Национальный институт образования

Факультативные занятия

К. О. Ананченко, Т. Т. Талькова

Алгебра учит рассуждать

11 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

2-е издание

Минск • «Аверсэв» • 2012

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721
А64

Серия основана в 2010 году

Ананченко, К. О.

А64 Алгебра учит рассуждать. 11 класс : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / К. О. Ананченко, Т. Т. Талькова. — 2-е изд. — Минск : Аверсэв, 2012. — 112 с. : ил. — (Факультативные занятия).

ISBN 978-985-19-0429-3.

Пособие содержит теоретический материал и практические задания, решение которых предполагает более высокий уровень овладения учебным материалом, чем при изучении основного курса алгебры.

Предназначено учащимся 11 классов для использования на факультативных занятиях в соответствии с учебной программой.

УДК 51(075.3=161.3=161.1)
ББК 22.1я721

Учебное издание

ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Ананченко Константин Онуфриевич
Талькова Татьяна Тадеушевна

АЛГЕБРА УЧИТ РАССУЖДАТЬ. 11 КЛАСС

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с белорусским и русским языками обучения

2-е издание

Ответственный за выпуск *Д. Л. Дембовский*

Подписано в печать 12.09.2012. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 3,51. Тираж 1100 экз. Заказ

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
ЛИ № 02330/0003944 от 03.02.2009. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 268-09-79, 268-08-78.
Для писем: а/я 3, 220090, Минск.

УПП «Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, Витебск.

ISBN 978-985-19-0429-3

Предисловие

Уважаемые ученики!

Перед вами учебное пособие, по которому вы изучаете факультативный курс математики, предполагающий более высокий уровень овладения учебным материалом, чем на уроках математики. Эта книга поможет вам научиться точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения (определения, теоремы, правила); правильно пользоваться математической терминологией и символикой; решать стандартные и нестандартные задачи; использовать общие и частные эвристические приемы по поиску решения новых задач; рассуждать и доказывать.

Для достижения данных целей возрастает роль теоретических знаний, становятся весьма значимыми такие их качества, как полнота и глубина, оперативность и гибкость, конкретность и обобщенность, системность и осознанность, прочность.

Важное место в процессе изучения факультативного курса будет занимать *самостоятельная математическая деятельность*. Успешность ее выполнения зависит от овладения обобщенными способами самостоятельной учебной деятельности.

Вы должны стремиться к тому, чтобы ваши умения и навыки по выполнению тех или иных алгебраических действий удовлетворяли таким требованиям, как:

правильность (без ошибок и недочетов выполнять все операции, входящие в действие);

осознанность (уметь указывать или формулировать правило, теорему, формулу, в соответствии с которыми действуете);

автоматизм (каждую операцию выполнять быстро, свернуто);

рациональность (выбирать наиболее короткий, «экономный» путь действия);

обобщенность (уметь выполнить действие в различных ситуациях);

прочность (сохранять в течение длительного времени приобретенные умения или навыки).

Учебное пособие представлено в модульной программе, которая позволяет приобрести определенный опыт самостоятельной учебной деятельности, самоопределиться и оценить свои возможности овладения учебным материалом.

Рассмотрим основные структурные элементы модульной программы.

Модуль учебной программы. Вся программа состоит из модулей. Их число определяется целями обучения, содержанием и объемом учебного материала.

Модули этой программы охватывают в комплексе все аспекты содержания факультативных занятий по алгебре. Каждый учебный модуль представляет собой законченный блок информации, целевую программу действий и методическое руководство по ее реализации.

Учебные элементы (УЭ). Каждый модуль разбит на учебные элементы. Их число определяется содержанием, объемом материала учебного модуля и логикой изложения. Так, полный перечень учебных элементов представлен в содержании данного учебного пособия.

В предлагаемой модульной программе каждый учебный элемент включает целевую установку, теоретическую и практическую части.

Цель. Она формулируется для каждого учебного элемента и адресована вам.

Теоретическая часть. Она, как правило, содержит учебный материал, с которым вы познакомились на уроке. Поэтому он представлен кратко: или в виде учебного приема, или логических схем, или в виде сущности некоторых теоретических фактов, которые напоминаются посредством примеров.

В этой части модульной программы, как правило, представлено достаточное количество примеров решенных алгебраических задач, которые могут служить примерным оформлением решения задач в самостоятельных и контрольных (экзаменационных) работах.

Практическая часть. Здесь посредством системы задач идет углубление и расширение учебного материала, изученного на уроках математики. Она состоит из заданий, направленных на:

- систематизацию и обобщение знаний;
- выработку алгебраических умений и навыков, удовлетворяющих таким требованиям, как правильность, осознанность, рациональность, автоматизм, обобщенность и прочность;

- формирование интеллектуальных умений;
- коррекцию усвоенных знаний, способов деятельности и контроль за их усвоением.

Каждый модуль завершается рубрикой ***«Математическая мозаика»***. В ней вы найдете исторические сведения, интересные факты, связанные с математикой, софизмы, шутки.

Технология модульного обучения позволяет кардинально поменять вашу роль и роль учителя в учебном процессе. Вы учитесь самостоятельно (или с определенной дозой помощи), а учитель организует, координирует, консультирует, контролирует вашу учебную деятельность.

В каждом учебном элементе вы встретитесь с рубрикой ***«Ваш помощник»***. В ней имеются ответы к заданиям, краткие указания или полное решение, в противоположном случае (т. е. если они отсутствуют) учитесь самоконтролю, обращайтесь за помощью к товарищу, за консультацией — к учителю.

Модуль 1 СТЕПЕНЬ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

УЭ-1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «СТЕПЕНЬ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ»

Цель: актуализировать основные знания по данной теме.

Теоретическая часть

Понятие степени с действительным показателем. Она определяется так:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, где $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \neq 1$;

$a^1 = a$;

$a^0 = 1$, где $a \neq 0$;

$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$, где $a \neq 0$, $m \in \boldsymbol{N}$;

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Свойства степеней. Для степеней с любыми действительными показателями сохраняются все свойства, имеющие место для степеней с рациональными показателями:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;
3) $(a^x)^y = a^{xy}$;
4) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Пример 1. Представить степень с дробным показателем в виде корня: $3^{0,2}$; $(a+b)^{-0,5}$.

Решение. $3^{0,2} = \sqrt[5]{3}$, где $0,2 = \dfrac{1}{5}$; $(a+b)^{-0,5} = \dfrac{1}{(a+b)^{0,5}} = \dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$.

Пример 2. Вычислить: $64^{0,5}$.

Решение. $64^{0,5} = \sqrt{64} = 8, \quad \left(0,5 = \frac{1}{2}\right)$.

Практическая часть

Задание 0. Выполните устно.

1. Дайте определения степеней с натуральным, нулевым, целым и дробным показателем.

2. Может ли быть отрицательным числом рациональная степень положительного действительного числа?

3. По какому правилу умножаются (делятся) рациональные степени одного и того же положительного числа?

4. По какому правилу возводится в рациональную степень рациональная степень положительного числа?

5. Чему равна рациональная степень: а) произведения положительных чисел; б) частного положительных чисел?

6. Если $a > 1$, то каким должно быть рациональное число r, чтобы: а) $a^r > 1$; б) $a^r < 1$?

7. Если $a > 1$ и рациональные числа r_1 и r_2 таковы, что $r_1 > r_2$, то что больше: a^{r_1} или a^{r_2}?

8. Если $0 < a < 1$ и рациональные числа r_1 и r_2 таковы, что $r_1 > r_2$, то какое из чисел больше: a^{r_1} или a^{r_2}?

С некоторыми видами из следующих заданий вы могли встречаться на уроках математики. Определите самостоятельно, какие из заданий вам необходимо выполнить. В случае затруднения обращайтесь к рубрике «Ваш помощник», за консультацией — к учителю или за помощью — к товарищу.

Задание 1. Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

а) $7^{\frac{1}{2}}; 9^{\frac{2}{3}}; 13^{-\frac{3}{4}}; 0,3^{0,5}; 21^{-0,25}; 28^{-0,6}; 4,5^{-0,5};$

б) $a^{\frac{1}{3}}; b^{-\frac{3}{4}}; x^{1,2}; y^{-0,4}; z^{2\frac{2}{3}};$

в) $(3a)^{\frac{1}{2}}; 3a^{\frac{1}{2}}; ax^{\frac{2}{5}}; ab^{-\frac{5}{2}}; c^{-1,5}; y^{-\frac{3}{m}};$

г) $(a+b)^{\frac{1}{3}}; (a-b)^{\frac{2}{3}}; a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}; 2(a+b)^{\frac{3}{5}}; 7a^{-\frac{2}{3}} + ab^{\frac{2}{3}};$

д) $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}}; \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{0,5}; 2a\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}.$

Задание 2. Используя дробные показатели, выразите:

а) ребро a куба через его объем V;

б) площадь S грани этого же куба через его объем V. Вычислите a и S, если $V = 64$.

Задание 3. Вычислите:

а) $81^{\frac{1}{2}}; 27^{\frac{1}{3}}; 8^{\frac{2}{3}}; 32^{\frac{2}{5}}; 81^{\frac{3}{4}}; 9^{\frac{1}{4}}; \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}};$

б) $100^{-\frac{1}{2}}; 64^{-\frac{4}{3}}; 25^{-0,5}; 16^{-0,75}; 9^{-1,5}; (0,16)^{-1\frac{1}{2}}.$

Задание 4. Вычислите:

а) $8^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{4}};$

б) $36^{\frac{2}{3}} + 64^{\frac{2}{3}} - 625^{\frac{1}{2}};$

в) $9^{-0,5} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{5}} + 0,25^{-1,5};$

г) $10^{0,5} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-6};$

д) $0,008^{-\frac{2}{3}} + 0,064^{\frac{1}{3}} - 0,0625^{-\frac{3}{4}};$

е) $25^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{3}{4}}.$

Задание 5. Вычислите:

а) $\dfrac{64^{-\frac{2}{3}} + 16^{-\frac{3}{2}}}{3 \cdot 64^{-\frac{2}{3}} - 256^{-\frac{1}{2}}};$

б) $\dfrac{15^{0,5} \cdot 6^{0,25} \cdot 3^{-0,25}}{5^{-0,5} \cdot 2^{0,25} \cdot 3^{0,5}};$

в) $0,06 \cdot 25^{-0,5} - 0,25^{-3} + 0,25^{-0,5} + 125^{\frac{2}{3}} - \left(2\frac{13}{28}\right)^{0};$

г) $(0,0081)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{4}{3}} + \left(-\frac{4}{3}\right)^{-1} - (28^{3} + 2^{3})^{0};$

д) $\left(\frac{25}{36}\right)^{-1,5} + (0,0001)^{-\frac{3}{4}} - (0,9 \cdot \sqrt[5]{125})^{0} - 100^{1,5}.$

Задание 6. Найдите значение выражения:

а) $2 \cdot 27^{\frac{2}{3}}$;

б) $\left(\frac{25}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$;

в) $7^{-1} \cdot 25^{\frac{1}{2}}$;

г) $0{,}008^{-\frac{2}{3}} \cdot 25^{-1}$;

д) $100^{-\frac{1}{2}} \cdot (0{,}1)^{-2}$;

е) $0{,}75^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2{,}5^{2}$.

Задание 7. Вычислите с помощью калькулятора значение степени (результат округлите до сотых):

а) $2{,}415^{-\frac{1}{2}}$;

б) $61{,}23^{\frac{3}{2}}$;

в) $222{,}2^{-\frac{1}{2}}$;

г) $34{,}73^{\frac{1}{4}}$.

Задание 8. Имеет ли смысл выражение:

а) $8^{\frac{3}{4}}$;

б) $(-17)^{\frac{4}{3}}$;

в) $15^{-\frac{3}{2}}$;

г) $0^{-\frac{5}{7}}$;

д) $(-0{,}3)^{-\frac{1}{2}}$?

Задание 9. Постройте график функции:

а) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^{3}$;

б) $y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{3}$;

в) $y = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$.

Задание 10. При каких действительных значениях переменной x определено выражение:

а) $(1-2x)^{0,6}$;

б) $(3x+2)^{-\frac{1}{3}}$;

в) $\left(x^{2}-2\right)^{-0,81}$;

г) $\left(3-x^{2}\right)^{\frac{5}{9}}$;

д) $\left(\frac{3-x}{2x+5}\right)^{-0,4}$;

е) $\left(\frac{x^{2}}{-x^{2}+5x-6}\right)^{0,9}$;

ж) $\left(3x^{2}-4x-15\right)^{\frac{5}{7}}$;

з) $(4-|2x-3|)^{-\frac{3}{8}}$?

Задание 11. Постройте график функции:

а) $y = -x^{\frac{1}{2}}$;

б) $y = |x|^{\frac{1}{2}}$.

Чем отличается этот график от графика функции $y = x^{\frac{1}{2}}$?

Задание 12. Постройте график функции:

а) $y = x^{0,5}$; б) $y = 1 - 2x^{0,5}$;

в) $y = (1 - x)^{0,5}$; г) $y = |x|^{0,5}$;

д) $y = |1 - x|^{0,5}$; е) $y = (1 - |x|)^{0,5}$.

Задание 13. Постройте график функции:

а) $y = x^{\frac{1}{3}}$; б) $y = -1 - x^{\frac{1}{3}}$; в) $y = -(x+1)^{\frac{1}{3}} + 2$;

г) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; д) $y = -|x-2|^{\frac{1}{3}}$; е) $y = (|x| - 2)^{\frac{1}{3}}$.

Задание 14. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

а) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}; y^{-\frac{7}{8}} \cdot y^{\frac{3}{4}}; x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}}; 5y^{\frac{1}{3}} \cdot 4y^{-\frac{1}{5}}; \frac{2}{3}x^2 y^{-\frac{7}{8}} \cdot x^{-1} y^{\frac{5}{6}}$;

б) $a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{1}{2}}; b^{-\frac{2}{5}} : b^{-\frac{4}{5}}; a^{\frac{1}{5}} : a^{-\frac{1}{2}}; 6b^{\frac{5}{6}} : 3b^{-\frac{2}{3}}$;

в) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}; \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}; \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}}; \left(y^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}; \left(x^{-3}\right)^{-\frac{1}{9}}$;

г) $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a}; b^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{b^3}; a^{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[4]{a}; a\sqrt{a}$.

Задание 15. Упростите выражение:

а) $x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{6}}$; б) $y^{-0,5} y^{-0,5}$; в) $z^{\frac{2}{5}} : z^{\frac{3}{10}}$;

г) $x^{-0,3} : x^{-0,8}$; д) $\left(y^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{8}{15}}$; е) $(z^0)^{-2,7}$;

ж) $x^4 x^{-\frac{2}{3}}$; з) $y^{1,3} y^{-3}$; и) $\left(\left(z^{-\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^0$;

к) $x^{1,3} x^{-0,7} x^{1,4}$; л) $y^{0,3} y^{1,4} y^{-5}$; м) $z^{0,8} z^{-5} z^{6,2}$.

Задание 16. Представьте выражение в виде степени:

а) $x^4 \cdot x^{-1,7} \cdot x^{0,5}; y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{5}} \cdot y^{\frac{4}{15}}; z^{1,8} \cdot z^{2,9} \cdot z^{-1,7}$;

б) $(a^{0,8})^{0,5} \cdot a^{-0,7}$; $\left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{8}{2}} \cdot b^{\frac{7}{12}}$; $(c^{0,2})^{2,5} \cdot (c^{-0,25})^4$;

в) $(a^{-1} \cdot a^{-2})^{-3}$; $(b^{-0,5} \cdot b^3)^2$; $\left(c^{-0,3} \cdot c^{0,3} \cdot c^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{9}}$.

Задание 17. Вычислите:

а) $2^{2,3} \cdot 2^{-0,8} \cdot 2^{5,6}$;

б) $3^{-\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}}$;

в) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} \cdot 32^{-\frac{4}{5}}$;

г) $27^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot 27^{-\frac{1}{3}}\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Задание 18. Найдите значение выражения:

а) $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 1{,}5^2$;

б) $\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 0{,}6^{-2}$;

в) $\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 0{,}6^{-2}$;

г) $2{,}5^{-2} : \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right)^{-2}$;

д) $(0{,}04)^{-1,5} \cdot (0{,}125)^{-\frac{1}{3}}$;

е) $-0{,}3^0\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right)^{-0,25}$;

ж) $\sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{9}$;

з) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{27}$.

Задание 19. Упростите выражение:

а) $6{,}5 \cdot a^{-5} \cdot b^3 \cdot c^0 \cdot 2a^6 \cdot b^{-1}$;

б) $15x^7y^3c : 2{,}5a^{-2}y^9$;

в) $7{,}5a^{-3} \cdot b^5c^0 \cdot 3a^6b^{-3}$;

г) $22{,}5x^7y^{-5} \cdot z^0 : 3x^2y^{-4}$;

д) $12{,}25 \cdot b^7 \cdot c^{-4} \cdot k^0 \cdot 4 \cdot b^{-3}c^5$;

е) $27x^{-2} \cdot a^9 \cdot p^0 : 4{,}5x^{-3}a^{-1}$.

Задание 20. Вычислите:

а) $(25 \cdot 81)^{\frac{1}{2}}$;

б) $(27 \cdot 125)^{-\frac{1}{3}}$;

в) $\left(\frac{1}{64} \cdot 0{,}04\right)^{\frac{1}{2}}$;

г) $\left(\frac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$;

д) $\left(\frac{1}{125} \cdot \frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

е) $\left(\frac{144}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Задание 21. Упростите выражение:

а) $(x^{-2,5} \cdot y^{1,25})^{-0,4}$;

б) $(0,2 \cdot a^{-2} \cdot b^{3})^{-3}$;

в) $\left(0{,}027a^{-\frac{3}{5}} \cdot b^{-1}\right)^{-\frac{5}{3}}$;

г) $\left(\dfrac{x^{0,5}}{8 \cdot y^{0,4}}\right)^{\frac{1}{3}}$;

д) $\left(\dfrac{a^2}{b^4}\right)^{\frac{2}{3}}$;

е) $\left(\dfrac{a^3b^5}{32x^{-\frac{3}{4}}}\right)^{-0,2}$;

ж) $\left(\dfrac{a^3 \cdot b^{1,5}}{0{,}001x^{1,2}y^{-2}}\right)^{-1\frac{2}{3}}$;

з) $\left(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{2\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

и) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Задание 22. Выполните действия:

а) $\left(x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{-1}\right)^2 \cdot \left(x^2y^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

б) $\dfrac{3a^{2n-3}}{0{,}125x^2 \cdot x^{-7}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{27^{-1} \cdot x^{-15}}{0{,}008a^{6n-12} \cdot x^{-6}}}$.

Задание 23. Представьте в виде степени числа a $(a > 0)$:

а) $(a^3)^{-2}$; $(a^{-1} \cdot a^{-2})^{-3}$; $((a^2)^{-2})^2$;

б) $(a \cdot a)^2$; $\left(\dfrac{a}{a^2}\right)^{-2}$; $(a^3a^3a^3)^2$; $a^2a^3(a^{-1})^2$;

в) $(a^3 \cdot a^4) : a^2$; $(a^3 \cdot a \cdot a^2)^{-2}$; $(a^5 : a^3) : (a^3 : a^2)^4$;

г) $(a^{-1} \cdot a^{-2})^{-1}$; $((a^2)^{-1})^{-2}$; $((a^{-2})^{-1})^{-2} : (a^0 : a^{-1})^2$;

д) $(a \cdot a^2 \cdot a^3) : (a : a^2)^{-1}$; $a^2(a^4)^3 : a^{13}$.

Задание 24. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{x^3x^2}{x^4}\right)^2 \cdot \dfrac{x^3 : x^2}{x}$;

б) $\left(0{,}2x^{-3}y^{-2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-2}$;

в) $\left(\dfrac{x^3y^{-2}}{9y^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{6y^3}\right)^2.$

г) $\left(1{,}6x^{-1}y^3\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{-2x^2}{y^3}\right)^{-4};$

д) $(0{,}5x^{-1}y^3)^{-3} : (x^{-2} : y^{-8});$

е) $\dfrac{\left(x^2y\right)^{-4} : \left(x^5y^3\right)^2}{\left(x^3\right)^{-5}\cdot y^{-5}} : \left(\dfrac{1}{y}\right)^{11}.$

Задание 25. Представьте выражение в виде степени с основанием x:

а) $\dfrac{x^2\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2}}}{\sqrt[15]{x^4}};$ б) $\dfrac{x^3\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}}.$

Задание 26. Сократите дробь:

а) $\dfrac{25-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}-5};$ б) $\dfrac{y^{0,25}-3^{0,5}}{3-x^{0,5}};$

в) $\dfrac{a-1}{a^{0,5}-1};$ г) $\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{b-a};$

д) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}x+ax^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}};$ е) $\dfrac{a-16a^{0,5}}{5a^{0,25}+20}.$

Задание 27. Что больше:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ или $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}};$ б) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$ или $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{5}};$

в) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ или $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}};$ г) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ или $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$?

Задание 28. Сравните показатели α и β, если:

а) $(0{,}5)^{\alpha}<(0{,}5)^{\beta};$ б) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\alpha}<\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\beta};$

в) $(1{,}3)^{\alpha}<(1{,}3)^{\beta};$ г) $(0{,}8)^{\alpha}>(0{,}8)^{\beta}.$

Задание 29. Решите уравнение:

а) $x^{\frac{5}{4}} = 0{,}00001$;

б) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 27$;

в) $x^{3{,}26} \cdot x^{-1{,}12} \cdot x^{-0{,}14} = 625$;

г) $x^{\frac{7}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}} = 81$;

д) $x^{1{,}3} \cdot x^{2{,}33} \cdot x^{1{,}37} = 32$;

е) $\dfrac{x^{4{,}46} \cdot x^{0{,}54}}{x^{2{,}1} \cdot x^{1{,}4}} = 0{,}001$.

Задание 30. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a + a^{0{,}25} b^{0{,}75}}{a^{0{,}5} + a^{0{,}25} b^{0{,}25}}$;

б) $\dfrac{a^{1{,}5} - b^{1{,}5}}{ab^{0{,}5} + a^{0{,}5} b}$;

в) $\dfrac{b - a^{0{,}5} b^{0{,}5}}{b^{0{,}75} + b^{0{,}5} a^{0{,}25}}$;

г) $\dfrac{b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b}$;

д) $\dfrac{a^{-0{,}5} - 2a^{-0{,}25} b^{-0{,}25} + b^{-0{,}5}}{a^{-0{,}5} - b^{-0{,}5}}$;

е) $\dfrac{a^{\frac{3}{8}} b^{-\frac{1}{8}} - a^{-\frac{1}{8}} b^{\frac{3}{8}}}{a^{\frac{1}{8}} b^{-\frac{1}{8}} + a^{-\frac{1}{8}} b^{\frac{1}{8}}}$.

Задание 31. Сократите дробь $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{4}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right)}$, если $0 < a < 1$.

Задание 32. Докажите тождество:

а) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + \dfrac{(1-x)\left(1 - x^{-\frac{1}{2}}\right)}{1 + \sqrt{x}} = 2$;

б) $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}} + 1} + \dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{8}} + 1} - \dfrac{2a^{\frac{1}{4}} - 2}{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} + 1} = 0$;

в) $\left(\dfrac{3a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{-\frac{1}{3}}} - \dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1} - \left(\dfrac{1-2a}{3a-2}\right)^{-1} = \dfrac{a^2}{2a-1}$.

