Национальный институт образования

Факультативные занятия

К. О. Ананченко, Л. Г. Королева

Алгебра учит рассуждать

7 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание

Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721
А64

Серия основана в 2010 году

Ананченко, К. О.
А64 Алгебра учит рассуждать. 7 класс : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / К. О. Ананченко, Л. Г. Королева. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 140 с.: ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-19-0425-5.

Пособие содержит теоретический материал и практические задания, решение которых предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем при изучении основного курса алгебры.

Предназначено учащимся 7 классов для использования на факультативных занятиях в соответствии с учебной программой.

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721

ISBN 978-985-19-0425-5

Предисловие

Уважаемые учащиеся! Вы начинаете изучать факультативный курс алгебры 7-го класса, который поможет достичь более высокого уровня овладения учебным материалом, чем на уроках. Для вас важно научиться решать стандартные и нестандартные задачи, рассуждать и доказывать, использовать различные приемы поиска решения новых задач.

Для достижения данных целей возрастает роль теоретических знаний. Важное место в процессе изучения факультативного курса будет занимать *самостоятельная математическая деятельность*.

Вы должны стремиться к тому, чтобы ваши умения и навыки удовлетворяли таким требованиям, как: правильность (без ошибок и недочетов выполнять все операции, входящие в действие); осознанность (уметь указывать или формулировать правило, теорему, формулу, в соответствии с которой выполняется действие); автоматизм (каждую операцию выполнять быстро, сжато); рациональность (выбирать наиболее короткий, «экономный» путь действия); обобщенность (уметь выполнить действие в различных ситуациях); прочность (сохранять в течение длительного времени приобретенные умения и навыки).

Учебное пособие представлено в модульной программе, которая позволяет приобрести определенный опыт самостоятельной учебной деятельности, самоопределиться и оценить свои возможности овладения учебным материалом.

Рассмотрим основные структурные элементы модульной программы.

Модуль учебной программы. Вся программа состоит из модулей, число которых определяется целями обучения, содержанием и объемом учебного материала. Модули этой программы охватывают все аспекты содержания факультативных занятий по алгебре. Каждый учебный модуль представляет собой законченный блок информации.

Учебные элементы (УЭ). Каждый модуль разбит на учебные элементы. В предлагаемой модульной программе каждый учебный элемент включает целевую установку, теоретическую и практическую части.

Цель формулируется для каждого учебного элемента.

Теоретическая часть, как правило, содержит учебный материал, с которым вы познакомились на уроке. Поэтому он представлен кратко: или в виде учебного приема, или в виде логических схем, или в виде теоретических фактов, которые напоминаются посредством примеров.

Практическая часть. Здесь посредством системы задач идет углубление и расширение учебного материала, изученного на уроках математики.

Каждый модуль завершается рубрикой ***«Математическая мозаика»***. В ней вы найдете исторические сведения, интересные факты, связанные с математикой, софизмы, шутки.

В каждом учебном элементе вы встретитесь с рубрикой ***«Ваш помощник»***. В ней имеются ответы к некоторым заданиям, краткие указания или полное решение, в противном случае (т. е. если они отсутствуют) учитесь самоконтролю, обращайтесь за помощью к товарищу, за консультацией к учителю.

Радость математического «открытия» я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность:
$1 = 1^2$,
$1 + 3 = 2^2$,
$1 + 3 + 5 = 3^2$,
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$
и так далее.

А. Н. Колмогоров

Модуль 1 ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

УЭ-1. ЧИСЛОВЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Цель: развивать способности подмечать закономерности в процессе изучения темы «Числа и вычисления».

Теоретическая часть

В курсе алгебры на каждом шагу вы встречаетесь с необходимостью замечать закономерности, например: подметить свойство степени, заметить формулу разности квадратов двух выражений и т. д. Действие по умению подмечать закономерности состоит из этапов:

1) наблюдение (эксперимент) путем вычислений, преобразований, сопоставлений;

2) формулировка гипотезы, полученной в результате наблюдения и утверждающей некоторую закономерность;

3) проверка гипотезы.

Приведем примеры задач.

Пример 1. Вычислим: 1^2, 11^2, 111^2, 1111^2. Не вычисляя, запишем, чему равно $11\,111^2$.

Поиск закономерности:

$$1^2 = 1, \quad 11^2 = 121,$$

$$111^2 = 12\,321, \quad 1111^2 = 1\,234\,321.$$

Гипотеза: $11\,111^2 = 123\,454\,321$, в верности записанного равенства легко убедиться путем вычисления.

Пример 2. Художник Н. П. Богданов-Бельский на картине «Устный счет» изобразил фрагмент урока арифметики известного русского педагога С. А. Рачинского. На классной доске на картине записана задача:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365},$$

пусть требуется найти значение данного выражения.

Если заметить, что

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 365 \quad \text{и} \quad 13^2 + 14^2 = 365,$$

то найти значение выражения не представляет никакой трудности.

Практическая часть

Задание 1. Выполните действия:

а) $((9\,819\,816 : 7) : 11) : 13$;
б) $((642\,642 : 13) : 11) : 7$;
в) $((835\,835 : 11) : 7) : 13$;
г) $11 \cdot 13 \cdot 7$.

Найдите общую закономерность.

Задание 2. Вычислите:

а) $5,1^2+10,2\cdot 3,9+3,9^2$;

б) $5,27^2+10,54\cdot 4,63+4,63^2$;

в) $(1,7+2,89)(1,7^2-1,7\cdot 2,89+2,89^2)$;

г) $2^{33}-2^{32}-2^{31}-\ldots-2^2-2-1$;

д) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$;

е) $\left(\frac{1284}{1391}+\frac{212\,121}{656\,565}\right)\cdot\left(\frac{212\,121}{656\,565}-\frac{1284}{1391}\right)$.

Задание 3. Найдите значение числового выражения:

а) $27^5-25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29-15\cdot 81^2$;

б) $3\cdot 5\cdot (4^2+1)\cdot(4^4+1)\cdot(4^8+1)-16^8-4$.

Задание 4. Докажите, что при любом натуральном k значение дроби $\frac{10^k+2}{3}$ — натуральное число.

Задание 5. Заполните таблицу.

a	b	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$
–3	–6		
6,5	–2,5		
–3,8	2,2		
7,1	1,9		
–4,2	–4,2		
8,5	0,5		

Укажите, какие из данных пар чисел $(a; b)$ обращают:

а) равенство $|a+b|=|a|+|b|$ в верное;

б) неравенство $|a+b|<|a|+|b|$ в верное.

Подметьте закономерность, т. е. укажите условие, когда $|a+b|=|a|+|b|$, $|a+b|<|a|+|b|$.

Ваш помощник

К заданию **4.**

Легко заметить, что любое число вида $10^k + 2$ имеет сумму цифр, равную 3, значит, это число кратно 3.

К заданию **5.**

$(|a+b| = |a| + |b|) \Leftrightarrow (ab \geq 0)$; $(|a+b| < |a| + |b|) \Leftrightarrow (ab < 0)$.

УЭ-2. ИНДУКЦИЯ И ДЕДУКЦИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Цель: уяснить сущность индукции и дедукции, их роль и место в процессе рассуждений и доказательств, научиться применять их в процессе решения задач.

Теоретическая часть

Понятие об индукции и дедукции. В математике термины «индукция» и «дедукция» употребляются в различных смыслах. Условимся считать, что индукция — это рассуждение от частного к общему; дедукция — рассуждение от общего к частному.

Индукция — важный эвристический прием, т. е. прием открытия новых истин. Из сложной задачи вычленяется ряд частных задач. Сравнение, сопоставление и обобщение частных случаев наводит на мысль о решении исходной задачи. Заключение, полученное на основе индукции, является лишь правдоподобным и нуждается в обосновании. Доказательство или опровержение этого заключения осуществляется с помощью дедукции.

Другими словами, с помощью индукции мы открываем то, что подлежит доказательству дедуктивным путем.

Рассмотрим примеры сочетания индукции и дедукции в процессе математического рассуждения.

Пример 1. При изучении свойства степени произведения полезно сначала рассмотреть частные случаи:

$$(ab)^2 = ab \cdot ab = a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2 b^2;$$

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3;$$

$$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 b^4.$$

После этого можно самостоятельно сформулировать теорему: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ для любых a и b и произвольного натурального числа n и выдвинуть идею доказательства теоремы в целом, основанную на рассуждениях, приведенных выше:

$$(ab)^n = (\underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ раз}}) = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ раз}}) = a^n \cdot b^n.$$

Итак, индукция иногда позволяет не только подметить закономерность, но и выдвинуть идею ее доказательства.

Пример 2. Найдем, на какую цифру оканчивается число 3^{2008}.

Рассмотрим частные примеры:

$$3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81;\ 3^5 = 243;\ 3^6 = 729.$$

Замечаем, что последние цифры повторяются через четыре степени (индукция!). Появляется гипотеза, что так будет и далее. Отсюда вытекает решение исходной задачи (дедукция!):

$$3^{2008} = 3^{4 \cdot 502} = \left(3^4\right)^{502} = 81^{502}.$$

Следовательно, данное число оканчивается цифрой 1.

Пример 3. Найдем формулу суммы

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Воспользуемся индукцией:

$$S(1)=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2};$$

$$S(2)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3};$$

$$S(3)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

На основании индукции и догадки можно высказать гипотезу: $S(n)=\dfrac{n}{n+1}$.

Полученную гипотезу

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

можно доказать так:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Гипотеза доказана.

Пример 4. Докажем, что для любых простых чисел p выражение p^2+2 принимает значение простого числа только один раз.

С чего начать поиск решения? Рассмотрим частные примеры.

p	2	3	5	7	11
p^2+2	6	11	27	51	123

На основании индукции возникает догадка: для любого простого числа p, кроме $p=3$, значения выражения p^2+2 кратны 3. Докажем этот факт.

Пусть p — простое число и $p \neq 3$. Тогда имеем:

$$p^2+2=(p^2-1)+3=(p-1)(p+1)+3.$$

Из трех последовательных натуральных чисел $p-1$, p, $p+1$ одно обязательно кратно 3. Но p — простое число, отличное от 3, значит, или $p-1$, или $p+1$ кратно 3, следовательно, сумма $(p-1)(p+1)+3$ кратна 3.

Итак, доказано, что выражение p^2+2, где p — простое число, принимает значение простого числа только один раз.

Практическая часть

Задание 1. Продумайте обоснованные ответы на следующие вопросы.

а) Нечетные числа 3, 5, 7 являются простыми. Можно ли исходя из этого утверждать, что все нечетные числа простые?

б) Легко проверить, что истинны равенства $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$; $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$; $\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$; $\frac{49}{98}=\frac{4}{8}$. Можно ли сократить любые дроби такого вида, зачеркнув в числителе и в знаменателе одну и ту же цифру?

в) Даны выражения $4a(a+1)$ и $(2a+7)(2a-8)$. Сравните их значения при $a=-3;\ -2;\ 10$. Можно ли утверждать, что при любом значении a значения первого выражения больше, чем значения второго выражения?

г) Равенство $x^3 - 7x = 4x^2 - 10$ является истинным при $x = -2;\ 1;\ 5$. Является ли это равенство тождеством?

д) Значения выражения $f(n) = n^2 + n + 17$ при $n = 1$, 2, 3, 4, 5 являются простыми числами:

$$f(1) = 19,\ f(2) = 23,\ f(3) = 29,$$
$$f(4) = 37,\ f(5) = 47.$$

Следует ли отсюда, что значения этого выражения являются простыми числами при любых натуральных значениях n? Укажите хотя бы одно такое n, при котором значением трехчлена $n^2 + n + 17$ является составное число.

е) Выражение $n^3 - n$ при $n = 1$, 2, 3, 4, 5 принимает значения, кратные 3. Можно ли отсюда сделать заключение, что это выражение при любом натуральном n принимает значение, кратное 3?

ж) Верно ли, что при любом натуральном n выражение $n^3 - n$ принимает значение, кратное 3?

з) Равенство $2^n = \frac{1}{3}n(n^2 - 3n + 8)$ имеет место при $n = 1$, 2, 3, 4 (проверьте!). Можно ли отсюда сделать вывод, что указанное равенство имеет место при любом натуральном n?

Задание 2. Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) высказал гипотезу, что числа вида $2^{2n+1} - 1$ ($n \in \boldsymbol{N}$) являются простыми. Имеет ли место эта гипотеза?

Задание 3. а) Всегда ли значение выражения $k(k+1)(k+2)(k+3)+1$ ($k \in \boldsymbol{N}$) является квадратом натурального числа?

б) Докажите, что значение выражения $2005 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 + 1$ является квадратом некоторого натурального числа, и найдите это число.

Задание 4. Найдите сумму:

а) $2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}$;

б) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)$;

в) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)$;

г) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Задание 5. Докажите, что при любом натуральном n истинно равенство:

а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $4+6+8+\ldots+2(n+1)=n(n+3)$.

УЭ-3. ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПО ТЕМЕ «ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ»

Цель: приобрести умения и навыки в проведении математического доказательства на примере темы «Натуральные числа».

Теоретическая часть

Понятие делимости. На множестве всех натуральных чисел всегда выполнимо умножение, т. е. если a и b — натуральные числа, то их произведение тоже является натуральным числом. Однако деление (действие, обратное умножению) выполнимо на множестве всех натуральных чисел не всегда, т. е. частное от деления двух натуральных чисел может не быть натуральным числом.

Говорят, что *натуральное число a делится на натуральное число b, если существует такое натуральное число x, что $a=b\cdot x$*. Другими словами, *a делится на b, если их частное x снова есть натуральное число.*

Например, 56 делится на 7, так как существует такое натуральное число x, что $56 = 7 \cdot x$, а именно $x = 8$; число 27 не делится на 7, так как не существует такого натурального числа x, при котором верно равенство $27 = 7 \cdot x$.

Если говорим, что «a делится на b», то не имеем в виду действие деления (т. е. не результат деления), а нас интересует лишь только факт, делится ли a на b. По этой причине будем различать знаки «:» и «$\vdots$». Первый знак дает команду на выполнение действия, а второй — только утверждает факт делимости.

Заметим, что предложение «a делится на b» имеет тот же смысл, что и «a кратно b», «число b — делитель a», «a и b находятся в отношении делимости».

Свойства делимости натуральных чисел.

1. *$a \vdots a$ для любого натурального числа a.*
2. *Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.*
3. *Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $(a+b) \vdots c$.*
4. *Если $a \vdots c$, $b \vdots c$ и $a > b$, то $(a-b) \vdots c$.*
5. *Если $a \vdots c$ и b не делится на c, то $a \pm b$ не делится на c.*
6. *Если $a \vdots c$, то $ab \vdots c$.*
7. *Если $a \vdots c$ и $b \vdots d$, то $(ab) \vdots (cd)$.*
8. *Если $a \vdots b$, то $a \geq b$.*

Признаки делимости. Чтобы узнать, делится ли натуральное число a на натуральное число b, не всегда нужно выполнять деление a на b. В некоторых случаях это возможно определить по некоторым правилам, носящим название признаков делимости. Напомним их.

Признак делимости на 2. Натуральное число a делится на 2 тогда и только тогда, когда его десятичная запись оканчивается четной цифрой.

Признак делимости на 5. Натуральное число a делится на 5 тогда и только тогда, когда его десятичная запись оканчивается либо цифрой 0, либо цифрой 5.

Признак делимости на 10. Натуральное число a делится на 10 тогда и только тогда, когда его запись оканчивается нулем.

Признак делимости на 4. Натуральное число a делится на 4 тогда и только тогда, когда две последние цифры в его десятичной записи нули или образуют число, делящееся на 4.

Признак делимости на 3. Натуральное число a делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3.

Признак делимости на 9. Натуральное число a делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9.

Признак делимости на 11. Чтобы узнать, делится ли на 11 натуральное число a, надо сложить отдельно цифры его десятичной записи, стоящие на четных местах, и цифры, стоящие в этой записи на нечетных местах, и из большей суммы вычесть меньшую. Число a делится на 11 тогда и только тогда, когда полученная разность делится на 11.

Практическая часть

Задание 1. Докажите, что если a, b и c делятся на d, то $2a + 3b + c$ делится на d.

Задание 2. Верно ли утверждение:

а) если a делится на 3, b не делится на 3, то $a + b$ делится на 3;

б) если a не делится на c и b не делится на c, то $a + b$ не делится на c;

в) если a делится на 5, b делится на 5, то $a - b$ делится на 5;

г) если $a + b$ делится на c, то a делится на c и b делится на c?

Задание 3. Докажите, что если ab делится на c и $a + b$ делится на c, то $a^2 + b^2$ делится на c.

Задание 4. Известно, что $2x + 3y$ при некоторых натуральных x и y делится на 17. Докажите, что при этих значениях x и y $9x + 5y$ также делится на 17.

Задание 5. а) Число a кратно 3, число b кратно 7. Докажите, что число ab кратно 21 (a, b — натуральные числа).

б) Докажите, что если натуральное число a кратно 3, то значение выражения $2a^2 + 6a$ кратно 18.

Задание 6. Докажите, что сумма натуральных чисел от 1 до 1000 делится на 7.

Задание 7. Докажите, что:

а) сумма любых трех последовательных чисел кратна 3;

б) сумма любых четырех последовательных чисел не кратна 4;

в) сумма любых пяти последовательных чисел кратна 5.

Задание 8. Докажите, что если $(a + b)$ кратно c, то $(a^3 + b^3)$ кратно c.

Задание 9. Докажите, что значение выражения $a^2 - c^2 + b(2a + b)$ делится на значение выражения $a + b + c$, где a, b, c — любые натуральные числа, причем $a > c$.

Задание 10. Верно ли утверждение:

а) если натуральное число a делится на 15, а натуральное число b не делится на 15, то ab не делится на 15;

б) если натуральное число делится на 15 и на 18, то оно делится на 270 ($270 = 15 \cdot 18$);

в) если натуральное число a делится на 2, натуральное число b делится на 3, то ab делится на 6;

г) если натуральное число a делится на 4, натуральное число b делится на 2, то ab делится на 8?

Задание 11. Докажите, что если $a > b$ и разность чисел a и b делится на натуральное число c, то разность чисел ak и bk делится на ck.

Задание 12. Какие из чисел: 4392, 495 234, 219 786, 892 050, 2 934 360, $\underbrace{22\ldots2}_{27\text{ раз}}$, $\underbrace{66\ldots6}_{13\text{ раз}}$ делятся:

а) на 2; б) на 4; в) на 5;
г) на 3; д) на 9; е) на 11?

Задание 13. Из цифр 2, 3 и 5 составьте трехзначное число, делящееся:

а) на 2; б) на 3; в) на 5.

Задание 14. В числе 4 758 967* вместо * укажите такую цифру, чтобы оно делилось:

а) на 2, 3 и 9; б) на 4;
в) на 5; г) на 11.

Задание 15. Выпишите подряд все цифры от 1 до 9 включительно, а затем от 9 до 1. Будет ли полученное число делиться на 9?

Задание 16. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $10^n + 2$ делится на 2;
б) $10^n + 53$ делится на 3;
в) $10^{2n} + 719$ делится на 9;
г) $10^{3n} + 75$ делится на 5.

Задание 17. Докажите, что при любом натуральном n является натуральным числом значение выражения:

а) $\dfrac{10^n - 4}{3}$; б) $\dfrac{9^{2n} + 14}{5}$; в) $\dfrac{10^{3n} + 6209}{9}$.

Задание 18. Докажите, что:

а) $41^{15} - 1$ делится на 10;
б) $36^{36} - 1$ делится на 5;
в) $67^8 - 1$ делится на 10;
г) $89^{36} - 45^{15}$ делится на 2.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Цель: познакомиться с решением некоторых задач с помощью элементов теории множеств.

Теоретическая часть

Понятие множества. Под **множеством** понимают совокупность некоторых объектов (элементы множества).

Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут $x \in \boldsymbol{A}$; в противном случае пишут $x \notin \boldsymbol{A}$.

Вводят пустое множество, не содержащее ни одного элемента, которое обозначают $\varnothing$.

Множество B называют **подмножеством** A, если каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Если B — подмножество множества A, говорят, что B включается в A, и пишут: $B \subset A$.

Множества, которые состоят из одних и тех же элементов, называют **равными**. Если A и B — равные множества, то пишут: $A = B$.

Конечное множество — это такое множество, количество элементов которого конечно, т. е. такое множество, для которого существует натуральное число, являющееся числом его элементов.

Множество называют бесконечным, если оно не является конечным или пустым.

***Операции над множествами*. Объединением множеств** A и B называют множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств A и B обозначают через $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B. Пересечение множеств A и B обозначают через $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих B. Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$.

Если $B \subset A$, то разность множеств A и B называют **дополнением** множества B до множества A.

В математике часто приходится решать задачи, в которых требуется определить число элементов либо во множестве, либо в объединении множеств, либо в дополнении подмножеств. Существуют определенные приемы решения таких задач.

