrt{6}$.

***К заданию* 5.** Имеем: $\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.$

***К заданию* 6.** а) 25; б) 21.

***К заданию* 7.** а) 8; б) 24; в) –9; г) 2.

***К заданию* 8.** Обозначив данное выражение через A, получим:

а) $A = \left(\sqrt{13} - x\right)\left(\sqrt{13} + x\right);$

б) $A = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}y - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}y + \sqrt{3}\right);$

в) $A = 19 - 4x^2 = (\sqrt{19})^2 - (2x)^2 = (\sqrt{19} - 2)(\sqrt{19} + 2)$;

г) $A = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})$;

д) $A = 1^2 - (\sqrt{3y})^2 = (1 - \sqrt{3y})(1 + \sqrt{3y})$;

е) $A = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

***К заданию* 10.** а) -11; б) $\dfrac{1}{\sqrt{6} - b}$.

УЭ-4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВОЙНЫХ РАДИКАЛОВ

Цель: добиться того, чтобы ваши действия по преобразованию двойных радикалов удовлетворяли таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Учимся решать задачи. Выражение вида $\sqrt{a + b + \sqrt{c}}$ называют **двойным**, или **сложным**, **радикалом**.

Если подкоренное выражение представляет собой полный квадрат, то можно в двойном радикале освободиться от внешнего радикала, воспользовавшись равенством $\sqrt{x^2} = |x|$.

Пример 1. Упростить выражение $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

Решение. Слагаемое $4\sqrt{5}$ можно рассматривать как удвоенное произведение чисел 2 и $\sqrt{5}$ или 1 и $2\sqrt{5}$. Число 9 должно быть равно сумме квадратов этих чисел. Очевидно, что это условие выполняется для чисел 2 и $\sqrt{5}$, т. е. $9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$.

Тогда получим:

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = \left|2 + \sqrt{5}\right| = 2 + \sqrt{5}.$$

Пример 2. Разность $\sqrt{\left|40\sqrt{2} - 57\right|} - \sqrt{\left|40\sqrt{2} + 57\right|}$ является целым числом. Найти это число.

Решение. Имеем:

$$\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{\left|40\sqrt{2}+57\right|}=\sqrt{\left(5-4\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(5+4\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\left|5-4\sqrt{2}\right|+\left|5+4\sqrt{2}\right|=-5+4\sqrt{2}-5-4\sqrt{2}=-10.$$

Итак, на практике иногда удобно пользоваться формулами:

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right|=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\left|\sqrt{a}-\sqrt{b}\right|, \text{ где } a\geq 0;\ b\geq 0.$$

В некоторых случаях при преобразованиях выражений, содержащих квадратные корни, полезно использовать тождество

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}, \qquad (*)$$

где $a>0$, $b>0$, $a^2-b\geq 0$, причем знаки берутся или только верхние, или только нижние. Это тождество иногда называют **формулой сложного радикала**.

Чтобы доказать равенство (*), заметим, что при $a>0$, $b>0$, $a^2-b\geq 0$ левая и правая его части являются положительными числами.

Возведя левую часть равенства (*) в квадрат, получим $a\pm\sqrt{b}$. Возведя правую часть равенства (*) в квадрат, получим:

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=$$

$$=a\pm 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{2}}=a\pm\sqrt{b}.$$

Итак, квадраты обеих частей равенства (*) равны, а так как эти числа положительные, то равенство (*) доказано.

Пример 3. Преобразовать выражение $\sqrt{9-\sqrt{17}}$.

Решение. По формуле радикала имеем:

$$\sqrt{9-\sqrt{17}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-17}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-17}}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{9+8}-\sqrt{9-8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{17}-1\right).$$

Практическая часть

Задание 1. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{20-6\sqrt{11}}=3-\sqrt{11}$?

Ответ обоснуйте.

Задание 2. Удовлетворяет ли число $\sqrt{10-4\sqrt{6}}-\sqrt{10+4\sqrt{6}}$ неравенству $51+34x+5x^2<0$?

Задание 3. Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$;

г) $\sqrt{\sqrt{32}+9}$; д) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$; е) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$.

Задание 4. Вычислите:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}$;

в) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; г) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$.

Задание 5. Разность $\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$ является целым числом. Найдите это число.

Задание 6. Разность $\sqrt{\left|24\sqrt{3}-43\right|}-\sqrt{24\sqrt{3}-43}$ является целым числом. Найдите это число.

Задание 7. Докажите, что значение выражения является целым числом:

а) $\sqrt{\left|12\sqrt{3}-21\right|}-\sqrt{21+2\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}+\sqrt{55+14\sqrt{6}}$.

Задание 8. Упростите сложные радикалы:

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{25+4\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{7-\sqrt{48}}$.

Задание 9. Докажите равенство:

а) $\sqrt{\sqrt{14+6\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{5}\right);$

б) $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = \sqrt{2}+3.$

Задание 10. Упростите выражение

$$\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

Задание 11. Докажите, что выражение

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$$

равно 2, если $1 \le x \le 2$; равно $2\sqrt{x-1}$, если $x > 2$.

Задание 12. Докажите, что

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

Задание 13. Докажите, что

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

Задание 14. Упростите выражение:

а) $\sqrt{3+\sqrt{8+\sqrt{73+40\sqrt{3}}}};$

б) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}.$

Ваш помощник

К заданию **2.** Да.

К заданию **3.** а) $\sqrt{7 = 4\sqrt{3}} = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} =$
$= \left|2+\sqrt{3}\right| = 2+\sqrt{3};$

б) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3};$

в) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{1-2\sqrt{5}+5} = \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} = \left|1-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}-1.$

К заданию **4.** а) 2; б) $2\sqrt{5}$; в) 2; г) 10.

***К заданию* 5.** Имеем: $\sqrt{\left|12\sqrt{5}-29\right|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}=$
$=\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(3+2\sqrt{5}\right)^2}=$
$=\left|3-2\sqrt{5}\right|-3-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}-3-3-2\sqrt{5}=-6.$

***К заданию* 6.** –8.

***К заданию* 8.** а) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; в) $2\sqrt{6}+1$.

***К заданию* 11.** Преобразуем данное выражение, применив формулу сложного радикала, или воспользуемся методом подстановки: $\sqrt{x-1}=t$.

***К заданию* 12.** Приведем знаменатели дробей к виду:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3+\sqrt{3}\right);$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3-\sqrt{3}\right).$$

Затем выполним преобразования, указанные в условии задачи.

***К заданию* 13.** Рассмотрим произведение двух последних радикалов. Оно будет равно $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Произведение этого и второго радикала будет равно $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Значит, все произведение будет равно единице.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Из истории введения действия извлечения квадратного корня из числа

Уже в древние времена решение задач практического характера (например, выделение квадратного участка земли заданной площади) приводило к необходимости извлечения квадратного корня из числа. Так, в китайской математической рукописи, написанной во II в. до н. э., имеется описание способа нахождения квадратных корней.

Индийцы в IV—V вв. умели извлекать квадратные корни из чисел. Индийский математик XII в. Бхаскара (1114 — позднее 1178) отмечал, что для каждого положительного числа можно указать два квадратных корня (положительный и отрицательный) и что нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа.

В сочинении знаменитого среднеазиатского математика аль-Хорезми (787 — ок. 850) встречается способ извлечения квадратного корня, например, при решении квадратных уравнений.

Интересен способ, используя который древние вавилоняне находили приближенные квадратные корни еще за две тысячи лет до нашей эры. На современном алгебраическом языке этот способ может быть записан так:

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}. \qquad (*)$$

Пример 1. Вычислить $\sqrt{26}$ указанным выше способом.

Так как $26 = 5^2 + 1$, то по формуле (*) получим:

$$\sqrt{26} = \sqrt{5^2 + 1} \approx 5 + \frac{1}{2 \cdot 5} = 5{,}1.$$

Поскольку $5{,}1^2 = 26{,}01$, то приближенное значение корня получено с достаточно большой точностью.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{150}$ указанным выше способом.

Используя формулу (*), получим:

$$\sqrt{150} = \sqrt{12^2 + 6} \approx 12 + \frac{6}{2 \cdot 12} = 12{,}25.$$

Заметим, что $12{,}25^2 = 150{,}0625$.

Возведя правую часть равенства (*) в квадрат, получим:

$$\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Легко заметить, что квадрат найденного приближенного значения корня отличается от подкоренного числа на число $\frac{b^2}{4a^2}$. Отсюда следует, что найденное по формуле (*) приближенное значение корня будет тем точнее, чем меньше число b по сравнению с числом a.

У вавилонян не было знака для обозначения квадратного корня. Этот знак имеет свою историю возникновения и развития. Было время (XVI в.), когда знаком корня служила буква R, а рядом ставилась первая буква латинского слова «квадратный» (q). Например, писали $R \cdot q \cdot 121$ вместо нашего современного обозначения $\sqrt{121}$. В 1637 г. французский математик Р. Декарт в своей «Геометрии» использовал современный знак корня $\sqrt{\ }$, но запись подкоренного выражения отличалась от современной. И. Ньютон в «Универсальной арифметике» (1685) применял обозначение радикала, еще более близкое к современному. Впервые запись корня, совпадающая с ныне принятой, встречается в «Трактате по алгебре» (1690) французского математика М. Роля (1652—1719). Современный знак корня окончательно вошел во всеобщее применение лишь в начале XVIII в.