Задание 33. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $\left[\dfrac{\left(a^{-3}+1\right)\cdot 2^{-1}}{a^{-1}+1}:\left(-\dfrac{a}{31}\right)^{-1}\right]^{-1}$ при $a=-5$;

б) $\left[\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{b^{-1}}}{(ac)^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}+2ac\right]^{-1}$ при $a=\dfrac{1}{3}; b=\dfrac{1}{5}; c=\dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$ при $a=\dfrac{1}{12}; b=8\dfrac{1}{3}$;

г) $\dfrac{a^{\frac{7}{6}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}$ при $a=\dfrac{4}{25}; b=0{,}04.$

Задание 34. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x-1}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-1}$;

б) $\left(\left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}}+27x^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{2}+3x^{\frac{1}{5}}}+3\sqrt[10]{32x^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^{5}$;

в) $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{(a+1)\left(a^2+1\right)}-\left(\sqrt[5]{a}\right)^{-2,5}\cdot\left(\sqrt{1+a^2}\right)^{-2}$;

г) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{1}{2}}-ab^{\frac{3}{4}}}{a-b}$;

д) $\left(\left(x^4-a^4\right)^{\frac{1}{2}}-x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x^2-a^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$;

е) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)(a-1)}{a^{\frac{1}{2}}}$;

ж) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(y^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$;

з) $\left(\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}-\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}\right)\cdot\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$;

и) $\left((ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\left(\dfrac{1}{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\dfrac{a^{\frac{5}{4}}+\left(a^4b\right)^{\frac{1}{4}}}{a-b}$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) $a=V^{\frac{1}{3}}$; б) $a=V^{\frac{2}{3}}$, $a=4$, $S=16$.

К заданию 3. а) 9; 3; 4; 4; 27; $\sqrt{3}$; $\dfrac{81}{16}$.

К заданию 4. а) 5; б) 207; г) $\sqrt{10}-56$; е) 23.

К заданию 5. а) $\dfrac{5}{8}$; б) 5; в) –37,988; г) –626,45; д) 0,728.

К заданию 6. а) 18; б) 4,9; в) $\dfrac{5}{7}$; г) 1; д) 10; е) $\dfrac{75}{16}$.

К заданию 7. а) 0,64; б) 479,12; в) 0,07; г) 2,43.

К заданию 8. а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) нет.

К заданию 9. а) $D(y)=\boldsymbol{R}$, $y=x$; б) $D(y)=[0;+\infty)$, $y=x$; в) $D(y)=(0;+\infty)$, $y=x$.

К заданию 10. д) $-2{,}5<x<3$; е) $-0{,}2<x<3$; ж) $\left(-\infty;\ -1\dfrac{2}{3}\right)\cup[3;\ +\infty)$; з) $-0{,}15<x<3{,}5$.

К заданию 14. а) $x^{\frac{7}{12}}$; $y^{-0{,}125}$; $x^{\frac{5}{6}}$; $20y^{\frac{2}{15}}$; $\dfrac{2}{3}xy^{-\frac{1}{24}}$.

К заданию 15. а) $x^{\frac{2}{3}}$; б) y^{-1}; в) $z^{0,1}$; г) $x^{0,5}$; д) $y^{\frac{4}{9}}$; е) 1; ж) $x^{\frac{10}{3}}$; з) $y^{-1,7}$; и) 1; к) x^2; л) $y^{-3,3}$; м) z^2.

К заданию 16. а) $x^{2,8}$; y; z^4.

К заданию 17. а) $128\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $\frac{1}{8}$; г) -6.

К заданию 18. а) $\frac{25}{4}$; б) $\frac{8}{45}$; в) 0,6; г) 1; д) 250; е) $\frac{5}{6}$; ж) $9^{\frac{7}{12}}$; з) $3^{\frac{7}{6}}$.

К заданию 19. а) $13ab^2$; б) $\frac{6a^2x^7c}{y^6}$; в) $22{,}5a^3b^2$; г) $\frac{15x^5}{2y}$; д) $49b^4c$; е) $16xa^{10}$.

К заданию 20. а) 45; б) $\frac{1}{15}$; в) $\frac{1}{40}$; г) 6; д) 20; е) $\frac{12}{7}$.

К заданию 21. а) $\frac{x\sqrt{y}}{y}$; б) $\frac{125a^5}{b^6}$; в) $\left(\frac{10}{3}\right)^5 ab^5$; г) $\frac{x^{\frac{1}{6}}}{2y^{\frac{2}{15}}}$; д) $a^{\frac{4}{3}} : b^{\frac{8}{9}}$; е) $\frac{2}{a^{0,6}b\cdot x^{\frac{3}{20}}}$.

К заданию 22. а) $x^{\frac{4}{3}} : y^{\frac{61}{18}}$; б) $40ax^{1,4}$.

К заданию 23. а) a^{-6}; a^9; a^{-8}; б) a^4; a^2; a^{18}; a^3; в) a^5; a^{-12}; a^{-2}; г) a^3; a^4; a^{-6}; д) a^5; a.

К заданию 24. а) x^2; б) 0,16; в) $\frac{x^{10}}{y^{20}\cdot 2916}$; г) $\frac{27y^7}{2x^9}$; д) $\frac{64x^5}{y^{17}}$; е) $\frac{y^6}{x^3}$.

К заданию 25. а) $x^{\frac{33}{15}}$; б) $x^{\frac{13}{12}}$.

К заданию 26. а) $-\left(5+x^{\frac{1}{6}}\right)$; в) $a^{0,5}+1$; г) $-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

К заданию 28. а) $\alpha > \beta$; б) $\alpha < \beta$; в) $\alpha > \beta$; г) $\alpha < \beta$.

К заданию 29. а) $\{10^{0,16}\}$; б) $\{9\}$; в) $\{5\}$; г) $\{3\}$; д) $\{2\}$; е) $\{0{,}01\}$.

К заданию 30. а) $a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}$; б) $\frac{a+a^{0,5}b^{0,5}+b}{a^{0,5}b^{0,5}}$; в) $b^{0,25}=a^{0,25}$; г) $\frac{a^{0,5}-b}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; д) $\frac{a^{-0,25}-b^{-0,25}}{a^{-0,25}+b^{-0,25}}$; е) $a^{0,25}=b^{0,25}$.

К заданию 31. 1.

К заданию 33. а) 10; б) $\frac{3}{16}$; в) 9,25; г) 0,2.

К заданию 34. а) 1; б) x^2; в) $-\frac{\sqrt{a}}{a+1}$; г) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$; д) $-a^2$; е) 2; ж) 4; з) 1; и) $b^{\frac{1}{4}}$.

УЭ-2. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Цель: актуализировать основные знания по теме; уметь схематически изображать графики степенных функций при разных значениях показателя и иллюстрировать с помощью графика функции ее свойства.

Теоретическая часть

Понятие степенной функции. Примерами степенных функций являются $y = x^{-0,5}$, $y = x^3$, $y = x^{\pi}$.

Степенной функцией называют функцию вида $y = x^{\alpha}$, где α — некоторое действительное число.

Виды степенных функций в зависимости от действительного числа α.

I. *Функция $y = x^{2k}$, где k — некоторое натуральное число.*

Графики функций $y = x^2$, $y = x^4$ и $y = x^8$ схематически изображены на рисунке 1, *а*, *б*, *в*.

Свойства таких функций аналогичны, например, свойствам функции $y = x^2$.

1. Область определения. $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений. $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 0$.

4. Нули функции. Функция обращается в нуль в единственной точке $x = 0$.

5. Промежутки знакопостоянства. На промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция принимает положительные значения.

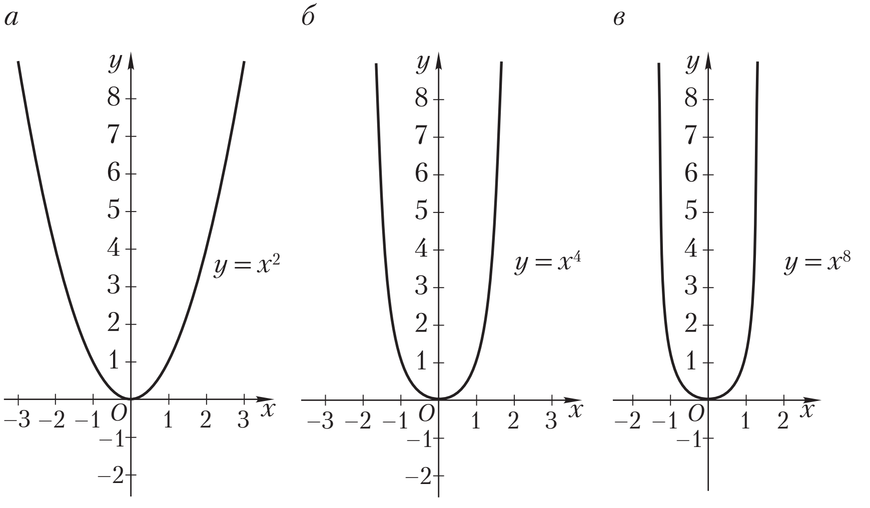


Рис. 1

6. Промежутки монотонности. Функция не является монотонной на всей области определения; она убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

7. Четность и нечетность. Функция четная.

8. Периодичность. Функция не является периодической.

9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

II. *Функция* $y = x^{2k-1}$*, где* k *— некоторое натуральное число.*

Графики функций $y = x$, $y = x^3$ и $y = x^5$ схематически изображены на рисунке 2, *а*, *б*, *в*.

Свойства таких функций аналогичны, например, свойствам функции $y = x^3$.

1. Область определения. $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений. $E(y) = \boldsymbol{R}$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. Функция наибольшего и наименьшего значений не имеет.

4. Нули функции. Функция обращается в нуль в единственной точке $x = 0$.

5. Промежутки знакопостоянства. На промежутке $(-\infty; 0)$ функция принимает отрицательные значения, а на промежутке $(0; +\infty)$ — положительные значения.

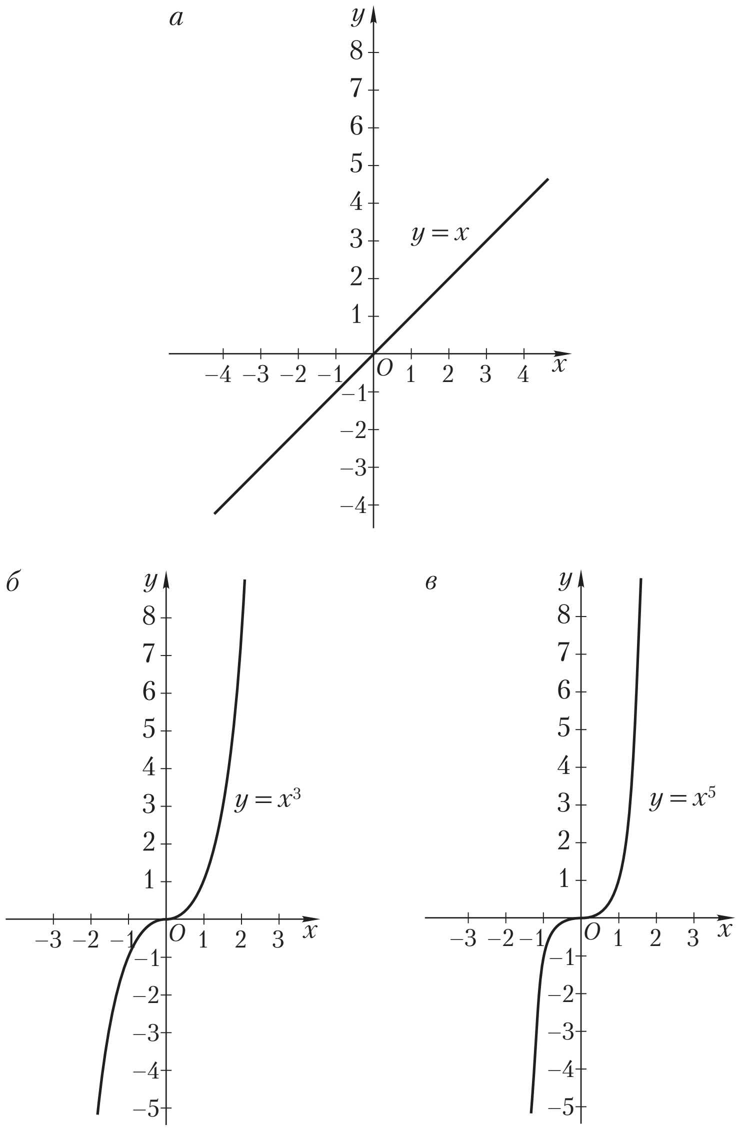


Рис. 2

6. *Промежутки монотонности*. Функция возрастает на всей области определения.

7. Четность и нечетность. Функция нечетная.

8. Периодичность. Функция не является периодической.

9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

III. *Функция* $y = x^{-2k}$*, где* k *— некоторое натуральное число.*

Графики функций $y = x^{-2}$ и $y = x^{-4}$ схематически изображены на рисунке 3, *а*, *б*.

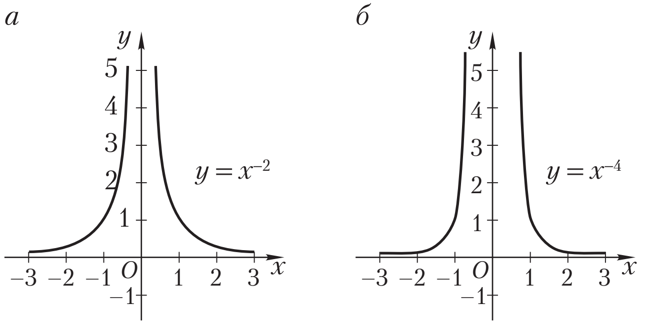


Рис. 3

1. Область определения. $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = (0;\ +\infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. Функция наибольшего и наименьшего значений не достигает.

4. Нули функции. Функция в нуль не обращается.

5. Промежутки знакопостоянства. На промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ функция принимает положительные значения.

6. Промежутки монотонности. Функция не является монотонной на всей области определения; она возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$.

7. Четность и нечетность. Функция четная.

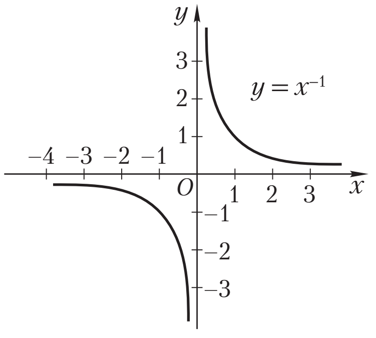
8. Периодичность. Функция не является периодической.

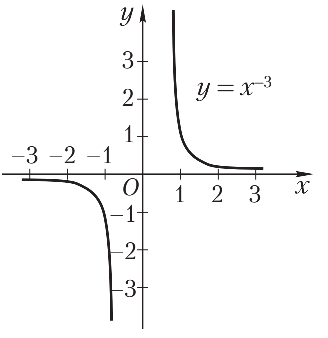
9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

IV. *Функция* $y = x^{-2k+1}$*, где* k *— некоторое натуральное число.*

Графики функций $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$ и $y = x^{-5}$ схематически изображены на рисунке 4, *а*, *б*, *в*.

Ее свойства аналогичны свойствам функции $y = \dfrac{k}{x}$.





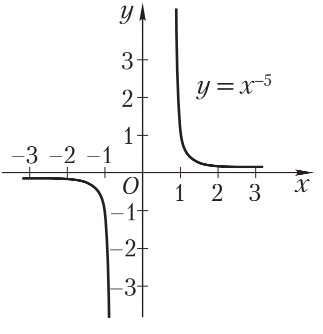


Рис. 4

1. Область определения. $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. Функция наибольшего и наименьшего значений не достигает.

4. Нули функции. Функция нулей не имеет.

5. Промежутки знакопостоянства. На промежутке $(-\infty;\ 0)$ функция принимает отрицательные значения, а на промежутке $(0;\ +\infty)$ — положительные значения.

6. Промежутки монотонности. Функция не является монотонной на всей области определения; она убывает на промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

7. Четность и нечетность. Функция нечетная.

8. Периодичность. Функция не является периодической.

9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

V. *Функция* $y = x^{\alpha}$*, где* $x \in [0; +\infty)$, α — *некоторое положительное нецелое число.*

Графики функций $y = x^{\frac{3}{2\pi}}$, $y = x^{\frac{\sqrt{17}}{17}}$ и $y = x^{2,72}$ схематически изображены на рисунке 5, *а*, *б*, *в*.

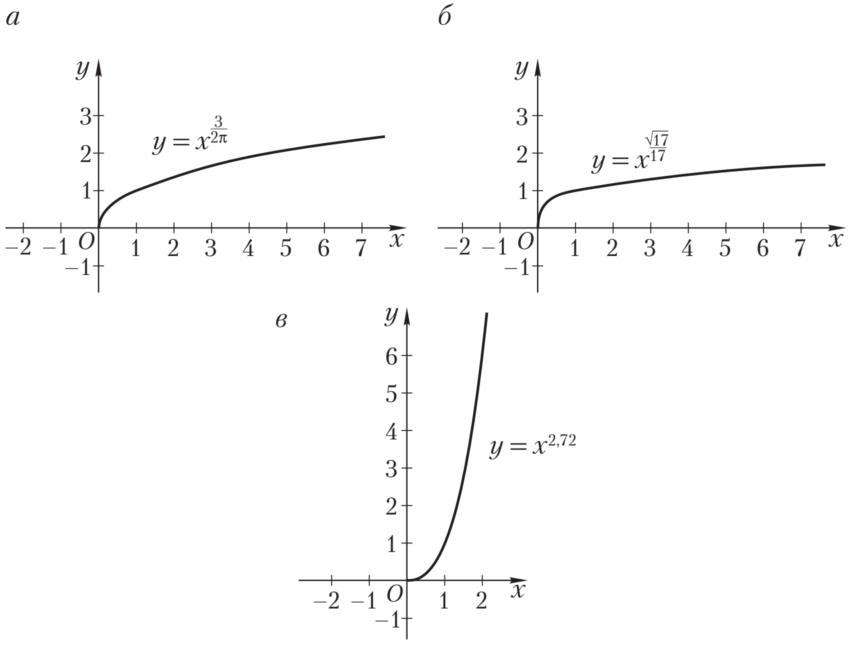


Рис. 5

1. Область определения. $D(y) = [0; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. $y_{наим} = 0$ при $x = 0$. Наибольшего значения функция не достигает.

4. Нули функции. Функция обращается в нуль в единственной точке $x = 0$.

5. Промежутки знакопостоянства. Функция принимает положительные значения на промежутке $(0; +\infty)$.

6. Промежутки монотонности. Функция возрастает на всей области определения.

7. Четность и нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной.

8. Периодичность. Функция не является периодической.

9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

VI. *Функция* $y = x^{-\alpha}$*, где* $x \in (0; +\infty)$, α — *некоторое положительное нецелое число.*

Графики функций $y = x^{-\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{3}{8}}$ и $y = x^{-\frac{1}{4}}$ схематически изображены на рисунке 6, *а*, *б*, *в*.

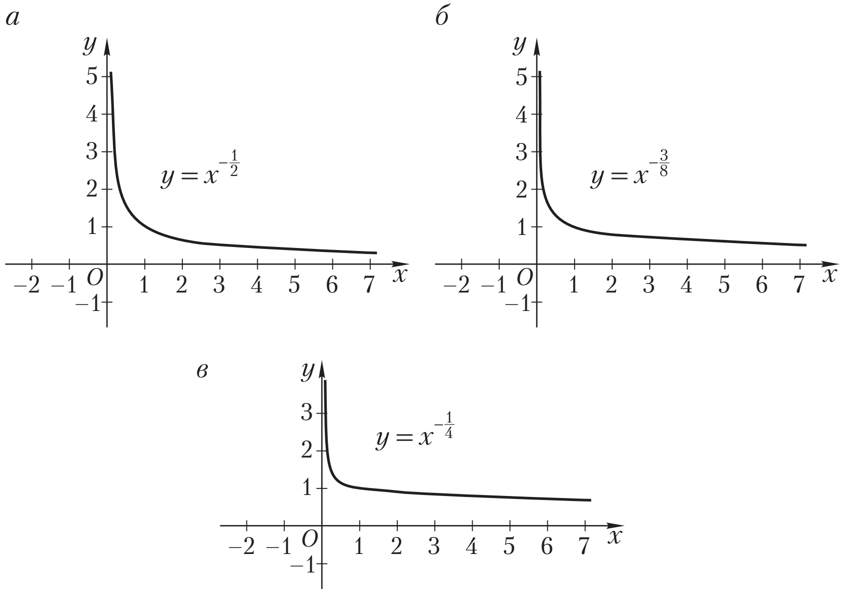


Рис. 6

1. Область определения. $D(y) = (0; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = (0; +\infty)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. Функция наибольшего и наименьшего значений не достигает.

4. Нули функции. Функция нулей не имеет.

5. Промежутки знакопостоянства. Функция принимает только положительные значения.

6. Промежутки монотонности. Функция убывает на всей области определения.

7. Четность и нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной.

8. Периодичность. Функция не является периодической.

9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

Практическая часть

Задание 0. Выполните устно.

1. Какую функцию называют степенной функцией с натуральным показателем?

2. Сформулируйте свойства степенной функции с четным показателем и докажите их. Покажите схематически, как выглядит график этой функции.

3. Верно ли, что если n — четное число, то ось Oy служит осью симметрии графика функции $y = x^n$?

4. Сформулируйте свойства степенной функции с нечетным показателем n и докажите их. Покажите схематически, как выглядит график этой функции при $n > 1$.

5. Верно ли, что если n — нечетное число, то начало координат является центром симметрии графика функции $y = x^n$?

6. Верно ли, что каково бы ни было натуральное число n, график функции $y = x^n$ проходит через начало координат и точку $M(1; 1)$?

7. Пусть точка $A(a; -b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Принадлежат ли графику этой функции точки $B(-a; b)$, $C(-a; -b)$, если известно, что функция f задана формулой: а) $y = x^7$; б) $y = x^8$?

Задание 1. Сравните с нулем значение функции:

а) $f(x) = x^{24}$ при $x = -7; 0; 5$;
б) $f(x) = x^{24}$ при $x = -10; 0; 8$.

Задание 2. Функция задана формулой $f(x) = x^{42}$. Сравните:

а) $f(0{,}002)$ и $f(0{,}003)$;   б) $f(-0{,}02)$ и $f(-0{,}01)$;
в) $f(-3{,}75)$ и $f(3{,}75)$;   г) $f(23)$ и $f(-22)$.

Задание 3. Функция задана формулой $g(x)=x^{105}$. Сравните:

а) $g(9{,}1)$ и $g(10{,}03)$;
б) $g(-17{,}2)$ и $g(-5{,}3)$;
в) $g(-100{,}1)$ и $g(0)$;
г) $g(-0{,}001)$ и $g(0{,}5)$.