Условимся обозначать число элементов конечного множества A символом $n(A)$. Например, если $A = \{x;\ y;\ z\}$, то можно записать, что $n(A) = 3$, и сказать, что во множестве A содержится три элемента. Полезно помнить:

1) если даны такие конечные множества A и B, что $A \cap B \neq \varnothing$, то число элементов в их объединении подсчитывается по формуле:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B);$$

2) если множества A и B не имеют общих элементов (т. е. $A \cap B = \varnothing$), то число элементов в их объединении определяется так:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B);$$

3) если $B \subset A$ и известно число элементов во множествах A и B, то число элементов в дополнении подмножества B до множества A подсчитывается по формуле:

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(B).$$

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. В классе 40 учащихся. В математическом кружке занимаются 32, в кружке «Умелые руки» — 21, а в обоих кружках — 15 учеников. Сколько учащихся не занимается ни в том, ни в другом кружке?

Решение. Воспользуемся кругами Эйлера. Пусть большой круг изображает множество всех учащихся класса, а два меньших круга A и B изображают соответственно множества всех участников математического кружка и кружка «Умелые руки». Общая часть кругов A и B изображает

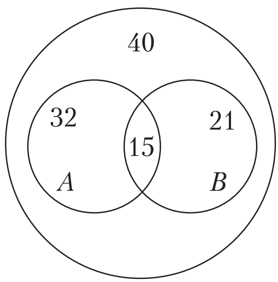

Рис. 1

множество всех учащихся, занимающихся в обоих кружках (рис. 1).

Из кругов Эйлера видно, что только в математическом кружке занимаются 17 человек ($32-15=17$), а в кружке «Умелые руки» — 6 человек ($21-15=6$). Можно найти число учащихся, не занимающихся ни в одном кружке: $40-17-15-6=40-38=2$.

Задача 2. В классе 40 учащихся. Из них 26 человек играют в баскетбол, 25 — занимаются плаванием, 27 — ходят на лыжах; одновременно плаванием и баскетболом занимаются 15 человек, баскетболом и лыжами — 16, плаванием и лыжами — 18. Один учащийся освобожден от физкультурных занятий. Сколько учащихся занимается всеми видами спорта? Сколько учащихся занимается только одним видом спорта?

Решение. Пусть множество *Б* — множество учащихся, играющих в баскетбол, множество *П* — множество учащихся, занимающихся плаванием, и множество *Л* — множество учащихся, занимающихся лыжным спортом. По условию все эти три множества попарно пересекаются. Изобразим множество всех учащихся класса в виде прямоугольника, а кругами Эйлера — множества *Б*, *П* и *Л* (рис. 2).

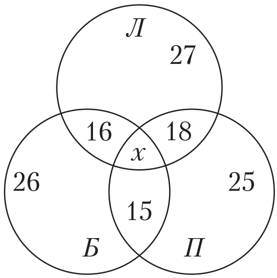

Рис. 2

Обозначим число элементов пересечения множеств *Б*, *П* и *Л* через x и определим число учащихся в каждой из непересекающихся областей. Так как по условию задачи в классе 40 учащихся, то можно составить уравнение:

$$26+25-15+27-(34-x)+1=40,$$

откуда $x=10$.

Итак, всеми указанными видами спорта занимаются 10 учащихся, только баскетболом — 5, только плаванием — 2, только лыжами — 3.

Задача 3. Петя, Коля и Вася решили 100 задач, причем каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу «трудной», если ее решил только один из мальчиков, и «легкой», если ее решили все трое. Докажите, что «трудных» задач ровно на 20 больше, чем «легких».

Решение. Изобразим множества задач, решенных мальчиками, кругами Эйлера. Пусть *П*, *К* и *В* — число задач, решенных только Петей, Колей либо Васей соответственно, *ПК*, *КВ* и *ВП* — число задач, решенных двумя мальчиками, а *ПКВ* — число «легких» задач, решенных всеми троими (рис. 3).

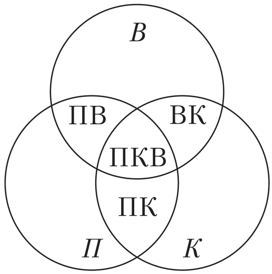

Рис. 3

Тогда число «трудных» задач равно $П+К+В$. По условию Петя решил $60 = П+ПК+ПВ+ПКВ$ задач, Коля — $60 = К+ПК+КВ+ПКВ$ задач, Вася — $60 = В+ВП+КВ+ПКВ$ задач. Сложив эти равенства, получаем:

$$180 = П+В+К+2ПК+2ВП+2КВ+3ПКВ.$$

Но по условию $100 = П + К + ПК + КВ + ВП + ПКВ$. Умножим это равенство на 2, вычтем из предыдущего и получим: $-20 = -П-В-К-ПКВ$, откуда $ПКВ = \ К - 20$, что и требовалось доказать.

Практическая часть

Задание 1. а) Пусть A — множество натуральных чисел, делящихся на 4, B — множество натуральных чисел, делящихся на 6. Найдите $A \cap B$.

б) Найдите пересечение и объединение множеств K и M, если K — множество всех двузначных натуральных чисел, не превосходящих 20, M — множество всех нечетных натуральных чисел, не превосходящих 30.

Задание 2. а) Пусть A — множество всех натуральных делителей числа 20, B — множество всех натуральных делителей числа 30. Истинно ли высказывание: 1) $A \cup B = B$; 2) $A \cup B = A$; 3) $A \subset B$; 4) $B \subset A$?

б) Известно, что $A = \{a;\ b;\ c;\ d;\ e\}$, $B = \{c;\ d;\ f;\ k\}$, $C = \{b;\ c;\ d\}$. Запишите с помощью фигурных скобок или символа $\varnothing$ каждое из множеств: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $C \cap B$, $B \cup C$.

Задание 3. а) Начертите два треугольника так, чтобы их пересечением: 1) был треугольник; 2) был отрезок; 3) была точка.

б) Какая фигура может получиться в пересечении треугольника и четырехугольника? Рассмотрите несколько случаев.

в) Сколько точек может оказаться в пересечении: 1) прямой и окружности; 2) двух окружностей?

г) Что представляет собой пересечение треугольника ABC и его стороны AB? их объединение?

Задание 4. а) В классе 28 человек. Из них 14 занимаются футболом, 18 — баскетболом, 10 — этими обоими видами спорта. Сколько человек не занимается ни футболом, ни баскетболом?

б) В группе из 59 туристов 42 знают английский язык, 18 — немецкий и 9 — оба языка. Сколько туристов не знает ни одного иностранного языка?

Задание 5. а) В классе 32 человека. В химическом кружке занимается 21 человек, в биологическом — 18, в обоих кружках — 16. Сколько человек не занимается ни в одном кружке?

б) В группе из 65 учеников 51 человек занимается в кружке танцев, 48 — в кружке пения. В обоих этих кружках участвует 41 человек. Сколько учеников из этой группы не участвует ни в кружке пения, ни в кружке танцев?

Задание 6. а) В классе 24 учащихся. В математическом кружке занимаются 15 человек, в физическом — 11, а в обоих кружках занимаются 8 учеников. Сколько учащихся не занимается ни в одном из этих кружков?

б) В субботнике по посадке деревьев участвуют 72 человека. Березы высаживают 32 человека, липы — 43, а березы и липы — 21. Сколько человек занято посадкой тополей?

Задание 7. а) В спортивной школе 120 учащихся. Из них 52 человека занимаются легкой атлетикой, 38 — баскетболом, одновременно баскетболом и легкой атлетикой занимаются 12 человек, легкой атлетикой и футболом — 24, футболом и баскетболом — 8. Сколько учащихся занимается только одним видом спорта, если всеми видами спорта занимаются 4 человека?

б) В классе 24 ученика. Из них 18 занимаются плаванием, 9 — играют в футбол, 16 — в хоккей. В футбол и хоккей играют 7 человек, плаванием и хоккеем занимаются 10 человек, плаванием и футболом — 4. Сколько человек занимается всеми видами спорта?

в) Из 20 шоколадок 15 было с орехами, 11 — с изюмом, 12 — с фруктовой начинкой. С фруктовой начинкой и орехами было 9 шоколадок, с фруктовой начинкой и изюмом — 6. Найдите число шоколадок, содержащих только изюм и орехи, если все 3 начинки содержали 5 шоколадок?

г) В группе из 37 туристов 21 человек знает итальянский язык, 27 — испанский и 30 — английский. Итальянский и испанский языки знают 10 человек, итальянский и английский — 19, испанский и английский — 18. Сколько человек знает все эти языки?

УЭ-5. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Цель: усвоить принцип Дирихле и научиться применять его при решении некоторых задач.

Теоретическая часть

При решении некоторых задач часто бывает полезен так называемый принцип Дирихле. Он назван в честь немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805—1859), который успешно применил его к доказательству теорем.

В самой простой и шутливой форме его можно сформулировать так: если n зайцев сидят в m клетках и $n > m$, то хотя бы в одной клетке сидит более одного зайца. Часто применяют обобщение принципа Дирихле: если зайцев $n > mk$, то хотя бы в одной клетке сидит более k зайцев.

Другими словами, если множество из n элементов разбито на m непересекающихся подмножеств, а $n > m$, то по крайней мере в одном из подмножеств будет более одного элемента.

Основная идея решения задач с использованием принципа Дирихле заключается в следующем: если при разбиении множества на непересекающиеся подмножества удается установить факт взаимосвязи между количеством элементов данного множества n и числом его подмножеств m в виде $n > m$, то тогда можно утверждать, что среди этих подмножеств есть такое, которое содержит более одного элемента.

Задача 1. Доказать, что из 101 натурального числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

Доказательство. При делении натурального числа на 100 в остатке может получиться одно из следующих чисел: 0, 1, 2, ..., 99 — сто разных чисел. По принципу Дирихле среди 101 числа обязательно найдутся два, дающие при делении на 100 равные остатки. Значит, их разность делится на 100.

Задача 2. В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не менее чем 4 ученика этого класса?

Решение. Так как $40 > 36 = 12 \cdot 3$, то согласно принципу Дирихле найдется месяц, в котором родилось не менее четырех одноклассников.

Задача 3. В квадрат со стороной 1 м поместили произвольным образом 51 точку. Доказать, что какие-то три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2 м.

Доказательство. Разобьем квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 0,2 м. Докажем, что в каком-то из них находится по крайней мере 3 из данных точек.

Применим принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было не более 2 точек, то всего их было бы не более 50 ($2 \cdot 25 = 50$), а по условию задачи их — 51, значит, по крайней мере три из них попадут в квадратик со стороной 0,2 м.

Практическая часть

Задание 1. а) Предположим, что в лесу растет 710 000 елочек. На каждой елочке не более 100 000 игл. Докажите, что в лесу есть по крайней мере 7 елочек с одинаковым количеством игл.

б) В школе 370 учащихся. Докажите, что среди учащихся этой школы обязательно найдутся хотя бы два ученика, отмечающие свой день рождения в один и тот же день.

в) В 7-м классе 22 ученика. Можно ли утверждать, что среди учащихся найдутся хотя бы два, имена которых начинаются с одной и той же буквы?

Задание 2. а) Докажите, что из любых трех чисел можно найти два, сумма которых четна.

б) Можно ли выбрать 57 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

в) Докажите, что из любых 52 натуральных чисел можно выбрать два числа так, что либо их сумма, либо их разность делится на 100. Верно ли это утверждение для 51 числа?

Задание 3. а) В квадрате 1×1 нарисовано 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадратик $0{,}25 \times 0{,}25$, не содержащий внутри ни одной точки.

б) Каждому из 37 человек дали решить по выбору одну из 18 задач. Верно ли, что найдутся 2 человека, решавшие одинаковые задачи?

Задание 4. а) Можно ли 60 монет разложить по 12 кучкам, чтобы каждая из них содержала разное количество монет?

б) У 15 человек есть 100 орехов. Докажите, что у каких-то из них есть одинаковое количество орехов.

в) В доме 123 жильца, им вместе 3813 лет. Можно ли выбрать 100 из них, которым вместе не меньше 3100 лет?

Задание 5. а) В ковре размером 4×4 м моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик без дырок размером 1×1 м (дырки считаются точечными).

б) В классе 41 ученик написал по три контрольные работы. В результате учитель не поставил ни одной неудовлетворительной отметки при пятибалльной системе оценки, и каждый ученик получил все остальные отметки. Узнав об этом, один ученик заметил, что по крайней мере 7 человек получили одинаковые отметки.

в) Докажите, что у любого дерева можно оборвать $\frac{8}{15}$ его листьев, оставив при этом не менее $\frac{7}{15}$ тени, которую давало дерево (тенью его ствола и веток можно пренебречь, число листьев можно считать кратным 15).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Краткие исторические сведения о числах

Понятие числа зародилось в глубокой древности и на протяжении веков подвергалось расширению и обобщению. Натуральные числа возникли при счете предметов в первобытном обществе. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. В III в. до н. э. Архимед разработал систему обозначения чисел вплоть до такого громадного числа, как $10^{8 \cdot 10^{10}}$. Потребность человека измерять величины (длины, площади и т. д.) и то обстоятельство, что результат измерения не всегда выражался натуральным числом, привели к расширению множества натуральных чисел. Были введены нуль и дробные числа.

Дроби общего вида, у которых числитель и знаменатель могли быть любыми натуральными числами, появились в некоторых сочинениях Архимеда. Древние греки практически умели выполнять все действия над обыкновенными дробями. Однако современной записи дробей с помощью черты не было. Такая запись дроби была введена лишь в 1202 г. итальянским математиком Фибоначчи (1180—1240) в его работе «Книга абака». До этого дроби выражали словесно; применяли особую запись, в которой около числа, обозначающего знаменатель дроби, справа ставился штрих; использовались и другие способы записи.

Понятие об отрицательных числах возникло в практике решения алгебраических уравнений. Однако долгое время их считали «фиктивными» и истолковывали как «долг», как «недостачу». Например, индийские математики VII в. так формулировали эти правила: «Сумма двух имуществ есть имущество, сумма двух долгов — долг, сумма имущества и долга — их разность или, если они равны, нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля — имущество, двух нулей — нуль».

Лишь в XVII в. с использованием метода координат, введенного Рене Декартом и Пьером Ферма, отрицательные числа были признаны в качестве равноправных с положительными. Французский математик Декарт описал геометрическое истолкование положительных и отрицательных чисел.

Эта загадочная семерка…

Знаете ли вы, что секретные бумаги хранят «за семью печатями», что от счастья бывают «на седьмом небе», а «у семи нянек дитя без глазу», «смертных грехов» тоже семь (зависть, скупость, прелюбодеяние, обжорство, высокомерие, леность и гнев)? А если заглянуть еще, например, в Советский энциклопедический словарь (или в БСЭ), то прочтем там о «семи мудрецах», о «семи свободных искусствах», «семи славянских племенах», о «семи чудесах света».

Чему же обязано число «семь» такой популярностью? Ответ, оказывается, восходит к временам давним, когда пытливая человеческая мысль стремилась разгадать тайны Вселенной. Древние египтяне, например, считали, что Солнце и все другие небесные светила поднимаются по семи лестницам и проходят семь ворот. Да и небесных светил тогда знали именно семь: Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. (Заметим, что Уран и Нептун были обнаружены значительно позднее, соответственно в 1781 г. и 1846 г.)

Знаменитый древнегреческий философ Аристотель (IV в. до н. э.) в своей системе мира утверждал, что неподвижная Земля окружена снаружи семью «небесами», принадлежащими известным тогда (названным выше) небесным светилам.

Считалось, что небесные светила влияют на судьбы людей и даже целых народов.

Из различных теорий о строении системы небесных тел число «семь» было перенесено в религиозные учения. Например, согласно библейскому преданию сотворение мира заняло семь дней — Вселенная была сотворена за шесть дней, а седьмой день был выходным для «творца». А в священной книге мусульман Коране говорилось, что вокруг Земли существует семь «небес». На седьмом, самом высоком «небе» живут боги и ангелы. (Отсюда и идет шутливое выражение о «седьмом небе».) И еще. Великий пост у православных начинается за семь недель до праздника Пасхи, а спустя семь недель после Пасхи отмечается праздник Троица; ритуальным атрибутом в еврейской религии является подсвечник для семи свечей — «седмисвечник», который составляет также основу государственного герба государства Израиль; католические и православные церкви признают семь магических культовых обрядов, совершение которых согласно церковному вероучению придает людям «божью благодать».

Число «семь» оказалось популярным в народной речи. Приведем некоторые пословицы, поговорки, крылатые выражения:

Семь раз отмерь, один раз отрежь.

Семеро одного не ждут.

Семь бед, один ответ.

Семь пятниц на неделе.

За семь верст киселя хлебать.

Работать до седьмого пота.

Семь смертям не бывать, одной не миновать.

Семи пядей во лбу.

Этим замечательным числом «семеркой» отмечены также некоторые явления окружающего нас мира, исторические и научные факты.

В неделе семь дней (в древней Руси неделя называлась «седмицей»).

Военные специалисты и историки утверждают, что армия Наполеона была якобы построена по закону «великолепной семерки», а именно: Наполеону подчинялось семь маршалов, каждому маршалу — по семь генералов и т. д., что обеспечивало высокую мобильность наполеоновской армии, и якобы с тех пор структура армий всех развитых стран мира строится по семеричному принципу.

Шехерезада в своих сказках описывает семь путешествий морехода Синдбада.

А. С. Пушкин в стихотворении «Муза» (1821 г.) упоминает «семиствольную цевницу», врученную ему любившей его в младенчестве музой.

По преданиям Москва и Рим стоят на семи холмах.

Спектр состоит из семи основных цветов (фиолетового, синего, голубого, зеленого, желтого, оранжевого и красного).

В музыке — основной звукоряд (гамма) содержит семь звуковых ступеней (до, ре, ми, фа, соль, ля, си).

Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду.

Л. Н. Толстой

Модуль 2 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

УЭ-1. УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Цель: научиться решать линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям.

Теоретическая часть

Равенство, содержащее одну переменную, называют **уравнением с одной переменной (неизвестной)**.

Областью определения уравнения с одной переменной называют множество значений переменной, при которых обе части уравнения имеют смысл.

Значение переменной, при котором уравнение превращается в верное равенство, называют **корнем (решением) уравнения**.

Решить уравнение — это значит найти множество его корней (решений). Другими словами, решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Два уравнения $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=0$ называют **равносильными**, если множества их корней равны.

В процессе решения уравнения стремятся данное уравнение заменить более простым, равносильным ему. В этом случае часто используются такие свойства:

- Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, поменяв знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.
- Если в какой-либо части или обеих частях уравнения выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

Практическая часть

Задание 1. Продумайте ответы на вопросы:

а) что называют уравнением с одной переменной;
б) что называют корнем уравнения;
в) что значит «решить уравнение»;
г) какие уравнения называют равносильными?

С некоторыми видами из следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Определите, какие задания вам необходимо выполнить. В случае трудностей обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 2. Даны равенства:

а) $7 \cdot 0{,}2 - 1{,}4 = 0$; б) $2x - 8 = x$;
в) $(x - 2)(x + 7) = 0$; г) $2x = 3y = 7$;
д) $x + 17 = 19$; е) $5x - 7y = 9$;

ж) $15^2 = 225$;

з) $-3x + 9 = 0$;

и) $(x+1)(x+3) = 0$;

к) $2x + 8 > 13$.

Укажите равенство, которое является уравнением с одной переменной.

Задание 3. Является ли число 9 корнем уравнения:

а) $(15x - 135)(x^2 + 8) = 0$;

б) $x^2 - 8x + 5 = 0$;

в) $x^3 - 5x^2 + x = 333$;

г) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x = 5238$?

Задание 4. Даны уравнения:

а) $5x + 35 = 0$;

б) $(x-8)(x-7) = 0$;

в) $x^2 + 6x - 7 = 0$;

г) $1{,}2x + 5{,}4 = 3$;

д) $2x^2 - 5 = 93$;

е) $|x| + x = 0$.

Запишите те уравнения, для которых число -7 является корнем.

Задание 5. Приведите пример уравнения, которое:

а) имеет один корень;

б) имеет два корня;

в) имеет три корня;

г) имеет n целых корней;

д) имеет бесчисленное множество корней;

е) не имеет корней.

Задание 6. Сколько корней имеет уравнение:

а) $5x + 35 = 0$;

б) $(x - 1{,}5)(x + 0{,}7) = 0$;

в) $9(3 - x) = 27 - 3 \cdot 3x$;

г) $2x - 17 = 17 + 2x$;

д) $x^4 + x^2 + 0{,}0000000001 = 0$;

е) $x^4 + (1 - x)^2 = 0$?