Еще в древности возникала необходимость извлекать квадратный корень из отрицательного числа в задачах, решаемых с помощью квадратных уравнений. Однако в те времена считали такую задачу неразрешимой. В первой половине XVI в. поиск решений некоторых уравнений привел итальянских математиков к выражению действительных корней через квадратные корни из отрицательных чисел. Это заставило математиков того времени оперировать новыми числами, которые называли «мнимыми», «воображаемыми» и т. д. В настоящее время их называют комплексными числами. Для таких чисел применяли правила действий, которым подчинялись действительные числа. Однако смысл новых чисел долгое время оставался непонятным. В начале XIX в. было дано их наглядное геометрическое изображение (как точек плоскости), и развитие теории комплексных чисел прошло успешно. Со множеством комплексных чисел вы познакомились в старших классах.

Интересные задачи

1. Легко проверить, что имеют место равенства:

$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9}$;

$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$;

$\sqrt{81} = 8 + \sqrt{1}$;

$\sqrt{100} = 10 + \sqrt{0};$

$\sqrt{121} = 12 - \sqrt{1};$

$\sqrt{144} = 14 - \sqrt{4}.$

Как записать в общем виде закономерность, которая в них проявляется?

2. Верны равенства:

$$1^2 = 1;$$
$$11^2 = 121;$$
$$111^2 = 12321;$$
$$1111^2 = 1234321;$$
$$11111^2 = 123454321.$$

Чему равно значение выражения $\sqrt{12345678987654321}$?

3. Задача индийского математика Б. Бхаскары: «Докажите, что

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}».$$

Софизмы

а) Докажем, что $2 \cdot 2 = 5$.

«Доказательство». Запишем верное равенство

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

Далее имеем:

$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4};$$

$$\sqrt{\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2};$$

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2};$$

$$4 = 5;$$

$$2 \cdot 2 = 5.$$

Найдите ошибку в рассуждении.

б) Докажем, что половина метра равна пяти сантиметрам.

«Доказательство». Запишем верное равенство

$$\frac{1}{4}\text{ м} = 25\text{ см}.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого равенства, получим:

$$\frac{1}{2}\text{ м} = 5\text{ дм}.$$

Объясните, почему так получилось.

Мне приходится делить свое время
между политикой и уравнениями.
Однако уравнения, по-моему,
гораздо важнее, потому что политика
существует только для данного момента,
а уравнения будут существовать вечно.
А. Эйнштейн

Модуль 4 КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЭ-1. ПОНЯТИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ. НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель: актуализировать основные знания, умения и навыки по данной теме, полученные на уроках математики.

Теоретическая часть

Понятие квадратного уравнения. Одним из важнейших понятий школьного курса алгебры является понятие квадратного уравнения.

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 \geq + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$.

Числа a, b и c — *коэффициенты* квадратного уравнения. Число a называют *первым* коэффициентом, b — *вторым* коэффициентом и c — свободным членом.

Примеры квадратных уравнений:

$$3x^2 - 2x - 5 = 0;$$
$$t^2 - 5t = 0;$$
$$2y^2 - 9 = 0;$$
$$x^2 - 16 = 0;$$
$$z^2 - 3z - 4 = 0.$$

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется **неполным**, если коэффициент b или свободный член c равен нулю.

Из определения следует, что неполные квадратные уравнения могут быть трех видов:

1) $ax^2 = 0$;

2) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;

3) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$.

Учимся решать неполные квадратные уравнения.

1. Уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$. Поскольку $a \neq 0$, а из $ax^2 = 0$ следует, что $x^2 = 0$, то $x = 0$.

2. Уравнение $ax^2 + c = 0$ $(c \neq 0)$ равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$. Возможны два случая:

а) если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ не имеет корней, ибо квадрат любого действительного числа неотрицателен;

б) если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Пример 1. Решить уравнение $-2x^2 + 14 = 0$.

Решение. Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на -2:

$$-2x^2 = -14,$$

$$x^2 = 7,$$

$$x_1 = \sqrt{7}, x_2 = -\sqrt{7}.$$

Ответ: $-\sqrt{7}; \sqrt{7}$.

3. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ $(b \neq 0)$ равносильно уравнению $x(ax + b) = 0$, откуда $x_1 = 0$ или $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Пример 2. Решить уравнение $5x^2 + 3x = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители: $x(5x + 3) = 0$. Откуда $x = 0$ или $5x + 3 = 0$, т. е. $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}6$.

Ответ: $-0{,}6$; 0.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Чему равен первый коэффициент, второй коэффициент и свободный член в уравнении:

а) $3x^2 - 4x + 5 = 0;$ б) $-x^2 + 3x = 0;$

в) $7x^2 + 5 = 0;$ г) $x^2 - 10 = 0;$

д) $3x - 8 + 6x^2 = 0;$ е) $7 - x^2 = 0?$

2. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 - 1)^2x + 5x - 3 = 0$ является квадратным?

3. Каков план решения неполного квадратного уравнения:

а) $ax^2 = 0;$ б) $ax^2 + bx = 0;$ в) $ax^2 + c = 0?$

4. Какое из уравнений не имеет решений:

а) $x^2 = 0;$ б) $3x^2 = \pi;$ в) $-3x^2 = -\pi;$

г) $x^2 + 25 = 0;$ д) $7x^2 - 7 = 0;$ е) $x^2 + 1 = 0?$

5. Найдите корни многочлена:

а) $x^2 - 10;$ б) $x^2 - 7x;$

в) $0{,}5x^2 - 4x;$ г) $3x^2 + 5x.$

6. Докажите, что многочлен $3x^2 + 2$ не имеет корней.

7. При каких значениях c многочлен $\sqrt{3}x^2 + c$ не имеет корней?

8. Решите уравнение:

а) $x^2 - 10x + 25 = 0;$ б) $x^2 + 6x + 9 = 0;$

в) $4x^2 - 6x + 9 = 0;$ г) $9x^2 - 24x + 16 = 0.$

9. Составьте уравнение, которое имеет два корня, сумма которых равна нулю.

10. Сколько корней может иметь уравнение:

а) $x^2 = p;$ б) $x^2 = |p|;$

в) $x^2 = -|p|;$ г) $x^2 + 2 = -|p|?$

Задание 2. Является ли квадратным уравнение:

а) $\sqrt{2}x^2 - 7x + 3 = 0;$ б) $13x^2 - x + 8 = 0;$

в) $0 \cdot x^2 + 5 - 4x = 0$; г) $3 - 16x = 0$;

д) $9x^3 - 2x = 0$; е) $-0{,}5x^2 = 0$?

Задание 3. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 - 45 = 0$; б) $-x^2 = 0$;

в) $y^2 - 81 = 0$; г) $-0{,}1y^2 + 40 = 0$;

д) $13t^2 + 2 = 0$; е) $2t^2 - 1 = 0$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 5x = 0$; б) $-4x^2 - x = 0$;

в) $\dfrac{9 - x^2}{5} = 1$; г) $5u^2 + 9u = 0$;

д) $-6u^2 + 3u = 0$; е) $4 = \dfrac{u^2 - 5}{5}$;

ж) $5v^2 = 3v$; з) $4v^2 = 0{,}16$;

и) $3 = \dfrac{9v^2 - 4}{4}$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $4x^2 + 6x = 9x^2 - 15x$;

б) $12x + 6x^2 = 5x^2 - 7x$;

в) $8{,}5x - 2x^2 = 3{,}5x + 3x^2$;

г) $x(x - 6) = 3(108 - 2x)$.

Задание 6. Решите уравнение:

а) $x^2 = a$; б) $x^2 + a = 0$;

в) $a^2x^2 - 9 = 0$; г) $a^2x^2 - ax = 0$,

где x — переменная, a — параметр.

Задание 7. Решите уравнение:

а) $a(x^2 + x) = 0$;

б) $\dfrac{ax^2}{b} - \dfrac{x}{a} = 0$;

в) $ax^2 - bx = cx^2$,

где x — переменная, a, b, c — параметры.

Задание 8. Напишите общий вид квадратного уравнения, в котором:

а) один из корней равен нулю;
б) оба корня равны нулю;
в) корни равны по модулю, но противоположны по знаку.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $a = 3$, $b = -4$; $c = 5$; б) $a = -1$, $b = 3$; $c = 0$; в) $a = 7$, $b = 0$; $c = 5$; г) $a = 1$, $b = 0$; $c = -10$; д) $a = 6$, $b = 3$; $c = -8$; е) $a = -1$, $b = 0$; $c = 7$.

2. При всех a, кроме $a = -1$ и $a = 1$.

3. а) $(ax^2 = 0) \Leftrightarrow (x_2 = 0)$, откуда $x_1 = x_2 = 0$;

б) $(ax^2 + bx = 0) \Leftrightarrow (x(ax + b) = 0) \Leftrightarrow (x = 0$ или $ax + b = 0)$, откуда $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$;

в) $(ax^2 + c = 0) \Leftrightarrow (x^2 = -\frac{c}{a})$: если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$; если $-\frac{c}{a} < 0$, то решений нет.

4. Уравнения г) и е) решений не имеют.

5. а) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$; б) 0; 7; в) 0; 8; г) 0; $-\frac{5}{3}$.

6. *Доказательство*: $3x^2 \geq 0$ при любом x, а 2 — число положительное, значит, $3x^2 + 2 > 0$ при любом x.

7. При $c > 0$.

8. а) $x_1 = x_2 = 5$; б) $x_1 = x_2 = -3$; в) $x_1 = x_2 = 1{,}5$; г) $x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$.

9. $x^2 - 5 = 0$.