Задание 4. Сравните:

а) 6^{20} и 7^{20};
б) $(0{,}01)^{16}$ и $0{,}02^{16}$;
в) $0{,}99^{10}$ и 1;
г) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{12}$ и $\left(-\frac{1}{7}\right)^{12}$;
д) $(-21)^4$ и $(-20)^4$;
е) $(-1{,}01)^{14}$ и $(-1{,}03)^{14}$.

Задание 5. Сравните:

а) 4^9 и 5^9;
б) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^5$;
в) $(0{,}999)^{13}$ и 1;
г) $(-321)^3$ и $(-322)^3$;
д) $\left(-\frac{1}{13}\right)^{15}$ и $\left(-\frac{1}{12}\right)^{15}$;
е) $(-0{,}999)^{17}$ и $(-1)^{17}$.

Задание 6. Проходит ли график функции $y=x^5$ через точки $A(3;\,243)$, $B(-3;\,243)$, $C(-5;\,-3125)$?

Задание 7. Используя калькулятор, найдите с точностью до 0,01 значения функции:

а) $x=y^5$ при $x=0{,}35;\ -1{,}5;\ 1{,}3$;
б) $y=x^6$ при $x=0{,}43;\ 3{,}4;\ -2{,}5$.

Задание 8. Изобразите схематически график функции:

а) $y=x^4$;
б) $y=x^5$;
в) $y=x^6$;
г) $y=x^7$.

Задание 9. Используя свойства степенной функции, выясните, сколько решений имеет уравнение:

а) $x^{18}=2$;
б) $x^{100}=100$;
в) $x^{40}=0$;
г) $x^{81}=0{,}01$;
д) $x^{60}=-60$;
е) $x^{11}=-3$.

Задание 10. При каких действительных значениях a уравнение $x^{2n}=a$, где n — натуральное число:

а) имеет два корня;
б) имеет один корень;
в) не имеет корней?

Задание 11. Докажите, что уравнение $x^{2n-1}=b$, где n — натуральное число, b — любое действительное число, имеет один корень.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $f(-7)>0$, $f(0)=0$, $f(5)>0$; б) $f(-10)<0$, $f(0)=0$, $f(8)>0$.

К заданию 2. а) $f(0{,}002)<f(0{,}003)$; б) $f(0{,}01)<f(0{,}02)$; в) $f(-3{,}75)=f(3{,}75)$; г) $f(22)<f(23)$.

К заданию 3. а) $g(9{,}1)<g(10{,}03)$; б) $g(-17{,}2)<g(-5{,}3)$; в) $g(-100{,}1)<g(0)$; г) $g(-0{,}001)<g(0{,}5)$.

К заданию 4. а) $6^{20}<7^{20}$; б) $(0{,}01)^{16}<(0{,}02)^{16}$; в) $(0{,}99)^{10}<1$; г) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{12}>\left(-\frac{1}{7}\right)^{12}$; д) $(-21)^4>(-20)^4$; е) $(-1{,}01)^{14}<(-1{,}03)^{14}$.

К заданию 5. а) $4^9<5^9$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^5>\left(\frac{1}{5}\right)^5$; в) $(0{,}999)^{13}<1$; г) $(-321)^3>(-322)^3$; д) $\left(-\frac{1}{13}\right)^{15}<\left(-\frac{1}{12}\right)^{15}$; е) $(-0{,}999)^{17}>(-1)^{17}$.

К заданию 6. Да; нет; да.

К заданию 9. а) Два; б) два; в) одно; г) одно; д) нет решений; е) одно.

К заданию 10. а) $a>0$; б) $a=0$; в) $a<0$.

УЭ-3. ЛОГИКА ОБОСНОВАНИЯ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: СПОСОБ ПРОВЕРКИ

Цель: уяснить сущность способа проверки как одного из способов логического обоснования процесса решения иррациональных уравнений.

Теоретическая часть

Понятие иррационального уравнения. Уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня или входит в основание степени с дробным показателем, называется **иррациональным**.

Например, уравнения

$$\sqrt{11-x}=3,$$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-10}=1, \sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{x+5}=1, (x-2)^{\frac{1}{2}}=5$$

являются иррациональными.

Под областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ будем понимать множество, которое является пересечением областей определения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Например, областью определения уравнения $\sqrt{x}=1$ является множество неотрицательных чисел, а областью определения уравнения $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-2}+3$ является множество значений x, при которых одновременно неотрицательны оба подкоренных выражения $2x+1 \geq 0$ и $x-2 \geq 0$, т. е. область определения данного уравнения — числовой промежуток $[2; +\infty)$.

Сущность способа проверки. Основная идея решения многих уравнений, в частности иррациональных, состоит в том, что данное уравнение с помощью некоторых преобразований сводят к уравнению (системе или совокупности уравнений или неравенств и т. д.), которое легко решается.

Выполняя преобразования, получают цепочку уравнений (систем, совокупностей), в которой каждое новое уравнение (система, совокупность) может быть равносильно или неравносильно предыдущему (предыдущей). Возникают вопросы: все ли найденные значения переменной являются корнями исходного уравнения; имеет ли уравнение другие корни, кроме найденных?

Можно выделить три способа логики обоснования процесса решения любых уравнений, в частности иррациональных: способ проверки, способ равносильных переходов, третий способ — угадываем корень и доказываем, что других нет.

Рассмотрим способ проверки. Пусть даны два уравнения

$$f_1(x)=g_1(x), \tag{1}$$

$$f_2(x)=g_2(x). \tag{2}$$

Напомним, что если каждый корень уравнения (1) является одновременно корнем уравнения (2), то уравнение (2) называют следствием уравнения (1). Этот факт записывают с помощью знака $\Rightarrow$:

$$\left(f_1(x)=g_1(x)\right) \Rightarrow \left(f_2(x)=g_2(x)\right)$$

и говорят: «Из уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ следует уравнение $f_2(x) = g_2(x)$».

Укажем некоторые преобразования иррационального уравнения, которые приводят к уравнению-следствию.

1) $\left(f(x)=g(x)\right) \Rightarrow \left(f^{2k}(x)=g^{2k}(x)\right)$, где k — натуральное число.

Например, из уравнения $\sqrt{x}=-x$ следует уравнение $x=x^2$, так как единственный корень первого уравнения ($x=0$) является корнем второго уравнения.

2) $\left(f(x)\cdot g(x)=0\right) \Rightarrow \left(f(x)=0 \text{ или } g(x)=0\right)$.

Например, из уравнения $\left(x^2-9\right)\sqrt{x+1}=0$ следует совокупность уравнений $x^2-9=0$ или $x+1=0$. В самом деле, корнями уравнения $\left(x^2-9\right)\sqrt{x+1}=0$ являются числа -1 и 3; решениями совокупности являются числа -3; 3 и -1. Всякий корень уравнения является решением совокупности.

Схема решения уравнений способом проверки. Пусть требуется решить уравнение $l(x)=0$ на числовом множестве $\boldsymbol{X}$. Выполняя преобразования, которые приводят к уравнениям-следствиям, получим «цепочку» уравнений:

$$
\begin{gathered}
l(x)=0,\\
\Downarrow\\
l_1(x)=0,\\
\Downarrow\\
\ldots\\
\Downarrow\\
l_k(x)=0.
\end{gathered}
$$

Очевидно, что множество корней уравнения $l_k(x)=0$ будет содержать все корни уравнения $l(x)=0$ и, возможно, некоторые числа, не являющиеся корнями исходного уравнения (их называют посторонними корнями). Поэтому в конце решения необходимо выполнить проверку — отобрать те из найденных чисел, которые являются корнями исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{3x+4}=x$.

Решение. Имеем:

$$\left(\sqrt{3x+4}=x\right) \Rightarrow \left(3x+4=x^2\right) = \left(x^2-3x-4=0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x=-1 \text{ или } x=4\right).$$

Проверка. При $x = -1$ имеем неверное числовое равенство $\sqrt{1} = -1$, значит, число -1 не является корнем исходного уравнения.

При $x = 4$ имеем верное числовое равенство $\sqrt{16} = 4$, значит, число 4 является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб и, применяя формулу $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, преобразуем его:

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{(2x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)}\right) = 1.$$

Поскольку по условию $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$, получим:

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1, \quad 3 \cdot \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 3 - 3x,$$

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1 - x.$$

Еще раз возведем в куб обе части уравнения и получим:

$$(2x-1)(x-1) = (1-x)^3, \quad (x-1)\left((x-1)^2 + 2x - 1\right) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = 0$.

Заметим, что в процессе решения этого уравнения не все выполняемые переходы были гарантированно равносильными. Например, замена выражения $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}$ числом 1 не является тождественным преобразованием.

При $x = 1$ имеем $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{0} = 1$ — верное числовое равенство, а при $x = 0$ имеем $\sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1} = 1$ — неверное равенство. Значит, только число 1 является корнем этого уравнения.

Ответ: 1.

Практическая часть

Задание 0. Выполните устно.

1. Какие уравнения называются иррациональными? Приведите пример иррациональных уравнений.
2. Назовите способы обоснования процесса решения уравнений. В чем заключается сущность способа проверки при решении уравнений?
3. Почему при возведении обеих частей иррационального уравнения в квадрат необходимо делать проверку? Каким образом ее можно упростить?

4. Какие из следующих преобразований могут привести к уравнению, неравносильному исходному:

а) $\left(\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\right)\Rightarrow\left(f(x)=g(x)\right)$;

б) $\left(\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=h(x)\right)\Rightarrow\left(\sqrt{f(x)\cdot g(x)}=h(x)\right)$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}=h(x)\right)\Rightarrow\left(\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=h(x)\right)$;

г) $\left(\left(\sqrt{f(x)}\right)^2=0\right)\Rightarrow\left(f(x)=0\right)$?

Задание 1. Какие из чисел -2; 2; $\sqrt{2}$ являются корнями уравнения:

а) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$;

б) $\sqrt{1+x\cdot\sqrt{2x^2-8}}=1$?

Задание 2. Решите уравнение и укажите количество корней:

а) $\sqrt{x^2+x-1}=x$;
б) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;
в) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$;
г) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$;
д) $\sqrt{5+|x-2|}=1-x$;
е) $\sqrt{3-|x+3|}=x+2$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$;
б) $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$.

Задание 4. Найдите значение выражения $\dfrac{x_0(x_0-1)}{x_0^2+5}$, если x_0 — корень уравнения:

а) $\sqrt{5x^2+20x}=\sqrt{-5-6x}$;
б) $\sqrt{-2x-3}=\sqrt{x^2-38}$;
в) $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$;
г) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$.

Ваш помощник

К заданию 2. а) 1; б) 1; в) 1; г) 1; д) 1; е) 1.
К заданию 3. а) 1; б) $-\sqrt{3}$.
К заданию 4. а) 1; б) $\dfrac{28}{27}$; в) $\dfrac{2}{9}$; г) $\dfrac{4}{7}$.

УЭ-4. ЛОГИКА ОБОСНОВАНИЯ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: СПОСОБ РАВНОСИЛЬНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Цель: уяснить сущность способа равносильных переходов как одного из способов логического обоснования процесса решения иррациональных уравнений.

Теоретическая часть

Сущность способа равносильных переходов. Напомним определение равносильных уравнений.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют **равносильными** на множестве X, если множества их корней совпадают (равны) на этом множестве.

Для обозначения равносильности уравнений используется знак $\Leftrightarrow$. Запись $\left(f(x)=0\right) \Leftrightarrow \left(g(x)=0\right)$ означает, что уравнения $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ равносильны.

Например, уравнения $(x-2)\sqrt{x+1}=0$ и $(x-2)(x+1)=0$ равносильны на множестве $\boldsymbol{R}$, так как имеют на нем одно и то же множество решений: $\{-1; 2\}$.

Уравнения $|x|=-3$ и $\sqrt{x}=-5$ равносильны на множестве $\boldsymbol{R}$, так как оба не имеют корней, т. е. множества их корней совпадают (оба пустые).

Уравнения $\sqrt{x}=1$ и $x^2 = 1$ не равносильны на множестве $\boldsymbol{R}$, так как первое уравнение имеет единственный корень, а второе имеет два корня: -1 и 1. Однако эти уравнения равносильны на множестве неотрицательных чисел (т. е. на области определения первого уравнения), так как каждое из них имеет на этом множестве единственный корень 1.

Заметим, что уравнение равносильно системе (совокупности и т. п.) на множестве X, если множество корней уравнения совпадает с множеством решений системы (совокупности и т. п.) на этом множестве.

Схема решения уравнений способом равносильных переходов. Пусть требуется решить уравнение $f(x) = 0$ на множестве X. Заменяя одно уравнение другим, равносильным ему на множестве X, мы получаем цепочку равносильных уравнений:

$$f(x)=0,$$
$$\Downarrow$$
$$f_1(x)=0,$$
$$\Downarrow$$
$$\ldots$$
$$\Downarrow$$
$$f_k(x)=0.$$

Все корни уравнения $f_k(x)=0$ являются корнями исходного уравнения $f(x)=0$ и наоборот, так как отношение равносильности на множестве X обладает свойством транзитивности: уравнение $f(x)=0$ равносильно уравнению $g(x)=0$ на множестве X, а уравнение $g(x)=0$ равносильно уравнению $h(x)=0$ на множестве X, то уравнение $f(x)=0$ равносильно уравнению $h(x)=0$ на этом же множестве. Поэтому проверка в этом случае не является обязательной частью решения.

Основные равносильности. Укажем основные равносильности (равносильные переходы), используемые при решении иррациональных уравнений.

1. $\left(\sqrt{f(x)}=a\right)\Leftrightarrow\left(f(x)=a^2\right)$, если $a>0$.

Данная равносильность основывается на определении арифметического квадратного корня.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{5-\left|1-x^2\right|}=2$.

Решение. Имеем:

$$\left(\sqrt{5-\left|1-x^2\right|}=2\right)\Leftrightarrow\left(5-\left|1-x^2\right|=4\right)\Leftrightarrow\left(\left|1-x^2\right|=1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l}1-x^2=1,\\1-x^2=-1\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l}x^2=0,\\x^2=2\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=\sqrt{2},\\x=-\sqrt{2}.\end{array}\right.\right)$$

Ответ: $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$.

2. $\left(\sqrt{f(x)}=g(x)\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}g(x)\geq 0,\\f(x)=g^2(x)\end{cases}\right)$.

Докажите эту равносильность самостоятельно.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{3-|x+5|}=x+2$.

Решение. Имеем:

$$\left(\sqrt{3-|x+5|}=x+2\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+2\geq 0,\\ 3-|x+5|=(x+2)^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geq -2,\\ 3-(x+5)=x^2+4x+4\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geq -2,\\ x^2+5x+6=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geq -2,\\ \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=-3\end{array}\right.\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=-2).$$

Ответ: –2.

3. а) $\left(\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ f(x)=g(x)\end{cases}\right)$;

б) $\left(\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f(x)=g(x)\end{cases}\right)$.

Докажите эти равносильности самостоятельно.

Заметим, что пользуются равносильностью 3а или 3б в зависимости от того, какое неравенство, $f(x)\geq 0$ или $g(x)\geq 0$, решить легче.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{3-x}=\sqrt{x^2-5x-2}$.

Решение. Имеем:

$$\left(\sqrt{3-x}=\sqrt{x^2-5x-2}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3-x\geq 0,\\ 3-x=x^2-5x-2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\leq 3,\\ x^2-4x-5=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\leq 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=-1).$$

Ответ: $\{-1\}$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}=\sqrt{4+x}$.

Решение. Имеем:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3+x}}=\sqrt{4+x}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2-\sqrt{3+x}=4+x,\\ 4+x\geq 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \sqrt{3+x} = -x-2, \\ x \geq -4 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 3+x = (-x-2)^2, \\ -x-2 \geq 0, \\ x \geq -4 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0, \\ -4 \leq x \leq -2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ -4 \leq x \leq -2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ответ: $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

4. $\left(\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = 0\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}\right).$

Обоснуйте данный равносильный переход самостоятельно.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x^2 + 2x - 6} \cdot \sqrt{x-9} = 0$.

Решение. Имеем:

$$\left(\sqrt{x^2 + 2x - 6} \cdot \sqrt{x-9} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 2x - 6 = 0, \\ x - 9 \geq 0 \end{cases} \\ \text{или} \begin{cases} x - 9 = 0, \\ x^2 + 2x - 6 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1-\sqrt{7}, \\ x = -1+\sqrt{7}, \end{array}\right. \\ x \geq 9 \end{cases} \\ \text{или } x = 9 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x = 9).$$

Ответ: 9.

5. а) $\left(\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = a\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \cdot g(x) = a^2 \end{cases}\right)$, если $a > 0$;

б) $\left(\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = a\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \cdot g(x) = a^2 \end{cases}\right)$, если $a > 0$.

Докажите эти равносильности самостоятельно.

Решение многих иррациональных уравнений, содержащих корни нечетной степени, основываются на теореме:

Если n — нечетное натуральное число (т. е. $n = 2k+1, k \in \boldsymbol{N}$), то уравнения $f(x) = g(x)$ и $f^{2k+1}(x) = g^{2k+1}(x)$ равносильны.

Исходя из данной теоремы можно утверждать, что имеют место равносильности:

6. $\left(\sqrt[2k+1]{f(x)}=a\right)\Leftrightarrow\left(f(x)=a^{2k+1}\right)$, где $a\in\boldsymbol{R}$, $k\in\boldsymbol{N}$.

7. $\left(\sqrt[2k+1]{f(x)}=\sqrt[2k+1]{g(x)}\right)\Leftrightarrow\left(f(x)=g(x)\right)$.

8. $\left(\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x)\right)\Leftrightarrow\left(f(x)=g(x)^{2k+1}\right)$.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-2x-3}=x-1$.

Решение. Имеем:

$$\left(\sqrt[3]{x^3-2x-3}=x-1\right)\Leftrightarrow\left(x^3-2x-3=(x-1)^3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^3-2x-3=x^3-3x^2+3x-1\right)\Leftrightarrow\left(3x^2-5x-2=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\right).$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$; 2.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(x+1)(x+6)}=6$;

б) $\sqrt{23+3x-5x^2}=3$;

в) $\sqrt{|5-x|+1}=2$;

г) $\sqrt{7-\left|3-x^2\right|}=1$;

д) $\sqrt{\left||x+2|+x\right|}=1$;

е) $\sqrt{6+\sqrt{x-3}}=2\sqrt{2}$;

ж) $\sqrt{27-\sqrt{16-x}}=5$;

з) $\sqrt{82-\sqrt{x-8}}=9$.

Задание 2. Равносильны ли на множестве действительных чисел уравнения:

а) $\sqrt{x-3}=7$ и $x-3=49$;

б) $\sqrt[3]{1-x}=-2$ и $1-x=-8$;

в) $\sqrt[4]{3-x}=-2$ и $3-x=16$;

г) $\sqrt[5]{-x^3-1}=-1$ и $x^3+1=1$;

д) $\sqrt{6-x}=x$ и $6-x=x^2$;

е) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}$ и $x^2-4=5$;

ж) $\sqrt[4]{x-1}=|x|$ и $x-1=\left(|x|^4\right)$?

Задание 3. Почему уравнения $\sqrt{x-1}=3$ и $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=9$ — равносильны, а уравнения $\sqrt{x-1}=3-x$ и $\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(3-x)^2$ — неравносильны?

Задание 4. Решите уравнение и в ответе запишите произведение корней или корень (если он один):

а) $\sqrt[4]{x^2-7}=2;$ б) $\sqrt[5]{x-3}=2;$

в) $\sqrt[4]{6-x^2}=x;$ г) $\sqrt[3]{x^2+14x-16}=-4.$

Задание 5. Решите уравнение:

а) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3;$ б) $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3;$

в) $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15;$ г) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1;$

д) $\sqrt{3x+3}+2\sqrt{2x-3}=5;$ е) $2\sqrt{x+18}=15-\sqrt{4x-3}.$

Задание 6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2};$

б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3};$

в) $\sqrt{x+7}=\sqrt{3x+19}-\sqrt{x+2};$

г) $\sqrt{3x+5}+\sqrt{10-x}=\dfrac{15}{\sqrt{10-x}};$

д) $\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\dfrac{6}{\sqrt{3-x}}.$

Задание 7. Решите уравнение и запишите сумму корней или корень (если он один):

а) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x};$

б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12};$

в) $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}=0;$

г) $\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-2}=\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3};$

д) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{2x+5}+\sqrt{3x}.$

Ваш помощник

К заданию 1. а) –10; 3; б) –1,4; 2; в) 2; 8; г) –3; 3.
К заданию 4. а) –23; б) 35; в) $\sqrt{2}$; г) 48.
К заданию 5. а) –5; 4; б) 5; г) 3; д) 2; е) 7.
К заданию 6. а) 1; б) 2; в) 2; г) –1,25; 5; д) –3.
К заданию 7. а) 4; б) 15; в) 1; г) 4,25; д) 3.

УЭ-5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ $f(x) = g(x)$ К УРАВНЕНИЮ $f^n(x) = g^n(x)$

Цель: уяснить сущность такого метода решения уравнений, как переход от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $f^n(x)=g^n(x)$.

Теоретическая часть

Рассмотрим один из методов решения иррациональных уравнений — метод перехода от уравнения

$$f(x)=g(x)$$

к уравнению

$$f^n(x)=g^n(x).$$

Возведение, возможно неоднократное, обеих частей уравнения в соответствующую степень является важным методом решения иррациональных уравнений. Можно доказать, что

$$\big(f(x)=g(x)\big)\Rightarrow\left(f^{2k}(x)=g^{2k}(x)\right),\text{ где } k\in \boldsymbol{N};$$

$$\big(f(x)=g(x)\big)\Leftrightarrow\left(f^{2k+1}(x)=g^{2k+1}(x)\right),\text{ где } k\in \boldsymbol{N}.$$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x-6}=5-\sqrt{x+4}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2x-6=25-10\sqrt{x+4}+x+4.$$

Тогда $10\sqrt{x+4}=35-x$. Снова возведем обе части уравнения в квадрат: $100(x+4)=1225-70x+x^2$, или $x^2-170x+825=0$. Полученное уравнение имеет корни: $x=5$ или $x=165$.

Проверка. При $x=5$ имеем $\sqrt{4}=5-\sqrt{9}$ — верное числовое равенство, значит, число 5 — корень исходного уравнения.

При $x=165$ имеем:

$$\sqrt{2\cdot 165-6}=\sqrt{324}=18,$$

$$5-\sqrt{165}=5-13=-8.$$

$18\neq-18$. Значит, число 165 не является корнем исходного уравнения.

Ответ: 5.

Для решения следующего уравнения необходимо знать тождество $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt{x+1}$.

Решение. Возведя обе части данного уравнения в шестую степень, получим $(2x-1)^2=(x+1)^3$.

Раскрывая скобки и приводя подобные, приходим к уравнению

$$x^3-x^2+7x=0,$$

т. е. $x=0$ или $x^2-x+7=0$.

Уравнение $x^2-x+7=0$ не имеет действительных корней, поскольку $D<0$.

Если $x=0$, то $\sqrt[3]{-1}=\sqrt{1}$ — ложное равенство. Значит, $x=0$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\varnothing$.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение и укажите количество его корней:

а) $\sqrt{16x^2+16x+29}=5$;

б) $\sqrt[3]{4x^2-36x+17}=-4$;

в) $\sqrt[4]{246+23x+5x^2}=4$;

г) $\sqrt[7]{x^2-5x+3}=-1$;

д) $\sqrt{5-\left|1-x^2\right|}=2$;

е) $\sqrt{\left|5-x^2\right|+8}=3$.