Задание 7. Укажите область определения уравнения:

а) $7(5-x)=0$; б) $|x|=67$;

в) $\frac{x^2-4}{x}=0$; г) $x=\frac{x}{x}$.

Задание 8. Равносильны ли уравнения:

а) $8(x-6)=9$ и $8x-48=9$;
б) $x^2=x$ и $x=1$;
в) $2x^2=18$ и $x^2=9$;
г) $3(x-9)=1$ и $3x=26$?

Задание 9. а) В уравнении $(5x+*)(3x-2)-15x^2=-16$ стерли число и заменили его звездочкой. Какое число стерли, если число 2 является корнем этого уравнения?

б) Составьте для уравнения $(5-x)(3-8x)=x(2+8x)$ задачу, аналогичную задаче а).

Задание 10. Имеет ли уравнение:

а) $6x^6+5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x=0$ положительные корни;

б) $-6x^6+5x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x=0$ отрицательные корни?

Задание 11. Какие свойства уравнений позволяют утверждать, что равносильны уравнения:

а) $-7x+9=13$ и $-7x=13-9$;
б) $-0{,}5(x-2)=25$ и $x-2=-50$?

Задание 12. При каких значениях t равносильны уравнения:

а) $-18x+7=5$ и $18x+7+t=5+t$;
б) $-18x+7=5$ и $(-18x+7)\,t=5t$?

Задание 13. Угадайте корни уравнения:

а) $x \cdot x = x$; б) $x^5 = (-x)^5$;

в) $x^2 = 144$; г) $x^x = x$.

Задание 14. Используя законы арифметических действий, решите уравнение:

а) $(504 \cdot x - 158\,092) : 47 + 1612 = 2216$;

б) $24\,960 : \left(3360 - \dfrac{360(2006 - x)}{120}\right) = 8$;

в) $12\dfrac{3}{5} : \left(5\dfrac{2}{15} - \left(5\dfrac{5}{9} - \dfrac{8\frac{3}{4}}{\frac{8}{21}x - 1\frac{2}{5}}\right)\right) \cdot 5\dfrac{68}{125} - \dfrac{2}{11} = \dfrac{4}{5}$.

Ваш помощник

***К заданию* 3.** а) Да; б) нет; в) да; г) да.

***К заданию* 9.** а) 1.

***К заданию* 13.** а) 0; 1; б) 0; в) –12; 12; г) 0; 1.

***К заданию* 14.** а) 370; б) 20; в) $9\dfrac{3}{16}$.

УЭ-2. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: закрепить умения и навыки в решении линейных уравнений.

Теоретическая часть

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, x — переменная, называют **линейным**.

Примерами линейных уравнений могут служить уравнения: $-6x = 17$; $0 \cdot x = 10$; $0 \cdot x = 0$; $0 \cdot x = -18$.

Линейное уравнение решается так:

- если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$;
- если $a = b = 0$, то корнем уравнения является любое число;
- если $a = 0, b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Практическая часть

Задание 1. Продумайте ответы на вопросы:

а) какое уравнение называют линейным уравнением с одной переменной;

б) при каком условии уравнение $ax = b$ имеет один корень; не имеет корней; имеет бесконечное множество решений? Приведите примеры.

Задание 2. Пользуясь таблицей квадратов чисел, раскройте возможные случаи решения линейного уравнения.

Задание 3. Найдите корень уравнения:

а) $13x = -169$;
б) $-13x = 1$;
в) $-169x = 13$;
г) $10x = -0,189$;
д) $0 \cdot x = -100$;
е) $0 \cdot x = 0$;
ж) $19x = 0$;
з) $0,7x = -98$;
и) $17x = -17^2$.

Задание 4. Составьте какое-либо линейное уравнение, которое:

а) имеет единственный корень, равный $-1,5$;

б) имеет бесчисленное множество корней;

в) не имеет корней.

Задание 5. В уравнении $tx = 36$ найдите коэффициент t, зная, что корнем данного уравнения является число:

а) -7; б) 0; в) $\frac{1}{9}$;

г) 9; д) $0{,}001$; е) 1000;

ж) t.

Задание 6. Найдите:

а) все натуральные значения коэффициента n, при которых корень уравнения $nx = 12$ является натуральным числом;

б) все целые значения коэффициента k, при которых корень уравнения $kx = 16$ является целым числом.

Задание 7. При каких значениях m уравнение $mx = m^2 - 5m$ имеет:

а) единственный корень;

б) бесчисленное множество корней?

УЭ-3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: закрепить и обобщить умения и навыки в решении линейных уравнений; развивать способности к исследовательской деятельности.

Теоретическая часть

Пусть дано уравнение

$$ax = b, \qquad (1)$$

где x — переменная, a и b — любые действительные числа.

Если ставится задача для каждого значения a и b из множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел (или его подмножества) решить уравнение $ax = b$ относительно x, то говорят, что нужно решить уравнение с параметрами.

Уравнение (1) — это, по существу, краткая запись бесконечного множества уравнений с одной переменной. Уравнения этого множества получаются из уравнения (1) при различных конкретных значениях параметров a и b из множества $\boldsymbol{R}$.

Например, получаем уравнение $-7x = 8$ при $a = -7$ и $b = 8$, уравнение $0 \cdot x = 11$ при $a = 0$ и $b = 11$ и т. д.

Решить уравнение $\boldsymbol{ax = b}$ (с переменной $\boldsymbol{x}$ и параметрами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$) — это значит указать все его корни в зависимости от параметров a и b.

При решении уравнения $ax = b$ могут быть случаи:

1) если $a \neq 0$ и b — любое действительное число, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$;

2) если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение принимает вид $0x = b$; такое уравнение корней не имеет (левая часть при любом x обращается в нуль, а правая — отлична от нуля);

3) если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение принимает вид $0x = 0$; корнем такого уравнения является любое действительное число.

Пример 1. Решим уравнение $(a^2 - 1)x = a - 1$, где x — переменная, a — параметр.

Решение. Очевидно, что при решении этого уравнения достаточно рассмотреть такие случаи:

1) если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0x = 0$; в этом случае корнем уравнения является любое действительное число;

2) если $a=-1$, то уравнение принимает вид $0x=-2$ и не имеет решений;

3) если $a \neq \pm 1$, то уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{a-1}{a^2-1}$, т. е. $x = \dfrac{1}{a+1}$.

Ответ: если $a=1$, то x — любое действительное число; если $a=-1$, то решений нет; если $a \neq \pm 1$, то $x = \dfrac{1}{a+1}$.

Пример 2. Найдем целые положительные решения уравнения $2ax=(a+1)x+6$, где x — переменная, a — параметр.

Решение. Выполнив равносильные преобразования, получим: $(a-1)x=6$.

Очевидно, что если $a = 1$, то уравнение решений не имеет. Если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{6}{a-1}$. Поскольку x — целое положительное число, то $a-1$ должно быть делителем числа 6; тогда $a=2, 3, 4, 7$. Отсюда получаем, что числа 1, 2, 3 и 6 являются положительными целыми корнями уравнения.

Ответ: 1, 2, 3, 6.

Пример 3. Решим уравнение $ax=|a|$, где x — переменная, a — параметр.

Решение. Если $a=0$, то $|a|=0$, и данное уравнение принимает вид $0x = 0$, решением которого является любое действительное число.

Если $a > 0$, то $|a| = a$, и тогда имеем уравнение $ax = a$, т. е. $x=1$.

Если $a<0$, то $|a|=-a$, и тогда имеем уравнение $ax=-a$, т. е. $x=-1$.

Ответ: если $a=0$, то x — любое действительное число; если $a>0$, то $x=1$; если $a<0$, то $x=-1$.

Пример 4. Решим уравнение $|2x - 3| = a$, где x — переменная, a — параметр.

Решение. Очевидно, что если $a < 0$, то данное уравнение корней не имеет (объясните почему).

Если $a \geq 0$, то данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 3 = a, \\ 2x - 3 = -a, \end{array}\right.$$

откуда $x = \frac{3 + a}{2}$ или $x = \frac{3 - a}{2}$.

Ответ: если $a < 0$, то корней нет; если $a \geq 0$, то $x = \frac{3 + a}{2}$ или $x = \frac{3 - a}{2}$.

Практическая часть

Задание 1. В уравнении $(a - 2)x = a + 3$ определите параметр a так, чтобы число 4 было его корнем.

Задание 2. Решите относительно x уравнение:

а) $ax = 3$;
б) $(a - 1)x = 7$;
в) $(a - 2)x = -5$;
г) $bx = |b|$;
д) $(b^2 - 1)x = b + 1$;
е) $c^2x = c(x + 1)$;
ж) $c^2x = c(x + 2) - 2$;
з) $(c - 2)x = 10 - 5x$;
и) $c^2x + 1 = 2 + c + x$;
к) $x(c^2 - 1) = (c + 1)(1 - x)$.

Задание 3. Решите относительно x уравнение:

а) $(k^2 + 1)x = m$;
б) $(2k + 1)x = 2m^2 + 1$;
в) $(k + 3)x = m$;

г) $(k-1)x = 3{,}5 + m$;

д) $(2k+2)x = 1 - 10m$;

е) $k - mx = 3 - 5x$.

Задание 4. Решите относительно x уравнение:

а) $\frac{a+x}{3} - 2 = \frac{x-3}{a}$; б) $\frac{3x+1}{a} = \frac{ax-1}{3}$;

в) $\frac{b+x}{5} - 2 = \frac{x-5}{b}$; г) $\frac{x-b}{b} - 4 = \frac{x-4}{4} - b$.

Задание 5. При каком значении параметра m уравнение $\frac{m-5x}{3} = \frac{1-6x}{4}$ имеет:

а) положительный корень;

б) корень, равный нулю;

в) отрицательный корень?

Задание 6. Решите относительно x уравнение:

а) $|x-8| = a$; б) $|x| + 1 = a$;

в) $|x-a| = |x-4|$; г) $|x| + a = x$.

Задание 7. Установите, сколько решений имеет уравнение $1 - |x| = b$ в зависимости от b.

УЭ-4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ И СВОДЯЩИХСЯ К ЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Цель: научиться решать уравнения, содержащие переменную под знаком модуля, и уравнения, сводящиеся к линейным.

Теоретическая часть

Для обозначения *совокупности* уравнений используется квадратная скобка [. Так, запись

$$\left[\begin{array}{l}2x-3=1,\\3x+1=10\end{array}\right.$$

означает, что уравнения образуют совокупность. Иногда уравнения, образующие совокупность, записывают в строчку и отделяют друг от друга логической связкой «или». Например,

$$2x-3=1 \text{ или } 3x+1=10.$$

Значение переменной, при котором хотя бы одно из уравнений, образующих совокупность, обращается в верное числовое равенство, называют *решением совокупности уравнений*.

Множество решений совокупности есть объединение всех множеств решений входящих в нее уравнений.

Пример 1. Решим совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l}3x=27,\\4-x=0.\end{array}\right.$

Решение. Получаем: $\left[\begin{array}{l}x=9,\\x=4.\end{array}\right.$

Ответ: 4; 9.

Рассмотрим основные виды уравнений, содержащих переменную под знаком модуля и сводящихся к линейным.

Уравнения вида $\boldsymbol{|ax+b|=c}$**.** При решении уравнений вида

$$|ax+b|=c, \qquad (1)$$

где a, b и c — любые действительные числа, следует различать случаи, когда $c<0$, $c=0$, $c>0$.

1) Если $c < 0$, то уравнение (1) не имеет корней, так как выражение $ax + b$ при любом действительном x принимает только неотрицательные значения;

2) если $c = 0$, то уравнение (1) равносильно уравнению $ax + b = 0$;

3) если $c > 0$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} ax+b=c, \\ ax+b=-c, \end{array}\right. \text{ т. е. } (|ax+b|=c)\left(\left[\begin{array}{l} ax+b=c, \\ ax+b=-c \end{array}\right.\right),$$

где $c > 0$.

Пример 2. Решим уравнение $|3x - 1| = 8$.

Решение. Имеем:

$3x - 1 = -8$ или $3x - 1 = 8$;

$x = -2\frac{1}{2}$ или $x = 3$.

Ответ: $-2\frac{1}{2}$; 3.

Решение данного уравнения можно записать и так:

$$(|3x-1|=8) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} 3x-1=-8, \\ 3x-1=8 \end{array}\right.\right).$$

Уравнения вида $\boldsymbol{|ax+b|=|cx+d|}$**.** При решении уравнения данного вида можно воспользоваться равносильностями:

$$(|ax+b|=|cx+d|) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} ax+b=cx+d, \\ ax+b=-(cx+d) \end{array}\right.\right).$$

Эта равносильность имеет место в силу свойства модуля: $|x| = |y| \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} x=y, \\ x=-y \end{array}\right.\right)$.

Пример 3. Решим уравнение $|2x-1|=|x+3|$.

Решение. 1-й способ. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$2x-1=-x-3$ или $2x-1=x+3$;

$x=-\frac{2}{3}$ или $x=4$.

2-й способ. Данное уравнение равносильно уравнению:

$(2x-1)^2=(x+3)^2$;

$(2x-1)^2-(x+3)^2=0$;

$(2x-1+x+3)(2x-1-x-3)=0$;

$(3x+2)(x-4)=0$;

$x=-\frac{2}{3}$ или $x=4$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$; 4.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $|x|=1{,}3$; б) $|x|=0$;
в) $|x|=-2{,}7$; г) $|x-1|=3$;
д) $|2x+7|=5$; е) $|4-5x|=8$;
ж) $|3-4x|=3$.

Задание 2. Найдите корни уравнения:

а) $||x+1|-4|=2$; б) $|3-|x+1||=5$;
в) $|||x|-1|-1|=1$; г) $|2-|1-|x|||=1$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $|x+3|=|x-5|$; б) $|3x-5|=|x+2|$;
в) $|x-1|=|x-2|$; г) $|x+6|=|10+x|$;

д) $|x-2|=3|x+3|$;　　　　е) $|x+3|=-|x^2-9|$;

ж) $|x+2|=-|x^2-16|$;　　　з) $|x+2|=|-x-2|$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Краткие исторические сведения об уравнениях

Решение линейных уравнений было известно еще в древности, задолго до нашей эры. Необходимость решать уравнения была вызвана потребностью практических задач, связанных с нахождением площадей земельных участков, с работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики.

Еще древним вавилонянам и египтянам было известно много арифметических задач, решение которых сводилось к рассмотрению линейного уравнения. Например, в египетском папирусе Райнда «Руководство к вычислениям писца Ахмеса», относящемся к периоду 2000—1700 лет до н. э., имеется целая глава «Вычисление куч», посвященная решению указанных выше задач. Здесь под словом «куча» понималось неизвестное число.

Приведем одну из задач этого замечательного памятника.

Задача. Найти число, если известно, что от прибавления к нему $\frac{2}{3}$ его и вычитания от полученной суммы ее трети получается число 10.

Задача в современных обозначениях сводится к рассмотрению уравнения:

$$x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10.$$

В этом же документе рассматриваются следующие уравнения:

$$x+\frac{x}{7}=19;\ x+\frac{x}{5}=21;\ 3x+\frac{1}{3}x=1;\ 3x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x=1.$$

Одним из самых своеобразных древнегреческих математиков был Диофант Александрийский, труды которого имели большое значение для алгебры и теории чисел. До сих пор не выяснены ни год рождения, ни дата смерти Диофанта; полагают что он жил в III в. н. э. В одном из древних рукописных сборников задач в стихах жизнь Диофанта описывается в виде следующей алгебраической загадки, представляющей надгробную надпись на его могиле:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей — и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Задача-загадка сводится к составлению и решению уравнения:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

откуда $x=84$ — вот сколько лет прожил Диофант.

Диофант решал задачи исключительно с конкретными числовыми данными и не знал отрицательных и иррациональных чисел, а также действия деления, которое он заменял последовательным вычитанием. Диофант пользовался буквенными обозначениями неизвестного и его степеней.

Большое внимание уравнениям, сводящимся к линейным, уделял ал-Хорезми, который для решения таких уравнений применял свой метод «ал-джебр» и «вал-мукабала». В дословном переводе эти слова означают «восстановление» и «сопоставление». Суть этого метода рассмотрим на примере.

Пусть имеется уравнение: $7x - 5 = 3x - 2$.

Применяя операцию «ал-джебр», получим

$$7x + 2 = 3x + 5.$$

Применяя операцию «вал-мукабала», получим

$$4x = 3,$$

откуда $x = \frac{3}{4}$.

Теория решения линейных уравнений у европейских математиков XIII в. почти такая же, как и у средеазиатских. Так, например, итальянский математик XIII в. Фибоначчи в своей «Книге об абаке» (1202 г.) для решения уравнений, сводящихся к линейным, дает такие же правила, как и ал-Хорезми, т. е. по существу пользуется методом «восстановления» и «сопоставления».

Дальнейшее развитие линейных уравнений шло только по пути улучшения символики и доведения ее до современной.

Модуль 3 КООРДИНАТЫ И ФУНКЦИИ

УЭ-1. КООРДИНАТНАЯ ПЛОСКОСТЬ. ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Цель: знать и правильно использовать термины: координатная прямая, координатная плоскость, координатные точки, абсцисса точки, ордината точки; уметь изображать точку координатной плоскости по ее координатам; уметь определять координаты точки координатной плоскости.

Теоретическая часть

Понятие координатной плоскости. Пусть на плоскости проведены две взаимно перпендикулярные координатные прямые с общим началом O и равными единичными отрезками (рис. 4).

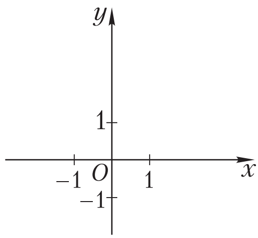

Рис. 4

Точку O пересечения координатных прямых называют **началом координат**.

Горизонтальную прямую называют осью **абсцисс** или осью Ox, вертикальную — осью **ординат** или осью Oy.

Таким образом, на плоскости задана прямоугольная система координат.

Плоскость, на которой задана система координат, называют **координатной плоскостью**.

Понятие координаты точки. Рассмотрим произвольную точку M координатной плоскости и определим ее координаты. Для этого проведем через точку M прямые, параллельные осям координат (рис. 5).

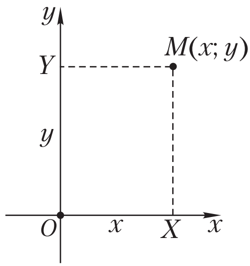

Рис. 5

Прямая, параллельная оси ординат, пересекает ось абсцисс в точке X; координату этой точки x называют абсциссой точки M, или первой координатой точки M.

Прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает ось абсцисс в точке Y; координату этой точки y называют ординатой точки M, или второй координатой точки M.

Упорядоченную пару действительных чисел (x, y) называют координатами точки M.

Заметим, что:

1) точка O — начало координат, и только она имеет обе координаты, равные нулю;

2) абсцисса точки A равна нулю тогда и только тогда, когда точка A лежит на оси Oy;

3) ордината точки B равна нулю тогда и только тогда, когда точка B лежит на оси Ox.

Введение на плоскости прямоугольной системы координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех упорядоченных пар действительных чисел.

Каждой точке M координатной плоскости соответствует упорядоченная пара действительных чисел (x, y).

Каждой паре действительных чисел (x, y) соответствует единственная точка M координатной плоскости с координатами x и y.

Понятия координатных полуплоскостей и координатных четвертей. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат xOy (см. рис. 4).

Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которой имеет положительную ординату ($y > 0$), называют верхней полуплоскостью, а отрицательную ординату ($y < 0$) — нижней полуплоскостью.

Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которой имеет положительную абсциссу ($x > 0$), называют правой полуплоскостью, а отрицательную абсциссу ($x < 0$) — левой полуплоскостью.

Множество всех точек координатной плоскости, каждая точка которой имеет положительную абсциссу ($x > 0$) и положительную ординату ($y > 0$), называют первой координатной четвертью; положительную ординату ($y > 0$) и отрицательную абсциссу ($x < 0$) — второй координатной четвертью; отрицательную абсциссу ($x < 0$) и отрицательную ординату ($y < 0$) — третьей координатной четвертью; отрицательную ординату ($y < 0$) и положительную абсциссу ($x > 0$) — четвертой координатной четвертью.

Понятие симметричности точек относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат. Две точки A_1 (x_1; y_1) и A_2 (x_2; y_2) называют симметричными относительно оси абсцисс, если их координаты таковы, что $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ (рис. 6).

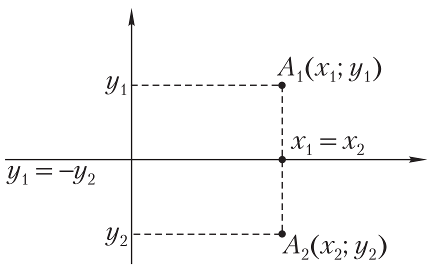

Рис. 6

Две точки B_1 $(x_1; y_1)$ и B_2 $(x_2; y_2)$ называют симметричными относительно оси ординат, если их координаты таковы, что $x_1 = -x_2$ и $y_1 = y_2$ (рис. 7).