10. а) Если $p < 0$, то данное уравнение действительных корней не имеет; если $p = 0$, то имеет два равных корня, т. е. $x_1 = x_2 = 0$; если $p > 0$, то уравнение имеет два корня, т. е. $x_1 = -\sqrt{p}, x_2 = \sqrt{p}$;

б) данное уравнение имеет два корня при любом p;

в) если $p = 0$, то данное уравнение имеет два равных корня; если $p \neq 0$, то корней нет;

г) при любом p данное уравнение корней не имеет.

УЭ-2. СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: приобрести умения и навыки по решению квадратных уравнений, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Способ 1. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно найти по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного уравнения.

Возможны три случая:

1) $D < 0$. Тогда квадратное уравнение корней не имеет;

2) $D = 0$. Тогда квадратное уравнение имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{2a};$$

3) $D > 0$. Тогда квадратное уравнение имеет два различных корня

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Итак,

Чтобы решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, *достаточно*:

1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулем;

2) если дискриминант отрицателен, то записать, что корней нет;

3) если дискриминант положителен или равен нулю, то воспользоваться формулой корней.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Решение. В этом уравнении $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$. Вычислим дискриминант:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49.$$

Так как дискриминант положителен, то уравнение имеет два корня:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2},$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{4},$$

$$x_1 = 2{,}5,$$

$$x_2 = -1.$$

Ответ: -1; 2,5.

Условимся в дальнейшем при решении уравнений ответ записывать так: если, например, корнями уравнения являются числа α и β, то записывать: α, β или указывать множество корней уравнения в виде $\{x_1; x_2\}$.

Итак, *в зависимости от дискриминанта квадратное уравнение может иметь два различных корня* $(D > 0)$, *один корень, два равных корня* $(D = 0)$ *или не иметь корней* $(D < 0)$.

Способ 2. Если в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ дискриминант неотрицателен и второй коэффициент b — число вида $2k$, где $k \in \boldsymbol{R}$, то формула корней принимает более удобный для вычисления вид (выведите ее самостоятельно).

Пример 2. Решить уравнение $7x^2 + 10x - 8 = 0$.

Решение. Вычислим дискриминант по формуле $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$:

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 7(-8) = 25 + 56 = 81,\ D > 0.$$

Тогда:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{7};$$

$$x = \frac{-5 \pm 9}{7};$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = \frac{4}{7}.$$

Ответ: -2; $\frac{4}{7}$.

Способ 3. Пусть нужно решить приведенное квадратное уравнение.

Напомним, что если для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $a = 1$, то его называют **приведенным квадратным уравнением**. Его часто записывают в более простой форме:

$$x^2 + px + q = 0, \text{ где } D = p^2 - 4q.$$

Если $D > 0$, то приведенное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Итак, *корни приведенного квадратного уравнения при положительном дискриминанте равны половине второго коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена*.

Если $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, то приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет один корень: $x = -\frac{p}{2}$.

Если $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то приведенное уравнение действительных корней не имеет.

Пример 3. Решить уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Решение. Запишем формулу для нахождения корней приведенного уравнения:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5};$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{9};$$

$$x_{1,2} = 2 \pm 3; x_1 = -1; x_2 = 5.$$

Ответ: -1; 5.

Способ 4. Между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями существует зависимость, которая была установлена известным французским математиком Франсуа Виетом (1540—1603). Сформулируем ее для приведенного квадратного уравнения.

Теорема 1. *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену.*

Теорема 2. *Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.*

Используя теорему, обратную теореме Виета, можно находить корни приведенного квадратного уравнения без использования формулы, а путем подбора.

Пример 4. Найти корни уравнения $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Решение. Подберем такие числа x_1 и x_2, что $x_1 + x_2 = 8$, $x_1 x_2 = 7$.

По теореме, обратной теореме Виета, числа 1 и 7 будут корнями уравнения $x^2 - 8x + 7 = 0$.

Ответ: 1 и 7.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Укажите в квадратном уравнении его коэффициенты:

а) $3x^2 - 7x + 5 = 0$; б) $-x^2 + x - 7 = 0$;

в) $12x - 5x^2 + 3 = 0$; г) $9x - 6 + x^2 = 0$;

д) $7x - x^2 = 0$; е) $x^2 - 9 = 0$.

2. Найдите значение выражения $b^2 - 4ac$ при:

а) $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$;

б) $a = 3$, $b = 4$, $c = -5$.

3. Не решая уравнения, укажите, сколько корней оно имеет:

а) $x^2 + 3x + 5 = 0$; б) $2x^2 + 5x + 2 = 0$;

в) $x^2 - 4x + 4 = 0$; г) $2x^2 + 4x - 8 = 0$;

д) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; е) $4x^2 + 3x - 1 = 0$.

4. Докажите, что число -1 является корнем уравнения:

а) $x^2 - 1 = 0$;

б) $x^2 + x = 0$;

в) $7x^2 + 5x - 2 = 0$.

5. Докажите, что:

а) если $x = 1$ — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $a + b + c = 0$;

б) если $x = -1$ — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $a - b + c = 0$.

6. Замените данное уравнение равносильным приведенным квадратным уравнением:

а) $3x^2 - 12x + 21 = 0$; б) $2x^2 - 6x + 5 = 0$;

в) $2x + 0{,}5x^2 - 3 = 0$; г) $-x^2 + x - 9 = 0$.

7. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 - 6a + 9)x^2 - (a^2 - 4)x + (1 + 2a + a^2) = 0$ является приведенным уравнением?

8. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $3x^2 + 6x + 10 = 0$;

б) $x^2 - 4x + 5 = 0$.

9. Найдите значение a в уравнении $x^2 - x + a^2 - 2a + 1 = 0$, если оно имеет корнем число 0.

10. Один из корней уравнения $x^2 + 14x + q = 0$ равен 20. Найдите q.

Задание 2. Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите число его корней:

а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 + 7x + 16 = 0$;

в) $9x^2 - x + 1 = 0$; г) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

д) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; е) $25x^2 + 20x + 4 = 0$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $4x^2 - 5x - 6 = 0$; б) $-u^2 + 4u + 5 = 0$;

в) $3y^2 - 10y + 3 = 0$; г) $4t^2 + 3t + 1 = 0$;

д) $4x^2 - 5x - 6 = 0$; е) $6u^2 - 5u + 1 = 0$;

ж) $2y^2 + y - 8 = 0$; з) $t^2 + 4t + 4 = 0$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $7x - x^2 - 12 = 0$; б) $x^2 - 2{,}4x - 13 = 0$;

в) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; г) $7x^2 - 5x + 6 = 0$;

д) $2x^2 - 7x + 6 = 0$; е) $5x^2 - 8x + 3 = 0$;

ж) $3 - x - 4x^2 = 0$; з) $10x^2 - 3x - 1 = 0$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $2x-(x-4)^2=x+2$;

б) $(x-2)=x+4+2(x-5)(x+5)$;

в) $(x-5)(x-2)=2x(x-8)$;

г) $x^2+(4\sqrt{2}-\sqrt{3})x-4\sqrt{6}=0$.

Задание 6. При каких действительных значениях x:

а) трехчлен $4x^2-5x-4$ принимает значение, равное 2;
б) двучлен $3x-1$ равен двучлену $9x^2+9x$;
в) значения многочленов x^2+2x-8 и $2x^2-4x$ равны;
г) трехчлен $2x^2+8x+19$ равен двучлену $3x-5$?

Задание 7. Найдите корни уравнения:

а) $4x^2=4x-3$;

б) $(x-2)(12-x)=9$;

в) $(x-2)^2=2(3x-10)$;

г) $(x-2)^3+(1-x)^3=-1$;

д) $(2x+1)(2x+2)=56$;

е) $x^2-6x+9=0$;

ж) $(x+1)^2=3(x+7)$;

з) $(2x-1)^3-(2x-4)^3=9$.

Задание 8. Решите уравнение, используя формулу с коэффициентом вида $2k$:

а) $-5x^2+8x+4=0$;

б) $7x^2+46x-21=0$;

в) $15x^2+16x-15=0$;

г) $49x^2+14x+1=0$;

д) $-4x^2+12x-9=0$;

е) $-5x^2-4x+33=0$.

Задание 9. Решите уравнение:

а) $2x^2-3{,}1x+0{,}42=0$;

б) $x^2-2\sqrt{7}x+3=0$;

в) $0{,}6x^2-0{,}8x-7{,}8=0$;

г) $3x^2+2\sqrt{6x}+2=0$;

д) $2y^2+\sqrt{3}y-3=0$;

е) $y^2-\dfrac{5}{4}y+\dfrac{3}{8}=0$.

Задание 10. Найдите корни уравнения:

а) $(3x+5)^2-(2x-4)^2=(3-x)^2$;

б) $(8x-1)(3x+5)-(2x-1)(8x+6)=33x+53$;

в) $(5x-7)(8x+1)=(8x+1)^2$;

г) $(1{,}2-x)^2+(x+0{,}8)^2=2(6x-0{,}2)^2$.

Задание 11. Решите уравнение:

а) $(x^2-5x-24)(x^2+14x+48)=0$;

б) $(x^2-7x+6)(-2x^2+x+15)=0$;

в) $(x^2+17x+66)(x^2-13x+42)=0$;

г) $(2x^2-3x-5)(x^2-4x+1)=0$.

Задание 12. Найдите корни уравнения и укажите их приближенные значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,1 по недостатку:

а) $x^2+5x+2=0$;   б) $x^2-7x+3=0$;

в) $t^2-15t+7=0$;   г) $t^2+24x+11=0$.

Задание 13. Решите уравнение:

а) $\left|3x^2+5x\right|=2$;   б) $\left|-x^2+2x-3\right|=0$;

в) $\left|2x^2\,7x+6\right|=0$;   г) $\left|x^2-x+2\right|=0$.