Задание 2. Укажите количество элементов множества решений уравнения:

а) $\sqrt{x^2-7x+12}=2x-6$;

б) $\sqrt{6-14x+9x^2}=2x-1$;

в) $\sqrt[3]{9x+1}=1+3x$;

г) $\sqrt[3]{9x-1}=3x-1$;

д) $\sqrt[3]{7x^3+36x^2+63x+27}=2x+3$;

е) $\sqrt[3]{9x^3-36x^2+53x-27}=2x-3$;

ж) $\sqrt{7x^4+24x^3+13x^2+20x+25}=2x+5$.

Задание 3. Вычислите $17x_0-13$, где x_0 — корень уравнения:

а) $\dfrac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{5-x}}=2$;

б) $\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2x+1}}=3$;

в) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-8}}{\sqrt{3x-1}}=0$;

г) $\dfrac{\sqrt{2x-7}}{\sqrt{x+6}}=1$.

Задание 4. Решите уравнение и укажите корень, если он один, либо произведение его корней:

а) $\sqrt{x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x - 4}$;

б) $\sqrt{x^3 - 3x + 1} = \sqrt{1 - 2x}$;

в) $\sqrt[10]{3x^2 - 4x + 1} = \sqrt[10]{2x + 3}$;

г) $\sqrt{3x - 1} = \sqrt[4]{x^2 - 3x + 1}$;

д) $\sqrt[3]{3x + 2} = \sqrt{x + 2}$;

е) $\sqrt[3]{2x - 1} = \sqrt{x + 1}$;

ж) $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 4x + 15} = \sqrt{x^3 - 5x^2 + 12}$;

з) $\sqrt[3]{x^2 - 2x} - \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} = 0$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) 1; б) 1; в) 2; г) 2; д) 3; е) 4.
К заданию 2. а) 1; б) 1; в) 2; г) 2; д) 3; е) 3; ж) 2.
К заданию 3. а) 38; б) –20; в) 55; г) 208.
К заданию 4. а) 5; б) 0; в) $-\frac{2}{3}$; г) $\frac{3}{8}$; д) –2; е) 0; ж) 1; з) 6.

УЭ-6. МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: на примерах решения иррациональных уравнений закрепить умения и навыки по использованию метода разложения на множители.

Теоретическая часть

Пусть иррациональное уравнение $f(x) = 0$ приведено к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$. Тогда на области определения уравнения $f(x)$ уравнение $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0,\ \ldots,\ f_n(x) = 0.$$

Пример 1. Решить уравнение $\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{x+1}=0.$

Решение. Имеем:

$$\left(\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{x+1}=0\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+1\geq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x^2-4=0,\\ x+1=0\end{array}\right.\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geq -1,\\ \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=2,\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-1\end{array}\right.\right).$$

Ответ: -1; 2.

Пример 2. Решить уравнение $(2-x)\sqrt{x^2-x-20}=12-6x.$

Решение. 1-й способ. Заметим, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из его множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл. Поэтому имеем:

$$\left((2-x)\sqrt{x^2-x-20}=12-6x\right)\Leftrightarrow\left((2-x)\left(\sqrt{x^2-x-20}-6\right)=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2-x=0,\\ x^2-x-20\geq 0\ \text{ или }\ \sqrt{x^2-x-20}-6=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x=2,\\ x^2-x-20\geq 0\ \text{ или }\ x^2-x-20=36\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-56=0)\Leftrightarrow (x=-7 \text{ или } x=8).$$

Ответ: $\{-7; 8\}$.

2-й способ. Имеем: $(2-x)\left(\sqrt{x^2-x-20}-6\right)=0,$

$2-x=0$ или $\sqrt{x^2-x-20}-6=0,$
$x=2$ или $x^2-x-56=0,$
$x=2$ или $x=-7$ или $x=8.$

Проверка. При $x=2$ выражение $\sqrt{x^2-x-20}$ не имеет смысла, значит, число 2 не является корнем уравнения.

При $x=-7$ имеем $9\sqrt{36}=54$ — верное числовое равенство, значит, число -7 — корень уравнения.

При $x=8$ имеем $-6\sqrt{36}=-36$ — верное числовое равенство, значит, число 8 — корень данного уравнения.

Ответ: -7; 8.

Практическая часть

Задание 1. Найдите сумму действительных корней уравнения:

а) $\left(16-x^2\right)\cdot\sqrt{-2x-6}=0$; б) $\left(4x-x^2-3\right)\cdot\sqrt{x^2-2x}=0.$

Задание 2. Найдите произведение корней уравнения:

а) $\left(\sqrt{x}-5\right)\left(x^4-10x^2+9\right)=0$;

б) $\left(\sqrt{x}-4\right)\left(x^4-29x^2+100\right)=0.$

Задание 3. Сколько отрицательных корней имеет уравнение:

а) $\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{x+1}=0$;

б) $\left(x^2-5x+6\right)\cdot\sqrt{2-x}=0$;

в) $(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}=0$;

г) $\sqrt{7-x^2}\cdot\sqrt{10-3x-x^2}=0$;

д) $(3x+5)\cdot\sqrt{5x^2+22x-15}=0$;

е) $(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x-2}=2x+2$;

ж) $(x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$;

з) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$?

Ваш помощник

К заданию 1. а) –7; б) 5.
К заданию 2. а) 75; б) 160.
К заданию 3. а) 1; б) 1; в) 2.

УЭ-7. МЕТОД ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИ РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: на примерах решения иррациональных уравнений закрепить умения и навыки по использованию метода введения новой переменной.

Теоретическая часть

Сущность метода введения новой переменной. При решении иррациональных уравнений часто используется метод введения новой переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$

Решение. Сделаем подстановку $\sqrt{x^2+11}=y$ $(y\ge 0)$, тогда $x^2+11=$ $=y^2$.

Имеем: $\left(\begin{cases}y^2+y-42=0,\\ y\ge 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-7,\\ y=6,\end{array}\right.\\ y\ge 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(y=6).$

Далее получаем:

$$\left(\sqrt{x^2+11}=6\right)\Leftrightarrow\left(x^2+11=36\right)\Leftrightarrow\left(x^2=25\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(|x|=5)\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=5\end{array}\right.\right).$$

Ответ: –5; 5.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

Решение. *1-й способ*. Если обозначить $\sqrt{3x^2-2x+8}=y$ $(y\ge 0)$, то $3x^2-2x+15=\left(3x^2-2x+8\right)+7=y^2+7$, и исходное уравнение сводится к уравнению $\sqrt{y^2+7}+y=7.$

Далее имеем:

$$\left(\sqrt{y^2+7}=7-y\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y\le 7,\\ y^2+7=49-14y+y^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow(y=3).$$

Следовательно,

$\sqrt{3x^2-2x+8}=3,$

$3x^2-2x+8=9,$

$3x^2-2x-1=0.$

$x=1$ или $x=-\dfrac{1}{3}.$

Проверка не нужна, поскольку выполнялись равносильные переходы.

2-й способ. Если сделаем другую подстановку: $3x^2 - 2x + 15 = t$, то исходное уравнение сведется к уравнению $\sqrt{t} + \sqrt{t-7} = 7$.

Возведя его обе части в квадрат, получим:

$t + 2\sqrt{t^2 - 7t} + t - 7 = 49,$

$2\sqrt{t^2 - 7} = 56 - 2t,$

$\sqrt{t^2 - 7} = 28 - t.$

Снова возведем в квадрат обе части уравнения и выполним равносильные преобразования:

$t^2 - 7t = 784 - 56t + t^2,$

$49t = 784,\ t = 16.$

Следовательно, $3x^2 - 2x + 15 = 16$ или $3x^2 - 2x - 1 = 0$. Откуда $x = 1$ или $x = -\frac{1}{3}$.

Проверка показывает, что числа $-\frac{1}{3}$ и 1 являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $-\frac{1}{3}$; 1.

Вопрос. Какую еще подстановку можно использовать для решения данного уравнения?

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение и запишите корень, если он один, либо произведение корней:

а) $x + 5\sqrt{x} - 84 = 0;$

б) $7\sqrt{x} - 2x = -15;$

в) $2\sqrt[3]{x^2} = 5\sqrt[3]{x} + 3;$

г) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[6]{x} = 3;$

д) $x + \sqrt[3]{x} - 2 = 0;$

е) $x - 4\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 6 = 0;$

ж) $x^{10} - x^5 - 2\sqrt{x^5} + 2 = 0;$

з) $\sqrt{x\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}}} - 56.$

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt[4]{x+5} = 12;$

б) $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6;$

в) $\left(\sqrt[3]{x+1} - 2\right)\left(\sqrt[3]{x+1} - 3\right) = 12;$

г) $x^2 + \sqrt{x^2 + 20} = 22;$

д) $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0;$

е) $x^2-7\sqrt{x^2-16x}=16x-6;$

ж) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2.$

Задание 3. Решите уравнение и укажите количество положительных корней:

а) $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}};$

б) $10\sqrt{x^2-x-1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}=13;$

в) $\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=4;$

г) $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=\dfrac{10}{3};$

д) $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=\dfrac{5}{2};$

е) $\sqrt[5]{\dfrac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{16x}}=\dfrac{5}{2};$

ж) $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2;$

з) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=12.$

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x+1}{2x-3}+\dfrac{x-3}{3x-2}=\sqrt[2]{\dfrac{x^2-2x-3}{6x^2-13x+6}};$

б) $\dfrac{2+x}{\sqrt{2}+\sqrt{2+x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{2}-\sqrt{2+x}}=2\sqrt{2};$

в) $\dfrac{\sqrt[4]{18-x}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{18-x}-\sqrt[4]{x-1}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{\dfrac{18-x}{x-1}};$

г) $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2;$

д) $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2$;

е) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+34x+37}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+34x-37}=2$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) 49; б) 25; в) $-\frac{27}{8}$; г) 1; д) 1; е) –216; ж) 1; з) 1024.

К заданию 2. а) 76; б) 2; в) –2; 215; г) –4; 4; д) нет решений; е) –2; 8; $8\pm\sqrt{65}$; ж) –4; 4.

К заданию 3. а) 1; б) 2; в) 1; г) 1; д) 2; е) 1; ж) 1; з) 1.

К заданию 4. а) –11; б) –2; $1\pm\sqrt{5}$; в) 2; г) 3; 5; д) –2; 2; е) –2; 2.

УЭ-8. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ПРИ РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: выработать прочные умения и навыки по применению функционального метода при решении иррациональных уравнений.

Теоретическая часть

Сущность функционального метода. При решении иррациональных уравнений вида $f(x)=g(x)$ иногда используется функциональный метод. Он заключается в том, что используются свойства функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ (область определения, множество значений, промежутки знакопостоянства, монотонность, четность или нечетность), анализируются графики этих функций.

Напомним, что под областью определения уравнения $f(x)=g(x)$ понимают пересечение областей определения функций

$$y=f(x) \text{ и } y=g(x),$$

т. е. $D(f)\cap D(g)$. Иногда знание области определения уравнения позволяет показать, что уравнение не имеет решений, или найти решения уравнения непосредственной подстановкой чисел из его области определения.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$.

Решение. Найдем область определения этого уравнения:

$$\begin{cases} x-5\ge 0, \\ 1-x\ge 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} x\ge 5, \\ x\le 1. \end{cases}$$

Эта система неравенств решений не имеет, областью определения является пустое множество, и, следовательно, исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$.

Решение. Найдем область определения уравнения:

$$\left(\begin{cases} 11x+3\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \\ 9x+7\ge 0, \\ x-2\ge 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x\ge -\dfrac{3}{11}, \\ x\le 2, \\ x\ge -\dfrac{7}{9}, \\ x\ge 2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x=2).$$

Поскольку область определения уравнения состоит из одного числа 2, то проверим, является ли оно корнем уравнения: $\sqrt{25}-0=\sqrt{25}-0$ — верное числовое равенство, значит, число 2 — корень уравнения.

Ответ: 2.

Иногда при решении уравнений полезно сравнить множества значений функций, находящихся в левой и правой его частях.

Пример 3. Решить уравнение $1+\sqrt{x+3}=0$.

Решение. Область определения уравнения $[-3;+\infty)$. Поскольку функция $y=1+\sqrt{x+3}$, $D(y)=[-3;+\infty)$ может принимать значения, не меньшие 1, а правая часть уравнения равна 0, то уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 4. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=(x-7)^2(x-5)$$

не имеет решений.

Доказательство. Найдем область определения функции $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}$:

$$\left(\begin{cases}3-x\ge 0,\\ x-2\ge 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\le 3,\\ x\ge 2\end{cases}\right)\Leftrightarrow(2\le x\le 3).$$

Итак, $D(f)=[2;3]$, и, очевидно, функция $f=f(x)$ принимает только положительные значения.

Но при $2\le x\le 3$ функция $g(x)=(x-7)^2(x-5)$ принимает только отрицательные значения, значит, данное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{12-3x^2}-x^2+2x=0$.

Решение. Найдем область определения уравнения:

$$\left(\begin{cases}x^2-4\ge 0,\\ 12-3x^2\ge 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^2\ge 4,\\ x^2\le 4\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x^2=4)\Leftrightarrow\left(\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=2\end{array}\right.\right).$$

Подставляя эти значения x в уравнение, получаем: при $x=-2$ его левая часть не равна нуля, а при $x=2$ — равна нулю. Значит, только число 2 является корнем данного уравнения.

Ответ: 2.

Решение уравнений с использованием свойств монотонности входящих в них функций основывается на следующих теоремах.

Теорема 1. *Если функция $y=f(x)$ возрастает или убывает на промежутке, то уравнение $f(x)=a$, где a — действительное число, может иметь не более одного корня на этом промежутке.*

В самом деле, график возрастающей (убывающей) на промежутке функции $y=f(x)$ может пересекать прямую $y=a$ не более, чем в одной точке на этом промежутке. Рисунок выполните самостоятельно.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{3x-2}=1$.

Решение. Область определения уравнения $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ Поскольку функция $y=3x-2$ является возрастающей, то и функция $y=\sqrt{3x-2}$ является возрастающей. Значит, на промежутке $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ уравнение $\sqrt{3x-2}=1$ может иметь не более одного корня.

Решением данного уравнения является число 1. Следовательно, 1 — единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{x+7}=4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{x+7}$, $D(f)=[0,2;+\infty)$.

Покажем, что функция $y=f(x)$ является возрастающей:

x	$[0,2;+\infty]$ $x_1=1$	$x_2=2$
$5x-1$	4	9
$\sqrt{5x-1}$	2	3
$x+7$	8	9
$\sqrt[3]{x+7}$	2	$\approx 2{,}1$
$f(x)$	4	5,1

Поскольку функция $y=f(x)$ — возрастающая, то уравнение $f(x)=4$ может иметь не более одного корня.

Число 1 является корнем данного уравнения. Следовательно, 1 — единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

Теорема 2. *Если одна из функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ возрастает, а другая убывает на промежутке, то уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного корня на этом промежутке.*

В самом деле, графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, одна из которых возрастает, а другая убывает на промежутке, могут иметь не более одной точки пересечения на этом промежутке (рис. 7).

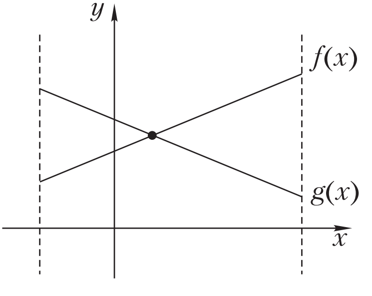


Рис. 7

Пример 8. Решить уравнение $\dfrac{4}{x-2}=x+\sqrt{x-2}$.

Решение. Рассмотрим функции

$$f(x)=\frac{4}{x-2} \text{ и } g(x)=x+\sqrt{x-2}.$$

Область определения уравнения — интервал $(2; +\infty)$.

Поскольку на промежутке $(2; +\infty)$ функция $f=f(x)$ строго убывает, а функция $g=g(x)$ возрастает, то на этом промежутке уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного корня.

Подбором находим, что корнем является число 3. Следовательно, 3 — единственный корень уравнения.

Ответ: 3.

Пример 9. Найти значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-a}=-x+2$ имеет единственный корень.

Решение. *1-й способ*. Воспользуемся графической интерпретацией и рассмотрим графики функций

$$y=-x+2 \text{ и } y=\sqrt{x-a}.$$

Графиком первой функции является прямая, а график второй функции получается из графика функции $y=\sqrt{x}$ с помощью параллельного переноса влево на расстояние $|a|$, если $a<0$, или вправо на расстояние a, если $a>0$ (рис. 8). Исходя из графической интерпретации можно заметить: если $a>2$, то данное уравнение решений не имеет; если $a\le 2$, то данное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a\le 2$.

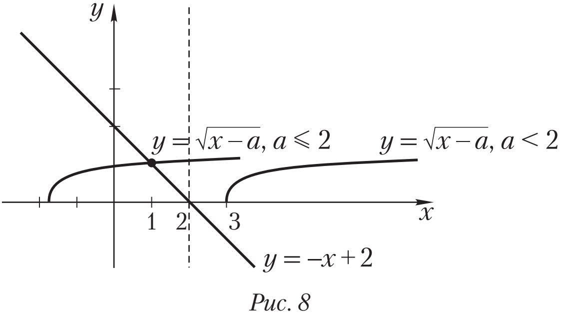


Рис. 8

2-й способ. Имеем:

$$\left(\sqrt{x-a}=-x+2\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-x+2\ge 0,\\ x-a=(-x+2)^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\le 2,\\ x-a=x^2-4x+4\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\le 2,\\ x^2-5x+a+4=0\end{cases}\right).$$

Рассмотрим все возможные случаи, когда полученная система может иметь единственное решение.

1) Квадратное уравнение $x^2-5x+a+4=0$ имеет дискриминант D, равный 0, и одинаковые корни x_1, x_2, не большие 2.

$D=25-4a-16=-4a+9$. $D=0$ при $a=2{,}25$.

$x_1=x_2=-\dfrac{-5}{2}=2{,}25$, но $2{,}25\notin(-\infty;2]$.

Следовательно, $a\ne 2{,}25$.

2) Квадратное уравнение $x^2-5x+a+4=0$ имеет положительный дискриминант D и ровно один из его корней больше 2.

Рассмотрим функцию $y=x^2-5x+a+4$. Нули этой функции существуют и ровно один из них больше 2 тогда и только тогда, когда $y(2)\le 0$: $4-10+a+4\le 0$, откуда находим, что $a\le 2$.

Практическая часть

Задание 0. Выполните устно.

1. В чем сущность метода:

а) переход от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $f^n(x)=g^n(x)$;

б) введение новой переменной;

в) разложение на множители?

2. В чем сущность функционального метода?

3. Может ли оказаться так, что какое-либо действительное число a:

а) является корнем уравнения, но не входит в область его определения;

б) не является корнем уравнения, но входит в его область определения;

в) не является корнем уравнения и не входит в его область определения?

Задание 1. Объясните, почему уравнение не имеет решений:

а) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=-1$;

б) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-7}+2=0$;

в) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}=7$;

г) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4}=0$;

д) $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1$;

е) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x-6}=x^2$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-7}$;

б) $\sqrt{x-6}+\sqrt{2-x}=1$;

в) $\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x-3}=0$;

г) $\sqrt{1-x}=\sqrt[4]{x-1}$;

д) $\sqrt[4]{2x-4}+\sqrt[3]{3x+2}=2-\sqrt{2-x}$;

е) $\sqrt[6]{x^2-81}+\sqrt[6]{81-x^2}=3-\sqrt[3]{x^2-54}$;

ж) $\sqrt{-1-x}=\sqrt[3]{x-8}$;

з) $7\sqrt{x}-2\sqrt{-x}=6+\dfrac{13}{x}$;

и) $\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[4]{-x}+7$;

к) $\sqrt{(x-1)^2(x-5)}=|x-1|\cdot\sqrt{25-x^2}$;

л) $\sqrt[4]{x-8}+\sqrt{10x+3}=2$;

м) $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x-3}=(x-1)^2(x-7)$.

Задание 3. Используя свойство монотонности функций, решите уравнение:

а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$;

б) $\sqrt{3+2x}=\sqrt{4-x}+2$;

в) $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x+7}=3$;

г) $\sqrt[3]{3-5x}-\sqrt[3]{x+1}=2$;

д) $\sqrt{x-1}+x=\dfrac{3}{x-1}$;

е) $-\sqrt[8]{x-2}+\sqrt[4]{18-x}=2$.

Задание 4. Найдите пересечение отрезка [–2; 6] с множеством решений уравнения:

а) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$;

б) $\sqrt{4x(x+1)+1}+\sqrt{4x(x-1)+1}=2$;

в) $\sqrt{9-6x+x^2}+|6-x|=5$;

г) $\sqrt{(x-1)^2(x-5)}=|x-1|\cdot\sqrt{25-x^2}$;

д) $\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1$.

Задание 5. Сколько целых решений на отрезке [–7; 7] имеет уравнение:

а) $\dfrac{16-x^2}{\sqrt{\left(\dfrac{16+x^2}{8}\right)^2-x^2}}=-8;$

б) $\dfrac{30{,}25-x^2}{\sqrt{\left(\dfrac{30{,}25+x^2}{11}\right)^2-x^2}}=-11?$

Задание 6. Решите относительно x уравнение:

а) $\dfrac{t-1}{\sqrt{x+1}}=1;$ б) $\dfrac{t}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1;$

в) $\dfrac{t}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}-2;$ г) $\dfrac{t}{\sqrt{x-2}}=1.$

Задание 7. При каких значениях параметра t уравнение имеет единственный корень:

а) $\sqrt{x-a}=-x+3;$ б) $\sqrt{x+a}=-x+4?$

Задание 8. Найдите значения параметра t, при которых уравнение имеет единственный корень:

а) $\sqrt{tx}=-x+1;$ б) $\sqrt{tx}=x+1.$

Задание 9. Найдите значения параметра t, при которых уравнение $\sqrt{x+t}=x$ имеет корень, принадлежащий отрезку [0; 1].

Ваш помощник

К заданию 2. а) $\varnothing$; б) $\varnothing$; д) 2; е) –9; 9; ж) $\varnothing$; з) $\varnothing$; и) $\varnothing$; к) 5; л) $\varnothing$; м) $\varnothing$.

К заданию 3. а) 1; б) 3; в) 1; г) –1; д) 2; е) 2.

К заданию 4. а) [2; 6); б) [–0,5; 0,5]; в) 2; г) 5; д) [0; 6].

К заданию 6. а) Нет корней при $t\le 1$; $x=t(t-2)$ при $t>1$; б) нет корней при $t<-1$; $x=t+1$ при $t\ge -1$; в) нет корней при $t<-4$; $x=t+4$ при $t\ge -4$; г) нет корней при $t\le 0$; $x=t^2+2$ при $t>0$.

К заданию 8. а) 0; 4; б) 0; 4.

К заданию 9. $0{,}25\le t\le 0$.

УЭ-9. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ОДИН РАДИКАЛ

Цель: закрепить умения и навыки по решению простейших иррациональных неравенств.

Теоретическая часть

Понятие иррационального неравенства. Неравенство, в котором переменная содержится под знаком корня или входит в основание степени с дробным показателем, называется *иррациональным*.