Две точки C_1 $(x_1; y_1)$ и C_2 $(x_2; y_2)$ называют симметричными относительно начала координат, если их координаты таковы, что $x_1 = -x_2$ и $y_1 = -y_2$ (рис. 8).

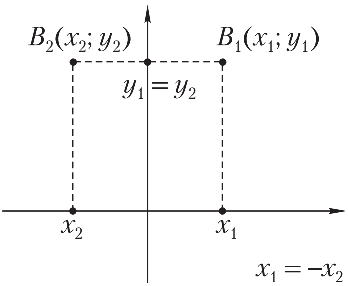

Рис. 7

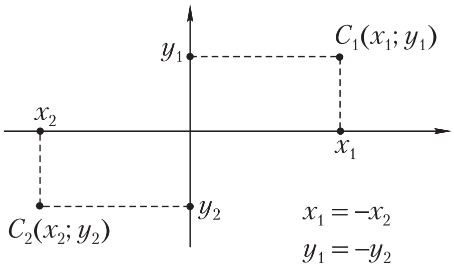

Рис. 8

Практическая часть

Задание 1. Постройте в системе координат точку $A(1; 3)$. Постройте:

а) точку B, симметричную точке A относительно начала координат;

б) точку C, симметричную точке A относительно оси абсцисс;

в) точку D, симметричную точке A относительно оси ординат.

Задание 2. Найдите расстояние между точками координатной плоскости:

а) $A(2; 0)$, $B(3; 0)$; б) $A(-4; 0)$, $B(1; 0)$;

в) $C(0; 3)$, $B(0; 2)$; г) $K(0; -5)$, $P(0; -2)$.

Задание 3. На рисунке 9 изображен график изменения температуры воздуха в течение суток. Определите:

а) какой была температура воздуха в 2 ч; в 18 ч;

б) в котором часу она была самой низкой; в котором — самой высокой;

в) в котором часу она была нулевой;

г) в какое время температура была отрицательной, а в какое — положительной;

д) в какое время температура воздуха снижалась, в какое — повышалась.

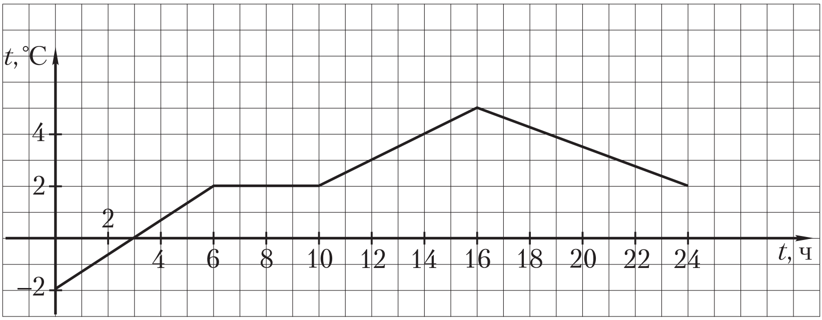

Рис. 9

Задание 4. Постройте график движения велосипедиста, который 2 ч ехал со скоростью 10 $\frac{км}{ч}$, потом 0,5 ч отдыхал, после чего с такой же скоростью ехал еще 2 ч.

Ваш помощник

***К заданию* 2.** а) 1; б) 5; в) 1; г) 3.

УЭ-2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Цель: знать и правильно использовать термины: функция, аргумент функции, значение функции, прямая пропорциональность; научиться строить график прямой пропорциональности.

Теоретическая часть

Понятие функции. Зависимость одной переменной y от другой переменной x, при которой каждому значению переменной x из определенного множества D соответствует единственное значение переменной y, называется *функциональной зависимостью* или *функцией переменной x*.

Если переменная y является функцией переменной x, то переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной.

Функцию можно задать различными способами. Часто ее задают с помощью формулы или таблицы.

Понятие прямой пропорциональности. Функцию, заданную формулой $y = kx$, где k — действительное число, отличное от нуля, называют **прямой пропорциональностью**.

Число k ($k \neq 0$) называют *коэффициентом пропорциональности*, а о переменной y говорят, что она прямо пропорциональна переменной x (слово «прямо» часто опускают).

1. Прямая пропорциональность переменных x и y означает, что их отношение постоянно, т. е. зависимость между ними при $x \neq 0$ выражается равенством $\frac{y}{x} = k$, где $k \neq 0$.

2. Пусть дана функция $y = kx$ и $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — пары соответственных значений переменных x и y, причем $x_2 \neq 0$, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

3. Если $k > 0$, x и y — переменные, принимающие только положительные значения, то при прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ $(k \neq 0)$ с увеличением значения x в несколько раз соответствующее значение y увеличится во столько же раз.

В процессе решения задач с практическим содержанием часто используется прямая пропорциональность двух величин.

Две величины пропорциональны тогда и только тогда, когда при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.

Пример 1. При равномерном движении расстояние прямо пропорционально времени движения. Очевидно, что расстояние прямо пропорционально также и скорости движения: если скорость увеличить, например, в 3 раза, то за то же самое время можно пройти путь, в 3 раза больший.

Пример 2. Стоимость товара прямо пропорциональна цене и количеству этого товара.

Пример 3. Выполненная работа прямо пропорциональна производительности и времени работы.

Пример 4. Площадь прямоугольника прямо пропорциональна длине каждой из его сторон.

В примерах 1—4 мы исходим из того, что единицы измерения величин согласованы между собой.

4. Если переменная y пропорциональна переменной x с коэффициентом k ($k \neq 0$), то переменная x пропорциональна переменной y с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Решение задач на пропорциональное деление. Чтобы разделить число на части, пропорциональные данным числам, надо разделить его на сумму этих чисел и полученное частное последовательно умножить на каждое из данных чисел.

Пример 1. Разделим число 80 на части, пропорциональные числам 4, 5, 7.

Решение. Поскольку $4 + 5 + 7 = 16$, то последовательно находим:

$$x_1 = \frac{80}{16} \cdot 4 = 20; \quad x_2 = \frac{80}{16} \cdot 5 = 25; \quad x_3 = \frac{80}{16} \cdot 7 = 35.$$

Ответ: 20; 25; 35.

График прямой пропорциональности. Графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат и точку $A(1; k)$.

Коэффициент k называют угловым коэффициентом прямой.

Заметим, что всякая прямая, проходящая через начало координат и не совпадающая ни с одной координатной осью, является графиком прямой пропорциональности.

Пример 2. Построим график функции $y = 3x$.

Решение. Данная функция — прямая пропорциональность. Так как ее графиком является прямая, проходящая через начало координат, то для построения графика данной функции достаточно найти координаты еще одной точки.

Если $x = 1$, то $y = 3$. Получаем точку $A(1;\ 3)$. Отметим на координатной плоскости точки $O(0; 0)$ и $A(1; 3)$ и проведем через них прямую (рис. 10).

Построенная прямая является графиком функции $y = 3x$.

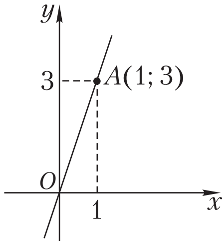

Рис. 10

Практическая часть

Задание 1. Продумайте ответы на вопросы:

а) какую функцию называют прямой пропорциональностью;

б) в каком случае две величины являются прямо пропорциональными;

в) как разделить число M на части, пропорциональные числам a, b и c;

г) что является графиком прямой пропорциональности;

д) как можно построить график функции $y = kx$?

Задание 2. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

а) $y = -2x$; б) $y = \frac{1}{3}x$;

в) $y = \frac{8}{x}$; г) $y = \frac{x}{5}$;

д) $y = x^2$; е) $y = x + 5$?

Задание 3. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная таблицей?

а)

x	2	4	8	10	12	14
y	6	12	24	30	36	42

б)

x	–3	–2	–1	2	3	4
y	–6	–4	–2	4	6	8

Задание 4. Турист прошел s км со скоростью $8\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, затратив на весь путь t ч. Почему функция s от t является прямой пропорциональностью?

Задание 5. а) Автомобиль движется со скоростью $70\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Задайте формулой зависимость пройденного пути s (в километрах) от времени движения t (в часах). Является ли эта зависимость прямой пропорциональностью?

б) Двигаясь со скоростью $6\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, турист за t ч прошел s км. Задайте формулой зависимость s от t. Является ли эта зависимость прямой пропорциональностью?

Задание 6. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = -2x$; б) $y = \frac{1}{3}x$; в) $y = -x$;

г) $y = \frac{x}{2}$; д) $y = -0{,}5x$; е) $y = -\frac{1}{3}x$.

Задание 7. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx$, если:

а) $k = 6$; б) $k = -6$;
в) $k = -100$; г) $k = 0{,}0001$?

Задание 8. Верно ли, что:

а) если $k < 0$, то график прямой пропорциональности расположен в I и III координатных четвертях;

б) если $k > 0$, то график прямой пропорциональности расположен во II и IV координатных четвертях?

Задание 9. а) Функция $y = tx$ при $x = 3$ принимает значение, равное 5. Найдите значение t.

б) Функция $y = kx$ при $x = 7$ принимает значение, равное 4. Найдите значение k.

Задание 10. Задайте формулой прямую пропорциональность, если ее график проходит через точку:

а) $A(-2; -16)$;
б) $B(-3; -9)$.

Ваш помощник

***К заданию* 3.** а) Так как $\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24} = \frac{10}{30} = \frac{12}{36} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$, то данная функция — прямая пропорциональность.

б) Рассуждения аналогичны. Данная функция — прямая пропорциональность.

***К заданию* 5.** а) $s(t) = 70t$, эта зависимость является прямой пропорциональностью.

б) $s(t) = 6t$, эта зависимость является прямой пропорциональностью.

***К заданию* 8.** а) Неверно; б) неверно.

***К заданию* 9.** а) $5 = t \cdot 3$, откуда $t = \frac{5}{3}$. б) $4 = t \cdot 7$, откуда $t = \frac{4}{7}$.

***К заданию* 10.** а) Подставляя в равенство $y = kx$ координаты точки $A(-2; -16)$, получим $-16 = -2k$, откуда $k = 8$, т. е. $y = 8x$.

б) Подставляя в равенство $y = kx$ координаты точки $B(-3; -9)$, получим $-9 = -3k$, откуда $k = 3$, т. е. $y = 3x$.

УЭ-3. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

Цель: знать определение линейной функции; уметь строить ее график.

Теоретическая часть

Понятие линейной функции. Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — любые действительные числа, называют линейной.

Примерами линейной функции являются:

$y = -5x + 3$ $(k = -5,\ b = 3)$;

$y = 3x$ $(k = 3,\ b = 0)$;

$y = 2,7$ $(k = 0,\ b = 2,7)$;

$y = 0$ $(k = 0,\ b = 0)$;

$y = (2x - 1) - (3x + 2)$.

График линейной функции. Графиком линейной функции является прямая. Для построения графика функции $y = kx + b$ достаточно определить координаты двух точек графика и через них провести прямую. Удобно брать точки, в которых либо абсцисса, либо ордината равна нулю.

Итак, точки пересечения данной прямой с осями координат: $A(0;\ b)$, $B\left(-\dfrac{b}{k};\ 0\right)$ (рис. 11).

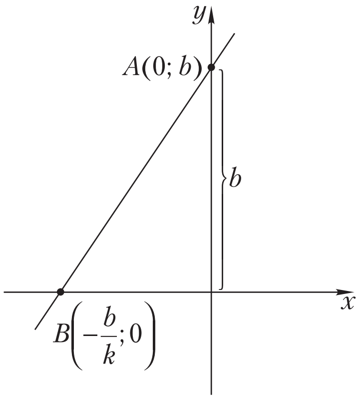

Рис. 11

Пример. Построим график функции $y = 2x - 3$.

Решение. Это линейная функция. Ее графиком является прямая. Для построения прямой достаточно знать координаты двух точек. Удобно брать точки пересечения этой прямой с осями координат. Составим таблицу.

x	0	1,5
y	–3	0

На координатной плоскости строим точки $A(0;\ -3)$ и $B(1{,}5;\ 0)$ и через них проводим прямую.

Практическая часть

Задание 1. Укажите линейную функцию среди данных функций: $y = \dfrac{4}{x}$; $y = -3x + 1$; $y = 2x^2 + 1$; $y = x^3$.

Задание 2. Чему равно значение функции:

а) $y = -3x + 7$ в точке $x_0 = -\dfrac{1}{3}$;

б) $y = -5x - 1$ в точке $x_0 = \dfrac{1}{5}$?

Задание 3. Найдите значение аргумента, при котором значение функции:

а) $y = -0{,}5x + 2$ равно 4;
б) $y = -1{,}5x - 3{,}5$ равно 1.

Задание 4. Функция задана формулой $y = 9 - \frac{2}{7}t$. Найдите значение аргумента t, при котором значение функции равно:

а) 6; б) 4.

Задание 5. При каком значении аргумента равны значения функций:

а) $y = -3x + 5$ и $y = 5x - 11$;
б) $y = 3x - 7$ и $y = -2x + 8$?

Задание 6. а) Задайте формулой линейную функцию $y = kx + 2$, график которой проходит через точку $A(4; 6)$.

б) Задайте формулой линейную функцию $y = 3x + b$, график которой проходит через точку $B(4; 6)$.

Задание 7. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = -3x + 18$; б) $y = -5x + 20$.

Задание 8. Найдя точки пересечения с осями координат, постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{2}x - 1$; б) $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Задание 9. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = 1{,}5x$; $y = 1{,}5x - 2$; $y = 1{,}5x + 2$;
б) $y = 2x$; $y = 2x - 1$; $y = 2x + 1$.

Подметьте закономерность в расположении графиков данных функций.

Задание 10. Постройте графики функций и найдите координаты точки их пересечения:

а) $y = 4x - 1$ и $y = -x + 4$;

б) $y = -3x + 3$ и $y = x + 3$.

Задание 11. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = 3(x - 1) - 0,5(2x - 4)$;

б) $y = -5(x - 1) - 0,4(5 - 10x)$.

Ваш помощник

***К заданию* 3.** а) -4; б) -3.

***К заданию* 4.** а) 10,5.

***К заданию* 5.** а) Решив уравнение $-3x + 5 = 5x - 11$, найдем $x = 2$.

б) Решив уравнение $3x - 7 = -2x + 8$, найдем $x = 3$.

***К заданию* 6.** а) Решив уравнение $6 = 4k + 2$, найдем $k = 1$. Значит, искомую функцию можно задать формулой $y = x + 2$.

б) Решив уравнение $8 = 6 + b$, найдем $b = 2$. Значит, искомую функцию можно задать формулой $y = 3x + 2$.

***К заданию* 7.** а) $A(0; 18)$, $B(6; 0)$; б) $A(0; 20)$, $B(4; 0)$.

***К заданию* 10.** а) $A(1; 3)$; б) $B(0; 3)$.

***К заданию* 11.** а) $y = 2x - 1$; б) $y = -x + 3$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Как возникло и развивалось понятие функции

Понятие «функция» прошло долгий путь развития. Идея этого понятия родилась вместе с понятием переменной величины и была тесно связана с геометрическими и механическими представлениями. Так, французские математики Рене Декарт (1596—1650) и Пьер Ферма (1601—1665) рассматривали функцию как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы. Понятием функции пользовался английский ученый Исаак Ньютон (1643—1727) и понимал под ней изменяющуюся в зависимости от времени координату движущейся точки. Для понятия функции Ньютон ввел свой термин «флюэнта». Впервые термин «функция» употребил в 1694 г. немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646—1716). У него функция связывалась лишь с геометрическим образом (графиком функции).

В первой половине XVIII в. дальнейшее развитие науки привело к пониманию функции как формулы, связывающей одну переменную величину с другой. Так, швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667—1748) и член Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707—1783) считали, что каждая функция должна выражаться некоторой формулой, например, $y = ax + b$. Эйлер писал: «Функция переменной величины есть аналитическое выражение, составленное каким-нибудь способом из этой переменной величины и из чисел либо из постоянных величин» (1748 г.). Такая точка зрения на функцию сохранилась на протяжении всего XVIII в.

В начале XIX в. французский математик Жан Фурье (1768—1830) со всей определенностью стал говорить о том, что в определении функции несущественно, каким образом (графиком, формулой, словом) каждому x поставлено в соответствие определенное значение y, важно только, чтобы это соответствие было установлено. Эта точка зрения получила развитие в трудах русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856), немецкого математика Петера Дирихле (1805—1859) и других ученых. Лобачевский определял понятие функции следующим образом: «Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное определенное значение величины y».

Интересно знать

Первоначально идея координат зародилась в древности в связи с потребностями астрономии, географии, живописи. Так, на стене одной из древнеегипетских погребальных камер была обнаружена квадратная сетка (палетка), которой пользовались для увеличения изображений. Древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в.) применил географические координаты (долготу и широту) для определения местонахождения мореплавателя. Идеей координат пользовались в Средние века для определения положения светил на небе, для определения места на поверхности Земли. Прямоугольной сеткой пользовались художники эпохи Возрождения.

Строго говоря, Декарт не пользовался декартовыми координатами. Он выбирал горизонтальную прямую за ось y, отмечал на ней начало отсчета, а расстояние точек от оси обозначал через x. Отрицательными координатами Декарт не пользовался, и у него не было второй оси координат. Она была впервые введена в 1730 г. (через 80 лет после смерти Декарта) французским математиком К. Рабюэлем (1669—1728). Термин «координата» ввел Лейбниц в 1692 г. Ему принадлежит идея использования в современном значении терминов «абсцисса» (1675 г.) и «ордината» (1684 г.).

Словосочетание «декартова система координат» неудачно, лучше — «прямоугольная система координат».

Модуль 4 ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

УЭ-1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ»

Теоретическая часть

Понятие степени с натуральным показателем. **Степенью действительного числа *a*** с натуральным показателем n ($n > 1$) называют произведение n множителей, каждый из которых равен a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}},$$

n — натуральное число, большее 1.

Число a (повторяющийся множитель) называют **основанием степени**.

Число n, показывающее, сколько раз повторяется множителем число a, называют **показателем степени**.

Умножение числа a само на себя n раз называют возведением в натуральную степень или возведением числа a в n-ю степень.

Степенью любого действительного числа a с показателем единица называют само число a:

$$a^1 = a.$$

Степень числа a, не равного нулю, с нулевым показателем равна единице:

$$a^0 = 1.$$

Степень 0^0 не определена, т. е. выражение 0^0 не имеет смысла.

Например,

$$8^3 = 8\cdot 8\cdot 8 = 512;$$

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81;$$

$$\left(1\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5} = \frac{216}{125} = 1\frac{91}{125};$$

$$(-1{,}27)^0 = 1.$$

Свойства степени с натуральным показателем.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, где a — произвольное действительное число, а m и n — любые натуральные числа.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.

2. $(a^m)^n = a^{mn}$, где a — произвольное действительное число, а m и n — любые натуральные числа.

При возведении степени в степень основание оставляют тем же, а показатели перемножают.

3. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, где a — произвольное действительное число, отличное от нуля, а m и n — любые такие натуральные числа, что $m > n$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

4. $(ab)^n = a^n b^n$, где a и b — произвольные действительные числа, а n — любое натуральное число.

При возведении произведения в степень в данную степень возводят каждый множитель произведения и результаты перемножают.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, где a и b — произвольные действительные числа, причем $b \neq 0$, а n — любое натуральное число.

При возведении дроби в степень возводят в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записывают в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

Практическая часть

С некоторыми видами из следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Определите, какие задания вам необходимо выполнить. В случае трудностей обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией к учителю или за помощью к товарищу.

Задание 1. Ребро куба равно c м. Запишите в виде алгебраического выражения:

а) площадь поверхности куба;
б) объем куба.

Задание 2. Укажите показатели степени в записях степеней:

а) $(-b)^7, (2x)^5, (5-a)^{10}$;
б) $(-2m)^3, a^{75}, (x+y)^{23}$.

Задание 3. Укажите основания степени в записях степеней:

а) $(-b)^7, (2x)^5, (5-a)^{10}$;
б) $(-2m)^3, a^{75}, (x+y)^{23}$.

Задание 4. Выпишите верные равенства:

а) $a^3a^5 = a^8, (a^4)^2 = a^6$;
б) $b^7b^7 = b^{14}, (b^3)^2 = b^6$.

Задание 5. Упростите выражение:

а) $a^7 \cdot a^8 : a^{14}$; б) $b^8 \cdot b^9 : b^{15}$.

Задание 6. Упростите выражение:

а) $a^9 : a^8 \cdot a^4$; б) $b^{10} : b^6 \cdot b^{13}$.

Задание 7. Представьте в виде степени выражение:

а) $a^7(a^3)^4$; б) $b^8(b^5)^3$.