Задание 14. Решите уравнение:

а) $3\left|x^2-0{,}75\right|=x^2+4{,}5$;   б) $x^2-3x-6=0$.

Задание 15. Решите уравнение:

а) $\left|x^2+3x\right|=\left|2x-6\right|$;

б) $\left|2x^2+2x+7\right|=\left|x^2-2x+3\right|$.

Задание 16. Решите уравнение:

а) $x^2-3|x|+2=0$;   б) $12x^2-7|x|+1=0$;

в) $x^2-3|x|-10=0$;   г) $x^2-3=2|x|$.

Задание 17. Решите уравнение:

а) $2x^2-5x-3\,|\,2-x\,|=0$;

б) $5|x-1|=x^2-2x+7$;

в) $x^2-|\,5x+6\,|=0$;

г) $x^2-2x-2|x-x-1|-2=0$.

Задание 18. Решите уравнение (x — переменная, a — параметр):

а) $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$;   б) $x^2 + 6a^2x - 27a^2 = 0$;

в) $x^2 + 8ax + 15a^2 = 0$;   г) $x^2 + 12a^2x + 35a^2 = 0$.

Задание 19. При каких значениях k уравнение

$$9x^2 - 2x + k(x+1) = 6$$

имеет равные корни?

Задание 20. Найдите значения k, при которых уравнение $(k-1)x^2 + (k+4)x + k + 7 = 0$ имеет равные корни.

Задание 21. Докажите, что уравнение $x^2 + px - 1 = 0$ при любом p имеет два корня.

Задание 22. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx - a = 0$ при $a \neq 0$ и любом b имеет два различных корня.

Задание 23. Решите приведенное квадратное уравнение:

а) $x^2 + 4x - 5 = 0$;   б) $x^2 - 4x - 45 = 0$;

в) $x^2 + 12x + 35 = 0$;   г) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

д) $x^2 - 8x + 15 = 0$;   е) $x^2 + 8x - 33 = 0$;

ж) $x^2 + x - 30 = 0$;   з) $x^2 + 11x + 30 = 0$.

Задание 24. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$;   б) $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$;   в) $\dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 7x + 6}$.

Задание 25. Решите уравнение:

а) $\left|\left|9 - x^2\right| + 5\right| = 5$;

б) $\left|3 - \left|2 - \left|1 - x^2\right|\right|\right| = 2$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $a = 3, b = -7, c = 5$; б) $a = -1, b = 1, c = -7$; в) $a = -5, b = 12, c = 3$; г) $a = 1, b = 9, c = -6$.

2. а) –23; б) 76.

3. а) Нет корней; б) два различных корня; в) два равных корня; г) два различных корня.

5. В случае а) рассуждение может быть таким: подставим вместо переменной x ее значение –1, получим требуемое равенство $a + b + c = 0$.

6. а) $x^2 - 4x + 7 = 0$; б) $x^2 - 3x + 2{,}5 = 0$; в) $x^2 + 4x - 6 = 0$; г) $x^2 - x + 9 = 0$.

7. $a = 3$.

8. Доказательство: а) $(x + 3)^2 + 1 = 0$; б) $(x - 2)^2 + 1 = 0$.

9. $a = 1$.

10. $q = -680$.

УЭ-3. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Цель: актуализация знаний, умений и навыков по разложению квадратного трехчлена на множители.

Теоретическая часть

Понятие квадратного трехчлена. Многочлен $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ называют **квадратным трехчленом**.

Корни квадратного трехчлена — это корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Разложение квадратного трехчлена на множители.

1. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2. Если дискриминант квадратного трехчлена $D = 0$, то в этом случае имеет место равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

Множители $x - x_1$ и $x - x_2$ называют **линейными множителями**, поэтому запись трехчлена $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$ называют **разложением квадратного трехчлена на линейные множители**.

3. Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

Пример. Разложить на линейные множители квадратный трехчлен $3x^2-8x+5$.

Решение. Находим дискриминант: $D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4$; $D > 0$. Следовательно, данный квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-8)+\sqrt{4}}{2\cdot 3} = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3};$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-8)-\sqrt{4}}{2\cdot 3} = \frac{8-2}{6} = 1.$$

Следовательно, $3x^2-8x+5 = 3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-1)$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Разложите на множители:

а) $49x^2-16$;

б) $25-81x^2$;

в) x^2+6x+9;

г) $1-6x+25x^2$.

2. Выражение $5a-2b$ представьте в виде произведения, в котором один из множителей равен: а) 5; б) 2; в) a; г) b.

3. Выделите квадрат двучлена:

а) x^2+2x+2; б) x^2+4x+5;

в) $x^2+10x+26$; г) $x^2+8x-20$.

4. Разложите многочлен на множители:

а) a^2-b^2; б) c^2-d^2;

в) $81-(m^2+6m)^2$; г) $16-(n^2-4n)^2$.

5. Решите уравнение:

а) $x^2-9=0$;

б) $(x-1)(x-2)(x-3)=0$;

в) $x^2-7x=0$.

6. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a-2}{4-a^2}$;   б) $\dfrac{5-a}{a^2-25}$;

в) $\dfrac{2(x-1)^2}{3(1-x)^3}$;   г) $\dfrac{(2x-2)^2}{2(x-1)^2}$.

7. Докажите, что:

а) $48^7 - 48^6$ кратно 47;   б) $24^8 - 24^7$ кратно 23;

в) $5^{23} - 5^{21}$ кратно 24;   г) $15^{13} + 15^{12}$ кратно 30.

8. Найдите значение выражения $x^3 + 2x$ при $x = -2$.

9. Верно ли равенство:

а) $a^2 - 2ab - b^2 = (b-a)^2$;

б) $a^2 + 2ab + b^2 = (-a-b)^2$?

10. Представьте выражение в виде квадрата двучлена:

а) $p^2 - 1{,}6p + 0{,}64$;   б) $25 + 10p + p^2$.

11. Найдите наименьшее значение трехчлена $x^2 - 6x + 10$.

12. Высказали гипотезу: «При любом натуральном значении x значение трехчлена $x^2 + x + 41$ — простое число». Истинность ее проверили при x, равном 1, 2, 3, ..., 30, и 30 раз действительно получилось простое число. Верна ли эта гипотеза?

Задание 2. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $x^2 + 6x + 8$;   б) $7 + 4x + x^2$;

в) $5x^2 - 8x + 3$;   г) $\sqrt{2}\,x^2 - 10x + 8\sqrt{2}$;

д) $3 - 7x + 4x^2$;   е) $3x^2 + 7x + 8$.

Задание 3. Разложите квадратный трехчлен на линейные множители:

а) $x^2 + 3x - 10$;   б) $a^2 - 3a - 4$;

в) $x^2 + 3x - 30$;   г) $a^2 - a - 6$;

д) $x^2 + 5x + 6$;   е) $5x^2 + x + 4$;

ж) $3a^2 - 2a - 5$;   з) $-4x^2 - 7x + 2$;

и) $7 - 19a - 6a^2$;   к) $6x^2 - 7x + 2$.

Задание 4. Разложите квадратный трехчлен на линейные множители:

а) $x^2+10x+25$; б) $x^2-5a-14$;

в) $-4x^2+24x-36$; г) $-3x^2-8x+3$;

д) $-2x^2+5x-2$; е) $3x^2-13x-10$.

Задание 5. Сократите дробь:

а) $\dfrac{-2x^2-7x-3}{x^2+3x}$; б) $\dfrac{36+5x-2x^2}{81-x^2}$;

в) $\dfrac{-2a^2+8a-90}{105-36a+3a^2}$; г) $\dfrac{3+7a-6a^2}{3+a-2a^2}$.

Задание 6. Разложите многочлены на множители и найдите все значения x, при которых оба многочлена принимают значение «нуль»:

а) $16x-x^3$ и $x^2+7x+12$;

б) $9x-x^2-18$ и $2x^3-18x$;

в) $-3x^3-27$ и $24x-5x^2-x^3$;

г) $2x^2-7x+16$ и $20x-5x^3$.

Задание 7. Сократите дробь: $\dfrac{(x^2-x-5)(x^2-x-2)+2}{(x^2-x-5)(x^2-x-1)+4}$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $(7x-4)(7x+4)$; б) $(5-9x)(5+9x)$; в) $(x+3)^2$.

2. а) $5\left(a\dfrac{2}{5}b\right)$; б) $2\left(\dfrac{5}{2}a-b\right)$; в) $a\left(5-2\dfrac{b}{a}\right)$; г) $b\left(5\dfrac{a}{b}-2\right)$.

3. а) $(x+1)^2+1$; б) $(x+2)^2+1$; в) $(x+5)^2+1$; г) $(x+4)^2-36$.

4. а) $(a-b)(a+b)$; б) $(c-d)(c+d)$; в) $(9-m^2-6m)(9+m^2+6m)$; г) $(4-n^2+4n)(4+n^2-4n)$.

5. а) -3; 3; б) 1; 2; 3; в) 0; 7.

6. а) $-\dfrac{1}{a+2}$; б) $-\dfrac{1}{a+5}$; в) $\dfrac{2}{3(1-x)}$; г) 2.

7. а) $48^7-48^6=48^6(48-1)=48^6\cdot 47 \vdots 47$;

б) $24^8 - 24^7 = 24^7\,(24 - 1) = 24^7 \cdot 23 \vdots 23$;

в) $5^{23} - 5^{21} = 5^{21}\,(5^2 - 1) = 5^{21} \cdot 24 \vdots 24$;

г) $15^{13} + 15^{12} = 15^{12}\,(5 + 1) = 15^{12} \cdot 6 = 15^{11} \cdot 30 \vdots 30$.