Например, неравенства $\sqrt{x-1}<1$, $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}<2$, $(x-7)^{\frac{1}{2}}<9$ являются иррациональными.

Метод сведения иррационального неравенства к равносильному рациональному неравенству или равносильной системе (совокупности систем и т. п.) рациональных неравенств. Решение иррациональных неравенств по сравнению с решением иррациональных уравнений осложняется тем обстоятельством, что здесь, как правило, исключена возможность выполнения проверки и все переходы от одного неравенства к другому должны быть равносильными.

Рассмотрим основные равносильные переходы, используемые при решении иррациональных неравенств, содержащих один радикал.

I. Пусть n — четное натуральное число и $a\geq 0$, тогда:

а) $\left(\sqrt[n]{f(x)}<a\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ f(x)<a^n\end{cases}\right)$;

б) $\left(\sqrt[n]{f(x)}\leq a\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}f(x)\geq 0,\\ f(x)\leq a^n\end{cases}\right)$;

в) $\left(\sqrt[n]{f(x)}>a\right)\Leftrightarrow\left(f(x)>a^n\right)$;

г) $\left(\sqrt[n]{f(x)}\geq a\right)\Leftrightarrow\left(f(x)\geq a^n\right)$.

Докажем равносильность I а. Пусть x_0 — решение неравенства $\sqrt[n]{f(x)}<a$, тогда $\sqrt[n]{f(x_0)}<a$ — истинное числовое неравенство. Отсюда следует, что $f(x_0)\geq 0$ и, согласно теореме 1 (УЭ-8), из нера-

венства $\sqrt[n]{f(x)} < a$ получаем $f(x_0) < a^n$. Значит, x_0 — решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < a^n. \end{cases}$

Верно и обратное. Пусть x_0 — решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < a^n, \end{cases}$ тогда $f(x_0) \geq 0$ и $f(x_0) < a^n$ — истинные неравенства. Согласно теореме 2 (УЭ-8), имеем: $\sqrt[n]{f(x_0)} < a$ — истинное неравенство, т. е. x_0 — решение неравенства $\sqrt[n]{f(x)} < a$.

Итак, доказана равносильность I а.

Аналогично доказываются другие равносильности.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 < 4. \end{cases}$

Решив эту систему неравенств, найдем, что $1 \leq x < 5$.

Ответ: $[1; 5)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt[4]{17-5x} > 2$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $17-5x > 16$, т. е. $x < 0{,}2$.

Ответ: $(-\infty; 0{,}2)$.

II. Пусть n — нечетное натуральное число, $a \in \boldsymbol{R}$, тогда:

а) $\left(\sqrt[n]{f(x)} < a\right) \Leftrightarrow \left(f(x) < a^n\right)$;

б) $\left(\sqrt[n]{f(x)} \leq a\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \leq a^n\right)$;

в) $\left(\sqrt[n]{f(x)} > a\right) \Leftrightarrow \left(f(x) > a^n\right)$;

г) $\left(\sqrt[n]{f(x)} \geq a\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \geq a^n\right)$.

Докажите эти равносильности самостоятельно.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt[3]{x^2 + 2x} < 2$.

Решение. Возведя обе части данного неравенства в куб, получим неравенство $x^2 + 2x < 8$, равносильное исходному. Решив неравенство $x^2 + 2x - 8 < 0$, находим: $-4 < x < 2$.

Ответ: $(-4; 2)$.

III. Пусть n — четное натуральное число, тогда

а) $\left(\sqrt[n]{f(x)} < g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^n(x) \end{cases}\right)$;

б) $\left(\sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \leq g^n(x) \end{cases}\right)$;

в) $\left(\sqrt[n]{f(x)} > g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^n(x) \end{cases} \end{array}\right.\right)$;

г) $\left(\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right)$.

Докажите эти равносильности самостоятельно.

Пример 4. Найти наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x+5} < x-1$.

Решение. Используя равносильные переходы III а, получаем систему неравенств: $\begin{cases} x+5 \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ x-5 < (x-1)^2. \end{cases}$

Решив каждое неравенство системы, найдем множества решений: $[-5; +\infty)$, $[1; +\infty)$ и $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ соответственно. Их пересечением является множество $(4; +\infty)$. Число 5 является наименьшим целым числом, принадлежащим этому множеству.

Ответ: 5.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{2(x+7)} > x+3$.

Решение. Используя равносильные переходы III б, имеем:

$$\begin{cases} x+3 < 0, \\ 2(x+7) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ 2(x+7) > (x+3)^2. \end{cases}$$

Решив первую систему неравенств этой совокупности, найдем множество ее решений — промежуток [–7; –3). Решив вторую систему, найдем множество ее решений — промежуток [–5; 1). Множеством решений совокупности является объединение этих промежутков, а именно — промежуток [–7; 1).

Ответ: [–7; 1).

IV. Пусть n — нечетное натуральное число, тогда

а) $\left(\sqrt[n]{f(x)} < g(x)\right) \Leftrightarrow \left(f(x) < g^n(x)\right)$;

б) $\left(\sqrt[n]{f(x)} \le g(x)\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \le g(x)\right)$;

в) $\left(\sqrt[n]{f(x)} > g(x)\right) \Leftrightarrow \left(f(x) > g^n(x)\right)$;

г) $\left(\sqrt[n]{f(x)} \ge g(x)\right) \Leftrightarrow \left(f(x) \ge g^n(x)\right)$.

Докажите эти равносильности самостоятельно.

Для решения следующего неравенства необходимо знать формулу куба суммы: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt[3]{19 + x^3} < x + 1$.

Решение. Возведя обе части данного неравенства в куб, получим неравенство, равносильное исходному:

$19 + x^3 < (x+1)^3$;

$19 + x^3 < x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

$x^2 + x - 6 > 0$.

Решив его, найдем: $x < -3$ или $x > 2$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

Пример 7. Решить неравенство $\sqrt[3]{3x^2 + 4x + 1} > x + 1$.

Решение. Возведя обе части данного неравенства в куб, получим неравенство, равносильное исходному:

$3x^2 + 4x + 1 > (x+1)^3$,

$3x^2 + 4x + 1 > x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

$x^3 - x < 0$,

$x(x-1)(x+1) < 0$.

Решив его, найдем: $x < -1$ или $0 < x < 1$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Практическая часть

Задание 0. Выполните устно.

1. Какое неравенство называется иррациональным? Приведите примеры иррациональных неравенств.

2. Какие равносильные переходы применяются при решении простейших иррациональных неравенств?

3. Какие методы используются для решения иррациональных неравенств?

6. Как решаются неравенства $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ методом равносильных переходов:

а) при четном n;

б) при нечетном n?

Задание 1. Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2 - 12x + 27} < 4$; б) $\sqrt{-x^2 - 3x + 4} > 2$;

в) $\sqrt{x^2 - x - 1} \le 1$; г) $\sqrt{x^2 + x + 1} < 1$;

д) $\sqrt{1 + 6x - 5x^2} > 1$; е) $\sqrt{2x^2 - 11x + 18} \le 2$.

Задание 2. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}} < 1$; б) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-7}} \ge 2$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2 - x} < x$; б) $\sqrt{x + 5} < 7 - x$;

в) $\sqrt{x - 4} > 1 - x$; г) $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

В ответе укажите наименьшее целое решение неравенства.

Задание 4. Найдите количество целых решений неравенства:

а) $x - 3 < \sqrt{x + 9}$; б) $\sqrt{x + 7} > x + 5$;

в) $x + 1 < \sqrt{2x + 10}$; г) $\sqrt{x + 33} > x + 3$.

Задание 5. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

а) $6 - 2x < \sqrt{8x + 8}$; б) $\sqrt{4x + 5} > 7 - 2x$.

Задание 6. Решите неравенство:

а) $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 4} > x$; б) $\sqrt[5]{x^5 + 4x^2 - 36} < x$;

в) $\sqrt[3]{x^9 - x^2 + 14x + 15} > x$; г) $\sqrt[3]{x^2 - 8} > x - 2$;

д) $\sqrt[3]{x^3 - 2} \le x - 2$; е) $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x} \ge x + 1$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) $(1;3]\cup[9;11)$; б) $(-3;0)$; в) $\left[-1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right]$;
г) $[-1;0)$; д) $(0;\ 1{,}2)$; е) $\varnothing$.
К заданию 2. а) 3; б) 8.
К заданию 3. а) 2; б) –5; в) 4; г) 4.
К заданию 4. а) 15; б) 3; в) 7; г) 35.
К заданию 5. а) 2; б) 2.
К заданию 6. а) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; б) $(-3;\ 3)$; в) $(-1;\ 1{,}5)$;
г) $(-\infty;0)\cup(3;\ 4)$; д) 1; е) –1.

УЭ-10. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД ПРИ РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Цель: уяснить смысл функционального метода решения неравенств и закрепить умения и навыки его использования на примерах решения иррациональных неравенств.

Теоретическая часть

Сущность метода интервалов. При решении иррациональных неравенств можно применять функциональный метод, одним из видов которого является метод интервалов. Напомним, что решить неравенство вида $f(x)>0$ $\left(f(x)<0\right)$ — это значит найти все значения x, при которых функция $y=f(x)$ принимает положительные (отрицательные) значения. При решении иррациональных неравенств числовую прямую можно разбить на конечное число интервалов $(-\infty;x_1),(x_1;x_2),\ldots,(x_n;+\infty)$, для каждого из которых истинно следующее: либо эта функция не определена на данном интервале, либо на этом интервале она непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет постоянный знак. На этом факте основан метод интервалов решения иррациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x^2+x-2}-x>0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x^2+x-2}-x$. Решив неравенство $x^2+x-2\geq 0$, находим область ее определения:

$$D(y)=(-\infty;-2]\cup[1;+\infty).$$

Найдем нули функции из уравнения $\sqrt{x^2+x-2}-x=0$:

$$\left(\sqrt{x^2+x-2}=x\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+x-2=x^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\ge 0,\\ x=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=2).$$

Разбиваем область определения рассматриваемой функции нулем $(x=2)$ на три интервала и определяем знак значений функции на каждом из них.

В интервале I, где $x<-2$, возьмем $x_1=-3$ и определим знак значения функции: $y(-3)=\sqrt{4}-(-3)>0$.

В интервале II, где $1<x<2$, возьмем $x_2=1{,}5$:

$$y(1{,}5)=\sqrt{2{,}25+1{,}5-2}-1{,}5=\sqrt{1{,}75}-1{,}5<0.$$

В интервале III, где $x>2$, возьмем $x_3=3$: $y(3)=\sqrt{10}-3>0$.

Поскольку данное неравенство нестрогое, то $x=2$ (т. е. нуль функции) решением не является. Для контроля определим знак значений функции на концах промежутков:

$$y(-2)=\sqrt{0}-(-2)=2>0,\quad y(1)=\sqrt{0}-1=-1<0.$$

Ответ: $(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$.

Использование графиков функций. При решении некоторых иррациональных неравенств можно воспользоваться графиками функций.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x-2}<4-x$.

Решение. Воспользуемся графиками функций $y=\sqrt{x-2}$ $\left(D(y)=[2;+\infty)\right)$ и $y=4-x$ $\left(D(y)=R\right)$ (рис. 9).

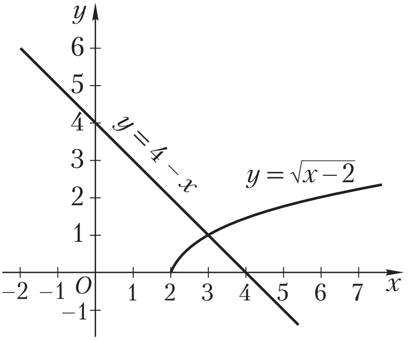


Рис. 9

Первая функция возрастает, а вторая убывает. Их графики пересекаются в одной точке, абсцисса которой равна 3. Решениями данного неравенства являются значения x, при которых график функции $y=\sqrt{x-2}$ расположен ниже графика функции $y=4-x$.

Ответ: [2; 3).

Практическая часть

Задание 1. Используя функциональный метод, решите неравенство:

а) $\sqrt{2x-5}<4-x$;   б) $\sqrt{4x+1}>x-1$;

в) $\sqrt[4]{3x-5}<\sqrt[4]{x+9}$;   г) $\sqrt{x-2}>\sqrt[4]{x+5}$.

Задание 2. Используя функциональный метод, решите неравенство:

а) $\sqrt[5]{4x}+\sqrt[3]{x}+x\geq 12$;

б) $\sqrt[5]{9x}+\sqrt[3]{x}+x\leq 33$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $(x-4)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$;

б) $(3-x)\sqrt{x^2-x-2}\leq 0$;

в) $(x+2)\sqrt{x^2-2x-3}\geq 0$;

г) $(1-x)\sqrt{6+x-x^2}\leq 0$.

В ответе запишите количество целых решений каждого неравенства, принадлежащих отрезку [–5; 5].

УЭ-11. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Цель: усовершенствовать умения и навыки по использованию в процессе решения задач метода введения новой переменной на примерах решения иррациональных неравенств.

Теоретическая часть

При решении иррациональных неравенств применяется метод введения новой переменной.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример. Решить неравенство $\dfrac{x+3\sqrt{x}-10}{x-\sqrt{x}-12}<0.$

Решение. Пусть $\sqrt{x}=a$ ($a\ge 0$), тогда имеем: $\dfrac{a^2+3a-10}{a^2-a-12}<0;$ $\dfrac{(a+5)(a-2)}{(a+3)(a-4)}<0.$

Решив это неравенство, находим: $-5<a<-3$ или $2\le a\le 4$. Поскольку $a\ge 0$, то переходим к двойному неравенству $2<\sqrt{x}<4$, откуда находим, что $4<x<16$.

Ответ: (4; 16).

Практическая часть

Задание 1. Решите неравенство, вводя новую переменную:

а) $x-4\sqrt{x}-5\ge 0;$ б) $2x-5\sqrt{x}+2\le 0;$

в) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-6\le 0;$ г) $3\sqrt[6]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}>2;$

д) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<4;$ е) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}\ge\dfrac{7}{12};$

ж) $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6}>0.$

Задание 2. Найдите множество решений неравенства:

а) $x^{\frac{1}{2}}-7x^{\frac{1}{4}}+6<0;$ б) $x^{\frac{1}{3}}-5x^{\frac{1}{6}}+6>0;$

в) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>\dfrac{3}{5}(x-x^{-1});$ г) $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}>\dfrac{1}{4}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right).$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $[25;+\infty)$; б) $[0{,}25;4]$; в) $[0;81]$; г) $(0;63)$; д) $\left[\dfrac{5}{4};+\infty\right)$; е) $(-\infty;-2)\cup[20{,}5;+\infty)$.

К заданию 2. а) (1; 1296); б) $[0;64]\cup(729;+\infty)$; в) $\left(0;\dfrac{43+5\sqrt{61}}{18}\right)$; г) $\left(0;38+17\sqrt{5}\right)$.

УЭ-12. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ДВА И БОЛЕЕ РАДИКАЛОВ

Цель: приобрести умения и навыки по решению более сложных иррациональных неравенств.

Теоретическая часть

Рассмотрим примеры решения более сложных иррациональных неравенств.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{x-1} \le \sqrt{2x-1} - \sqrt{6-x}$.

Решение. Запишем цепочку равносильных переходов:

$$\left(\sqrt{x-1} \le \sqrt{2x-1} - \sqrt{6-x}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{6-x} \le \sqrt{2x-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 6-x \ge 0, \\ 2x-1 \ge 0, \\ \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}\right)^2 \le 2x-1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 \le x \le 6, \\ \sqrt{(x-1)(6-x)} \le x-3 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 \le x \le 6, \\ x-3 \ge 0, \\ (x-1)(6-x) \le (x-3)^2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} 3 \le x \le 6, \\ 2x^2 - 13x + 15 \ge 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 3 \le x \le 6, \\ (x-1{,}5)(x-5) \ge 0 \end{cases}\right).$$

Решив эту систему неравенств, находим: $5 \le x \le 6$.

Ответ: [5; 6].

Практическая часть

Задание. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4} \le 1$;

б) $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \ge 1$;

в) $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} \ge 1$;

г) $\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} > 3$;

д) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}$.

а) $[0; 12]$; б) $\left[5; 7-\frac{\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left[7+\frac{\sqrt{7}}{2}; 9\right]$; в) $[0; 9]$; г) $(4; 7)$; д) $\left[5; \frac{10+2\sqrt{7}}{3}\right]$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Краткие исторические сведения о степенях и радикалах

Понятие степени с натуральным показателем возникло в глубокой древности. Таблицы квадратов и кубов чисел найдены на сохранившихся до нашего времени плитках, на которых писали в древнем Вавилоне. Выражение «квадрат числа» возникло при вычислении площади квадрата, а «куб числа» — при нахождении объема куба.

Греческий математик из Александрии Диофант, живший, вероятно, в III в., написал сочинение «Арифметика». В нем положено начало буквенной символике.

В «Арифметике» Диофанта квадрат обозначался знаком Δ с индексом $r(\Delta^r)$; куб — буквой k с индексом $r(k^r)$; квадрат, умноженный на себя, — «квадрато-квадрат» — обозначался через $\Delta^r\Delta$; квадрат, умноженный на куб, — «квадрато-куб» — через Δk^r; куб, умноженный на себя, — «кубо-куб» — через $k^r \cdot k$.

Французский математик Франсуа Виет (1540—1603) ввел буквенные обозначения не только для неизвестных величин, но и для их коэффициентов. Он применял следующие обозначения: N (Numerus — число) — для первой степени, Q (Quadratus — квадрат) — для второй степени, C (Cubus — куб) — для третьей, QQ — для четвертой и т. д.

Другой французский математик, Пьер Эригон, в шести томах «Курса математики» обозначает степени a^2, a^3, a^4 через $a2$, $a3$, $a4$.

Французский математик Рене Декарт (1596—1650) в сочинении «Геометрия» ввел знаки для переменных величин (x, y, z, ...) и коэффициентов (a, b, c, ...), а также обозначения степеней с натуральными показателями (a^3, x^4, y^5, ...), которые используются и сейчас. Правда, вторую степень числа a, т. е. a^2, он записывал как произведение aa.

К идее обобщения понятия степени математики пришли постепенно.

В 1368 г. французский математик, физик и экономист Никола Орем (около 1323—1382) изложил учение о степени с дробным показателем. Вместо знака $2^{\frac{1}{2}}$ он писал $^{\frac{1}{2}}2'$ вместо $4^{1\frac{1}{4}}$ — $1'^{\frac{1}{2}}4$. Орем словесно сформулировал правила действий над степенями.

Степенью с нулевым показателем первым стал пользоваться самаркандский ученый аль-Каши в конце XV в. Независимо от него французский математик Никола Шюке в рукописном трактате «Наука о числах в трех частях» (1484) ввел в употребление отрицательные и нулевые показатели степеней. В его рукописи можно прочитать: «Кто умножит 8^3 на 7^{1m} ... это умножение покажет 56^2». В современной записи это означает: $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$. Он относит показатель степени к переменной, которая подразумевается стоящей за коэффициентом, а знак ^{1m} указывает, что единица берется с отрицательным знаком.

Нидерландский ученый и инженер Симон Стевин (1548—1620) предложил подразумевать под степенью $a^{\frac{1}{n}}$ корень $\sqrt[n]{a}$.

Современные определения и обозначения степеней с нулевым, отрицательным и дробным показателями берут начало в работах английских математиков Джона Валлиса (1616—1703) и Исаака Ньютона (1643—1727).

В древние времена к операции извлечения квадратного корня из числа приводили задачи практического характера: выделение квадратного участка земли заданной площади; решение реальных задач, приводящих к квадратным уравнениям. Так, в китайской математической рукописи, написанной во II в. до н. э., имеется описание способа нахождения квадратных корней из чисел.

Умели извлекать квадратные корни из чисел в IV—V вв. н. э. ученые из Индии. Извлечение квадратного корня (например, при решении квадратных уравнений) проводится в сочинении среднеазиатского математика аль-Хорезми (787 — около 850).

В Вавилоне еще за две тысячи лет до нашей эры пользовались следующим правилом приближенного извлечения квадратного корня. Пусть a — некоторое натуральное число, не являющееся полным квадратом натурального числа. Тогда

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + r} \approx b + \frac{r}{2b}$$

(в современных обозначениях).

Например, если $a = 28$, то $\sqrt{28} = \sqrt{25 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5{,}3.$

Проверка показывает, что $5{,}3^2 = 28{,}09$.

Итальянец Леонард Пизанский (1180—1240), известный также под именем Фибоначчи, считал своим изобретением метод приближенного извлечения кубического корня по формуле

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt{b^3 + r} \approx b + \frac{r}{3b(b+1)+1}.$$

Термины «радикал» и «корень» были введены в XII в. Они связаны с латинским словом *radix*, имеющим два значения: «сторона» и «корень». Древнегреческие математики вместо «извлечь корень» говорили: «Найти сторону квадрата по данной его площади». Знак корня ввел автор учебника алгебры, учитель математики из Вены К. Рудольф (около 1500—1545) в 1525 г. Он обозначал корень квадратный через знак $\surd$. Символика, использовавшаяся им, послужила основой для создания современных знаков квадратного и кубического корней. В 1637 г. Рене Декарт объединил знак корня с горизонтальной чертой — знаком скобки, и получился современный знак $\sqrt{}$. Ньютон уже указывал показатели степеней корней: $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$.

Это интересно

Удивительным свойством обладает число 275 625. Оно представляет собой квадрат числа 525, т. е. $275\,625 = 525^2$.

Если от этого числа последовательно отбрасывать по одной цифре слева, то будет получаться число, которое можно представить в виде квадрата натурального числа:

$75\,625 = 275^2$,

$5\,625 = 75^2$,

$625 = 25^2$,

$25 = 5^2$.

Ребусы

Замените в каждом из следующих примеров буквы цифрами (разные — разными, одинаковые — одинаковыми), чтобы получились истинные равенства:

$$a^a = \text{икс}; \quad \text{ку}^\text{к} = \text{икс}; \quad \text{зет}^\text{к} = \text{сорок}.$$

Попытайтесь найти ответ.

Интересные закономерности

А. Легко проверить, что

$$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9}; \; \sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}; \; \sqrt{81} = 8 + \sqrt{1}.$$

С другой стороны:

$$\sqrt{100} = 10 - \sqrt{0}; \quad \sqrt{121} = 12 - \sqrt{1}; \quad \sqrt{144} = 14 - \sqrt{4}.$$

Укажите условия, при котором выполняются подмеченные закономерности. Приведите другие примеры.

Б. Проверьте истинность равенств:

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \; \sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}; \; \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}; \; \sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}.$$

Подметьте закономерность и объясните ее.

Число «три»

Из шести спичек изображена дробь $\frac{5}{9}$ в виде $\frac{\text{V}}{\text{IX}}$.

Переложив две спички, получите натуральное число 3.

Софизмы

А. $1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2} = -1$, т. е. $1 = -1$.

Где ошибка?

Б. $\sqrt{(-5)^2} = \left((-5)^2\right)^{\frac{1}{2}} = (-5)^{2\cdot\frac{1}{2}} = (-5)^1 = -5.$

Где ошибка?