Задание 8. Представьте в виде степени выражение:

а) $n^2(n^3)^6$; б) $m^3(m^2)^7$.

Задание 9. Упростите выражение:

а) $6x^2y^3 0{,}5xy^2$; б) $-0{,}5m^3n^2 8mn^5$.

Задание 10. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5^{k+4} \cdot 5^{k+1}}{5^{2k}}$; б) $\dfrac{7^{k+2} \cdot 7^{k+4}}{7^{k+1} \cdot 7^{k+2}}$,

где k — натуральное число.

Задание 11. Докажите, что значение выражения не зависит от значения m:

а) $\dfrac{9^{2m+1} \cdot 9^{m+3}}{9^{3m+2}}$; б) $\dfrac{(0{,}8)^{3m+1} \cdot (0{,}8)^{4m-1}}{(0{,}8)^{2m+1} \cdot (0{,}8)^{5m+1}}$,

где m — натуральное число.

Задание 12. Докажите, что при любом целом n имеет место равенство:

а) $3^{4n} + 9^{2n} + 81^n = 3^{4n+1}$;

б) $9^{3n} + 9^n \cdot 81^n + 27^{2n} = 3^{6n+1}$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.** а) $6c^3$; б) c^3.

***К заданию* 2.** а) 7; 5; 10; б) 3; 75; 23.

***К заданию* 3.** а) $-b$; $2x$; $5-a$; б) $-2m$; a; $x+y$.
***К заданию* 4.** а) $a^3a^5=a^8$; б) $(b^3)^2=b^6$.
***К заданию* 5.** а) a; б) b^2.
***К заданию* 6.** а) a^5; б) b^{17}.
***К заданию* 7.** а) a^{19}; б) b^{23}.
***К заданию* 8.** а) n^{20}; б) m^{17}.
***К заданию* 9.** а) $3x^3y^5$; б) $-4m^4n^7$.

УЭ-2. МНОГОЧЛЕН И ЕГО СТАНДАРТНЫЙ ВИД

Цель: осознать целостность системы знаний об одночлене и многочлене; приобрести умения и навыки в выполнении тождественных преобразований одночленов и многочленов, удовлетворяющие таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность, обобщенность и прочность.

Теоретическая часть

Понятие одночлена. Произведение чисел, переменных и их степеней называют **одночленом**.

Например, $13, -\frac{7}{9}x^5, 2xy^2, 0{,}3x^3\left(-5y^2\right)$ — одночлены.

Выражения $9-x^2y, a^3+b^3, \frac{4m^2}{5n^3}$ не являются одночленами, так как представляют собой сумму или частное переменных чисел.

Стандартным видом одночлена называют одночлен, содержащий только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Коэффициентом одночлена называют числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Например, $-2\frac{7}{9}x^2y^3$ — одночлен стандартного вида, где $-2\frac{7}{9}$ — коэффициент, а x^2y^3 — произведение степеней разных переменных.

Степенью одночлена стандартного вида называют сумму показателей всех степеней переменных одночлена.

Например, степень одночлена $27x^2y^3z^5$ равна $2 + 3 + 5 = 10$, а степень одночлена $-3{,}7a^3$ равна 3.

Если одночлен является числом, то его степень считают равной нулю.

Например, степень одночлена 15 равна нулю.

Подобными одночленами называют одночлены, которые отличаются только коэффициентами или равны между собой.

Например, одночлены $-7x^2y^3$ и $23{,}5x^2y^3$, $1 \cdot abc$ и abc — подобные одночлены.

Чтобы перемножить одночлены, надо перемножить коэффициенты, а показатели степеней одинаковых переменных сложить.

Пример 1. Упростим выражение $-5{,}6x^2y \cdot \frac{1}{2}x^5y^3$.

Решение. Обозначив данное выражение буквой A, получим:

$$A = -5{,}6 \cdot \frac{1}{2}x^2 \cdot x^5 \cdot y \cdot y^3 = -2{,}8x^7y^4.$$

Чтобы возвести в степень одночлен, надо возвести в эту степень каждый из его множителей.

Пример 2. Упростим выражение $\left(-0{,}5n^2m^3\right)^3$.

Решение. Имеем:

$$A = (-0{,}5)^3 \cdot \left(n^2\right)^3 \cdot \left(m^3\right)^3 = -0{,}125n^6m^9.$$

Понятие многочлена. Сумму нескольких одночленов называют **многочленом**.

Например, $2x^2+5$, $3ab^3-0{,}9abc$ — многочлены.

Одночлен также считают многочленом.

Например, $-1\dfrac{1}{3}x^2y^3$ — многочлен.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют его **членами**.

Например, членами многочлена xy^2-8y^3+5 являются одночлены xy^2, $8y^3$ и 5.

Многочленом стандартного вида называют многочлен, все члены которого записаны в стандартном виде и приведены подобные слагаемые.

Пример 3. Приведем многочлен

$$3x^2y+y^2-2x^2y+xy^2-8xy^2$$

к стандартному виду.

Решение. Имеем:

$$A = (3x^2y-2x^2y)+(xy^2-8xy^2)+y^2 = x^2y-7xy^2+y^2.$$

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.

Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

Пример 4. Определим степень многочлена

$$3x^3-7x^2y^3-2x^3+10.$$

Решение. Имеем: $A = x^3 - 7x^2y^3 + 10$. Степень полученного многочлена стандартного вида равна пяти. Значит, и степень заданного многочлена равна пяти.

Многочлены стандартного вида в зависимости от числа их членов (отличных от нуля) делятся на одночлены, двучлены, трехчлены и т. д.

Зная значения переменных, входящих в многочлен, можно вычислить значение многочлена.

Пример 5. Вычислим значение многочлена

$$-5x^2y - x^3 + 4y$$

при $x = -0{,}2$, $y = -2$.

Решение. Имеем:

$$A = -5x^2y - x^3 + 4y = -5 \cdot (-0{,}2)^2 \cdot (-2) - (-0{,}2)^3 + 4 \cdot (-2) =$$
$$= 0{,}4 + 0{,}008 - 8 = -7{,}592.$$

Действия над многочленами. При сложении и вычитании многочленов используются правила раскрытия скобок.

Если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки.

Например,

$$\left(x^2 + 2x\right) + \left(5x^2 - 7x + 3\right) =$$
$$= x^2 + 2x + 5x^2 - 7x + 3 = 6x^2 - 5x + 3.$$

Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки, на противоположный.

Например,

$$\left(x^2 + 2x\right) - \left(5x^2 - 7x + 3\right) = x^2 + 2x - 5x^2 + 7x - 3 =$$
$$= -4x^2 + 9x - 3.$$

Если надо решить обратную задачу, т. е. представить многочлен в виде суммы или разности многочленов, то поступают так:

- если перед скобками ставят знак «плюс», то члены, заключаемые в скобки, записывают с теми же знаками;
- если перед скобками ставят знак «минус», то члены, заключаемые в скобки, записывают с противоположными знаками.

Например, представим многочлен $7x-9y+10$ в виде суммы двух слагаемых, одно из которых равно $7x$:

$$7x-9y+10=7x+(-9y+10).$$

Представим этот же многочлен в виде разности, в которой уменьшаемое равно $7x$:

$$7x-9y+10=7x-(9y-10).$$

При *умножении одночлена на многочлен* пользуются следующим правилом: чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Например, $x^3(2xy-y^2+1)=2x^4y-x^3y^2+x^3$.

При *умножении многочлена на многочлен* пользуются следующим правилом: чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Например, умножим многочлен $(2x-y)$ на многочлен $3x^2-5xy+y^2$:

$$(2x-y)\cdot(3x^2-5xy+y^2)=2x\cdot 3x^2+2x(-5xy)+$$
$$+2x\cdot y^2+(-y)3x^2+(-y)\cdot(-5xy)+(-y)y^2=$$
$$=6x^3-10x^2y+2xy^2-3x^2y+5xy^2-y^3=$$
$$=6x^3-13x^2y+7xy^2-y^3.$$

Формулы сокращенного умножения. В некоторых случаях умножение многочлена на многочлен выполняют короче: по формулам сокращенного умножения.

1. *Квадрат суммы*:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

2. *Квадрат разности*:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

3. *Куб суммы*:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго плюс куб второго выражения.

4. *Куб разности*:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго минус куб второго выражения.

5. *Разность квадратов*:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

6. *Разность и сумма кубов*:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Заметим, что выражение $a^2 + ab + b^2$ называют неполным квадратом суммы a и b, а выражение $a^2 - ab + b^2$ называют неполным квадратом разности a и b.

При решении некоторых задач используются следствия из формул сокращенного умножения:

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab;$

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab;$

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b);$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$

Практическая часть

Задание 1. Какое из данных выражений является одночленом:

а) $\frac{m}{n}$, $m + 3n$, m^2n^3, $m^2 - n^2$;

б) $4x + y$, $\frac{2x}{y}$, $4m^2 - y^2$, $3y^3x^2$?

Задание 2. Какому одночлену стандартного вида равно выражение:

а) $6x^2y^3 \cdot 0,5xy^2$;
б) $-0,5m^3n^2 \cdot 8mn^5$?

Задание 3. Выпишите выражения, являющиеся многочленами:

а) $2a+bc$, $13a$, $2a-b$, $\dfrac{2x}{y}$, $10a^3x$;

б) $3m-4a$, $18b$, $3a-2b$, $\dfrac{m}{2n}$, $5a^2m^2$.

Задание 4. Запишите многочлен в порядке возрастания степеней x:

а) $3a-5a^3x^4+7ax-8a^2x^3+x^2$;
б) $-3x^2-5ax^3+7a^2x^4+8ax+a^3$.

Задание 5. Какому многочлену равно выражение:

а) $(3a-2b)^2$; б) $(2m-5n)^2$?

Задание 6. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{y}{3}+0,5x\right)\left(0,5x-\dfrac{y}{3}\right)$;

б) $\left(\dfrac{a}{2}+0,6b\right)\left(0,6b-\dfrac{a}{2}\right)$.

Задание 7. Упростите выражение:

а) $3(a-2b)-0,5(2a+3b)-4,5a$;
б) $4(a-3b)-1,5(4a+5b)+6,5b$.

Задание 8. а) Упростите выражение $-3x(2x+y)-4y(3x-2y)$ и найдите значение полученного выражения при $x=-1$, $y=2$.

б) Упростите выражение $-2a(3a-b)-3b(4a+3b)$ и найдите значение полученного выражения при $a=1$, $b=-2$.

Задание 9. Приведите подобные члены в выражении:

а) $a^2b-5a^2-3a^2b+6a^2+2a^2b$;

б) $3y^2x-y^2-5y^2x+4y^2+2y^2x$.

Задание 10. Какому многочлену равно выражение:

а) $(5m-2)^2-(5m-1)(5m+1)$;

б) $(7n-3)^2-(7n+1)(7n-1)$?

Задание 11. Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $\left(n^3-n^4\right)^2$; б) $\left(a^3+a^4\right)^2$.

Задание 12. Вместо многоточия запишите такой одночлен, чтобы было верным равенство:

а) $\left(-7a^2\right)+\ldots=10a^2$; б) $\left(-11x^4\right)-\ldots=8x^4$.

Задание 13. Вместо многоточия запишите такой одночлен, чтобы было верным равенство:

а) $12a^3x^2-\ldots=-8a^3x^2$;

б) $23a^4x^2-\ldots=-40a^4x^2$.

Задание 14. Вместо многоточия запишите такие одночлены, чтобы было верным равенство:

а) $(\ldots-2b)^2=9a^2-\ldots+\ldots$;

б) $(2a+\ldots)^2=\ldots+20ab+\ldots$.

Задание 15. Упростите выражение:

а) $(a+b)^2+2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$;

б) $(m-n)-2(m+n)(m-n)+(m+n)^2$.

Задание 16. Найдите $x^2 + y^2$, если:

а) $x - y = 5$, $xy = 20$;
б) $x + y = 8$, $xy = 20$.

Задание 17. Представьте выражение в виде разности квадратов двух многочленов:

а) $a^4 + 4$; б) $b^4 + 64$.

Задание 18. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^4 - 12x^2 + 16$; б) $y^4 - 10y^2 + 4$.

Задание 19. Докажите, что при всех действительных значениях переменных x и y выражения принимают положительные значения:

а) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 78$;
б) $x^2 + y^2 - 16x + 14y + 137$.

Задание 20. а) При каком значении a квадратный трехчлен $2a^2 - 13a + 7$ принимает наименьшее значение?

б) При каком значении b квадратный трехчлен $54 + 7b - 3b^2$ принимает наибольшее значение?

Задание 21. а) Докажите, что при любых x и y значение выражения $(x + y)^2 + 2(x + y + 1)$ является положительным числом.

б) Докажите, что при любых x и y значение выражения $2(x + y - 1) - (x + y)^2$ является отрицательным числом.

Ваш помощник

***К заданию* 1.** а) m^2n^3; б) $3y^3x^2$.
***К заданию* 2.** а) $3x^3y^5$; б) $-4m^4n^7$.
***К заданию* 3.** а) $2a + bc$, $2a - b$; б) $3m - 4a$, $3a - 2b$.

К заданию 4. а) $3a+7ax+x^2-8a^2x^3-5a^3x^4$;

б) $a^3+8ax-3x^2-5ax^3+7a^2x^4$.

К заданию 5. а) $9a^2-12ab+4b^2$; б) $4m^2-20mn+25n^2$.

К заданию 6. а) $0{,}25x^2-\frac{y^2}{9}$; б) $0{,}36b^2-\frac{a^2}{4}$.

К заданию 7.

а) $A=3a-6b-a-1{,}5b-4{,}5a=-2{,}5a-7{,}5b$;

б) $B=4a-12b-6a-7{,}5b+6{,}5b=-2a-13b$.

К заданию 8.

а) $A=-6x^2-3xy-12xy+8y^2=-6x^2-15xy+8y^2$.

При $x=-1$, $y=2$ имеем: $A=-6+30+32=56$.

б) $B=-6a^2+2ab-12ab-9b^2=-6a^2-10ab-9b^2$.

При $a=1$, $b=-2$ имеем: $B=-6+20-36=-22$.

К заданию 9.

а) $A=\left(a^2b-3a^2b+2a^2b\right)+\left(-5a^2+6a^2\right)=a^2$.

б) $B=\left(3y^2x-5y^2x+2y^2x\right)+\left(-y^2+4y^2\right)=3y^2$.

К заданию 10. а) $-20m+5$; б) $-42n+10$.

К заданию 11. а) $n^6-2n^7+n^8$; б) $a^6+2a^7+a^8$.

К заданию 12. а) Обозначив искомый одночлен буквой A, имеем $(-7a^2)+A=10a^2$, откуда $A=10a^2+7a^2=17a^2$.

б) Обозначив искомый одночлен буквой B, имеем $(-11x^4)-B=8x^4$, откуда $B=(-11x^4)-8x^4=-19x^4$.

К заданию 13. а) Обозначив искомый одночлен буквой A, имеем $12a^3x^2-A=-8a^3x^2$, откуда $A=12a^3x^2-(-8a^3x^2)=$ $=20a^3x^2$.

б) Обозначив искомый одночлен буквой B, имеем $23a^4x^2-B=-40a^4x^2$, откуда $B=23a^4x^2-(-40a^4x^2)=63a^4x^2$.

К заданию 14. а) $(3a-2b)^2=9a^2-12ab+4b^2$;

б) $(2a+5b)^2=4a^2+20ab+25b^2$.

К заданию 15. а) $A=(a+b+a-b)^2=4a^2$;

б) $B=(m-n-m-n)=4n^2$.

***К заданию* 16.** а) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=5^2+2\cdot 20=65$;

б) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot 20=24$.

***К заданию* 17.** а) $A=(a^4+4a^2+4)-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2$;

б) $B=(b^4+16b^2+64)-16b^2=(b^2+8)^2-(4b)^2$.

***К заданию* 18.** а) $A=(x^4-12x^2+36)-20=(x^2-5)^2-20$.

Поскольку первое слагаемое всегда больше либо равно нулю при $x^2=6$, а второе слагаемое — число, то наименьшее значение данного выражения равно -20, когда первое слагаемое равно нулю.

б) $B=(y^4-10y^2+25)-21=(y^2-5)^2-21$.

Наименьшее значение данного выражении равно -21. (Объясните почему!)

Ответ: а) -20; б) -21.

***К заданию* 19.** а) $A=(x^2+2\cdot 4x+16)+(y^2-2\cdot 5y+25)+37=$ $=(x+4)^2+(y-5)^2+37>0$.

б) $B=(x^2-16x+64)+(y^2+14y+49)+24=$ $=(x-8)^2+(y+7)^2+24>0$.

***К заданию* 20.** а) $a=3{,}25$; б) $b=\dfrac{7}{6}$.

***К заданию* 21.**

а) $A=(x+y)^2+2(x+y)+1+1=(x+y+1)^2+1>0$;

б) $B=-((x+y)^2-2(x+y)+1+1)=$ $=-((x+y-1)^2+1)<0$.

УЭ-3. МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Цель: добиться того, чтобы умения и навыки в разложении многочлена на множители удовлетворяли таким требованиям, как правильность, осознанность, автоматизм, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Понятие разложения многочлена на множители. Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов ненулевой степени называют разложением многочлена на множители.

При разложении многочлена на множители используются следующие методы.

1. Вынесение общего множителя за скобки.

Например, $2ax + 9ay = 2a(x + 4{,}5y)$.

2. Способ группировки. Этот способ применяется чаще всего в сочетании со способом вынесения общего множителя за скобки.

Например,

$$a^3 - 3a^2 - 3a + 9 =$$

$$= \left(a^3 - 3a^2\right) - (3a - 9) = a^2(a-3) - 3(a-3) =$$

$$= \left(a^2 - 3\right)(a-3) = \left(a - \sqrt{3}\right)\left(a + \sqrt{3}\right)(a-3).$$

3. Применение формул сокращенного умножения.

$a^2 - b^2$	$(a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3$	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3$	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^2$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a+b)^3$
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a-b)^3$

4. Метод выделения полного квадрата. Иногда многочлен можно разложить на множители, если сначала воспользоваться методом выделения полного квадрата, а затем — формулой разности квадратов.

Например,

$$x^2+2x-24=(x^2+2x+1)-25=(x+1)^2-25=$$
$$=(x+1)^2-5^2=(x-4)(x+6).$$

5. Разбиение целого на части. Это один из эвристических приемов, который часто используется. Его сущность состоит в том, что некоторый данный в условии задачи объект (одночлен, многочлен, дробь и т. д.) разбивается на составляющие (части), что упрощает решение задачи.

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$x^3-7x+6.$$

Решение. 1-й способ. Представив одночлен $-7x$ в виде суммы $-4x-3x$, получим:

$$x^3-7x+6=x^3-4x-3x+6=x(x^2-4)-3(x-2)=$$
$$=(x-2)(x^2+2x-3)=(x-2)(x^2-1+2x-2)=$$
$$=(x-2)(x-1)(x+3).$$

2-й способ. Представив одночлен $-7x$ в виде суммы $-x-6x$, получим:

$$x^3-x-6x+6=x(x^2-1)-6(x-1)=(x-1)(x^2+x-6)=$$
$$=(x-1)(x^2+3x-2x-6)=(x-1)(x(x+3)+2(x+3))=$$
$$=(x-1)(x+3)(x-2).$$

3-й способ. Представив число 6 в виде суммы -1 + 7, получим:

$$x^3-7x+6=x^3-1-7x+7=(x-1)(x^2+x+1)+7(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2+x-6)=$$
$$=(x-1)(x^2-4+x-2)=(x-1)(x-2)(x+3).$$

Итак, $x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$.

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$a^5 + a + 1.$$

Решение. Выполним преобразования:

$$a^5 + a + 1 = \left(a^5 - a^2\right) + \left(a^2 + a + 1\right) =$$
$$= a^2\left(a^3 - 1\right) + \left(a^2 + a + 1\right) =$$
$$= a^2(a - 1)\left(a^2 + a + 1\right) + \left(a^2 + a + 1\right) =$$
$$= \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^3 - a^2 + 1\right).$$

Пример 3. Разложим на множители многочлен

$$x^8 + x^4 + 1.$$

Решение. Выполним преобразования:

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - x^4 =$$
$$= (x^4 + 1 - x^2)(x^4 + 1 + x^2) = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) =$$
$$= (x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) =$$
$$= \left(\left(x^2 + 1\right)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2\right)\left(\left(x^2 + 1\right)^2 - x^2\right) =$$
$$= \left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

6. Способ введения новой переменной.

Пример 4. Разложим на множители многочлен

$$x^4 - 7x^2 + 12.$$

Решение. Пусть $x^2 = t$, тогда имеем:

$$t^2 - 7t + 12 = (t - 3)(t - 4) = (x^2 - 3)(x^2 - 4) =$$
$$= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 2)(x + 2).$$

Практическая часть

Задание 1. Разложите на множители многочлен:

а) $17a - a^2$; б) $b^2 - 19b$.