8. -12.

9. а) Неверно; б) верно.

10. а) $(p - 0{,}8)^2$; б) $(5 + p)^2$.

11. $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$. Наименьшее значение трехчлена равно 1.

12. Нет, например, при $x = 41$ получаем составное число.

К заданию 7. $\dfrac{(x^2 - x + 4)}{(x^2 - x - 3)}$.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: закрепить умения и навыки по решению текстовых задач с помощью уравнений.

Теоретическая часть

Вы уже знакомы с решением текстовых задач с помощью линейных уравнений. Теперь рассмотрим решения текстовых задач с помощью квадратных уравнений. Квадратные уравнения позволяют решать многие задачи физики, химии, техники. В ходе решения текстовых задач можно проследить схему применения аппарата математики к изучению действительности. Она состоит из трех этапов.

1-й этап. Перевод реальной ситуации на математический язык (составление уравнения).

2-й этап. Решение задачи внутри построенной математической модели (решение уравнения).

3-й этап. Интерпретация полученного решения (сопоставление полученных решений с условием задачи).

Задача 1. Из двух натуральных чисел второе больше первого в 8 раз. Найти эти числа, если их произведение равно 392.

Решение. Пусть первое число x, тогда второе — $8x$. По условию задачи составляем уравнение:

$$x \cdot 8x = 392,$$

$$8x^2 = 392, \text{ или } x^2 = 49, \text{ откуда } x_{1,2} = \pm 7.$$

Составленное уравнение имеет два корня: -7 и 7.

По условию допустимыми значениями переменной являются только натуральные числа, поэтому число -7 не является решением задачи. Значит, первое число равно 7, а второе — 56.

Ответ: 7 и 56.

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (м/с). Через сколько секунд оно будет на высоте h (м) над точкой бросания?

Решение. Из курса физики известно, что если не учитывать сопротивление воздуха, то высота h (м), на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через t (с), может быть найдена по формуле

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad (*)$$

где v_0 — начальная скорость (м/с); g — ускорение свободного падения (м/с^2).

Формулу (*) преобразуем к виду:

$$0{,}5gt^2 - v_0 t + h = 0.$$

Применяя формулу для корней квадратного уравнения, получим:

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gt}}{g}.$$

По смыслу задачи $v_0 > 0$, $g > 0$, $h > 0$, искомое время $t > 0$.

Если $v_0^2 < 2gh < 2gh$ (т. е. $v_0 < \sqrt{2gt}$), то уравнение не имеет действительных корней. Значит, начальная скорость v_0 недостаточна для того, чтобы тело могло подняться на высоту h.

Если $v_0^2 - 2gh = 0$ (т. е. $v_0 = \sqrt{2gh}$), то уравнение имеет единственный корень: физический смысл задачи заключается в том, что через $\frac{v_0}{g}$ с тело достигнет высоты h один раз.

Если $v_0^2 - 2gh > 0$ (т. е. $v_0 > \sqrt{2gt}$), то уравнение имеет два корня t_1 и t_2, и притом оба положительных, так как

$$t_1 t_2 = \frac{h}{0{,}5g} > 0 \text{ и } t_1 + t_2 = \frac{v_0}{0{,}5g} > 0.$$

Условию задачи удовлетворяют оба найденных корня. Тело брошено с такой скоростью, что могло подняться выше, чем на h м. Поэтому оно побывало на высоте h м дважды: при движении вверх и при падении.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Составьте уравнение для решения задачи:

а) одно число больше другого на 3, а их произведение равно 70. Найдите эти числа;

б) гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите катеты треугольника, если известно, что один из катетов больше другого на 2 см.

2. Составьте уравнение для решения задачи:

а) одно число больше другого на 9, а квадрат его на 279 больше квадрата другого числа. Найдите эти числа;

б) в прямоугольном треугольнике один катет на 8 см меньше гипотенузы, а другой катет на 4 см меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу;

в) найдите три последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 1589.

Задание 2. а) Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 156. Найдите эти числа;

б) произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 7 больше другого, равно 198. Найдите эти числа.

Задание 3. Катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы на 8 см, другой катет равен 20 см. Найдите периметр треугольника.

Задание 4. Периметр прямоугольного треугольника равен 36 см, а гипотенуза 15 см. Найдите катеты треугольника.

Задание 5. Периметр прямоугольника равен 58 см. Если одну из его сторон увеличить на 5 см, а другую — на 3 см, то площадь прямоугольника увеличится на 126 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

Задание 6. Радиус одной из двух концентрических окружностей на 5 см больше радиуса другой. Площадь кольца, заключенного между этими окружностями, составляет 1,25 площади малого круга. Найдите радиусы окружностей. (*Указание.* $S_{\text{круга}} = \pi r^2$.)

Задание 7. Каждый учащийся одного класса задумал поздравить с Новым годом каждого своего одноклассника поздравительной открыткой. Оказалось при этом, что было послано 1332 открытки. Сколько было учащихся в этом классе?

Задание 8. На плоскости дано несколько точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Всякие две точки соединены отрезком. Таких отрезков оказалось 190. Сколько было точек на плоскости?

Задание 9. В футбольном турнире сыграно 240 матчей, причем каждая команда играет со всеми остальными на своем и чужом полях по одному разу. Сколько футбольных команд участвовало в турнире?

Задание 10. По окончании парусной регаты все экипажи обменялись друг с другом памятными вымпелами. Сколько экипажей участвовало в состязании, если количество вымпелов оказалось равным 506?

Задание 11. В однокруговом шахматном турнире было сыграно 105 партий. Сколько человек участвовало в соревновании?

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) $x(x-3)=70$, искомые числа: 10 и 7 либо -10 и -7; б) $x^2+(x+2)^2=10^2$, катеты треугольника: 6 см, 8 см.

2. а) $x^2-(x-9)^2=279$, где x — большее число; б) $x^2=(x-8)^2+(x-4)^2$; в) $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=1589$.

УЭ-5. ТЕОРЕМА ВИЕТА

Цель: знать теорему Виета для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и уметь применять ее для решения разнообразных задач.

Теоретическая часть

Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ теорема Виета формулируется так.

Теорема. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$.

В частности, *сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену.*

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа x_1 и x_2 таковы, что их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение $\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

В частности, если $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то числа x_1 и x_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Как уже отмечалось, используя теорему, обратную теореме Виета, можно находить корни приведенного квадратного уравнения путем подбора.

Если заданы корни квадратного уравнения, то можно составить и само уравнение, используя теорему, обратную теореме Виета. Рассмотрим это на примерах.

Пример 1. Составить квадратное уравнение, корни которого равны $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Решение. Найдем сумму и произведение корней: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -12$. Искомое уравнение: $x^2 - x - 12 = 0$.

Пример 2. Составить квадратное уравнение, корни которого равны $x_1 = \frac{1}{7}$, $x_2 = 5$.

Решение. Найдем сумму и произведение корней: $x_1 + x_2 = 5\frac{1}{7}$, $x_1 x_2 = \frac{5}{7}$. Искомое уравнение: $x^2 - 5\frac{1}{7}x + \frac{5}{7} = 0$, или $7x^2 - 36x + 5 = 0$.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Не решая уравнения, укажите сумму и произведение корней уравнения. Подберите корни уравнения:

а) $x^2 - 13x + 12 = 0$;   б) $x^2 - x - 2 = 0$;

в) $x^2 - 7x + 10 = 0$;   г) $x^2 - 3x - 10 = 0$.

2. Составьте приведенное квадратное уравнение, зная его корни:

а) 2 и 7;   б) -7 и 3;

в) -10 и -30;   г) 0 и 7.

3. Составьте квадратное уравнение, имеющее: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня.

4. При каком условии по крайней мере один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен 0?

5. При каком значении a равенство является тождеством:

а) $x^2 + 5x + a = (x + 2)(x + 3)$;

б) $x^2 + ax + 2 = (x + 1)(x + 2)$?

6. Зная, что данное равенство является тождеством, найдите a и k:

а) $x^2 - 9x - 22 = (x + a)(x - 2)$;

б) $3x^2 + 17x - 6 = (kx + a)(x + 6)$.

7. Почему квадратное уравнение с рациональными коэффициентами не может иметь один корень рациональный, а другой — иррациональный?

8. Не решая уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$, определите, является ли число $1 - \sqrt{2}$ его корнем.

9. Почему приведенное квадратное уравнение с иррациональными коэффициентами не может иметь двух рациональных корней?

10. Корень квадратного уравнения с рациональными коэффициентами:

а) $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; б) $x_1 = 2 + \sqrt{2}$.

Укажите второй корень и соответствующее уравнение.

11. Корни какого из уравнений:

$$x^2 - 7x = 0,$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0,$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 24 = 0,$$

$$x^2 - 7x - 14 = 0$$

обладают свойством:

а) сумма корней равна 7, а произведение корней равно -14;
б) один из корней равен 7;
в) корни равны.

12. Определите недостающие коэффициенты в квадратных уравнениях:

а) $x^2 - 6x + ... = 0$, если $x_1 = 2$, $x_2 = ...$;
б) $x^2 - ...x + 18 = 0$, если $x_1 = 3$, $x_2 = ...$;
в) $x^2 - 5x + ... = 0$, если $x_1 = -1$, $x_2 = ...$.