Задача Эйлера

Докажите, что $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$

Викторина

1. Когда и кем была основана Петербургская академия наук?

2. Она была первой в мире женщиной-профессором, членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Назовите ее.

3. Когда была основана Национальная академия наук Беларуси?

4. Какой известный математик возглавлял Академию наук Беларуси в 1987—1991 гг.?

5. Какому белорусскому математику, академику в 1990 г. было присвоено почетное звание члена Китайско-Хенанской академии наук?

6. Какое важное событие в мире математики произошло в 1897 г.?

7. На территории бывшего Советского Союза первая суммирующая машина была создана в Белоруссии. Когда и кем?

8. В 1912 г. в России была построена первая в мире вычислительная машина специального назначения для решения так называемых дифференциальных уравнений. Ее сконструировал великий русский математик. Назовите его.

Модуль 2 ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

УЭ-1. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Цель: овладеть понятием логарифма и знать основные логарифмические тождества.

Теоретическая часть

Понятие логарифма. Запишем два равенства:

$$a^c = b, \qquad 2^3 = 8.$$

Пусть одно из значений a, b, c неизвестно, тогда возможны три случая.

1) Неизвестно основание (обозначим неизвестное через x). Рассмотренные выше равенства примут вид:

$$x^c = b, \qquad x^3 = 8.$$

Основание степени находим извлечением корня:

$$x = \sqrt[c]{b}, \qquad x = \sqrt[3]{8}.$$

2) Неизвестна степень. Рассмотренные выше равенства примут вид:

$$a^c = x, \qquad 2^3 = x.$$

Значение x находится по определению степени.

3) Неизвестен показатель, в который надо возвести основание, чтобы получить данную степень:

$$a^c = b, \qquad 2^3 = 8.$$

Показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число, называется **логарифмом** данного числа по данному основанию.

Обозначение:

$$x = \log_a b \qquad\qquad x = \log_2 8$$
$$(a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1). \qquad\qquad (8 > 0{,}2 > 0).$$

Логарифмические тождества

$a^{\log_a x} = x,$
$a^x = e^{x\ln a},$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$
$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$
$\log_a x^k = k\log_a x,$
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},$
$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b},$
$\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{\log_a x}{n}.$

Пример. Доказать, что $\lg\dfrac{2a+3b}{5} = 0{,}5(\lg a + \lg b)$, если $a > 0$, $b > 0$, и $4a^2 + 9b^2 = 13ab$.

Доказательство. Так как $4a^2 + 9b^2 = 13ab$, то

$$4a^2 + 9b^2 + 12\,ab = 25ab,\ (2a+3b)^2 = 5\left(\sqrt{ab}\right)^2;$$

если $a > 0$, $b > 0$, то $2a + 3b = 5\sqrt{ab}$, $\dfrac{2a+3b}{5} = \sqrt{ab}$. Значит,

$$\lg\frac{2a+3b}{5} = 0{,}5(\lg a + \lg b).$$

Практическая часть

Задание 1. Запишите в виде логарифмического равенства (например, $2^3 = 8$, т. е. $3 = \log_2 8$):

а) $2^5 = 32$; б) $5^4 = 625$; в) $2^{-2} = \dfrac{1}{4}$;

г) $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$; д) $10^0 = 1$; е) $8^{\frac{2}{3}} = 4$;

ж) $\sqrt[3]{27} = 3$; з) $\sqrt[4]{81} = 3$; и) $\sqrt[5]{32} = 2$.

Задание 2. Найдите логарифмы следующих чисел по основанию 2: 4; 16; 32; 64; 1; 0,5; 0,125; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$.

Задание 3. Найдите логарифмы следующих чисел по основанию $\frac{1}{2}$: 1; 2; 8; 32; 64; 0,125; $\frac{1}{16}$; $\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$.

Задание 4. Найдите логарифмы следующих чисел по основанию 3: 1; 3; 9; 27; 81; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{243}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $3\sqrt{3}$.

Задание 5. Найдите логарифмы следующих чисел по основанию $\frac{1}{3}$: 3; 27; 81; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{27\sqrt{3}}$.

Задание 6. Вычислите:

а) $\log_2 \sin\frac{\pi}{2}$;
б) $\log_2 \sin\frac{\pi}{4}$;
в) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
г) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;
д) $\log_7 \sin\frac{\pi}{2}$;
е) $\ln \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

Задание 7. При каких действительных значениях a и x имеет смысл выражение:

а) $\log_a x$;
б) $\log_a |x|$;
в) $\log_a x^2$;
г) $\log_{|a|}(x^2-1)$;
д) $\log_{a-1}\frac{x-3}{x+2}$;
е) $\log_{|a-1|}|x^2-4|$?

Задание 8. Докажите, что $\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, если $a>0$, $b>0$ и $a^2+b^2=7ab$.

Задание 9. О переменных x и y известно, что они одного знака. Прологарифмируйте выражение xy.

Задание 10. Докажите, что $\lg(a+\sqrt{a^2-1})=-\lg(a-\sqrt{a^2-1})$, где $a\geq 1$.

Задание 11. При каких действительных значениях a имеет место равенство $\log_2 a^2=2\log_2(-a)$?

Задание 12. При каких действительных значениях x имеет место равенство $\log_a x = a$ $(a > 0, a \neq 1)$?

Задание 13. Вычислите:

а) $\log_3 3\sqrt{3}$;

б) $\log_{\sqrt[3]{2}} 4$;

в) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt[4]{125}$;

г) $\sqrt{3^{4+\log_{\frac{1}{9}} 625}}$;

д) $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3$;

е) $\dfrac{\log_{\sqrt[3]{5}} 27}{\log_{25} \sqrt{3}}$;

ж) $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$;

з) $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

Задание 14. Найдите значение выражения:

а) $81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2\log_4 9}} + 25^{\log_{125} 8}$;

б) $27^{\log_9 36} + 81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

Задание 15. Упростите выражение $\log_4 \dfrac{x^2}{4} - 2\log_4 (4x^4)$ и вычислите его значение при $x = -4$.

Задание 16. Вычислите:

а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$;

б) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10$.

Задание 17. Докажите, что:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} + \frac{1}{\log_{a^5} b} = 15\log_b a.$$

Задание 18. Определите:

а) $\log_5 6$, если $\lg 3 = a$ и $\lg 2 = b$;

б) $\log_{25} 12$, если $\log_5 4 = a$ и $\log_5 3 = b$;

в) $\lg 54$, если $\log_4 125 = a$.

Задание 19. Докажите, что если $\log_{12} 18 = a$ и $\log_{24} 54 = b$, то $ab + 5(a - b) = 1$.

Задание 20. Докажите, что если $\log_{14} 2 = a$ и $\log_{14} 5 = b$, то $\log_7 50 = \dfrac{a + 2b}{1 - a}$.

Задание 21. Докажите, что:

а) $\log_2 17 \cdot \log_{\frac{1}{5}} 2 \cdot \log_3 \frac{1}{5} > 2;$

б) $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4,5} \pi} < 2.$

Ваш помощник

К заданию 13. б) 6; в) –1,5; г) 1,8; е) 36; ж) 2; з) 0.
К заданию 14. а) 4,75; б) 80.
К заданию 15. –9.
К заданию 16. а) 3; б) $\log_{11} 2$.
К заданию 18. а) $\frac{a+b}{a-b}$; б) $\frac{a+b}{2}$; в) $\frac{18}{2a+3}$.

УЭ-2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Цель: актуализировать знания по теме; уметь схематически строить графики показательных функций и иллюстрировать с помощью графика функции ее свойства.

Теоретическая часть

Понятие показательной функции. Например, функции $y = 2^x$, $y = 0{,}5^x$ являются показательными.

Функцию, заданную формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \boldsymbol{R}$, называют **показательной**.

График показательной функции. График показательной функции расположен в верхней полуплоскости, пересекает ось ординат в точке (0; 1), прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика. На рисунке 10, *а* изображен график показательной функции $y = a^x$ при $a > 0$, а на рисунке 10, *б* — при $0 < a < 1$.

Свойства показательной функции.

1. Область определения. $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений. $E(y) = (0; +\infty)$.

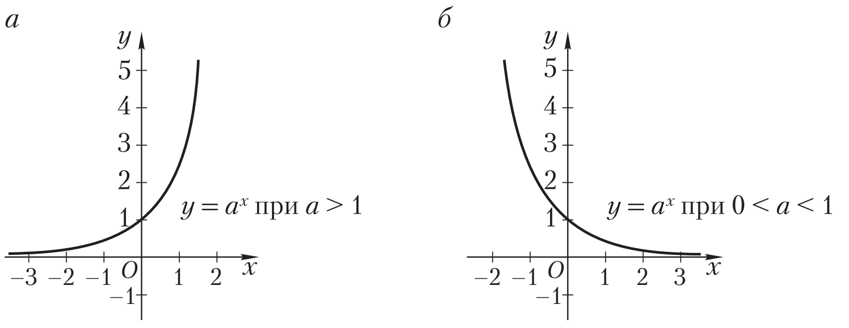


Рис. 10

3. Наибольшее и наименьшее значения. Наибольшего и наименьшего значений функция не достигает.

4. Нули функции. Функция нулей не имеет.

5. Промежутки знакопостоянства. Значения функции положительны при любых значениях аргумента из области ее определения, и ее график расположен в верхней полуплоскости.

6. Промежутки монотонности. Если $a > 0$, то показательная функция является возрастающей на всей области определения, а если $0 < a < 1$ — убывающей на всей области определения.

7. Четность и нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной.

8. Периодичность. Функция не является периодической.

9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

Практическая часть

Задание 1. Какие из следующих функций: $y = 3^x$, $y = x^3$, $y = \left(\sqrt[3]{2}\right)^x$, $y = x^2$, $y = 2^{-x}$ являются показательными?

Задание 2. а) Заполните в тетрадях таблицу

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x							

и схематически изобразите график функции $y = 2^x$.

б) Проиллюстрируйте на графике все свойства показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$.

в) При каких значениях x имеют место неравенства: $2^x > 1$, $2^x < 1$?

г) Заполните в тетрадях таблицу

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$							

и схематически изобразите график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

д) Проиллюстрируйте на графике свойства показательной функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$.

е) При каких значениях x имеют место неравенства: $0{,}5^x > 1$, $0{,}5^x < 1$?

Задание 3. Сравните значение числового выражения с 1:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $(\sqrt{3})^{0,5}$; в) $0{,}2^{\pi}$;

г) $\pi^{-\frac{1}{5}}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$; е) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{1,001}}$.

Задание 4. На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что:

а) $\left(\frac{2}{7}\right)^{1,6} < \left(\frac{2}{7}\right)^{1,5}$; б) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2,5} > \left(\frac{5}{3}\right)^{2,3}$?

Задание 5. а) При каких условиях $3^{x_1} > 3^{x_2}$?

б) Известно, что $a^{\alpha} > a^{\beta}$. Что больше: α или β, если $0 < a < 1$; α или β, если $a > 1$?

Задание 6. Какие из показательных функций $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$, $y = \pi^x$, $y = 1{,}7^x$ являются возрастающими?

Задание 7. Какие из функций $y = 0{,}25^x$, $y = (\sqrt{2})^x$, $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ являются убывающими?

Задание 8. Схематически изобразите график функции:

а) $y = 3^x$; б) $y = 3^x + 1$; в) $y = 3^{x-1}$;

г) $y = 3^{x+1}$; д) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; е) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Задание 9. Докажите, что графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ симметричны относительно оси ординат.

Задание 10. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}$; б) $y = (0{,}5)^{\sqrt{x^2-|x|+10}}$.

Задание 11. Схематически изобразите график функции:

а) $y = 2^{|x|}$; б) $y = 2^{|x|+1}$; в) $y = 2^{-|x|} - 1$;

г) $y = -3 \cdot 2^{|x+2|}$; д) $y = 2^{x-|x|}$; е) $y = 0{,}5^{\frac{x^2}{|x|}}$;

ж) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{|x|}{x}} - x$; з) $y = \left|2^{|x-1|} - 2\right|$; и) $y = \frac{2^{|x-1|}}{2^{|x|}}$.

Задание 12. Схематически изобразите график функции:

а) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} + 2^x$;

б) $y = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Задание 13. Докажите, что последовательность значений функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ при натуральных значениях аргумента x составляет геометрическую прогрессию.

Ваш помощник

К заданию 10. $[5{,}5; +\infty)$.

УЭ-3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Цель: актуализировать знания по теме, уметь схематически изображать графики логарифмических функций и иллюстрировать с помощью графика функции ее свойства.

Теоретическая часть

Понятие логарифмической функции. Каждому действительному положительному числу x при заданном основании a ($a > 0$, $a \neq 1$) можно поставить в соответствие одно определенное значение его логарифма и тем самым задать функцию, которую называют *логарифмической.*

Функцию, заданную формулой вида $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), называют **логарифмической** функцией.

График логарифмической функции. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной показательной функции $y = a^x$. Как вам известно, графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Значит, график логарифмической функции можно получить из графика показательной функции $y = a^x$ посредством преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 11, *а*, *б*).

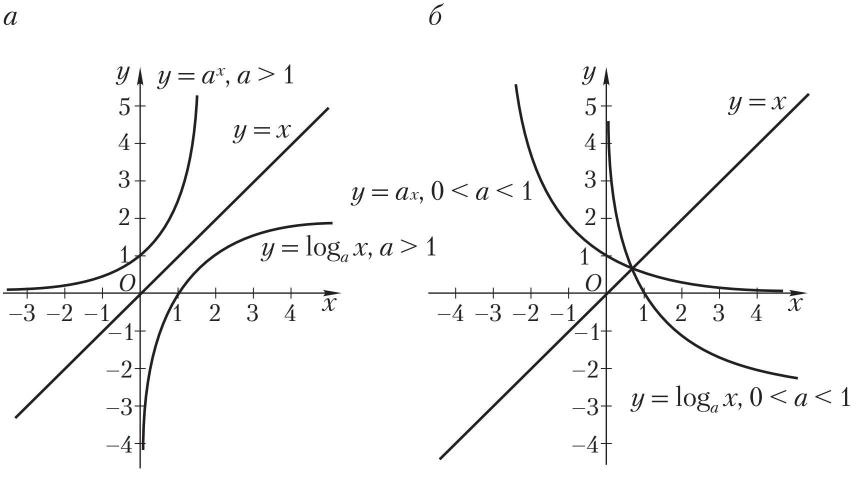


Рис. 11

Свойства логарифмической функции.

1. Область определения. $D(y) = (0; +\infty)$.

2. Множество значений. $E(y) = \boldsymbol{R}$.

3. Наибольшее и наименьшее значения. Наибольшего и наименьшего значений функция не достигает.

4. Нули функции. Нулем функции является единственная точка $x = 0$. Точка $(1; 0)$ — единственная точка пересечения графика логарифмической функции с осями координат.

5. Промежутки знакопостоянства. Функция при $a > 1$ принимает отрицательные значения на промежутке $(0; 1)$ и положительные значения на промежутке $(1; +\infty)$; при $0 < a < 1$ значения функции отрицательны на промежутке $(1; +\infty)$ и положительны на промежутке $(0; 1)$.

6. Промежутки монотонности. Если $a > 1$, то функция является возрастающей на всей области определения, а если $0 < a < 1$ — убывающая на всей области определения.

7. Четность и нечетность. Функция не является ни четной, ни нечетной.

8. Периодичность. Функция не является периодической.

9. Непрерывность. Функция является непрерывной на всей области определения.

Практическая часть

Задание 1. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $f(x) = \lg\left(\dfrac{x-1}{x+3} - 2\right)$;
б) $f(x) = \log_{3+x}(x^2 - 1)$;
в) $f(x) = \log_{x+5} \dfrac{3x+2}{2x-1}$;
г) $f(x) = \log_{3-\frac{x}{2}} \dfrac{x+1}{x-3}$.

Задание 2. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y = \log_{0,5} x$;
б) $y = \log_3 x$;
в) $y = \lg x$;
г) $y = \ln x$;
д) $y = \log_{\pi} x$;
е) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$?

Задание 3. Какое из чисел больше:

а) $\log_3 \dfrac{1}{6}$ или $\log_3 \dfrac{1}{7}$;
б) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ или $\log_{\frac{1}{2}} 9$;
в) $\log_2 3$ или $\log_{\frac{1}{2}} 5$;
г) $\log_5 7$ или $\log_8 3$;
д) $\log_{\frac{1}{5}} 3$ или $\log_{\frac{1}{3}} 5$;
е) $\log_6 2$ или $\log_5 2$;

ж) $\log_{\frac{1}{7}} 3$ или $\log_{\frac{1}{8}} 3$;

з) $\log_3 2$ или $\frac{2}{3}$;

и) $\log_9 80$ или $\log_7 50$;

к) $\log_{12} 5$ или $\log_{18} 7$?

Задание 4. Решите неравенство:

а) $\log_{\pi}x < \log_{\pi}2$;

б) $\log_{0,5}5 > \log_{0,5}x$;

в) $\log_{0,5}(5x - 7) < \log_{0,5}(2x - 6)$;

г) $\log_{0,3}(x^2 + 1) < \log_{0,3}2x$.

Задание 5. Что больше: $\log_a 3$ или $\log_a 5$?

Задание 6. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \log_2 x$;

б) $y = \log_{0,5}x$;

в) $y = \lg x$;

г) $y = \ln x$.

Задание 7. Как, зная график функции $y = \log_2 x$, можно построить график функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;

б) $y = -\log_2 x$;

в) $y = \log_2(-x)$;

г) $y = \log_2 x + 1$;

д) $y = \log_2 x - 1$;

е) $y = \log_2(2x) + 1$;

ж) $y = 2\log_2(-1 - x)$;

з) $y = 0,5\log_2(-x + 1) + 1$?

Задание 8. Изобразите схематически график функции, заданной формулой:

а) $y = 0,5 \cdot \lg x^2$;

б) $y = |\lg x|$;

в) $y = |\log_2|3 - x||$;

г) $y = \log_{\frac{1}{3}}||2|x| + 1| - 3|$.

Задание 9. Изобразите схематически график функции, заданной формулой:

а) $y = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x$;

б) $y = \log_2(x^2 - 1) - \log_2(x - 1)$;

в) $y = \dfrac{\lg(x^2 + 1)}{\lg(x^2 + 1)}$;

г) $y = \dfrac{\ln x^4}{\ln x}$;

д) $y = \log_{2x} 2 + \dfrac{1}{\log_2(2x)}$;

е) $y = \dfrac{\lg(4 - x)}{\lg(4 - x)} \cdot \log_2 x$.

Задание 10. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y=3^{\log_3(x-1)}$; б) $y=2^{\log_2|x|}$;

в) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+6)}$; г) $y=(0{,}3)^{\log_{0,3}\operatorname{tg}x}$;

д) $y=2^{\log_2(\log_2 x)}$; е) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3(x+1)^2}$;

ж) $y=3^{|\log_3 x|}$; з) $y=2^{-|\log_2 x|}$.

Задание 11. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y=x^{\log_x 3}$; б) $y=(x^2)^{\log_{x^2} x}$;

в) $y=x^{\log_{x^2} 9}$; г) $y=x^{\frac{1}{\log_2 x}}$;

д) $y=|x|^{\log_{|x|}\cos x}$; е) $y=x^{\log_x 2^x}$;

ж) $y=x^{\log_x(7-x)}$; з) $y=x^{\log_x 2}\cdot 7^{\log_7(x-1)}$.

Задание 12. Постройте график функции заданной формулой:

а) $y=\log_{5-x}(5-x)$;

б) $y=\log_{(x+1)^2}(x+1)^4$;

в) $y=\log_x(3-x)\cdot\log_{3-x}x$;

г) $y=\log_{x+4}(5+x)\cdot\log_{5+x}(x+4)$;

д) $y=e^{\ln}x+\log_{5-x}(5-x)$;

е) $y=\frac{e^{\ln x^2}}{x}+\log_{3-x}(3-x)$;

ж) $y=e^{\ln(-x)}+\frac{\log_{x+1}1}{1-\ln(-x)}$;

з) $y=\frac{\log_{x-1}(7-x)}{\log_{x-1}(7-x)}\cdot\log_{\frac{1}{2}}x$.

Задание 13. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y=\frac{|\lg x|}{\lg x}$; б) $y=\frac{\sqrt{\lg^2 x}}{\lg x}$; в) $y=\frac{2\lg x}{\sqrt{\lg^2 x}}$;

г) $y=\frac{\log_3 x^3}{|\log_3 x^3|}$; д) $y=\frac{|\lg x-1|}{\lg x-1}$; е) $y=|\lg x|-\lg x$.

Задание 14. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению:

а) $|y| = \lg x$; б) $|y| = |\lg x|$;

в) $|y| = \log_2 |x|$; г) $|y| = \log_{\frac{1}{2}} |x|$;

д) $|y| = \log_{\frac{1}{3}} |x-1|$; е) $|y| = \left|\log_{\frac{1}{3}} (x-1)\right|$.

Задание 15. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-0{,}5) + \log_2 \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3} - x) + \log_3 \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$.

Задание 16. Изобразите множество точек на плоскости, координаты которых x и y удовлетворяют уравнению:

а) $\log_2\left(1+\frac{x}{y}\right) = \log_2 17 - \log_2 y$;

б) $\log_3(2x+y) = 1 + \log_3 x - \log_3(10x)$;

в) $(|y| - x^2)\cdot\log_2(x^2 + y^2) = 0$.

Ваш помощник

К заданию 1. б) $D(f) = (-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$;

г) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (4; 6)$.

К заданию 3. в) $\log_2 3$; г) $\log_3 7$; д) $\log_{\frac{1}{5}} 3$; е) $\log_6 2$; ж) $\log_{\frac{1}{8}} 3$; з) $\frac{2}{3}$;

и) $\log_7 50$; к) $\log_{18} 7$.

УЭ-4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Цель: на примерах показательных уравнений закрепить знания о логике обоснования процесса решения уравнений и методах их решения; добиться, чтобы умения и навыки удовлетворяли таким качествам, как правильность, осознанность, автоматизм, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Понятие показательного уравнения. Например, уравнения $2^{3x} = 2$, $9^x - 3^x - 2 = 0$ являются показательными.

Показательным называется уравнение, содержащее переменную только в показателе степени.

Логика обоснования процесса решения уравнений.

Способ равносильных переходов.

Способ проверки.

Указываем корни и доказываем, что других нет.

***Методы решения уравнений*:**

- переход от уравнения $F\big(f(x)\big) = a$ к уравнению $f(x) = b$;
- разложение левой части уравнения $f(x) = 0$ на множители;
- метод введения новой переменной;
- функциональный метод.

Некоторые виды показательных уравнений и подходы к их решению.

Общего метода решения показательных уравнений не существует. Поэтому рассмотрим некоторые виды показательных уравнений и приемы их решения.

1. Уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется **простейшим показательным уравнением**.

Если $b \leq 0$, то это уравнение не имеет решений, поскольку значения a^x положительны. Если же $b > 0$, то существует единственное значение x, которое является корнем рассматриваемого уравнения, а именно $x = \log_a b$.

Пример 1. Решить уравнение $3^x = 7$.

Решение. Единственным корнем данного уравнения является число $\log_3 7$.

Ответ: $\log_3 7$.

Пример 2. Решить уравнение $36^x = 144$.