Задание 2. Представьте в виде квадрата двучлена выражение:

а) $a^2 - 8a + 16$; б) $b^2 + 10b + 25$.

Задание 3. Представьте в виде квадрата двучлена выражение:

а) $16m^2 - 8m + 1$; б) $9m^2 + 6m + 1$.

Задание 4. Разложите на множители многочлен:

а) $16p^2 + 25p + 9$; б) $25q^2 - 30q + 9$.

Задание 5. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2y - xy^2$; б) $xy^2 + x^2y$.

Задание 6. Разложите на множители выражение:

а) $m(a - b) - 3(a - b)$; б) $4(p - q) + a(p - q)$.

Задание 7. Разложите на множители выражение:

а) $2a(x + y) + b(x + y)$; б) $y(a - b) - x(a - b)$.

Задание 8. Разложите на множители выражение:

а) $a(b + c) + b + c$; б) $b(a - c) + a - c$.

Задание 9. Разложите на множители выражение:

а) $a^2 - 7$; б) $5 - b^2$.

Задание 10. Разложите на множители выражение:

а) $nx - ny - p(x - y)$; б) $kx + ky - n(x + y)$.

Задание 11. Разложите на множители многочлен:

а) $3ax - ay - 3bx + by$; б) $7mx - ny - 7nx + ny$.

Задание 12. Разложите на множители выражение:

а) $(a - b)x^2 + 2(a - b)x + a - b$;

б) $(m + n)a^2 - 2(m + n)a + m + n$.

Задание 13. Разложите на множители выражение:

а) $4x(m-n)+(m-n)-4x^2(n-m)$;

б) $4m(a-b)+4(a-b)-m^2(b-a)$.

Задание 14. Разложите на множители многочлен:

а) n^5-10n^3+9n; б) n^5-5n^3+4n.

Задание 15. Разложите на множители многочлен:

а) x^4-7x^2+6; б) x^4-11x^2+18.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $a(17-a)$; б) $b(b-19)$.

К заданию 2. а) $(a-4)^2$; б) $(b+5)^2$.

К заданию 3. а) $(4m-1)^2$; б) $(3m+1)^2$.

К заданию 4. а) $(4p+3)^2$; б) $(5q-3)^2$.

К заданию 5. а) $xy(x-y)$; б) $xy(x+y)$.

К заданию 6. а) $(a-b)(m-3)$; б) $(p-q)(4+a)$.

К заданию 7. а) $(x+y)(2a+b)$; б) $(a-b)(y-x)$.

К заданию 8. а) $(b+c)(a+1)$; б) $(a-c)(b+1)$.

К заданию 9. а) $\left(a-\sqrt{7}\right)\left(a+\sqrt{7}\right)$; б) $\left(\sqrt{5}-b\right)\left(\sqrt{5}+b\right)$.

К заданию 10. а) $A=n(x-y)-p(x-y)=(x-y)(n-p)$;

б) $B=k(x+y)-n(x+y)=(x+y)(k-n)$.

К заданию 11. а) $(3x-y)(a-b)$; б) $(7x-y)(m-n)$.

К заданию 12. а) $A=(a-b)(x^2+2x+1)=(a-b)(x+1)^2$;

б) $B=(m+n)(a^2-2a+1)=(m+n)(a-1)^2$.

К заданию 13. а) $A=(m-n)(4x+1+4x^2)=$
$=(m-n)(2x+1)^2$;

б) $B=(a-b)(4m+4+m^2)=(a-b)(m+2)^2$.

К заданию 14.

а) $A=n(n^4-10n^2+9)=n(n^2-1)(n^2-9)=$
$=n(n+1)(n-1)(n+3)(n-3)$;

б) $B = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) =$
$= n(n+1)(n-1)(n+2)(n-2).$

***К заданию* 15.**

а) $A = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 6\right) = (x+1)(x-1)\left(x + \sqrt{6}\right) \times$
$\times \left(x - \sqrt{6}\right);$

б) $B = \left(x^2 - 2\right)\left(x^2 - 9\right) = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)(x+3) \times$
$\times (x-3).$

УЭ-4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ»

Цель: актуализировать знания по преобразованиям рациональных дробей; добиться того, чтобы умения и навыки в выполнении преобразований рациональных дробей удовлетворяли таким требованиям, как правильность, осознанность, автоматизм, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Понятие алгебраической дроби. Выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены и $B \neq 0$, называют **алгебраической дробью**.

Например, $\frac{8}{y}, \frac{x-3}{7}, \frac{x^2 - xy + y^2}{x+y}, \frac{12}{a^2 - b^2}, \frac{5}{7}$ — алгебраические дроби.

В алгебраической дроби допустимыми являются те значения, при которых не обращается в нуль знаменатель дроби.

Пример 1. Найдем область определения дроби

$$\frac{7x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Решение. Сначала найдем значения x, при которых знаменатель дроби равен нулю. Решив уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$, найдем $x = 1$ или $x = 2$. Значит, область определения данной дроби состоит из всех действительных чисел, кроме чисел 1 и 2.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 2. Найдем натуральные значения t, при которых дробь $\frac{3t^2 + 7t + 12}{t}$ принимает натуральные значения.

Решение. Имеем: $A = \frac{3t^2}{t} + \frac{7t}{t} + \frac{12}{t} = 3t + 7 + \frac{12}{t}$.

Очевидно, что $3t + 7$ принимает значение натурального числа при любом натуральном t, а $\frac{12}{t}$ — натуральное при t, равном 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Свойства дробей. Рассмотрим несколько утверждений о равенстве дробей.

1. Если числитель и знаменатель дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}.$$

Это свойство называют **основным свойством дроби**. Оно позволяет привести любую дробь к некоторому новому знаменателю.

Если числитель и знаменатель дроби $\frac{A}{B}$ умножают на ненулевой многочлен C, то говорят, что эту дробь привели к новому знаменателю $B \cdot C$.

Основное свойство позволяет дробь $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ заменить тождественно равной дробью $\frac{A}{B}$. Деление числителя и знаменателя дроби на их общий множитель C называют **сокращением дроби на C**.

2. Две дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ тождественно равны тогда и только тогда, когда $AD = BC$.

3. Значение дроби не изменится, если одновременно изменить знак числителя и знаменателя либо знак дроби и числителя (либо дроби и знаменателя).

4. Если дробь умножить на ее знаменатель, то получится числитель: $\frac{A}{B} \cdot B = A$.

5. $\frac{A}{B} = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$ и $B \neq 0$.

Пример 3. Приведем дробь к знаменателю.

Решение. Умножив числитель и знаменатель данной дроби на множитель $4a$ (так как $8a^2b^2 = 2ab^2 \cdot 4a$), получаем: $\frac{7}{2ab^2} = \frac{28a}{8a^2b^2}$.

Данную дробь мы заменим тождественно равной ей дробью со знаменателем $8a^2b^2$. Множитель $4a$ называют дополнительным множителем к знаменателю и числителю дроби $\frac{7}{2ab^2}$.

Пример 4. Сократим дробь $\dfrac{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}{x^4-16}$.

Решение. Обозначим через A числитель, а через B знаменатель данной дроби и разложим их на множители:

$$A=\left(x^4+8x^2+16\right)-\left(4x^3+16x\right)=$$

$$=\left(x^2+4\right)^2-4x\left(x^2+4\right)=\left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2+4-4x\right)=$$

$$=\left(x^2+4\right)(x-2)^2.$$

$$B=\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)=(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right).$$

Далее имеем: $\dfrac{A}{B}=\dfrac{\left(x^4+4\right)(x-2)^2}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}=\dfrac{x-2}{x+2}$.

Ответ: $\dfrac{x-2}{x+2}$.

Практическая часть

Задание 1. Укажите алгебраические дроби:

а) $\dfrac{3a}{2}+bc,\ \dfrac{x}{7},\ \dfrac{4x+9}{x-y},\ \dfrac{1}{9}$;

б) $\dfrac{7x}{5}+bc,\ \dfrac{x}{5},\ \dfrac{2x-3}{y-x},\ \dfrac{1}{7}$.

Задание 2. Какие из чисел –3, –1, 0, 2, 3, 5 не входят в область определения выражения A:

а) $A=\dfrac{3x+5}{x-3}$;   б) $A=\dfrac{2x+3}{x+1}$?

Задание 3. Укажите область определения выражения:

а) $\dfrac{12-4x}{49-x^2}$;   б) $\dfrac{5y-10}{y^2-64}$.

Задание 4. При каких значениях m не имеет смысла выражение:

а) $\dfrac{37}{|m|-3}$; б) $\dfrac{45}{6-|m|}$?

Задание 5. Найдите числовое значение выражения:

а) $\dfrac{16ab^3+c}{6bc-a}$ при $a=-5, b=-\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{2}{3}$;

б) $\dfrac{3m^2n-t}{mt-n+10}$ при $m=-\dfrac{1}{3}, n=-3, t=-6$.

Задание 6. Зная, что $\dfrac{a-2b}{b}=7$, найдите значение:

а) $\dfrac{a}{b}$; б) $\dfrac{b}{a}$.

Задание 7. При каких значениях x равно нулю выражение:

а) $\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}$; б) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$?

Задание 8. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2+y^2-2xy}{x^2-y^2}$; б) $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}$.

Задание 9. Сократите дробь:

а) $\dfrac{m^2-n^2}{(m+n)^2}$; б) $\dfrac{n^2-m^2}{(n-m)^2}$.

Задание 10. Сократите дробь:

а) $\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}$; б) $\dfrac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}$.

Задание 11. Сократите дробь:

а) $\dfrac{(x-1)(x^2+2x+1)}{x^2-1}$;

б) $\dfrac{(x-2)(x^2+4x+4)}{x^2-4}$.

Задание 12. Сократите дробь:

а) $\dfrac{1-14x+49x^2}{1-49x^2}$; б) $\dfrac{64y^2-16y+1}{64y^2-1}$.

Задание 13. Сократите дробь:

а) $\dfrac{20x^2+40xy+20y^2}{15x^2-15y^2}$;

б) $\dfrac{20m^2-20n^2}{15m^2-30mn+15n^2}$.

Задание 14. Сократите дробь:

а) $\dfrac{7a^2+14a+14}{(a+1)^4-1}$; б) $\dfrac{(x-1)^4-1}{3x^2-6x+6}$.

Задание 15. Сократите дробь:

а) $\dfrac{9a^4b^2+18a^3b^3+9a^2b^4}{18a^2-18b^2}$;

б) $\dfrac{18a^4b^2-36a^3b^2+18a^2b^2}{81a^3-81a}$.

Задание 16. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$;

б) $\dfrac{2a^3+6ab^2-a^2b-3b^3}{2a^5-18ab^4-a^4b+9b^5}$.

Задание 17. Найдите все целые t, при которых целым числом является значение дроби:

а) $\dfrac{1}{5+6t}$; б) $\dfrac{1}{4t+11}$.

Задание 18. Найдите все целые t, при которых целым числом является значение дроби:

а) $\dfrac{t+3}{9-t^2}$; б) $\dfrac{t-5}{t^2-25}$.

Задание 19. При каких натуральных значениях n дробь принимает натуральные значения:

а) $\dfrac{7n^2+13n+10}{n}$; б) $\dfrac{2n^2+9n+8}{n}$?

Задание 20. Докажите, что при любом значении переменной a значение дроби:

а) $\dfrac{3a^2+5}{4a^2-4a+19}$ не является отрицательным числом;

б) $\dfrac{2a^2+7}{-a^2+2a-8}$ не является положительным числом.

Задание 21. Вычислите значение дроби:

а) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{2xy-y^2}$, если $x:y=3:2$;

б) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{5xy+y^2}$, если $x:y=2:5$.

Задание 22. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4-4x^3+16x-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}$;

б) $\dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.** а) $\frac{x}{4}$; $\frac{4x+9}{x-y}$; $\frac{1}{5}$; б) $\frac{x}{5}$; $\frac{2x-3}{y-x}$; $\frac{1}{3}$.

***К заданию* 2.** а) 3; б) –1.

***К заданию* 3.** а) $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$;

б) $(-\infty; -8) \cup (-8; 8) \cup (8; +\infty)$.

***К заданию* 4.** а) $m = -3$ или $m = 3$; б) $m = -6$ или $m = 6$.

***К заданию* 5.** а) $1\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$.

***К заданию* 6.** а) $\frac{a}{b} - 2 = 7$, откуда $\frac{a}{b} = 9$;

б) $\frac{a}{b} - 2 = 7$, откуда $\frac{a}{b} = 9$, следовательно, $\frac{b}{a} = \frac{1}{9}$.

***К заданию* 7.** а) $x = 0$; б) $x = 0$.

***К заданию* 8.** а) $\frac{x-y}{x+y}$; б) $\frac{a+b}{a-b}$.

***К заданию* 9.** а) $\frac{m-n}{m+n}$; б) $\frac{n+m}{n-m}$.

***К заданию* 10.** а) $\frac{2x+1}{2x-1}$; б) $\frac{3x-1}{3x+1}$.

***К заданию* 11.** а) $A = \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = x+1$;

б) $B = \frac{(x-2)(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} = x+2$.

***К заданию* 12.** а) $A = \frac{(1-7x)^2}{(1-7x)(1+7x)} = \frac{1-7x}{1+7x}$;

б) $B = \frac{(8y-1)^2}{(8y+1)(8y-1)} = \frac{8y-1}{8y+1}$.

***К заданию* 13.** а) $A=\dfrac{20(x+y)^2}{15(x^2-y^2)}=\dfrac{4(x+y)}{3(x-y)}$;

б) $B=\dfrac{20(m^2-n^2)}{15(m-n)^2}=\dfrac{4(m+n)}{3(m-n)}$.

***К заданию* 14.**

а) $A=\dfrac{7(a^2+2a+2)}{((a+1)^2-1)((a+1)^2+1)}=\dfrac{7(a^2+2a+2)}{(a^2+2a)(a^2+2a+2)}=$

$=\dfrac{7}{a(a+2)}$;

б) $B=\dfrac{((x-1)^2-1)((x-1)^2+1)}{3(x^2-2x+2)}=$

$=\dfrac{(x^2-2x)(x^2-2x+2)}{3(x^2-2x+2)}=\dfrac{x(x-2)}{3}$.

***К заданию* 15.** а) $\dfrac{a^2b^2(a+b)}{2(a-b)}$; б) $\dfrac{2a^2b^2(a-1)}{9(a+1)}$.

***К заданию* 16.**

а) $A=\dfrac{a(3a^2+b^2)-2b(3a^2+b^2)}{a(9a^4-b^4)-2b(9a^4-b^4)}=\dfrac{(3a^2+b^2)(a-2b)}{(9a^4-b^4)(a-2b)}=$

$=\dfrac{1}{3a^2-b^2}$;

б) $B=\dfrac{2a(a^2+3b^2)-b(a^2+3b^2)}{2a(a^4-9b^4)-b(a^4-9b^4)}=\dfrac{(a^2+3b^2)(2a-b)}{(a^4-9b^4)(2a-b)}=$

$=\dfrac{1}{a^2-3b^2}$.

***К заданию* 17.** а) Решив совокупность уравнений $5+6t=-1$ или $5+6t=1$, найдем $t=-1$.

б) Решив совокупность уравнений $4t+11=-1$ или $4t+11=1$, найдем $t=-3$.

***К заданию* 18.** а) $\dfrac{t+3}{9-t^2}=\dfrac{1}{3-t}$. Решив совокупность уравнений $3-t=-1$ или $3-t=1$, найдем: $t=4$ или $t=2$.

б) $\dfrac{t-5}{t^2-25}=\dfrac{1}{t+5}$. Решив совокупность уравнений $t+5=-1$ или $t+5=1$, найдем: $t=-6$ или $t=-4$.

***К заданию* 19.** а) $A=7n+13+\dfrac{10}{n}$. Дробь $\dfrac{10}{n}$ принимает натуральные значения, если n равно 1, 2, 5, 10.

б) $B=2n+9+\dfrac{8}{n}$. Дробь $\dfrac{8}{n}$ принимает натуральные значения, если n равно 1, 2, 4, 8.

***К заданию* 20.** а) $A=\dfrac{3a^2+5}{(2a-1)^2+18}>0$ при любом значении переменной a;

б) $B=\dfrac{2a^2+7}{-(a^2+2a-8)}=\dfrac{2a^2+7}{-((a-1)^2+7)}<0$ при любом значении переменной a.

***К заданию* 21.**

$$\text{а)}\ \ A=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}{2\cdot\frac{x}{y}-1}=\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+1\right):2=\frac{19}{8}=2\frac{3}{8};$$

$$\text{б)}\ \ B=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}{5\cdot\frac{x}{y}+1}=\left(\frac{4}{25}-\frac{2}{5}+1\right):3=\frac{19}{75}.$$

***К заданию* 22.**

а) $A = \dfrac{(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (-4x^2 + 16x - 16)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + (4x^2 - 16x + 16)} =$

$= \dfrac{x^2(x^2 - 4x + 4) - 4(x^2 - 4x + 4)}{x^2(x^2 - 4x + 4) + 4(x^2 - 4x + 4)} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4};$

б) $B = \dfrac{(x^4 - 1) - (2x^3 - 2x)}{(x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^2 - 2x + 1)} =$

$= \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 + 1) - 2(x^2 - 1)}{x^2(x^2 - 2x + 1) + 4(x^2 - 2x + 1)} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$

УЭ-5. ЗАДАЧИ НА ВСЕ ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ

Цель: добиться, чтобы умения и навыки в выполнении действий с рациональными дробями удовлетворяли таким требованиям, как правильность, осознанность, автоматизм, обобщенность и прочность.

Теоретическая часть

Действия над дробями. Рассмотрим некоторые действия над дробями.

1. $\dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} = \dfrac{A + B}{C}.$

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители и записать в числителе, а знаменатель оставить прежним.

2. $\dfrac{A}{C} - \dfrac{B}{C} = \dfrac{A - B}{C}.$

Чтобы вычесть из одной дроби другую с тем же знаменателем, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, записать результат в числителе, а знаменатель оставить прежним.

3. Для сложения (или вычитания) дробей с разными знаменателями дроби нужно привести к общему знаменателю и затем выполнить преобразования по правилам сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Общим знаменателем нескольких алгебраических дробей называют одночлен или многочлен, который делится на знаменатель каждой дроби без остатка.

Чтобы найти общий знаменатель нескольких алгебраических дробей, надо:

1) разложить знаменатель каждой дроби на множители;

2) составить общий знаменатель следующим образом: взять произведение множителей разложения знаменателя первой дроби, дописать недостающие множители разложения знаменателей второй, третьей и последующих дробей;

3) для каждой дроби найти дополнительный множитель, разделив для этого общий знаменатель на знаменатель дроби;

4) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель.

4. Чтобы выполнить умножение дробей, нужно перемножить их числители и знаменатели отдельно и первое произведение записать в числителе, а второе — в знаменателе дроби.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

5. Чтобы возвести дробь в натуральную степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}.$$

6. Чтобы разделить дробь на дробь, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}.$$

Понятие о преобразовании рациональных выражений. Выражение, в котором несколько алгебраических дробей соединены знаками арифметических действий, называют **рациональным**. Это выражение не должно содержать деления на нулевой многочлен. Очевидно, что алгебраическая дробь есть рациональное выражение.

Например, $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{x+y}{(x-y)^2}+1$, $\frac{a}{2}-8\cdot\frac{a+\frac{1}{a}}{a^2-b^2}$ — рациональные выражения.

Сумму, разность и произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена.

Сумму, разность, произведение и частное алгебраических дробей всегда можно представить в виде алгебраической дроби.

Любое рациональное выражение можно представить в виде рациональной дроби. Выполняя преобразования рациональных выражений, пользуются правилами действий над алгебраическими дробями.

Одна из основных задач тождественных преобразований дробных выражений состоит в том, что данное выражение нужно представить в виде алгебраической дроби. Для этого используют правило сокращения дробей и правила сложения, вычитания, умножения и деления дробей.

Преобразовывая выражения, сначала выполняют умножение и деление, а затем сложение и вычитание. Если в выражении имеются скобки, то сначала выполняют действия в скобках.