Задание 2. Решите уравнение и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 + 5x + 4 = 0$; б) $2x^2 - x - 15 = 0$;
в) $6a^2 + 11a + 3 = 0$; г) $x^2 - 9x + 14 = 0$;
д) $3 + 5a - 12a^2 = 0$; е) $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

Задание 3. Найдите подбором корни уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $x^2 - 18x + 77 = 0$;
в) $x^2 + 84x + 845 = 0$; г) $-x^2 + 6x - 5 = 0$;

д) $x^2 - 6x - 7 = 0;$ е) $x^2 - 10x + 25 = 0;$

ж) $-x^2 - 7x + 8 = 0;$ з) $3x^2 + x - 2 = 0.$

Задание 4. Может ли уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q — рациональные числа, иметь корни:

а) $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = 1 + \sqrt{3};$

б) $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3};$

в) $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}?$

Задание 5. Почему квадратное уравнение с рациональными коэффициентами не может иметь один корень рациональный, а другой — иррациональный?

Задание 6. Составьте квадратное уравнение, имеющее корнями числа:

а) 3 и 1,5; б) –0,2 и –0,2;

в) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{3} - 2;$ г) $\dfrac{-2 + \sqrt{3}}{5}$ и $\dfrac{-2 - \sqrt{3}}{2};$

д) $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{2}$ и $\dfrac{3 - \sqrt{2}}{2}.$

Задание 7. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен:

а) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}};$

б) $\dfrac{2 + \sqrt{7}}{3 - \sqrt{7}};$

в) $\sqrt{2} + 3.$

Задание 8. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются взаимно обратные числа a и $\dfrac{1}{a}.$

Задание 9. Составьте квадратное уравнение, имеющее корень $\dfrac{1}{3}.$

Задание 10. Составьте квадратное уравнение, корни которого были бы на 2 меньше корней уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Задание 11. Не решая уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, найдите:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$;

в) $x_1^3 + x_2^3$ (x_1 и x_2 — корни уравнения).

Задание 12. Не находя корней уравнения $6x^2 + x - 2 = 0$, вычислите:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

г) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; д) $x_1^3 + x_2^3$; е) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$

(x_1 и x_2 — корни исходного уравнения).

Задание 13. Не решая уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, определите $A = \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2}$, где x_1 и x_2 — корни исходного уравнения.

Задание 14. Не решая уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, найдите:

а) $x_1^6 + x_2^6$;

б) $x_1^6 - x_2^6$, где x_1 и x_2 — корни этого уравнения.

Задание 15. Не решая уравнения $x^2 + px + q = 0$, найдите $|x_1 - x_2|$, где x_1 и x_2 — корни этого уравнения.

Задание 16. Найдите все значения a, для которых квадрат разности корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$ равен 1.

Задание 17. Найдите зависимость между коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если сумма кубов его корней равна произведению квадратов этих корней.

Задание 18. В каждом уравнении найдите p или q, использовав дополнительные условия:

а) $x^2 - 5x + q = 0$, если $x_1 = -3$;

б) $x^2 + px + 35 = 0$, если $x_2 = 7$;

в) $5x^2 - px + 3 = 0$, если $x_1 = 1$;

г) $x^2 + 5x + q = 0$, если $x_2 - x_1 = -1$;

д) $2x^2 + px - 9 = 0$, если $x_1 + x_2 = 11{,}25$.

Задание 19. В уравнении $3x^2 - 5x + k = 0$ подберите значение k так, чтобы $6x_1 + x_2 = 0$.

Задание 20. При каком значении q квадрат разности корней уравнения $x^2 - 2x + q = 0$ равен 16?

Задание 21. Какими должны быть p и q, чтобы уравнение $x^2 + px + q = 0$ имело корнями числа p и q?

Задание 22. В уравнении $x^2 + 9(k-1)x + 24 = 0$ найдите k, если $x_2 - x_1 = 2$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) 1 и 12; б) –1 и 2; в) 2 и 5; г) –2 и 5.

2. а) $x^2 - 9x + 14 = 0$; б) $x^2 + 4x - 21 = 0$; в) $x^2 + 40x + 300 = 0$; г) $x^2 - 7x = 0$.

3. а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 15x - 8 = 0$.

4. При $c = 0$.

5. а) $a = 6$; б) $a = 3$.

6. а) Так как $x_1 = -2$, то $x_2 = \dfrac{22}{2} = 11$, значит, $a = -x_2 = -11$; б) так как $x_1 = -6$, то $x_2 = (-2) : (-6) = \dfrac{1}{3}$, тогда $3x^2 + 17x - 6 = 3(x - \dfrac{1}{3})(x + 6) = (3x - 1)(x + 6)$, откуда $k = 3$, $a = -1$.

8. Если $1 - \sqrt{2}$ — корень данного уравнения, то и $1 + \sqrt{2}$ тоже является его корнем. Составив квадратное уравнение по его корням, будем иметь $x^2 - 2x - 1 = 0$, что и показывает, что $1 - \sqrt{2}$ — корень данного уравнения.

10. а) $x_2 = 1 + \sqrt{3}$; $x^2 - 2x - 2 = 0$; б) $x_2 = 2 - \sqrt{2}$; $x^2 - 4x - 2 = 0$.

11. а) $x^2 - 7x - 14 = 0$; б) $x^2 - 7x = 0$; $x^2 - 7x - 14 = 0$; в) $x^2 - 12x + 36 = 0$.

12. а) В этом случае рассуждение может быть построено так: «Если уравнение приведенное, то сумма его корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком; $x^2 - 6x + ... = 0$ — приведенное уравнение, следовательно, $x_1 + x_2 = 6$. Из того, что $x_1 + x_2 = 6$ и $x_1 = 2$, следует, что $x_2 = 4$. Если $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$ — корни приведенного уравнения, следовательно, $q = 2 \cdot 4 = 8$. Итак, уравнение имеет вид $x^2 - 6x + 8 = 0$».

б) $x_2 = 6$; $p = 9$; в) $x_2 = 6$; $q = -6$.

УЭ-6. ЗАДАЧИ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ЗНАКОВ КОРНЕЙ ПРИВЕДЕННОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Цель: научиться решать задачи на исследование знаков корней приведенного квадратного уравнения.

Теоретическая часть

Рассмотрим приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ и будем считать, что его дискриминант неотрицателен. Тогда возможны следующие случаи.

1. Пусть $q > 0$. Так как $q = x_1x_2$, то оба корня имеют одинаковые знаки:

а) если $p > 0$, сумма $x_1 + x_2$ отрицательна ($x_1 + x_2 = -p$), значит, оба корня отрицательны;

б) если $p < 0$, сумма $x_1 + x_2$ положительна ($x_1 + x_2 = p$), значит, оба корня положительны;

в) если $p = 0$, уравнение не имеет действительных корней ($x^2 = -q$ и $q > 0$).

2. Пусть $q < 0$. В этом случае из равенства $q = x_1x_2$ следует, что корни имеют противоположные знаки:

а) если $p > 0$, сумма $x_1 + x_2$ отрицательна ($x_1 + x_2 = -p$), значит, больший по модулю корень отрицателен;

б) если $p < 0$, сумма $x_1 + x_2$ положительна ($x_1 + x_2 = p$), значит, больший по модулю корень положителен;

в) если $p = 0$, то $x_1 = -x_2$.

3. Пусть $q = 0$. Так как $q = x_1 x_2$, то хотя бы один из корней уравнения равен нулю. Пусть $x_1 = 0$, тогда $x_2 = -p$ и $x_1 + x_2 = -p$. Аналогично, если $x_2 = 0$, то $x_1 = -p$. Если же и $p = 0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = 0$.

Полученные результаты исследования знаков корней приведенного квадратного уравнения показаны в таблице.

$x^2 + px + q = 0$		
q	p	Знаки корней
$q > 0$	$p > 0$	оба корня отрицательны
	$p < 0$	оба корня положительны
	$p = 0$	корней нет
$q < 0$	$p > 0$	корни разных знаков; больший по модулю корень отрицателен
	$p < 0$	корни разных знаков; больший по модулю корень положителен
	$p = 0$	$x_1 = -x_2$
$q = 0$	$p \neq 0$	$x_1 = 0, x_2 = -p$
	$p = 0$	$x_1 = x_2 = 0$

Если обе части квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ разделить на a, то получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

которое будет иметь те же корни, что и исходное. В этом случае исследование знаков корней, которое выполнено ранее, будет таким же и для уравнения $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Пример 1. Не решая уравнение $2x^2 - 15x + 7 = 0$, определить знаки его корней.

Находим дискриминант: $D = 15^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 225 - 56 = 69$, $D > 0$.

Корни действительны и различны между собой; так как их произведение $\left(x_1 x_2 = \frac{7}{2} \right)$ и сумма $\left(x_1 + x_2 = \frac{15}{2} \right)$ положительны, то оба корня положительны.

Пример 2. Не решая уравнение $2x^2 + 3x - 2 = 0$, определить знаки его корней.

$$D = 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 > 0.$$

Корни действительны и различны между собой, так как их произведение отрицательно (корни разных знаков); $\left(x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \right)$ — отрицательный корень по модулю больше положительного.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Известно, что дискриминант уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ положителен. При каком условии корни данного уравнения будут иметь одинаковые знаки?

2. Приведите пример квадратного уравнения, у которого:
а) один корень равен нулю, а второй отличен от нуля;
б) оба корня равны нулю.

3. Докажите, что уравнение $-7x^2 + 2x + 329 = 0$ не может иметь корни одного знака.

4. Докажите, что уравнение имеет два различных корня, и определите знаки этих корней:

а) $x^2 - 100x + 6 = 0$;

б) $2000x^2 + 2003x - 2001 = 0$.