Решение. Логарифмируя обе части уравнения ($36^x > 0$), получим:

$\log_{36} 36^x = \log_{36} 144$;

$x = \log_{36} 144$;

$x = \log_6 12$;

$x = \log_6 (6 \cdot 2)$;

$x = 1 + \log_6 2$.

Ответ: $1 + \log_6 2$.

Итак, при решении показательных уравнений может использоваться *прием логарифмирования*, поскольку если два положительных выражения равны, то равны и их логарифмы по одному основанию.

2. Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

В самом деле, если α — корень уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $a^{f(\alpha)} = a^{g(\alpha)}$ — верное числовое равенство, а тогда в силу монотонности показательной функции имеем $f(\alpha) = g(\alpha)$, т. е. α — корень уравнения $f(x) = g(x)$.

Обратно, если α — корень уравнения $f(x) = g(x)$, то имеет место равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$, а тогда $a^{f(\alpha)} = a^{g(\alpha)}$ — верное числовое равенство, и, следовательно, α — корень уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Пример 3. Решить уравнение $36^x = 216^{-1}$.

Решение. Имеем:

$6^{2x} = 6^{-3}$;

$2^x = -3$;

$x = -1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

Пример 4. Решить уравнение $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$.

Решение. Представим правую часть уравнения в виде степени с основанием 2. Имеем: $16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{0,5} = 2^{4,5}$. Тогда уравнение

$$2^{x^2-6x-2,5} = 2^{4,5}$$

равносильно уравнению

$$x^2 - 6^x - 2{,}5 = 4{,}5,$$

т. е. $x^2 - 6^x - 7 = 0$, откуда $x = -1$ или $x = 7$.

Ответ: -1; 7.

Итак, при решении показательных уравнений может использоваться ***способ уравнивания оснований***.

3. Уравнение вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, f(x)$ — функция от переменной x) делением обеих частей уравнения на $b^{f(x)}$ сводится к уравнению:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^0; \quad f(x) = 0.$$

Пример 5. Решить уравнение $3^x = 5^x$.

Решение. Поскольку $5^x > 0$ при любом действительном x, то, разделив обе части данного уравнения на 5^x, получим уравнение, равносильное данному:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 1; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^0; \quad x = 0.$$

Ответ: 0.

4. Уравнение вида $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, а $f(x)$ и $g(x)$ — функции) заменой $b = a^{\log_a b}$ сводится к уравнению

$$a^{f(x)} = a^{g\,|(x)\cdot\log_a b}.$$

А это уравнение при $a > 0$, $a \neq 1$ равносильно уравнению

$$f(x) = g(x)\cdot\log_a b.$$

Пример 6. Решить уравнение $7^{x+1} = 5^x$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $7^{x+1} = 7^{x\cdot\log_7 5}$, а потому и уравнению $x + 1 = x \cdot \log_7 5$, откуда $x = \dfrac{1}{\log_7 5 - 1}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\log_7 5 - 1}$.

5. Уравнение вида $F(a^{f(x)}) = 0$, где $F(t)$ и $f(x)$ — заданные функции относительно переменных t и x, заменой $a^{f(x)} = t$ сначала приводится к уравнению $F(t) = 0$, а затем к совокупности уравнений: $a^{f(x)} = t_1$, $a^{f(x)} = t_1$, ..., $a^{f(x)} = t_n$, где t_1, t_2, ..., t_n — корни уравнения $F(t) = 0$. Решив совокупность этих уравнений, найдем решения исходного уравнения.

Пример 7. Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Пусть $3^x = t$ ($t > 0$), тогда имеем $t^2 - 12t + 27 = 0$, откуда $t = 3$ или $t = 9$. Значит, $3^x = 3$ или $3^x = 9$, откуда $x = 1$ или $x = 2$.

Ответ: 1; 2.

Каков метод этого решения?

Пример 8. Решить уравнение $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 8^x ($8^x > 0$), получим уравнение $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$, которое равносильно исходному.

Обозначим $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t\ (t > 0)$; тогда относительно t это уравнение примет вид $t^3 + t - 2 = 0$. Это уравнение имеет только один действительный корень $t = 1$ (покажите самостоятельно), поэтому $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ и $x = 0$.

Ответ: 0.

Каков способ обоснования процесса решения данного уравнения и каков метод решения?

Пример 9. Решить уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$

Решение. Заметим, что $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}.$

Поэтому данное уравнение можно записать в виде

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = 4.$$

Пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = y\ (y > 0)$, тогда $y + \frac{1}{y} = 4$, т. е. $y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y = 2 \pm \sqrt{3}$. Имеем два случая:

1) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$, откуда $x = 2$;

2) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$ или $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}$, т. е.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-2}$, откуда $x = -2$.

Ответ: -2; 2.

Пример 10. Решить уравнение $4^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-4}}=6.$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$2^{2(x+\sqrt{x^2-4})}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-4}}-6=0.$$

Пусть $2^{x+\sqrt{x^2-4}}=y$ $(y>0)$, тогда получаем уравнение

$$y^2-2{,}5y-6=0,$$

т. е. $2y^2-5y-12=0$. Решив его, имеем: $y=4$ или $y=-1{,}5$. Поскольку $y>0$, то получаем уравнение $2^{x+\sqrt{x^2-4}}=4$, которое равносильно уравнению $x+\sqrt{x^2-4}=2$, или $\sqrt{x^2-4}=2-x$, тогда

$$\left(\begin{cases}2-x\geq 0,\\ x^2-4=(2-x)^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\leq 2,\\ x^2-4=4-4x+x^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\leq 2,\\ x=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=2).$$

Ответ: 2.

6. При решении некоторых показательных уравнений используют метод подбора. Когда исходное уравнение никак не приводится к простейшему виду, остается лишь подобрать (например, угадать) корень уравнения, а затем доказать, что уравнение других корней не имеет.

Пример 11. Решить уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\frac{8}{5}=2^x.$

Решение. Легко догадаться, что $x=1$ является корнем данного уравнения. Докажем, что других корней нет. Функция $y=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\frac{8}{5}$ убывает, а функция $y=2^x$ возрастает на всей числовой прямой. Значит, исходное уравнение не может иметь более одного корня.

Ответ: 1.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64};$ б) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3};$

в) $(0{,}25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}};$ г) $3^{x+1}+3^x=108;$

д) $7^{3x}-7^{3x-1}=6;$ е) $5^x+3\cdot 5^{x-2}=140.$

Задание 2. Решите уравнение:

а) $4^{|x+3|}=4\cdot 2^{3x+8}$; б) $25^{|x+1|}=25\cdot 5^{4x+4}$;

в) $9^{|x+2|}=9\cdot 3^{3x+5}$; г) $5^{|x+4|}=25\cdot 5^{2x+7}$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01(10^{x-1})^3$;

б) $5^{2x}+5^{2x+2}+5^{2x+4}=651$;

в) $3^{3x+1}+3^{3x-1}+3^{3x-2}=5^{3x}+5^{3x-1}+5^{3x-2}$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $9^x+3\cdot 3^x-18=0$;

б) $3^{2x+3}-4\cdot 3^{x+1}+1=0$;

в) $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot 3^{2\sqrt{x}}+3=0$;

г) $8^x-6\cdot 12^x+11\cdot 18^x=2\cdot 27^{x+\frac{1}{3}}$;

д) $3^{2x+4}+45\cdot 6^x-9\cdot 2^{2x+2}=0$;

е) $5^{2+\cos 2x}-26\cdot 5^{\cos^2 x}+5=0$.

Задание 5. Найдите все корни уравнения $3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1=0$, удовлетворяющие условию $\sin\dfrac{9+x}{x+0{,}5}>0$.

Задание 6. Решите уравнение:

а) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=6$;

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x^2}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x^2}=10$;

в) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1}=\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$.

Задание 7. Решите уравнение методом подбора:

а) $2^x+3^x=5$; б) $3^x+4^x=5^x$;

в) $8^x+27^x=125^x$; г) $2^x=3-x$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $2^{-|x|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(|x+1|-|x-1|\right)$;

б) $x\cdot 3^{x-1}+3\cdot 3^{\sqrt{3-x}}=3^x+x\cdot 3^{\sqrt{3-x}}$;

в) $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$;

г) $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$;

д) $4^{3+2\cos 2x} - 7 \cdot 4^{1+\cos 2x} - 2 = 0$;

е) $3^{\cos 2x}(4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$;

ж) $\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0$.

Задание 9. При каких действительных значениях a уравнение $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$ имеет один корень?

Задание 10. Решите уравнение $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$, где x — переменная, a — параметр.

Ваш помощник

К заданию 1. а) 3; б) 2; в) 3; г) 3; д) $\frac{1}{3}$.

К заданию 2. а) $-\frac{16}{5}$; в) $-\frac{11}{5}$.

К заданию 3. а) 1; 2; б) 0; в) $\frac{2}{3}$.

К заданию 4. а) 1; б) -1; -2; в) 0; $\frac{1}{4}$; г) 0; $\log_{\frac{2}{3}} 2$; $\log_{\frac{2}{3}} 3$; д) -2; е) $\{\pi n | n \in \boldsymbol{Z}\}$.

К заданию 5. -1.

К заданию 6. а) -2; 2; б) $\pm\sqrt{2}$; в) 1; $1 \pm \sqrt{2}$.

К заданию 7. а) 1; в) $\frac{1}{3}$.

К заданию 8. б) 2; 3; в) -4; 2; 4.

К заданию 10. $1 + \log_{12}\left(1 + \sqrt{1-a}\right)$ при $a < 1$, нет решений при $a > 1$.

УЭ-5. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Цель: на примерах логарифмических уравнений закрепить знания о логике обоснования процесса решения уравнений и методах их решения; добиться, чтобы умения и навыки удовлетворяли таким качествам, как правильность, осознанность, автоматизм, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

***Понятие логарифмического уравнения*. Логарифмическими уравнениями** обычно называют уравнения, в которых переменная содержится только под знаком логарифма (в частности, в основании логарифма). Так, например, уравнения $3\log_2 x - 9 = 0$, $\log_x 8 - 3$ — логарифмические, а уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$ уже не является логарифмическим.

***Методы решения уравнений*:**

- переход от уравнения $F\big(f(x)\big) = a$ к уравнению $f(x) = b$;
- разложение левой части уравнения $f(x) = 0$ на множители;
- метод введения новой переменной;
- функциональный метод.

***Некоторые виды логарифмических уравнений и подходы к их решению*.**

1. Уравнение вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3(x^2 + x + 3) = 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $x^2 + x + 3 = 3^2$, т. е. $x^2 + x - 6 = 0$, откуда $x = -3$ или $x = 2$.

Ответ: –3; 2.

Способ обоснования — *способ равносильных переходов*, а метод решения — *переход от уравнения $F\big(f(x)\big) = a$ к уравнению $f(x) = b$.*

2. Уравнение вида $\log_{g(x)} f(x) = b$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = \big(g(x)\big)^b. \end{cases}$$

(Докажите самостоятельно.)

Пример 2. Решить уравнение $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$.

Решение. Данное уравнение равносильно цепочке систем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 2x^2 - 3x - 4 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 4).$$

Ответ: 4.

3. Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Примечание. В этой системе можно опустить одно из неравенств, поскольку каждое из них следует из уравнения и другого неравенства.

(Докажите равносильность самостоятельно.)

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 3x + 2) = \log_2(2x - 4)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 2x - 4; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - 5x + 6 = 0; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $x = 3$.

Ответ: 3.

4. Уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

В системе неравенство $f(x) > 0$ может быть заменено неравенством $g(x) > 0$; обычно включают в систему более простое из этих неравенств.

Пример 4. Решить уравнение $\log_{x^2-1}(4x^2 - 11x) = \log_{x^2-1}(3x - 6)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \neq 1, \\ 3x - 6 > 0, \\ 4x^2 - 11x - 3x - 6. \end{cases}$$

Решив уравнение $4x^2-11x-3x-6$, получим: $x=3$ или $x=0{,}5$. Из этих двух значений переменной x неравенствам системы удовлетворяет лишь $x=3$. Поэтому корнем исходного уравнения является число 3.

Ответ: 3.

5. Уравнение вида $\log_a f(x)+\log_a g(x)=k$ $(k\in \boldsymbol{R})$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ \log_a\big(f(x)\cdot g(x)\big)=k. \end{cases}$$

Задание. Докажите утверждение 5 самостоятельно.

Пример 5. Решить уравнение $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ \log_2\big(x(x-1)\big)=1. \end{cases}$$

Решив уравнение $\log_2\big(x(x-1)\big)=1$, получим: $x=2$ или $x=-1$. Из этих двух значений переменной неравенству системы удовлетворяет лишь $x=2$. Поэтому корнем исходного уравнения является число 2.

Ответ: 2.

6. Логарифмическое уравнение вида $F\big(\log_a g(x)\big)=0$ решается с помощью подстановки $\log_a g(x)=t$.

Пример 6. Решить уравнение $\lg^2 x+2\lg x-3=0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x>0, \\ \lg x=t, \\ t^2+2t-3=0, \end{cases}$

откуда имеем $\begin{cases} x>0, \\ \lg x=t, \\ t=-3 \text{ или } t=1, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x>0, \\ \lg x=-3, \end{cases}$ или $\begin{cases} x>0, \\ \lg x=1, \end{cases}$ откуда

$\begin{cases} x>0, \\ x=0{,}001, \end{cases}$ или $\begin{cases} x>0, \\ x=10. \end{cases}$

$x=0{,}001$ или $x=10$.

Ответ: 10; 0,001.

7. При решении некоторых уравнений корень находится «подбором», а затем доказывается, что других корней нет.

Пример 7. Решить уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Решение. Легко догадаться, что число 2 — корень данного уравнения. Докажем, что других корней нет. При $x > 2$ имеем:

$$\log_3(3^x - 8) > \log_3(3^2 - 8) = 0,$$

$$\text{а} \quad 2 - x < 0.$$

При $\log_3 8 < x < 2$ имеем $\log_3(3^x - 8) < \log_3(3^2 - 8) = 0$, а $2 - x > 0$. При $x \le \log_3 8$ уравнение не определено.

Ответ: 2.

Практическая часть

Задание 1. Решите уравнение:

а) $\log_3\big((x-1)(2x-1)\big) = 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 + 4x}{2x - 3} = 1$;

в) $\log_{\sqrt{2}} \left| \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} \right| = 0$;

г) $\log_\pi \big(\log_2 (\log_3 3x)\big) = 0$;

д) $\log_7 \Big(\log_3 \big(\log_2 (\log_2 x)\big)\Big) = 0$;

е) $\log_{x+1}(x^3 + 2x^2 + 10x - 11) = 3$;

ж) $\log_{1-x}(2x^2 + x + 1) = 2$.

Задание 2. Решите уравнение:

а) $\log_{\sin x} \dfrac{4}{3} = -2$; б) $\log_{\cos x} \sin x = 1$.

Задание 3. Решите уравнение:

а) $\log_3(x^2 - 4x + 3) = \log_3(3x + 21)$;

б) $\log_4(x^2 + 3x - 4) = \log_4 \dfrac{x-1}{x+4}$;

в) $\log_3(2x^2 - 3x) = 2\log_3 x$;

г) $\lg(2x) = 2\lg(4x - 15)$;

д) $\log_{x^2-1}(x^3+6)=\log_{x^2-1}(4x^2-x)$;

е) $\log_{x^2-2x}(x^2-9)=\log_{6x-12}(x^2-9)$;

ж) $\log_x(8x+4)=\log_{\sqrt{4x+4}}(8x+4)$.

Задание 4. Решите уравнение:

а) $\lg(3x-11)+\lg(x-27)=3$;

б) $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0$;

в) $\log_5\sqrt{x-9}+\log_5\sqrt{2x-1}=\log_5 10$;

г) $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2=0{,}5$;

д) $\log_5(x+4)-\log_5(1-2x)=-\log_5(2x+3)$;

е) $0{,}5\log_5(x+5)+\log_5\sqrt{x-3}=0{,}5\log_5(2x+1)$.

Задание 5. Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{5-4\lg(x+1)}=3-\dfrac{1}{1+\lg(x+1)}$;

б) $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$;

в) $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$;

г) $\lg^2(x-1)^2-3\lg(x-1)=3{,}5\lg(x-1)^2-4$;

д) $0{,}1\log_2^4(x-4)-1{,}3\log_2^2(x-4)=-3{,}6$.

Задание 6. Решите уравнение:

а) $\log_{81}x-2\log_3 x+5\log_9 x=1{,}5$;

б) $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27}x\cdot\log_{81}x=\dfrac{2}{3}$;

в) $\log_5(x-2)+\log_{\sqrt{5}}(x^3-2)=4-\log_{0{,}2}(x-2)$;

г) $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$;

д) $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$;

е) $\log_2 x\cdot\log_3 x\cdot\log_5 x=\log_2 x\cdot\log_3 x+\log_2 x\cdot\log_5 x+$ $+\log_3 x\cdot\log_5 x$.

Задание 7. Решите уравнение:

а) $(x^2-6x-7)\log_2(3x-1)=0$;

б) $(x^2-2x-15)\lg(4x-3)=0$.

Задание 8. Решите уравнение:

а) $\log_3|2x+1|+\log_3|x-1|=\log_3 2$;

б) $\log_{\frac{1}{4}}(1-3x)+\log_4|4x-3|=1$;

в) $\lg(x+1)^2+\lg(x-9)^2=2\lg 9$;

г) $\lg x^4+\lg(x+4)^4=4\lg 3$;

д) $\left|\log_2\left(x(3x-1)\right)-\log_2 3\right|=\left|\log_2(5-2x)-1\right|$;

е) $\log_2\left|x^3+2x^2-4x-4\right|=2$;

ж) $\log_2\dfrac{1}{|x-1|-1}=1$.

Задание 9. Решите уравнение методом подбора:

а) $\lg(20-x)=\lg^3 x$; б) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$.

Задание 10. Решите уравнение (x — переменная, a — параметр):

а) $\lg^3(a^2x^2)=8\lg(ax)$;

б) $\log_{a^2}x^2+\log_a(x-1)=\log_a(\log_3 3)$.

Задание 11. Решите уравнение:

а) $x^{\log_2 x}=16$; б) $x^{2\lg^2 x}=10x^3$.

Ваш помощник

К заданию 1. а) 0; 1,5; г) 3; д) 256; е) 3; 4; ж) –3.

К заданию 3. а) –2; 9; б) –5; в) 3; г) 4,5; д) 2; 3; е) 6; ж) 2.

К заданию 4. а) 37; б) 6; в) 13; г) –1,25; д) –1; е) 4.

К заданию 5. б) 10; $\sqrt[9]{10}$; в) 10; г) 101; $1+\sqrt{10}$; д) 4,125; 4,25; 8; 12.

К заданию 6. а) 9; б) 9; $\frac{1}{9}$; в) 3; г) 7; д) 1; е) 1; 30.

К заданию 7. а) 7; $\frac{2}{3}$; б) 1; 5.

К заданию 8. а) –1; 1,5; б) 0,125; в) 0; 8; $4\pm\sqrt{34}$; е) –2; 2; 0; $-1+\sqrt{5}$; ж) –0,5; 2,5.

К заданию 9. а) 10.

К заданию 10. а) $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{10a}$; $\frac{10}{a}$; б) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

К заданию 11. а) 0,25; 4.

УЭ-6. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Цель: на примерах показательных неравенств закрепить знания о логике обоснования процесса решения неравенств и методах их решения; добиться, чтобы умения и навыки удовлетворяли таким качествам, как правильность, осознанность, автоматизм, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Понятие показательного неравенства. Например, неравенство $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$ является показательным неравенством.

***Методы решения неравенств*:**

- переход от неравенства $f(x) < g(x)$ к неравенству $F\big(f(x)\big) < F\big(g(x)\big)$ и обратно;
- разложение на множители;
- введение новой переменной;
- функциональный метод.

Некоторые виды показательных неравенств и подходы к их решению.

1. Неравенство вида $a^x < b$.

При $b \le 0$ данное неравенство решений не имеет, поскольку $a^x > 0$ при любом действительном x. При $b > 0$ данное неравенство можно записать в виде $a^x < a^{\log_a b}$. Если $a > 1$, то в силу возрастания показательной функции это неравенство равносильно неравенству $x < \log_a b$, решением которого является числовой промежуток $(-\infty; \log_a b)$.

Если $0 < a < 1$, то показательная функция убывает и неравенство $a^x < a^{\log_a b}$ равносильно неравенству $x > \log_a b$, решением которого является числовой промежуток $(\log_a b; +\infty)$.

Задание. Рассмотрите решение неравенства $a^x > b$ в общем случае, т. е. x — переменная, b — параметр.

Пример 1. Решить неравенство $2^x > 3$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде $2^x > 2^{\log_2 3}$, откуда $x > \log_2 3$, его решением являются все числа x из промежутка $(\log_2 3; +\infty)$.

Ответ: $(\log_2 3; +\infty)$.

2. Неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Пример 2. Решить неравенство $0{,}3^{2x^2+3x+3} > 0{,}3^{x^2+1}$.

Решение. Поскольку $0 < 0{,}3 < 1$, то это неравенство равносильно неравенству $2x^2 + 3x + 3 < x^2 + 1$, т. е. $x^2 + 3x + 2 < 0$. Решая его, получаем, что $-2 < x < -1$.

Ответ: $(-2; -1)$.

Пример 3. Решить неравенство $5^{2x} > 5^{x-2}$.

Решение. Имеем: $\left(5^{2x} > 5^{x-2}\right) \Leftrightarrow (2x > x - 2) \Leftrightarrow (x > -2)$.

Ответ: $(-2; +\infty)$.

3. Неравенство вида $F(a^{f(x)}) < 0$, где вместо знака «<» может стоять любой из знаков «≤», «>», «≥».

При решении некоторых показательных неравенств используется метод введения новых переменных.

Пример 4. Решить неравенство $4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$.

Решение. Разделив обе части данного неравенства на 10^x ($10^x > 0$ при любом действительном x), получим равносильное ему неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x < 1.$$

Обозначим $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$ $(t > 0)$. Тогда относительно t неравенство примет вид $t - \frac{2}{t} < 1$, или $\frac{t^2 - t - 2}{t} < 0$.

Учитывая, что $t > 0$, получаем: $\begin{cases} t^2 - t - 2 < 0, \\ t > 0, \end{cases}$ откуда следует, что $0 < t < 2$, тогда $0 < \left(\frac{2}{5}\right)^x < 2$ или $\left(\frac{2}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,4} 2}$, откуда

$$\log_{0,4} 2 < x < +\infty.$$

Ответ: $(\log_{0,4} 2; +\infty)$.

Практическая часть

Задание 1. Решите неравенство:

а) $0{,}6^{\left|\frac{x}{x-1}\right|} < 0{,}6^x$; б) $1 < 3^{\left|x^2-x\right|} < 9$;

в) $(1{,}1)^{|x+7|} < (1{,}1)^{\left|x^2-3x+2\right|}$; г) $\left|2^{x^2-2x} - 132\right| < 124$.