Пример. Упростим выражение

$$\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{b^2+ab}\right).$$

Решение. 1-я форма записи. Выполняя отдельные действия, упростим данное выражение:

1) $\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}=\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}+\frac{1}{a+b}=\frac{b^2+a(a-b)}{a(a^2-b^2)}=$

$=\frac{b^2+a^2-ab}{a(a^2-b^2)};$

2) $\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{b^2+ab}=\frac{a-b}{a(a+b)}-\frac{a}{b(b+a)}=$

$=\frac{(a-b)b-a\cdot a}{ab(a+b)}=\frac{ab-b^2-a^2}{ab(a+b)};$

3) $\frac{b^2+a^2-ab}{a(a^2-b^2)}:\frac{ab-b^2-a^2}{ab(a+b)}=$

$=\frac{(b^2+a^2-ab)\cdot ab(a+b)}{a(a-b)(a+b)\cdot(-1)(b^2+a^2-ab)}=\frac{b}{(a-b)(-1)}=\frac{b}{b-a}.$

2-я форма записи. Данное выражение можно упростить последовательными преобразованиями, оформляя запись в виде цепочки равенств:

$$\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{b^2+ab}\right)=$$

$$=\left(\frac{b^2}{a\left(a^2-b^2\right)}+\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a(a+b)}-\frac{a}{b(b+a)}\right)=$$

$$=\frac{b^2+a^2-ab}{a\left(a^2-b^2\right)}:\frac{ab-b^2-a^2}{ab(a+b)}=$$

$$=\frac{\left(b^2+a^2-ab\right)\cdot ab(a+b)}{a(a-b)(a+b)\cdot(-1)\left(b^2+a^2-ab\right)}=\frac{b}{b-a}.$$

Практическая часть

Задание 1. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{m}{mn-n^2}-\dfrac{1}{m-n}\right):\dfrac{n}{n-m}$;

б) $\left(\dfrac{1}{m-n}-\dfrac{n}{m^2-mn}\right)\cdot\dfrac{n-m}{m}$.

Задание 2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-2}{x^2-2x+2}\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{2-x}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2x}{x-3}\right):\dfrac{2x^2-3x-3}{3-x}$.

Задание 3. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{m-n}{m^2+mn}+\dfrac{n-m}{m^2-n^2}\right)(m+n)$;

б) $\left(\dfrac{3b-a}{a^2+3ab}+\dfrac{a-3b}{a^2-9b^2}\right)\cdot\dfrac{3b+a}{b}$.

Задание 4. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a+\dfrac{bc}{b+c}}{b+\dfrac{ac}{a+c}}$; б) $\dfrac{x-\dfrac{yz}{y-z}}{y-\dfrac{xz}{x-z}}$.

Задание 5. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\dfrac{a-2b}{2b}+1}{\dfrac{a+2b}{2b}}+\dfrac{3-\dfrac{6b}{a}}{\dfrac{a}{2b}-1}$; б) $\dfrac{5-\dfrac{10y}{x}}{\dfrac{x}{2y}-1}-\dfrac{\dfrac{2x+y}{y}-1}{\dfrac{2x-y}{y}+1}$.

Задание 6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{3y-9}{x^2-xy+x-y}:\dfrac{xy-3x+2y-6}{x^2-y^2}$;

б) $\dfrac{x^2-2xy+x-2y}{xy^2+x^2y}:\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+xy+x+y}$.

Задание 7. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a}{a^2-25}-\dfrac{a-8}{a^2-10a+25}\right):\dfrac{a-20}{(a-5)^2}$;

б) $\left(\dfrac{b-4}{b^2-12b+36}-\dfrac{b}{b^2-36}\right):\dfrac{b-3}{(b-6)^2}$.

Задание 8. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2a}{a^2-1}:\left(\dfrac{1}{1+2a+a^2}-\dfrac{1}{1-a^2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{b^2-8b+16}-\dfrac{1}{16-b^2}\right):\dfrac{2b}{b^2-16}$.

Задание 9. Докажите тождество:

а) $\left(a-\frac{a-4}{a+5}\right):\frac{2a+a^2}{a^2-25}+\frac{10}{a}=a-3;$

б) $\left(b-\frac{2b-4}{b+6}\right):\frac{b^2+2b}{b^2-36}+\frac{12}{b}=b-4.$

Задание 10. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2}{3a^2-3}-\frac{a+1}{3-3a}-\frac{a+3}{3a+3}\right):\frac{2}{a^2-1};$

б) $\left(\frac{b+1}{4b-4}-\frac{2}{4-4b^2}-\frac{3+b}{4b+4}\right):\frac{3}{2b-2}.$

Задание 11. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a^2+2a+4}{a+2}-\frac{6a}{a+2}\right):\left(1-\frac{4}{a+2}\right)^2;$

б) $\left(\frac{b^2-b+1}{b-1}+\frac{3b}{b-1}\right)\cdot\left(\frac{2b}{b+1}-1\right)^2.$

Задание 12. Докажите тождество:

а) $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{x}{y^2}\right):\frac{y^2-x^2}{xy}+\frac{2}{x-y}=-\frac{1}{y};$

б) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right):\frac{x^2-y^2}{x}+\frac{2}{x-y}=\frac{1}{y}.$

Задание 13. Докажите тождество:

а) $\left(\frac{4a}{a^2-1}-\frac{2a}{3-3a}+\frac{2a}{a+1}\right):\frac{2a}{3a-3}=4;$

б) $\left(\frac{3+b}{3-b}+\frac{12b}{b^2-9}\right):\frac{3-b}{b}+\frac{3}{b+3}=1.$

Задание 14. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{2a-b}-\frac{4a}{b^2-4a^2}-\frac{3}{2a+b}\right):\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-1\right)$;

б) $\left(\frac{1}{a-2b}-\frac{4a}{4b^2-a^2}-\frac{5}{a+2b}\right):\left(\frac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2}-1\right)$.

Задание 15. Докажите тождество:

а) $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right):\frac{a^2+a}{(1-a)^2}=\frac{a-1}{a}$;

б) $\frac{b^2-3b}{(b+3)^2}:\left(\frac{b^2+9}{b^2-9}+\frac{b}{b+3}+\frac{b}{3-b}\right)=\frac{b}{b+3}$.

Задание 16. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{3}{2a-1}-\frac{2}{2a+1}+\frac{7}{1-4a^2}\right)\cdot\left(2a+\frac{1}{2a-2}\right)$;

б) $\left(\frac{2b-3}{b}-\frac{2b-8}{b-5}\right):\left(\frac{1}{b+5}+\frac{1}{b-5}-\frac{3b-3}{b^2-25}\right)$.

Задание 17. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{t^2}{t^2-16}+\frac{t}{4-t}\right):\left(\frac{t^3}{t^2-8t+16}+\frac{t^2}{t-4}\right)$;

б) $\left(\frac{m^3}{m^2-4m+4}-\frac{m^2}{m-2}\right):\left(\frac{m^2}{m^2-4}+\frac{m}{2-m}\right)$.

Задание 18. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2a-1}{a-3}-\frac{a^2-4}{a^2+6a+9}\cdot\frac{a+3}{a-2}+\frac{3}{9-a^2}\right)\cdot\frac{a^2}{a-3}$;

б) $\frac{b+5}{4-b}-\frac{b(b-4)}{b^2+12}\cdot\left(\frac{b+3}{b-4}+\frac{7b}{16-b^2}\right):\frac{b^2}{2b+5}$.

Задание 19. Выполните действия:

а) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$;

б) $\left(\frac{2b}{a+2b}-\frac{4b^2}{a^2+4ab+4b^2}\right):\left(\frac{2b}{a^2-4b^2}+\frac{1}{2b-a}\right)$.

Задание 20. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной t при всех ее допустимых значениях:

а) $\left(\frac{t}{t^2-4}+\frac{t}{t^2-4t+4}\right):\frac{2t}{(2-t)^2}-\frac{t}{t+2}$;

б) $\left(\frac{t}{t^2-9}-\frac{t}{t^2-6t+9}\right)\cdot\frac{(3-t)^2}{2t}+\frac{3}{t+3}$.

Задание 21. Докажите тождество:

а) $\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{ab+b^2}+\frac{b}{a^2+ab}\right)\right):\frac{b}{a-b}=\frac{a}{a+b}$;

б) $\left(a+b-\frac{4ab}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=a-b$.

Задание 22. Упростите выражение:

а) $\frac{27a^3-3a}{9a^2+1}\cdot\left(\frac{3a}{9a^2-6a+1}-\frac{1}{9a^2-1}\right)-\frac{1}{3a-1}$;

б) $\frac{8b^3-18b}{4b^2+9}\cdot\left(\frac{2b}{4b^2-12b+9}-\frac{3}{4b^2-9}\right)-\frac{3}{2b-3}$.

Задание 23. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\frac{1}{x-2y}-\frac{1}{x+2y}}{\frac{1}{x-2y}+\frac{1}{x+2y}}-\frac{x+2y}{x}=-1$;

б) $\dfrac{\dfrac{1}{x+3y}+\dfrac{1}{x-3y}}{\dfrac{1}{x+3y}-\dfrac{1}{x-3y}}+\dfrac{x+3y}{3y}=1.$

Задание 24. Докажите, что если $a+b=0$, то верно равенство:

а) $\dfrac{a+1}{2a+b+1}+\dfrac{b+1}{a+2b+1}=2;$

б) $\dfrac{2a+2}{3a+2b+1}+\dfrac{b+1}{2a+3b+1}=3.$

Задание 25. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1}{1-2x}+\dfrac{1}{1+2x}+\dfrac{2}{1+4x^2}+\dfrac{4}{1+16x^4}=\dfrac{8}{1-256x^8};$

б) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}=\dfrac{8}{1-x^8}.$

Задание 26. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4-4x^3+16x-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16};$

б) $\dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}.$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $\dfrac{n-m}{n^2}$; б) $\dfrac{n-m}{m^2}$.

К заданию 2. а) $-\dfrac{1}{x-1}$; б) $-\dfrac{1}{x-2}$.

К заданию 3. а) $-\dfrac{n}{m}$; б) $\dfrac{3}{a}$.

К заданию 4. а) $\dfrac{a+c}{b+c}$; б) $\dfrac{x-z}{y-z}$.

К заданию 5. а) $1+\dfrac{6b}{a}$; б) $\dfrac{10y}{x}-1$.

К заданию 6. а) $\dfrac{3(x+y)}{(x+1)(x+2)}$;

б) $\dfrac{(x+1)^2}{xy(x+2y)}$.

К заданию 7.

а) $A=\dfrac{a^2-5a-a^2+3a+40}{(a-5)^2(a+5)}\cdot\dfrac{(a-5)^2}{a-20}=-\dfrac{2}{a+5}$;

б) $B=\dfrac{b^2+2b-24-b^2+6b}{(b-6)^2(b+6)}\cdot\dfrac{(b-6)^2}{b-3}=$

$=\dfrac{8(b-3)(b-6)^2}{(b-6)^2(b+6)(b-3)}=\dfrac{8}{b+6}$.

К заданию 8. а) $a+1$; б) $\dfrac{1}{b+4}$.

К заданию 10. а) 1; б) $\dfrac{1}{b+1}$.

К заданию 11. а) $a+2$; б) $b-1$.

К заданию 14. а) $\dfrac{2}{b}$; б) $\dfrac{3}{2b}$.

К заданию 16. а) $\dfrac{2a-1}{2a+1}$; б) $\dfrac{5(b+5)}{b}$.

К заданию 18. а) $\dfrac{a+6}{a(a+3)}$; б) $\dfrac{b^2+7b+5}{b(4-b)}$.

К заданию 19. а) $\dfrac{2a(b-2a)}{2a+b}$; б) $\dfrac{2b(2b-a)}{a+2b}$.

К заданию **25.**

а) $A=\dfrac{2}{1-4x^2}+\dfrac{2}{1+4x^4}+\dfrac{4}{1+16x^4}=$

$=\dfrac{2}{1-16x^4}+\dfrac{2}{1+16x^4}=\dfrac{8}{1-256x^8};$

б) $A=\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}=\dfrac{4}{1-x^4}+\dfrac{4}{1+x^4}=$

$=\dfrac{8}{1-x^8}.$

К заданию **26.**

а) $A=\dfrac{\left(x^4-4x^3+4x^2\right)+\left(-4x^2+16x-16\right)}{\left(x^4-4x^3+4x^2\right)+\left(4x^2-16x+16\right)}=$

$=\dfrac{x^2(x^2-4x+4)-4(x^2-4x+4)}{x^2(x^2-4x+4)+4(x^2-4x+4)}=\dfrac{x^2-4}{x^2+4};$

б) аналогично а).

УЭ-6. ПОИСК ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Цель: развитие способности подмечать закономерности при выполнении тождественных преобразований.

Теоретическая часть

Зачастую тождественные преобразования можно выполнить проще, если заметить ту или иную закономерность.

Пример 1. Упростим выражение

$\left(x^2-mx+n^2\right)^2-2\left(x^2-mx+n\right)\left(n-mx\right)+\left(mx-n^2\right).$

Решение. Данное выражение можно упростить, если раскрыть скобки и привести подобные, но такой способ требует громоздких преобразований. Они значительно упростятся, если подметить, что данное выражение представляет собой многочлен вида

$$a^2 - 2a(-b) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 .$$

Обозначив данное выражение через A, получим:

$$A = \left(x^2 - mx + n + mx - n\right)^2 = \left(x^2\right)^2 = x^4.$$

Пример 2. Всегда ли значение выражения

$$k(k+1)(k+2)(k+3)+1$$

при $k \in \boldsymbol{N}$ является квадратом натурального числа?

Решение. Рассмотрим частные случаи:

$$k = 1 : 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2 ;$$

$$k = 2 : 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2 ;$$

$$k = 3 : 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2 .$$

Гипотеза: значение выражения

$$k(k+1)(k+2)(k+3)+1$$

является квадратом натурального числа при любом натуральном k.

Имеем:

$$k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = k(k+3)(k+1)(k+2)+1 =$$
$$= \left(k^2 + 3k\right)^2 + 2\left(k^2 + 3k\right) + 1 = \left(k^2 + 3k + 1\right)^2.$$

Следовательно, при любом натуральном k значение выражения $k(k+1)(k+2)(k+3)+1$ является квадратом натурального числа.

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{3}{x+y}-\frac{3x-3y}{2x-3y}\cdot\left(\frac{2x-3y}{x^2+y^2}-2x+3y\right).$$

Решение. Преобразования существенно сократятся, если заметить определенную закономерность и применить распределительный закон умножения. Обозначив данное выражение через B, получим:

$$B=\frac{3}{x+y}-\frac{3(x-y)}{2x-3y}\cdot\left(\frac{2x-3y}{x^2-y^2}-(2x-3y)\right)=$$

$$=\frac{3}{x+y}-\frac{3}{x+y}+3(x-y)=3(x-y).$$

Практическая часть

Задание 1. Докажите, что значение выражения

$$2001\cdot 2002\cdot 2003\cdot 2004+1$$

является квадратом натурального числа.

Задание 2. Упростите выражение

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+$$

$$+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

Задание 3. Пусть $a+\frac{1}{a}=3$. Найдите:

а) $a^2+\frac{1}{a^2}$;

б) $\frac{a^4+1}{2a^2}$;

в) $\frac{a^8+1}{a^4}$;

г) $a^3+\frac{1}{a^3}$.

Задание 4. Докажите, что при любом $|a|>1$ будет отрицательным значение выражения

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}.$$

Задание 5. Выполните преобразования :

$(1+x)^1=\ldots;$

$(1+x)^2=(1+x)(1+x)=\ldots;$

$(1+x)^3=(1+x)(1+x)(1+x)=\ldots;$

$(1+x)^4=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)=\ldots .$

Подметьте закономерность, которой подчиняются коэффициенты полученных многочленов. Запишите результат возведения в степень: $(1+x)^5$, $(1+x)^6$.

Задание 6. Выполните умножение:

а) $\dfrac{9a^2-6xy+4y^2}{2a^2}\cdot\dfrac{9x^2-4y^2}{27x^2+8y^2};$

б) $\dfrac{ax^2-ay-cx-xy}{cx-3x-ac+3a}\cdot\dfrac{ab+4b-2a-8}{cx+xy-ax-ay}.$

Ваш помощник

***К заданию* 2.** Зная формулу или подметив закономерность $\dfrac{1}{a(a+1)}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a+1}$, получим: $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}-$

$$-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x(x+5)}.$$

***К заданию* 3.** Имеем:

а) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=9,\quad a^2+2+\dfrac{1}{a^2}=9,\quad a^2+\dfrac{1}{a^2}=7;$

б) $\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 7=3{,}5;$

в) $\frac{a^8+1}{a^4}=a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2=49-2=47;$

г) $a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)=3(7-1)=18.$

***К заданию* 4.** Постановка задачи вызывает удивление, поскольку положительных слагаемых больше. Однако это утверждение имеет место. Докажем его.

Обозначим данное выражение через C и выполним сложение дробей, подметив, что дроби следует складывать последовательно, начиная с первых двух:

$$C=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=$$

$$=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=$$

$$=\frac{8}{1-a^8}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{16}{1-a^{16}}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

Очевидно, что $\frac{32}{1-a^{32}}<0$ при любом $|a|>1$.

УЭ-7. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТОЖДЕСТВ

Цель: уяснить сущность тождественных преобразований как особого способа доказательства в алгебре, знать и уметь применять основные методы доказательства тождеств.

Теоретическая часть

Доказательство многих теорем школьного курса алгебры ведется с использованием тождественных преобразований. Это особый способ доказательства. Мы часто встречаемся с задачей на доказательство, которое проводится этим способом. Рассмотрим основные методы доказательства тождеств.

Пусть нужно доказать тождество $A = B$, где A и B — некоторые выражения. Зачастую можно воспользоваться каким-либо из следующих методов.

1. *Доказать, что* $A - B = 0$, *т. е. нам достаточно составить разность между левой и правой частями данного равенства и показать, что она равна нулю.*

Пример 1. Докажем, что если $a + b + c = 0$, то

$$(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Доказательство. Обозначив соответственно левую и правую части второго равенства через A и B, составим и преобразуем их разность:

$$A - B = \left((a+b)^2 - c^2\right) + \left((a+c)^2 - b^2\right) + \left((b+c)^2 - a^2\right) =$$
$$= (a+b-c)(a+b+c) + (a+c-b)(a+c+b) +$$
$$+ (b+c-a)(b+c+a) = 0.$$

Так как в каждом слагаемом есть множитель $(a+b+c)$, который по условию задачи равен нулю, то и вся сумма будет равна нулю.

Итак, $A - B = 0$, значит, $A = B$.

2. *Преобразовать левую часть равенства до получения правой части или наоборот.* Например, $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_k = B$, следовательно, $A = B$.

Пример 2. Доказем тождество:

$$(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть к виду правой:

$$b^2x^2-2bxay+a^2y^2+c^2y^2-2cybz+b^2z^2+a^2z^2-$$
$$-2azcx+c^2x^2=$$
$$=b^2x^2+c^2x^2+a^2x^2-a^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+$$
$$+b^2y^2-b^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2z^2-c^2z^2-2baxy-2cbyz-$$
$$-2aczx=x^2(b^2+c^2+a^2)+y^2(a^2+c^2+b^2)+$$
$$+z^2(b^2+a^2+c^2)-$$
$$-(a^2x^2+c^2z^2+b^2y^2+2baxy+2cbyz+2aczx)=$$
$$=(b^2+c^2+a^2)(x^2+y^2+z^2)-$$
$$-\left((ax)^2+(by)^2+(cz)^2+2axby+2czby+2axcz\right)=$$
$$=(b^2+c^2+a^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2.$$

3. *Преобразовать независимо друг от друга обе части равенства так, чтобы получить одно и то же выражение:* $A=A_1=A_2=\ldots=A_k$; $B=B_1=B_2=\ldots=B_n$, *если* $A_k=B_n$, *то* $A=B$.

Пример 3. Докажем, что

$$\left(\left(\frac{a}{b-a}\right)^{-2}-\frac{(a+b)^2-4ab}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{a^4}{a^2b^2-b^4}=$$

$$=\frac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}.$$

Доказательство. Обозначив левую часть через A, получим:

$$A=\left(\frac{(a-b)^2}{a^2}-\frac{a-b}{a}\right)^2\cdot\frac{a^4}{b^2(a^2-b^2)}=$$

$$=\left(\frac{b^2-ab}{a^2}\right)^2\cdot\frac{a^4}{b^2(a^2-b^2)}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Обозначив правую часть через B, получим:

$$B=\frac{2ab+a^2-4a^2+b^2}{ab(b^2+2ab-3a^2)}\cdot\frac{ab(a^2-2ab+b^2)}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Следовательно, $A = B$ и равенство доказано.

4. *Чтобы доказать, что из равенства $A = B$ следует равенство $A_k = B_k$, можно построить цепочку логических следствий: $A=B\Rightarrow A_1=B_1\Rightarrow\ldots\Rightarrow A_k=B_k$.*

Пример 4. Докажем, что если $a+b+c=0$, то

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Доказательство. Из того, что $a+b+c=0$, следует:

$$a+b=-c;$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3;$$

$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b);$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc,$$

что и требовалось доказать.