Задание 2. Не решая уравнения, определите знаки его корней:

а) $2x^2 + 5x + 2 = 0$;　　б) $4x^2 - 10x + 5 = 0$;

в) $8x^2 - 2x - 1 = 0$;　　г) $2x^2 - 13x + 12 = 0$;

д) $5x^2 + 4x = 12x$;　　е) $3x^2 - 12x + 12 = 0$;

ж) $5x^2 - x - 10 = 0$;　　з) $15x^2 + x - 10 = 0$.

Задание 3. Докажите, что уравнение не может иметь корни одинаковых знаков:

а) $2x^2 - 9x - 10 = 0$; б) $y^2 + 41y - 371 = 0$.

Задание 4. Не решая уравнения, выясните, имеет ли оно корни, и если имеет, то определите их знаки:

а) $x^2 - 2x - 9 = 0$; б) $x^2 - 7x + 1 = 0$;

в) $8x^2 + 17x + 16 = 0$; г) $2x^2 + 8x + 1 = 0$;

д) $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 11 = 0$; е) $11x^2 - 9x + 7 - 5\sqrt{2} = 0$.

УЭ-7. РЕШЕНИЕ БИКВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: научиться решать биквадратные уравнения.

Теоретическая часть

Нахождение корней биквадратного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $3x^4 + 11x^2 - 14 = 0$.

Решение. Введя подстановку $x^2 = y$ ($y \geq 0$), получим уравнение $3y^2 + 11y - 14 = 0$. Его дискриминант $D = 11^2 + 4 \cdot 3 \cdot 14 = 11^2 + 168 = 289$, $D > 0$. Следовательно, $y_{1,2} = \frac{-11 \pm 17}{6}$.

Значит, $y_1 = -\frac{14}{3}$, $y_2 = 1$. Так как $y \geq 0$, то получим одно уравнение: $x^2 = 1$. Откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Ответ: -1 и 1.

Нахождение корней уравнения вида $a \cdot x^{2n} + b \cdot x^n + c = 0$.

Данное уравнение подстановкой $z = x^n$ сводится к решению квадратного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$.

Решение. Введя подстановку $y = x^3$, получим уравнение

$$y^2 - 19y - 216 = 0.$$

$$D = 19^2 + 4 \cdot 216 = 361 + 864 = 1225,\ D > 0.$$

Тогда $y_{1,2} = \dfrac{19 \pm 35}{2}$; $y_1 = 27$, $y_2 = -8$. Откуда $x^3 = 27$ или $x^3 = -8$. Решая полученные уравнения, находим: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Ответ: -2; 3.

Практическая часть

Задание 1. Выполните устно.

1. Решите уравнение:

а) $x^4 - 5x^2 = 0$;

б) $x^4 + 6x^2 = 0$;

в) $7x^4 = 0$;

г) $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.

2. Сколько различных корней имеет уравнение $x^4 - 16 = 0$?

3. Решите уравнение:

а) $x^4 - x^2 + 2 = 0$;

б) $x^4 - 0{,}09x^2 = 0$.

4. Уравнение $x^4 + 4x^2 + 5 = 0$ не имеет действительных корней. Почему этот вывод можно сделать, не решая уравнения?

5. Имеет ли корни биквадратное уравнение $2x^4 - 5x^2 + 6 = 0$?

6. Почему биквадратное уравнение, имеющее корень, равный x_0, имеет второй корень, равный $-x_0$?

Задание 2. Решите уравнение:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
б) $x^4 - 36x^2 + 36 = 0$;
в) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
г) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
д) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$;
е) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$.

Задание 3. Докажите, что уравнение $3x^4 + 7x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней.

Задание 4. Разложите на множители многочлен:

а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Задание 5. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4-9x^2+20}{x^4-10x^2+24}$; б) $\dfrac{x^4-17x^2+16}{x^4-50x^2+49}$;

в) $\dfrac{x^4-4x^2+3}{x^4-12x^2+27}$; г) $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-13x^2+36}$.

Задание 6. Решите уравнение:

а) $x^4-10x^2+9=0$; $x^4-13x^2+36=0$;

б) $x^4-65x^2+16=0$; $9x^4-37x^2+4=0$.

Найдите сумму и произведение корней каждого из данных уравнений и отметьте свойства корней биквадратных уравнений.

Задание 7. Докажите, что если число α является корнем биквадратного уравнения $ax^4+bx^2+c=0$, то и число $-\alpha$ является корнем этого уравнения.

Задание 8. Составьте биквадратное уравнение, если один из его корней равен $2\sqrt{2}$, а другой равен $2\sqrt{3}$.

Задание 9. Зная, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, составьте биквадратное уравнение, имеющее корни $-x_1$, $-x_2$, x_1 и x_2.

Задание 10. Докажите, что уравнение $x^4+ax+1=0$ не имеет рациональных корней, если a — целое число и $a \neq 2$.

Задание 11. Решите уравнение:

а) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$;

б) $16x^4-4(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.**

1. а) 0; $\sqrt{5}$; б) 0; в) 0; г) нет решений.
2. Два корня.
3. а) Нет решений; б) 0; –0,3; 0,3.
4. $x^4 \geq 0$, $4x^2 \geq 0$ и $5 > 0$.
5. Не имеет, поскольку $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 6 < 0$.
6. Потому что $ax_0^4+bx_0^2+c=a(-x_0)^4+b(-x_0)^2+c$ для любого x_0.

УЭ-8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СВОДЯЩИХСЯ К КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Цель: научиться решать уравнения, сводящиеся к квадратным.

Теоретическая часть

Рассмотрим некоторые подходы к решению уравнений высших степеней.

Решение простейших уравнений, сводящихся к квадратным. Многие уравнения с помощью метода введения новой переменной можно свести к квадратному уравнению, к их системе или совокупности таких уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2-5x)^2-4(x^2-5x)-12=0.$

Решение. Вводим новую переменную

$$y=x^2-5x,$$

тогда

$$y^2-4y-12=0,$$

откуда

$$y=-2 \text{ и } y=6.$$

Далее имеем:

1) $x^2-5x=6$, т. е. $x^2-5x-6=0$. Его корни: $x=-1$, $x=6$;

2) $x^2-5x=-2$, т. е. $x^2-5x+2=0$. Его корни: $\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; -1; 6.

Пример 2. Решить уравнение $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0.$

Решение. Введем подстановку $x^2+x+1=y$, тогда данное уравнение примет вид $y(y+1)-12=0$, т. е. $y^2+y-12=0$. Отсюда находим $y=-4$ или $y=3$.

Чтобы найти значения переменной x, нужно решить уравнения $x^2+x+1=-4$ и $x^2+x+1=3$, после чего объединить их корни. Решая полученные квадратные уравнения, находим: $x_1=-2$, $x_2=1$.

Ответ: -2; 1.

Решение уравнений вида* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$*, где* $a+b=c+d$ *(или* $a+c=b+d$ *или* $a+d=b+c$*). Рассмотрим конкретный пример.

Пример 3. Решить уравнение $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$.

Решение. Заметим, что 4 + 8 = 5 + 7. Перемножив в левой части уравнения выражения, стоящие в первой и четвертой скобках, а также выражения, стоящие во второй и третьей скобках, получим:

$$(x^2+12x+32)(x^2+12x+35)=4.$$

Сделаем замену: $(x^2+12x+32)=y$. Тогда $y\,(y+3)=4$, или $y^2+3y-4=0$, откуда $y=-4$ или $y=1$.

Таким образом, исходное уравнение сводится к совокупности уравнений:

$$x^2+12x+32=-4 \text{ или } x^2+12x+32=1,$$

$$\text{т. е. } x^2+12x+36=0 \text{ или } x^2+12x+31=0.$$

Решая эту совокупность уравнений, получаем:

$$x_1=-6,\ x_{2,3}=-6\pm\sqrt{5}.$$

Ответ: -6; $-6+\sqrt{5}$; $-6-\sqrt{5}$.

Итак, *уравнение* $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ *приводится к квадратному методом подстановки, если* $a+b=c+d$ (*или* $a+c=b+d$ *или* $a+d=b+c$).

***Решение уравнений вида* $(x+a)^4+(x+b)^4=c$.** Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 4. Решить уравнение $(x-4{,}5)^4+(x-5{,}5)^4=1$.

Решение. Пусть $x-4{,}5=y+k$, $x-5{,}5=y-k$ (*). Вычитая из первого равенства второе, получаем $k=0{,}5$. Тогда $x-4{,}5=y+0{,}5$; $x-5{,}5=y-0{,}5$. Относительно y уравнение примет вид:

$$(y+0{,}5)^4+(y-0{,}5)^4=1,$$

или $\left((y+0{,}5)^2-(y-0{,}5)^2\right)^2+2\,(y^2-0{,}25)^2=1$.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим биквадратное уравнение:

$$16y^4+24y^2-7=0,$$

$$y_{1,2}^2 = \frac{-12 \pm \sqrt{144+112}}{16},$$

$$y_{1,2}^2 = \frac{-12 \pm 16}{16},$$

$$y_{1,2}^2 = \frac{1}{4}, \text{ т. е. } y_{1,2}^2 = \pm\frac{1}{2}.$$

Тогда из формул (*) находим решение исходного уравнения.

Ответ: 4,5; 5,5.

Итак, *уравнение* $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ *приводится к биквадратному заменой* $x = y - \frac{a+b}{2}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16.$$

Решение. Введем подстановку $x = y - 4$ и данное уравнение перепишем так: $(y-1)^4 + (y+1)^4 = 16$.