Задание 2. Решите неравенство:

а) $2^x + 3^x + 4^x + 5^x > 54$;

б) $3^{\sqrt{1-x}} + 3^{\sqrt{2-x}} + 3^{\sqrt{6-2x}} > 13$;

в) $6^x + 8^x > 10^x$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$;

б) $(0{,}5)^{x^4-2x^2} > 2^{-8x^2+9}$;

в) $3^{1-5x} + 3^{2-5x} \le 4\sqrt{3}$;

г) $|x|^{x^2+2,5x-1,5} < 1$;

д) $5^{2x+1} > 5^x + 4$;

е) $4^{5+4x} - 15\cdot(0{,}25)^{3+4x} + 8 \ge 0$;

ж) $\dfrac{64}{9-3^x} - 3^x > 7$.

Задание 4. При каких натуральных n имеет место неравенство:

а) $0{,}5^n > 0{,}01$;

б) $2^n > 1000$?

Ваш помощник

К заданию 1. а) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$; б) $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$; в) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

К заданию 2. а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)$; в) $(-\infty; 2)$.

К заданию 3. в) $[0{,}1; +\infty)$; г) $(-3; -1) \cup (0{,}5; 1)$; д) $(0; +\infty)$; ж) $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

К заданию 4. а) $n < 7$; б) $n \ge 10$.

УЭ-7. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Цель: на примерах логарифмических неравенств закрепить знания о логике обоснования процесса решения неравенств и методах их решения; добиться, чтобы умения и навыки удовлетворяли таким качествам, как правильность, осознанность, автоматизм, рациональность и прочность.

Теоретическая часть

Понятие логарифмического неравенства. Неравенства $\log_3(5x-4)<0$, $\lg(x^2-4x+4)>1$ являются примерами логарифмических неравенств.

***Методы решения неравенств*:**

- переход от неравенства $f(x)<g(x)$ к неравенству $F\big(f(x)\big)<F\big(g(x)\big)$ и обратно;
- разложение на множители;
- введение новой переменной;
- функциональный метод.

Решение многих логарифмических неравенств основано на монотонности логарифмической функции.

Напомним, что функция вида $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ является убывающей, если $0<a<1$, и возрастающей, если $a>1$. Поэтому неравенство вида $\log_a f(x)<\log_a g(x)$:

а) при $0<a<1$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0; \end{cases}$$

б) при $a>1$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Некоторые виды логарифмических неравенств и подходы к их решению.

1. Неравенство вида $\log_a x<b$. Его можно записать в виде $\log_a x<\log_a a^b$.

а) Если $a>1$, то функция $y=\log_a t$ возрастает и определена на множестве всех действительных положительных чисел, и поэтому $(\log_a x<\log_a a^b)\Leftrightarrow(0<x<a^b)$.

б) Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ убывает на множестве всех действительных положительных чисел, и поэтому

$$(\log_a x < \log_a a^b) \Leftrightarrow (x > a^b).$$

Пример 1. Решить неравенство $\log_2 (2x - 3) < 0$.

Решение. Представив правую часть данного неравенства в виде $\log_2 1$, получим:

$$\log_2 (2x - 3) < \log_2 1. \qquad (*)$$

Функция $y = \log_2 t$ определена при $t > 0$ и возрастает на множестве всех положительных чисел (так как $2 > 1$). Следовательно, неравенство (*) равносильно неравенству $0 < 2x - 3 < 1$, откуда $3 < 2x < 4$, т. е. $1{,}5 < x < 2$.

Итак, решением данного неравенства является интервал $(1{,}5; 2)$.

Ответ: $(1{,}5; 2)$.

Задание. Рассмотрите вопрос о решении логарифмических неравенств вида $\log_a x \le b$, $\log_a x \ge b$, $\log_a x > b$ в общем виде самостоятельно.

2. Неравенство вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$. При $a > 1$ оно равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Задание. Доказательство проведите самостоятельно.

Пример 2. Решить неравенство $\log_3 \dfrac{3x - 5}{x + 1} \le 1$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде $\log_3 \dfrac{3x - 5}{x + 1} \le \log_3 3$.

Оно равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{3x - 5}{x + 1} > 0, \\ \dfrac{3x - 5}{x + 1} \le 3, \end{cases} \begin{cases} \dfrac{3x - 5}{x + 1} > 0, \\ \dfrac{-8}{x + 1} \le 0, \end{cases}$ откуда получаем $x > \dfrac{5}{3}$.

Ответ: $\left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$.

Задание. Рассмотрите вопрос о решении неравенств $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$ самостоятельно.

3. Неравенство вида $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$. Оно равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Другими словами, если в неравенстве фигурирует логарифмическая функция, содержащая переменную в основании, то следует рассмотреть два случая: основание больше единицы и основание меньше единицы, но больше нуля.

Пример 3. Решить неравенство $\log_x (2 + x) < 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x > 1, \\ 2 + x > 0, \\ 2 + x < x \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2 + x > x, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x > 1, \\ x > -2, \\ 0 \cdot x < -2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 \cdot x < -2. \end{cases}$$

Нет решений.

Ответ: (0; 1).

Практическая часть

Задание 1. Решите неравенство:

а) $\lg(x^2 - 6x + 18) < 1$;

б) $\log_{0,3}(3x - 8) > \log_{0,3}(x^2 + 4)$;

в) $\log_3(x - 7) + \log_3(x - 3) \le 1 + \log_3 4$;

г) $\log_2 (x^2 - 4) - 3\log_2 \dfrac{x+2}{x-2} > 2$;

д) $\log_\pi (x + 27) - \log_\pi (16 - 2x) < \log_\pi x$;

е) $\log_{0,5} (4 + x) \ge \log_{0,5} \dfrac{3}{1-x} - 1$.

Задание 2. Найдите нули и промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2x}{1+x}$; б) $y = \log_{0,5}(x^2 - 5x + 7)$;

в) $y = \log_{0,3} \dfrac{x+2}{5x-1}$; г) $y = \log_3 \dfrac{3}{|x+2| + x}$.

Задание 3. Решите неравенство:

а) $\log_{0,7} \dfrac{x^2 - 4x + 6}{x} \le 0$; б) $\log_2 \dfrac{3x-1}{3x+2} < 1$;

в) $\log_x \dfrac{3x+2}{4(1-x)} > 0$; г) $\log_x \dfrac{4x+1}{6(x-1)} < 0$.

Задание 4. Решите неравенство:

а) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{0,4} \frac{7x-2}{7x+1}} > 1$; б) $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$.

Задание 5. Решите неравенство:

а) $\dfrac{1 - \log_{0,5}(9-2x)}{\log_{0,5} 3 - 4x^2} \ge 0$; б) $\dfrac{1 + \log_3(2x+15)}{\log_3 0,5 - 2x^2} \le 0$.

Задание 6. Решите неравенство:

а) $\log_{0,5} \log_8 \dfrac{x^2 - 2x}{x-3} < 0$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} \ge 0$.

Задание 7. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} |2x-3|}$;

б) $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x}}{2 - \log_2(2x^2 - 5x + 7)}}$.

Задание 8. Решите неравенство:

а) $4\log_4^2 x - \log_4 x - 3 > 0$;

б) $\log_{16}(18-2x) \cdot \log_4 \dfrac{18-2x}{32} > -0,5$;

в) $\log_2^2(x-x^2+2)+3\log_{\frac{1}{2}}(x-x^2+2)\le -2;$

г) $\log_3^2\left(x-\frac{2}{3}x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{2}{3}x^2\right)\le 2.$

Задание 9. Решите неравенство:

а) $(0,4)^{\log_3\frac{3}{x}\cdot\log_3(3x)}>(6,25)^{\log_3 x^2+2};$

б) $4^{1+\lg(1-x)}-6^{\lg(1-x)}>2\cdot 3^{2+\lg(x^2-2x+1)}.$

Задание 10. Решите неравенство:

а) $\log_{2x+3}x^2<1;$

б) $\log_{x+7}25>2;$

в) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1;$

г) $\log_x\frac{4x+5}{6-5x}<1.$

Задание 11. Решите неравенство:

а) $(4x^2-16x+7)\cdot\log_2(x-3)>0;$

б) $(4x^2-8x-5)\cdot\log_5(x+1)<0.$

Задание 12. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(x^2+3x-10)\cdot\lg^2(x-3)};$

б) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x+1}{x-1}}.$

Задание 13. Изобразите множество точек на плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству:

а) $\log_2(x+y)\le 1;$

б) $\log_2(y-x^2)<2;$

в) $\log_{\frac{1}{2}}\left|1-|x|\right|>1;$

г) $\log_y x<1;$

д) $\log_{xy}x>1;$

е) $\log_{|y|}|x|>0;$

ж) $\log_{x^2+y^2}(|x|+0,5)>0;$

з) $\log_{2|x|}(x^2+y^2)>0.$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $(2;\ 4)$; б) $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$; в) $(7;\ 9)$; г) $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$; д) $(3;\ 4,5)$; е) $(-4;\ -2)\cup[-1;\ 1]$.

К заданию 2. а) $y < 0$ при $x = 1$; $y > 0$ при $x \in (0;\ 1)$;
$y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; г) $y = 0$ при $x = 0{,}5$;
$y > 0$ при $x \in (-1;\ 1{,}5)$; $y < 0$ при $x \in (0{,}5; +\infty)$.

К заданию 3. а) $(0;\ 2] \cup [3; +\infty)$; в) $\left(0; \dfrac{2}{7}\right)$; г) $(3{,}5; +\infty)$.

К заданию 4. а) $\left(-\infty; \dfrac{1}{7}\right)$.

К заданию 5. а) $[4{,}25;\ 4{,}5]$; б) $\left[-7\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

К заданию 6. а) $(3;\ 4) \cup (6; +\infty)$; б) $[2; +\infty)$.

К заданию 7. а) $D(y) = [1;1{,}5] \cup (1{,}5;\ 2]$; б) $D(y) = \{0\} \cup (1;1{,}5)$.

К заданию 8. в) $[0;\ 1]$; г) $[0{,}5;\ 1]$.

К заданию 9. а) $\left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup (243; +\infty)$.

К заданию 10. а) $(3;\ 3{,}5) \cup (4; +\infty)$; б) $(-1; -0{,}5) \cup (0;\ 2{,}5)$.

К заданию 11. а) $D(y) = \{4\} \cup [5; +\infty)$; б) $D(y) = [2; +\infty)$.

УЭ-8. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Цель: приобрести прочные умения и навыки по решению систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Теоретическая часть

При решении систем, составленных из показательных или логарифмических уравнений (неравенств), используются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (неравенств). При этом широко применяются способы решения показательных и логарифмических уравнений (неравенств) и учитывается область определения уравнений (неравенств), составляющих систему.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases}2^x + 2\cdot 3^{x+y} = 56,\\ 3\cdot 2^x + 3^{x+y+1} = 87.\end{cases}$

Решение. Пусть $2^x = u, 3^{x+y} = v$, тогда система примет вид

$$\begin{cases}u+2v=56,\\ 3u+3v=87,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}u+2v=56,\\ u+v=29.\end{cases}$$

Решая эту систему (например, вычитая из первого уравнения второе), получим: $v = 27$, $u = 2$. Тогда

$$\left(\begin{cases}2^x = 2,\\ 3^{x+y} = 27\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=1,\\ x+y=3\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=1,\\ y=2\end{cases}\right).$$

Ответ: (1; 2).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2 + y^2 = 16+2xy,\\ \log_2(2x-2y)+\log_2(x+y)=4.\end{cases}$$

Решение. Учитывая, что логарифм существует только положительного числа при положительном и отличном от единицы основании, $4 = \log_2 16$, и, используя свойства логарифмов, запишем систему, равносильную данной:

$$\begin{cases}x-y>0,\\ x+y>0,\\ x^2+y^2=16+2xy,\\ 2(x-y)(x+y)=16,\end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases}x-y>0,\\ x+y>0,\\ (x-y)^2=16,\\ (x-y)(x+y)=8.\end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности систем:

$$(1)\begin{cases}x-y>0,\\ x+y>0,\\ x-y=4,\\ (x-y)(x+y)=8\end{cases} \text{ или } (2)\begin{cases}x-y>0,\\ x+y>0,\\ x-y=-4,\\ (x-y)(x+y)=8.\end{cases}$$

(1) $\begin{cases}x-y=4,\\ x+y=2.\end{cases}$ Получаем, что (3; −1) — решение данной и исходной систем.

(2) Эта система решений не имеет, поскольку равенство $x-y=-4$ и неравенство $x-y>0$ одновременно верными быть не могут.

Ответ: (3; 1).

Пример 3. Решить систему неравенств $\begin{cases}\log_{2-x}(2-y)>0,\\ \log_{4-y}(2x-2)>0.\end{cases}$

Решение. Данная система равносильна совокупности систем:

1) $\left(\begin{cases}0<2-x<1,\\ 0<2-y<1,\\ 0<4-y<1,\\ 0<2x-2<1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}1<x<2,\\ 1<y<2,\\ 3<y<4,\\ 1<x<1{,}5\end{cases}\right)$. Решений нет.

2) $\left(\begin{cases}2-x>1,\\ 2-y>1,\\ 0<4-y<1,\\ 0<2x-2<1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x<1,\\ y<1,\\ 3<y<4,\\ 1<x<1{,}5\end{cases}\right)$. Решений нет.

3) $\left(\begin{cases}0<2-x<1,\\ 0<2-y<1,\\ 4-y>1,\\ 2x-2>1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}1<x<2,\\ 1<y<2,\\ y<3,\\ x>1{,}5\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}1{,}5<x<2,\\ 1<y<2\end{cases}\right)$.

4) $\left(\begin{cases}2-x>1,\\ 2-y>1,\\ 4-y>1,\\ 2x-2>1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x<1,\\ y<1,\\ y<3,\\ x>1{,}5\end{cases}\right)$. Решений нет.

Ответ: $(x; y)$, где $x\in(1{,}5; 2)$, $y\in(1; 2)$.

Практическая часть

Задание 1. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}9^x-3\cdot5^y=3,\\ 9^x\cdot5^y=18;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3^x\cdot2^y=\dfrac{1}{9},\\ \dfrac{1}{9}\cdot3^y=3^x;\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\cdot 2^{x}-2^{x+y}=-2, \\ 5\cdot 2^{x+1}-2^{x+y+1}=16; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^{x}-2^{y^2}=77, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y^2}{2}}=7. \end{cases}$

Задание 2. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3^{x^2-2xy}=1, \\ 2\log_3(y+2)=\log_3(5x-1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^{y^2-3xy}=1, \\ 2\log_2(x+1)=\log_2(3y-5); \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0, \\ \lg(3x-y)+\lg(x+y)=4\lg 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 10^{2-\lg(x-y)}=25, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=1+2\lg 2. \end{cases}$

Задание 3. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^{y}=7^{6}, \\ \log_7 x+y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{y}=\frac{1}{125}, \\ \log_5 x-y=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^{y}=y^{x}, \\ 3^{x}=2^{y}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^{y}=y^{x}, \\ x^{3}=y^{2}. \end{cases}$

Задание 4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_x y+\log_y x=2{,}5, \\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2\log_x 8+3y=24, \\ -2\log_x^3 0{,}5+y=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy=27, \\ 2(2\log_{y^2} x+\log_{\frac{1}{x}} y)=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \log_{xy}(x-y)=1, \\ \log_{xy}(x+y)=0. \end{cases}$

Задание 5. Изобразите на координатной плоскости точки, координаты которых x и y удовлетворяют условию:

а) $\begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{8}} y}+y^{\log_{\frac{1}{8}} x}>\frac{1}{4}, \\ (\log_4 x)\cdot(\log_4 y)=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^{\log_{\frac{1}{3}} y}+2y^{\log_{\frac{1}{3}} x}<\frac{1}{3}, \\ \log_3 y^2+2\log_3\frac{1}{x}=0. \end{cases}$

Задание 6. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}\log_x(x+2)>2,\\ \left|x^2-8x+13\right|^{4x-6}<1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_{x-1}(5-y)<0,\\ \log_{2-y}(4-x)<0.\end{cases}$

Ваш помощник

К заданию 1. а) $(1;\log_5 2)$; б) $(-2;0)$; в) $(1;2)$; г) $(4;2)$; $\left(4;-\sqrt{2}\right)$.

К заданию 2. а) $(10;5)$, $(2;1)$; б) $(1;3)$, $(6;18)$; в) $(2;2)$; г) $(7;3)$.

К заданию 3. а) $(343;2)$, $(49;3)$; б) $(125;-1)$, $(5;-3)$; г) $(1;1)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{27}{8}\right)$.

К заданию 4. а) $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{81}\right)$; б) $(2;6)$, $(0{,}5;10)$; в) $(9;3)$, $\left(\frac{1}{27};729\right)$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА

Из истории открытия логарифмов

Действия сложения и вычитания над многозначными числами выполнять значительно легче, чем действия умножения и деления; эти действия в свою очередь легче, чем возведение в степень и извлечение корня. Вычислители, естественно, стремились избежать непосредственного умножения и деления чисел, сводя их к сложению и вычитанию. В XI в. для этой цели использовались таблицы синусов и косинусов. Например, формула

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$

сводит умножение двух чисел к вычислению полуразности некоторых двух чисел, получаемых по таблицам. Развитие тригонометрии дало астрономии практический метод для вычисления. Однако и этот метод был сложен, а развивающаяся астрономия требовала новых, более эффективных средств, которые дали бы возможность оперировать с большими числами. Техника вычислений отставала от требований астрономии и других наук. Введение логарифмов снимало это противоречие: действия умножения и деления можно было свести к действиям сложения и вычитания. Логарифмы дали возможность за несколько часов выполнять работу, на которую раньше требовались целые месяцы. Для вычислительной практики значение логарифмов столь велико, что их открытие ставят в один ряд с изобретением десятичной системы счисления.

Теоретические основы введения логарифмов стали формироваться очень давно. Плодотворной идеей оказалось сравнение двух прогрессий — арифметической и геометрической:

$$0, d, 2d, 3d, \ldots, (n-1)d, nd, \ldots, \qquad (1)$$

$$1, q, q^2, q^3, \ldots, q^{n-1}, q^n, \ldots . \qquad (2)$$

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567), сравнивая прогрессии (1) и (2) в книге «Целостная арифметика», говорит: «Сложение в арифметическом ряде соответствует умножению в геометрическом, равным образом вычитание в первом — делению во втором; простому умножению в арифметическом ряде соответствует умножение на себя (возведение в степень) в геометрическом ряде, а делению в арифметическом ряде — извлечение корня в геометрическом ряде, в частности делению пополам — извлечение квадратного корня». Чтобы воспользоваться этой идеей для целей сведения действий к более простым, нужно было составить таблицы, где сопоставляется последовательность степеней чисел с последовательностью их показателей.

Первыми, кто действительно осуществил идею логарифмов путем создания специальных таблиц логарифмов, были швейцарец И. Бюрги (1552—1632) и шотландец Д. Непер (1550—1617). Каждый из ученых подошел к составлению таблиц независимо от другого. Однако если иметь в виду публикацию результатов этих работ, то приоритет открытия принадлежит Неперу.

Само слово «логарифм» (в переводе с греческого «логос» означает «отношение», а «аритмос» — «число») было введено Непером, который в 1614 г. опубликовал свои таблицы под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов». В этом труде содержались определение неперовых логарифмов, их свойства и таблицы логарифмов синусов и косинусов от 0 до 90° с шагом в 1′.

Бюрги составил свои таблицы в течение 1603—1611 гг., а опубликовал только в 1620 г. под названием «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий вместе с основательным наставлением, как их нужно понимать и с пользой применять во всех вычислениях». Они были построены на основе геометрической прогрессии со знаменателем 1,0001. Ее члены Бюрги назвал «черными числами», а соответствующие члены арифметической прогрессии —

«красными числами», поскольку таблица была напечатана двумя красками.

Непер за основание своих логарифмов брал число, близкое к числу e, но не само это число. Логарифмы с основанием e ввел английский математик Д. Спейделл (XVII в.). Он впервые издал таблицы «новых логарифмов» чисел от 1 до 1000. Такие логарифмы «естественно» возникают при определении площадей фигур, ограниченных гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и двумя прямыми, параллельными оси Oy (или оси Ox), поэтому немецкий математик К. Меркатор (около 1620—1687) назвал логарифмы с основанием e «натуральными» или «гиперболическими».

Десятичные логарифмы были введены английским математиком Г. Бригсом (1561—1630). В 1617 г. он опубликовал 8-значные таблицы десятичных логарифмов всех натуральных чисел от 1 до 1000, а в 1624 г. — 14-значные таблицы логарифмов всех натуральных чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Это был колоссальный труд. Чтобы вычислить логарифм какого-нибудь числа до 14-го знака, Бригсу приходилось 54 раза извлекать корень с 32 знаками.

В течение более трех столетий, начиная с 1614 г., продолжалась дальнейшая теоретическая и практическая разработка идей, лежащих в основе работ Штифеля, Бюрги, Непера, Бригса. Свойства логарифмов были сформулированы английским математиком У. Оутредом (1574—1660) в 1648 г. Лишь в 1748 г. Л. Эйлер определил логарифм как действие, обратное возведению в степень, и тем самым определил логарифм как некоторый показатель степени.

Введение понятия логарифма как новой функциональной связи между переменными имело исключительно большое значение для развития анализа бесконечно малых величин.

Интересно знать

График функции $y = e^x$ обладает замечательным свойством. Если построить графики функций $y = 2^x$ и $y = 3^x$ и провести к ним касательные в точке с абсциссой нуль, то углы наклона этих касательных к оси абсцисс приблизительно равны 35° и 51° соответственно. Значит, можно предположить, что существует показательная функция, график которой в точке $M(0; 1)$ пересекает ось абсцисс под углом 45°. Оказывается, этой функцией является функция $y = e^x$.

Софизмы

А. Запишем верное числовое равенство $\lg\frac{1}{5}=\lg\frac{1}{5}$. Удвоив левую часть, а правую оставив без изменения, получим $2\lg\frac{1}{5}>\lg\frac{1}{5}$, откуда $\lg\left(\frac{1}{5}\right)^2>\lg\frac{1}{5}$, т. е. $\frac{1}{25}>\frac{1}{5}$.

Где ошибка?

Б. Пусть a — положительное действительное число, тогда:

$$2\lg a=\lg a^2=\lg(-a)^2=2\lg(-a),$$

откуда получаем, что $\lg a=\lg(-a)$, т. е. логарифм положительного числа равен логарифму того же числа, но взятого с противоположным знаком.

Где ошибка?

Викторина

1. Имена каких выдающихся математиков мира вы знаете? В каком веке они жили?

2. Первая в мире женщина-математик. Кто она?

3. Он был не только великим математиком и физиком древности, но также и гениальным изобретателем, замечательным патриотом своей родины. Кто он?

4. Учение о мореходных качествах корабля, теория гидравлических турбин, способы расчета оптических стекол для телескопов и микроскопов — это далеко не полный перечень работ выдающегося математика XVIII в. о практических приложениях математики. Кто этот ученый?

5. Другой выдающийся математик уже XIX в. разработал новый метод определения орбиты тела по трем наблюдениям, которым пользуются и ныне, дал общее решение вопроса о построении сети географических карт. Эти его работы и многие другие впоследствии нашли применение в других вопросах, в других областях науки и техники. Кто же он?

6. Какая швейцарская семья, жившая в XVII—XVIII вв., дала миру много ученых, в том числе одиннадцать видных математиков?

СОДЕРЖАНИЕ