Пример 5. Докажем, что если $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$, то $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$

Доказательство. Умножив обе части данного по условию равенства на $a+b+c$, получим:

$$\frac{a(a+b+c)}{b+c}+\frac{b(a+b+c)}{c+a}+\frac{c(a+b+c)}{a+b}=a+b+c,$$

откуда

$$\frac{a^2}{b+c}+a+\frac{b^2}{c+a}+b+\frac{c^2}{a+b}+c=a+b+c,$$

поэтому

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

В некоторых случаях при определенном опыте решения нестандартных задач можно догадаться, из какого известного тождества можно получить требуемое равенство с помощью ряда преобразований.

5. *Для доказательства тождеств иногда используется метод неопределенных коэффициентов*. Сущность его состоит в следующем.

Пусть нам известно, что в результате некоторых преобразований получается выражение определенного вида и неизвестны лишь коэффициенты в этом выражении. Тогда эти коэффициенты обозначают буквами и рассматривают как неизвестные. Затем для определения этих неизвестных, исходя из определения равенства многочленов, составляют систему уравнений и находят ее решения.

Пример 6. Докажем, что выражение

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$$

является квадратом трехчлена.

Доказательство. Так как данное выражение есть квадрат трехчлена, то имеет место равенство

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1=(x^2+ax+b)^2,$$

где a и b — искомые коэффициенты.

В этом равенстве раскроем скобки в левой и правой частях, получим:

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+25=$$
$$=x^4+2ax^3+\left(a^2+2b\right)x^2+2abx+b^2.$$

Сравнивая коэффициенты при x^3 и x^2 в левой и правой частях, получаем систему

$$\begin{cases} 2a=10, \\ a^2+2b=35, \end{cases}$$

откуда находим $a=5$, $b=5$. Легко проверить, что при этих значениях a и b равны коэффициенты при x и свободные члены ($2ab=50$ и $b^2=25$).

Искомый квадратный трехчлен имеет вид

$$(x^2+5x+5)^2.$$

6. *Иногда может применяться следующая теорема*: «Если многочлены $A(x)$ и $B(x)$, степени которых не превосходят n, принимают равные значения при $(n+1)$-м значении переменной x, то они тождественно равны».

Пример 7. Докажем тождество

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1,$$

где $a\neq b$, $b\neq c$, $a\neq c$.

Доказательство. Легко убедиться, что равенство имеет место при $x=a$, $x=b$, $x=c$. Так как левая и правая части тождества являются многочленами от одной переменной x, имеющими не более чем вторую степень, то из верности данного равенства при трех различных значениях переменной x следует, что данное равенство является тождественным.

7. *При доказательстве некоторых тождеств $A = B$ можно использовать метод введения новых переменных.*

Практическая часть

Задание 1. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то:

а) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; б) $\frac{a+b}{b} = \frac{c-d}{d}$;

в) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$; г) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Задание 2. Докажите, что:

а) если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$;

б) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{ab}{cd} = \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}$.

Задание 3. Докажите, что:

а) если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, то $a = b = c$;

б) если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, то $a = -b$ или $a = -c$ или $b = -c$;

в) если $a^3 + a - 1 = 0$, то $\frac{a^4 + a^3 + a^2 + 9}{a^5 - a^2 - a + 6} = 2$.

Задание 4. Докажите тождество:

а) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$;

б) $(a+b+1)(a^2+b^2-ab-a-b+1)=a^3+b^3-3ab+1$;

в) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$;

г) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$.

Задание 5. Докажите, что:

а) если $a+b+c=0$, то $(a+b)(b+c)(a+c)+abc=0$;

б) если $a+b+c=0$, то $a^4+b^4+c^4=\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$;

в) если $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, то
$2a^4+2b^4+2c^4=a^2+b^2+c^2$.

Задание 6. Докажите, что сумма дробей

$$\frac{a-b}{1+ab},\ \frac{b-c}{1+bc},\ \frac{c-a}{1+ac}$$

равна их произведению.

Задание 7. Докажите тождество:

а) $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{2a}{a^2+b^2}+\dfrac{4a^3}{a^4+b^4}+\dfrac{8a^7}{a^8+b^8}=\dfrac{16a^{15}}{a^{16}-b^{16}}$;

б) $\left(\dfrac{x^2+2xy+4yz+2xz}{x+2z}\right)^2=(x-2y)^2+8xy$.

Задание 8. Докажите тождество:

а) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}=1$;

б) $\dfrac{\left(ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)\right)\cdot\left((ax+by)^2-4abxy\right)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}=$
$=a^2x^2-b^2y^2$.

Задание 9. Докажите тождество:

а) $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{c-b}{x-a}+\dfrac{a-c}{x-b}+\dfrac{b-a}{x-c}$;

б) $\dfrac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-b}{(c-a)(c-b)}=$

$=\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{2}{b-c}+\dfrac{2}{c-a}$.

Задание 10. Докажите, что:

а) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

б) $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b-c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$;

в) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$;

г) $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$.

Задание 11. Докажите, что:

а) $\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right)\cdot\left(\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}\right)=9$, если $a+b+c=0$;

б) $\dfrac{1}{m-a}+\dfrac{1}{m-b}+\dfrac{1}{m-c}-\dfrac{1}{m}=\dfrac{abc}{m(m-a)(m-b)(m-c)}$, если $a+b+c=2m$.

Задание 12. Докажите, что:

а) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$, если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$;

б) $\dfrac{ma^2+nac+pc^2}{mb^2+nbd+pd^2}=\dfrac{a^2+ac+c^2}{b^2+bd+d^2}$, если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ и m, n, p — любые действительные числа, не все одновременно равные нулю.

Задание 13. Докажите, что:

а) если $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$;

б) если $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^3+\dfrac{1}{x^3}=a^3-3a$;

в) если $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^4+\dfrac{1}{x^4}=a^4-2a^2+2$;

г) если $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^5+\dfrac{1}{x^5}=a(a^2-2)(a^2-3)-a$;

д) если $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^6+\dfrac{1}{x^6}=(a^3-3a)^2-2$;

е) если $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^7+\dfrac{1}{x^7}=a^7-7a^5+14a^3-7a$;

ж) если $x+\dfrac{1}{x}=a$, то $x^8+\dfrac{1}{x^8}=(a^4-4a^2+2)^2-2$.

Задание 14. Докажите, что если $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число, то:

а) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ — целое число;

б) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ — целое число.

Задание 15. Докажите, что:

а) если многочлен Ax^2+Bx+C обращается в нуль при трех различных значениях x, то одновременно $A=0$, $B=0$, $C=0$, т. е. данный многочлен тождественно равен нулю;

б) если многочлен Ax^3+Bx^2+Cx+D обращается в нуль при четырех различных значениях x, то одновременно $A=0$, $B=0$, $C=0$ и $D=0$, т. е. данный многочлен тождественно равен нулю.

Задание 16. Докажите, что:

а) $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1;$

б) $\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+$
$+\dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2;$

в) $\dfrac{ab(x+a)(x+b)}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{ac(x+a)(x+c)}{(a-b)(c-b)}+$
$+\dfrac{bc(x+b)(x+c)}{(b-a)(c-a)}=x^2+x(a+b+c)+ab+ac+bc;$

г) $\dfrac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\dfrac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$
$+\dfrac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\dfrac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1.$

Задание 17. Найдите A и B из тождества:

а) $\dfrac{1}{(x-6)(x-2)}=\dfrac{A}{x-6}+\dfrac{B}{x-2};$

б) $\dfrac{3x-2}{x^2-5x-6}=\dfrac{A}{x-6}+\dfrac{B}{x+1};$

в) $\dfrac{5}{x^2-2x-8}=\dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x+2};$

г) $\dfrac{4x+3}{x^2+6x+5}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+5}.$

Задание 18. Докажите тождество:

а) $$\frac{1}{(4x-3)(4x+1)}+\frac{1}{(4x+1)(4x+5)}+\frac{1}{(4x+5)(4x+9)}+$$
$$+\frac{1}{(4x+9)(4x+13)}=\frac{4}{(4x-3)(4x+1)};$$

б) $$\frac{y-z}{(x-y)(x-z)}+\frac{z-x}{(y-z)(y-x)}+\frac{x-y}{(z-x)(z-y)}=$$
$$=\frac{2}{x-y}+\frac{2}{y-z}+\frac{3}{z-x}.$$

Задание 19. Докажите равенство
$$\frac{x}{a^3-1}-\frac{a}{x^3-1}=\frac{2(a-x)}{a^2x^2+3},$$
если $x+a=1$.

Задание 20. Докажите, что:

а) если $abc=1$ и $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, то хотя бы одно из чисел a, b, c равно 1;

б) если $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$, то одна из дробей левой части принимает значение 1, а другая — (–1).

Задание 21. Докажите тождество:

а) $(2+xy+x+y)^2+(2-xy+x-y)^2=$
$=2(x+2)^2+2y^2(x+1)^2;$

б) $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2=$
$=(x+y+z)^3-4(x+y+z)\cdot(x^2+y^2+z^2)+4(x^3+y^3+z^3).$

УЭ-8. РЕШЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ НА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Цель: разобраться с решенными примерами на доказательство тождеств и равенств с использованием разных подходов, знать и уметь применять основные методы доказательства тождеств и равенств.

Теоретическая часть

Пример 1. Докажем тождество

$$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}-\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}=0.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть неравенства следующим образом:

$$\frac{\left(a^2-4\right)+\left(2c^2-ac^2\right)}{\left(a^2-c^4\right)+\left(2a+2c^2\right)}-\frac{(a-2)^2}{\left(a^2+ac^2\right)-\left(2a+2c^2\right)}=$$

$$=\frac{(a-2)(a+2)+c^2(2-a)}{\left(a-c^2\right)\left(a+c^2\right)+2\left(a+c^2\right)}-\frac{(a-2)^2}{a\left(a+c^2\right)-2\left(a+c^2\right)}=$$

$$=\frac{(a-2)\left(a+2-c^2\right)}{\left(a+c^2\right)\left(a-c^2+2\right)}-\frac{(a-2)^2}{\left(a+c^2\right)(a-2)}=\frac{a-2}{a+c^2}-\frac{a-2}{a+c^2}=0.$$

Тождество доказано.

Пример 2. Докажем тождество

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства следующим образом:

$$\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}=$$

$$=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)+\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a}\right)+\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=$$

$$=\frac{b-c+a-b}{(a-b)(b-c)}+\frac{c-a+a-b}{(a-b)(c-a)}+\frac{c-a+b-c}{(b-c)(c-a)}=$$

$$=\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}.$$

Правая часть равенства равна левой. Тождество доказано.

Пример 3. Вычислим значение выражения $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$, если известно, что $\frac{x}{x^2+x+1}=a$.

Решение. Заметим, что если $x=0$, то $a=0$ и $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=0$.

Пусть $x\neq 0$, тогда $a\neq 0$

$$\text{и } \frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1,$$

$$\frac{1}{a}=\frac{x^2+x+1}{x}=x+\frac{1}{x}+1.$$

Отсюда $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1$ и поэтому

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2}=\frac{a^2}{1-2a}.$$

Пример 4. Докажем, что если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, то $a = b = c$.

Доказательство. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k(k \neq 0)$, тогда $a = bk$, $b = ck$ и $abc = abc \cdot k^3$, отсюда $k^3 = 1$, т. е. $k = 1$. Поскольку $k = 1$, то $a = b = c$.

Пример 5. Докажем, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0$, то хотя бы два числа из чисел a, b и c противоположны.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} =$$

$$= \frac{bc(a+b+c) + ca(a+b+c) + ab(a+b+c) - abc}{abc(a+b+c)} =$$

$$= \frac{abc + b^2c + bc^2 + a^2c + abc + ac^2 + a^2b + ab^2 + abc - abc}{abc(a+b+c)} =$$

$$= \frac{(a+b)(bc + c^2 + ac + ab)}{abc(a+b+c)} = \frac{(a+b)(c(b+c) + a(b+c))}{abc(a+b+c)} =$$

$$= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}.$$

Поскольку по условию дробь равна 0, то либо $a + b = 0$, либо $b + c = 0$, либо $c + a = 0$, что и требовалось доказать.

Пример 6. Упростить выражение $\frac{a|a-3|}{a^2-9}$.

Решение. $\frac{a|a-3|}{a^2-9} = \frac{a|a-3|}{(a-3)(a+3)}$.

Если $a > 3$, то $\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+3)} = \frac{a}{a+3}$; если $a < 3$ и $a \neq -3$, то $\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+3)} = \frac{a}{a+3}$; если $a < 3$ и $a \neq -3$, то

$$\frac{a|a-3|}{(a-3)(a+3)} = \frac{a}{a+3}.$$

Пример 7. Докажем, что при любых натуральных n имеет место равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}.$$

Доказательство. Воспользуемся приемом разбиения целого на части:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Практическая часть

Задание 1. Зная, что $\frac{x+y}{x} = 9$, найдите значение выражения $\frac{x^2 - y^2}{x^2}$.

Задание 2. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима. Будут ли сократимы дроби:

а) $\frac{a}{a+b}$; б) $\frac{a}{ab+b}$; в) $\frac{b}{2a+3b}$?

Задание 3. При каких натуральных n сократима дробь $\frac{8n+71}{46+5n}$?

Задание 4. Докажите, что при любом натуральном n значение дроби $\frac{n^4-3n^2+1}{n^4-n^2-2n-1}$ — правильная сократимая дробь.

Задание 5. Выполните действия:

а) $\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right):\frac{a^2+5a}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}$;

б) $\left(\frac{b-3}{7b-4}-\frac{b-3}{b-4}\right)\cdot\frac{7b-4}{9b-3b^3}+\frac{b^2-14}{4-b}$;

в) $\frac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1}:\left(\frac{a}{a^2-2a+1}-\frac{1}{1-a}\cdot\frac{9}{a+1}-\frac{2}{a+1}\right)$;

г) $1+\frac{a^3+1}{a^3-a^2}:\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\cdot\frac{a+1}{(a-1)^2}-\frac{1}{1-a+a(a-1)}\right)$.

Задание 6. Упростите выражение:

а) $\frac{4x+|x|}{3x-|x|}+\frac{x-4|x|}{5x+|x|}$;

б) $\frac{14x+|x+1|+14}{3x-|x+1|+3}-\frac{10|x+1|-x-1}{5x+|x+1|+5}$.

Задание 7. Выполните действия:

а) $\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

б) $\frac{x+3}{2x-1}-\frac{x^2-5}{4x^2-4x+1}-\frac{2x^3-x(1-5x)-1}{8x^3-12x^2+6x-1}$;

в) $\left(\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3};$

г) $\dfrac{(x-11y+1)^2+(2x+y-3)^2}{2x^2-21xy-11y^2-x+34y-3}-\dfrac{2x+y-3}{x-11y+1}.$

Задание 8. Найдите $x^2+y^2+z^2$, если $x+y+z=1$ и $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0.$

Задание 9. Докажите, что $xy+xz+yz=0$, если $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1.$

Задание 10. Докажите, что если $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ и $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, то $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Задание 11. Докажите, что если $xyz=1$, то

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

Задание 12. Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)^2-$
$-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\cdot\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)=4;$

б) $\dfrac{a^4-(a-1)^2}{(a^2+1)^2-a^2}+\dfrac{a^2-(a^2-1)^2}{a^2(a+1)^2-1}+\dfrac{a^2(a-1)^2-1}{a^4-(a+1)^2}=1;$

в) $\left(\dfrac{a^2}{b^2}-2+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\cdot\dfrac{a^4b^4}{ab+b^2}\cdot\dfrac{\dfrac{a}{b}-1+\dfrac{b}{a}}{a^3-2a^2b+ab^2}=a^3+b^3.$

Задание 13. Выполните действия:

а) $\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)};$

б) $\dfrac{a^2-a+1}{a^2+a+1}+\dfrac{2a(a-1)^2}{a^4+a^2+1}+\dfrac{2a^2\left(a^2-1\right)^2}{a^8+a^4+1};$

в) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}+\dfrac{8}{1+a^8}+\dfrac{16}{1+a^{16}};$

г) $\dfrac{a+3}{2a-1}-\dfrac{a^2-5}{4a^2-4a+1}-\dfrac{2a^3-a(1-5a)-1}{8a^3-12a^2+6a-1}.$

Задание 14. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1}+\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}-\dfrac{2x^2}{x^4-1};$

б) $\left(\dfrac{1-x}{x^2+x^3-x^4}-\dfrac{x^3+x-2}{x^5-x^3-2x^2-x}\right):\left(\dfrac{1+x}{x^3+x^4+x^5}-\right.$

$\left.-\dfrac{1-x+x^2}{x^3}\right);$

в) $\dfrac{a^4-(a-1)^2}{\left(a^2+1\right)^2-a^2}+\dfrac{a^2-\left(a^2-1\right)^2}{a^2\left(a^2+1\right)^2-1}+\dfrac{a^2\left(a^2-1\right)^2-1}{a^4-(a+1)^2};$

г) $\left(\left(\left(\dfrac{a-c}{a+c}\right)^2-\left(\dfrac{a+c}{a-c}\right)^2\right):\dfrac{8a^3+8ac^2}{a^3-a^2c-ac^2-c^3}+\dfrac{c}{a+c}\right)\times$

$\times\left(1-\dfrac{a^2}{c^2}\right).$

Задание 15. Выполните действия:

а) $$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right);$$

б) $$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{1}{b(abc+a+c)};$$

в) $$\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{\frac{a}{bc}(c-b)+\frac{ba}{ac}(a-c)+\frac{c}{ab}(b-a)};$$

г) $$\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^2+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right).$$

Задание 16. Докажите тождество:

а) $$\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-1)(3-a)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}=0;$$

б) $$\frac{bc}{(a-c)(a-b)}+\frac{ac}{(a-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1;$$

в) $$\frac{x^2-ya}{(x-y)(x-a)}+\frac{y^2+xa}{(y+a)(y-x)}+\frac{a^2+xa}{(a-x)(a+y)}=0;$$

г) $$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}.$$

Задание 17. Выполните действия:

а) $$\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-c)}-\frac{1}{(c-a)(b-a)};$$

б) $\dfrac{4}{(a-x)(c-x)}-\dfrac{3}{(a-x)(c-a)}+\dfrac{3}{(a-c)(x-c)}$;

в) $\dfrac{a}{(a-2b)(a-c)}+\dfrac{2b}{(2b-c)(2b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-2b)}$.

Ваш помощник

***К заданию* 1.** –63.

***К заданию* 3.** $n=3k-4$, где $k\in \boldsymbol{N}$.

***К заданию* 6.** а) 2 при $x\neq 0$; б) 6 при $x\neq -1$.

***К заданию* 7.** а) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; б) $\dfrac{2x+1}{(2x-1)^2}$; в) $\dfrac{x+2}{x}$; г) $\dfrac{x-11y+1}{2x+y-3}$.

***К заданию* 8.** $x^2+y^2+z^2=1$.

***К заданию* 13.** а) 0; б) $\dfrac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$; в) $\dfrac{32}{1-x^{32}}$; г) $\dfrac{2a+1}{(2a-1)^2}$.

***К заданию* 14.** а) $\dfrac{x}{x^2-1}$; б) $\dfrac{1-x}{1+x-x^2}$; в) 1; г) 2.

***К заданию* 15.** а) $\dfrac{(a+b+c)^2}{2bc}$; б) 1; в) $a+b+c$; г) $\dfrac{b+1}{b-2a}$.

***К заданию* 17.** а) 0; б) $\dfrac{1}{(a-x)(c-x)}$; в) 0.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

История основных алгебраических тождеств

История основных алгебраических тождеств ведет свое начало из древности. Еще древнегреческий ученый Пифагор, живший в VI в. до н. э., установил ряд тождеств, основанных на рассмотрении сторон прямоугольного треугольника. Особенно широко алгебраическими тождествами пользовался в III в. до н. э. древнегреческий геометр Евклид. В своих «Началах», состоящих из 13 книг, вторую книгу он специально посвятил алгебраическим тождествам, правда, в геометрическом истолковании. Исходя из геометрических соображений, Евклид рассматривал 10 алгебраических тождеств, из которых четвертое имеет вид $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Тождество это он сформулировал в виде теоремы: «Если прямая линия как-либо рассечена, то квадрат на всей (прямой) равен квадратам на отрезках вместе с дважды (взятым) прямоугольником, заключенным между отрезками».

b^2	ab
ab	a^2

Другой греческий ученый Диофант Александрийский, живший в III в. н. э., в своей книге «Арифметика» алгебраические тождества

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

уже рассматривал с арифметической точки зрения как основные правила арифметики.

Основными алгебраическими тождествами в их геометрическом истолковании пользовался также в своем арифметическом трактате ал-Хорезми.

Современной символикой алгебраические тождества обязаны, главным образом, двум математикам — Виету и Декарту.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Ананченко Константин Онуфриевич
Королева Лариса Геннадьевна

АЛГЕБРА УЧИТ РАССУЖДАТЬ. 7 КЛАСС

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 12.09.2012. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. л. 3,88. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.