Выполним преобразования:

$$\left((y-1)^2 + (y+1)^2\right)^2 - 2(y^2-1)^2 = 16,$$

$$(y^2 - 2y + 1 + y^2 + 2y + 1)^2 - 2(y^2-1)^2 = 16,$$

$$(2y^2+2)^2 - 2(y^4 - 2y^2 + 1) = 16.$$

Откуда $y^4 + 6y^2 - 7 = 0$, $y^2 = 1$ или $y^2 = -7$. Отсюда находим, что $y_{1,2} = \pm 1$.

Из равенства $x = y - 4$ имеем: $x_1 = -3$ или $x_2 = -5$.

Ответ: –3; –5.

Решение уравнений методом выделения полного квадрата. Для решения некоторых уравнений, сводящихся к квадратным, используется метод выделения полного квадрата.

Пример 6. Решить уравнение

$$x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 12x + 3 = 0.$$

Решение. В левой части данного уравнения выделим полный квадрат:

$$x^4+6x^3+9x^2-4x^2-12+3=0,$$
$$(x^2+3x)^2-4(x^2+3x)+3=0.$$

Введем подстановку: $x^2+3x=y$. Тогда относительно переменной y уравнение примет вид $y^2-4y+3=0=y$, откуда получаем: $y=1$ и $y=3$.

Если $y=1$, то $x^2+3x=1$, $x^2+3x-1=0$. Откуда находим:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Если $y=3$, то $x^2+3x=3$, $x^2+3x-3=0$. Откуда находим:

$$x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

Решение уравнений методом разложения левой части на множители. Если левую часть уравнения вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — многочлен, удается разложить на множители, то решение такого уравнения сводится к решению совокупности алгебраических уравнений меньшей степени.

Заметим, что решить совокупность уравнений с одной переменной $\big(f(x)=0$ или $g(x)=0\big)$ — значит найти все числа, являющиеся решением хотя бы одного уравнения, входящего в данную совокупность, или доказать, что таких чисел не существует. Совокупность уравнений $f(x)=0$ и $g(x)=0$ символически можно записать так:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right.$$

либо $f(x)=0$ или $g(x)=0$.

Пример 7. Решить уравнение $x^4-4x^3+4x^2-2=0$.

Решение. Сгруппируем первые три члена уравнения и вынесем x^2 за скобку:

$$x^2(x^2-4x+4)-2=0 \text{ или } \big(x(x-2)\big)^2-(\sqrt{2})^2=0;$$

$$(x^2-2x+\sqrt{2})(x^2-2x-\sqrt{2})=0,$$

$$x^2-2x+\sqrt{2}=0 \text{ или } x^2-2x-\sqrt{2}=0.$$

Решений нет. $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Ответ: $1\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Пример 8. Решить уравнение $x^4-3x^3+4x-3=0$.

Решение. Применив группировку, запишем уравнение в виде:

$$(x^4-2x^2)-(x^2-4x+3)=0.$$

Выделим полные квадраты в каждой скобке, не нарушив равносильности уравнений:

$$(x^4-2x+1)-(x^2-4x+4)=0, \text{ т. е.}$$

$$(x^2-1)^2-(x-2)^2=0.$$

Откуда имеем:

$$(x^2+x-3)(x^2-x+1)=0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2+x-3=0 \text{ или } x^2-x+1=0.$$

Корнями первого уравнения являются числа $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, а второе уравнение решений не имеет.

Ответ: $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Решение возвратных уравнений. Некоторые уравнения имеют особенность: коэффициенты, равноудаленные от начала и конца многочлена, стоящего в левой части уравнения, равны между собой. Уравнения с такой особенностью называются **возвратными**. На примере покажем способ решения возвратного уравнения третьей степени.

Пример 9. Решить уравнение $2x^3-5x^2-5x+2=0$.

Решение. Применив группировку, запишем данное уравнение в виде:

$$(2x^3+2)-(5x^2+5x)=0, \text{ т. е. } 2(x+1)(x^2-x+1)-5x(x+1)=0,$$

откуда

$$(x+1)(2x^2-7x+2)=0,$$

$$x+1=0 \text{ или } 2x^2-7x+2=0,$$

откуда

$$x_1=-1,\ x_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}.$$

Ответ: -1; $\dfrac{7\pm\sqrt{33}}{4}$.

Заметим, что уравнение вида $ax^3+bx^2+bx+a=0$ $(a\neq 0)$ равносильно уравнению $a(x^3+1)+bx(x+1)=0$, т. е. уравнению $(x+1)\times$ $\times\left(ax^2+(b-a)x+a\right)=0$, которое легко решается.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $(x^2+5x+6)^2+(x^2+4x+4)^2=0$;

б) $(x^3-7x^2-5x+75)^2+(x^3-8x^2-5x+84)^2=0$.

Задание 2. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $(0{,}5x-1)^2-5(0{,}5x-1)+4=0$;

б) $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0$;

в) $(x^2-2x)^2-7(x^2+2x)+6=0$;

г) $(x^2-5x+4)^2-(x^2-5x+4)=6$;

д) $(x^2-2x+1)^2+(x^2-2x+2)^2-(x^2-2x+3)^2=-4$;

е) $(x^2+x+1)+(2x^2+2x-3)=-3(1-x-x^2)$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;

б) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=15$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$;

б) $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=1$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $(x-2{,}5)^4(x-1{,}5)^4 = 1$;

б) $x^4 + (x-1)^4 = 97$.

Задание 6. Решите уравнение методом введения новой переменной:

а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3$;

б) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 9$;

в) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4) = 144$;

г) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$;

д) $(x^2-1)(x+5)(x+3) = 105$.

Задание 7. Решите уравнение:

а) $(2x-1)(2x+3)(3x-2)(3x-8) = -25$;

б) $(2x-1)(2x+3)(x+)(x+4) = -9$;

в) $(2x-1)(4x-3)(x+1)(4x+1) = 9$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2x} - 6 + 0$;

б) $x^4 - 12x^2 + 16\sqrt{2x} - 12 = 0$.

Задание 9. Решите уравнение:

а) $(x+2)(x+12)(x+3)(x+8) = 4x^2$;

б) $(x^2+2x+3)(2x^4-4x^2+3) = 2$.

Задание 10. Решите уравнение:

а) $7x^4 + 78x^3 + 214x^2 + 78x + 7 = 0$;

б) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;

в) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 + 7x + 6 = 0$;

г) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$;

д) $3x^5 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 3 = 0$.

УЭ-9. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ЦЕЛЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Цель: научиться находить корни многочленов с целыми коэффициентами.

Теоретическая часть

Пусть дано алгебраическое уравнение общего вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где n — натуральное число, a_0, a_{n-1}, ..., a_n — некоторые действительные числа и $a_0 \neq 0$.

Иногда удается подобрать целые корни таких алгебраических уравнений, используя теорему.

Теорема. Если уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (*)$$

с целыми коэффициентами имеет целый корень k, то число k является делителем свободного члена a_n.

Доказательство. Пусть число k является корнем уравнения (*), тогда, подставляя $x = k$ в уравнение, получим верное числовое равенство

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

откуда

$$a_n = -k(a_0k^{n-1} + a_1k^{n-2} + \ldots + a_{n-1}).$$

Оба множителя в правой части полученного верного числового равенства — целые, значит, свободный член a_n уравнения должен делиться на k.

Итак, мы доказали, что если алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то он является делителем его свободного члена. Отсюда следует, что искать целые корни нужно лишь среди делителей свободного члена уравнения, которых имеется лишь конечное множество.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Решение. Согласно доказанной теореме, если это уравнение и имеет целые корни, то только -1 или 1. Проверкой убеждаемся, что число 1 действительно является корнем, т. е. $x_1 = 1$.

Разложим многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители, разделив его на двучлен $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} x^3 - 2x + 1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|l} x - 1 \\ \hline x^2 + x - 1 \end{array} \\
-\begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - x \\ \hline \end{array} & \\
-\begin{array}{r} -x + 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array} &
\end{array}
$$

Значит, $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$.

Решая уравнение $x^2 + x - 1 = 0$, находим: $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: 1; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

Решение. Если это уравнение имеет целые рациональные корни, то они могут быть только делителями числа 24, т. е. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 1$.

Делим многочлен, стоящий в левой части, на двучлен $(x - 1)$ и получаем:

$$x^2 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)\,(x^3 - 9x^2 + 26x - 24).$$

Далее решаем уравнение $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Проверкой делителей свободного члена находим $x_2 = 2$ и, выполнив деление многочлена, стоящего в левой части полученного уравнения, на двучлен $x - 2$, получаем:

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)\,(x^2 - 7x + 12).$$

Решая уравнение $x^2 - 7x + 12$, находим $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Ответ: 1; 2; 3; 4.

Практическая часть

Задание 1. Найдите целые корни уравнения:

а) $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$;
б) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$;
в) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

Задание 2. Найдите рациональные корни уравнения:

а) $6x^5 + x^4 - 14x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$;
б) $6x^4 - 41x^3 + 85x^2 - 51x + 9 = 0$;
в) $24x^6 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6 = 0$.

Задание 3. Решите уравнение путем подбора корня с последующим понижением степени:

а) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$;
б) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$;
в) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
г) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$;
д) $x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = 0$;
е) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$;
б) $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$;
в) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$;
г) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$.

Задание 5. Определите свободный член уравнения $6x^3 - 7x^2 - 16x + a = 0$, если один из его корней равен 2. Найдите два остальных корня.

Содержание

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Ананченко Константин Онуфриевич
Корнеева Инна Александровна

АЛГЕБРА УЧИТ РАССУЖДАТЬ. 8 КЛАСС

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 12.09.2012. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,30. Уч.-изд. л. 4,69. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.