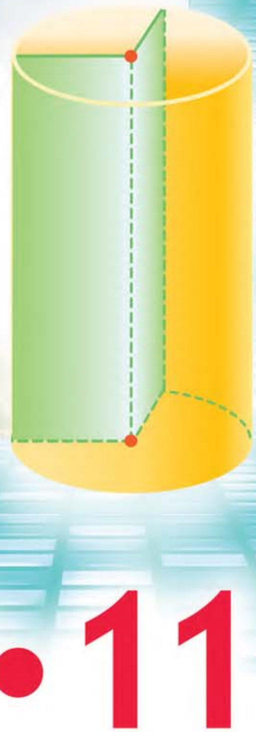
Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский



10•11
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие для 10—11 классов
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

Минск «Народная асвета» 2021

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Л27

Перевод с белорусского языка *Е. В. Масальской*

Рецензенты:

кафедра методики преподавания физико-математических дисциплин учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина» (кандидат педагогических наук, доцент *Е. П. Гринько*); методист высшей квалификационной категории отдела методического обеспечения естественно-математического образования Национального института образования *Т. А. Адамович*

ISBN 978-985-03-3704-7

Дорогие ребята!

Книга, которую вы держите в руках, содержит задания для практического освоения материала, изложенного в учебных пособиях по геометрии для средней общеобразовательной школы.

Задания в предлагаемом сборнике для каждого класса сгруппированы в параграфы, которые имеют те же названия, что и соответствующие параграфы учебного пособия. Номера упражнений в сборнике отличаются цветом. Цвет номера, как правило, совпадает с цветом буквы, обозначающей соответствующий смысловой блок учебного пособия. Например, задачи **751**, **752**, **779**, **799**, **891** связаны с логическими блоками **А)**, **Б)**, **В)**, **Г)**, **Д)** параграфа 8 учебного пособия «Геометрия, 11». Основное назначение этих заданий — актуализировать содержание изученного в соответствующем параграфе материала и показать его связи с ранее изученным. Звездочкой * обозначены задания повышенной сложности, значком — задания, соответствующие программе обучения на повышенном уровне. Упражнения, обозначенные курсивными номерами, непосредственно примыкают к изучаемому материалу и предназначены для углубления знаний любознательных учащихся.

В курсе геометрии старшей ступени средней школы существенно используются знания о геометрических свойствах плоских фигур, которые изучались в предыдущих классах. Поэтому наряду с изучением нового материала следует уделять значительное внимание обобщению и повторению всего, что было изучено за одиннадцать лет. Это необходимо для подготовки как к выпускному экзамену, так и к централизованному тестированию. Достижению этой цели посвящен последний раздел, в котором задания сгруппированы по основным содержательным линиям школьной геометрии. Задания этого раздела можно использовать для текущего повторения ранее пройденного материала. Они могут существенно различаться по степени сложности. В одних заданиях требуется вспомнить давно изученный материал, о котором в памяти остались только самые общие представления. Такие задания помогут восстановить существенные моменты ранее изученного, закрепить их в памяти. Другие задания требуют применения знаний по множеству тем. Такие задания учат применению математических знаний.

Желаем успехов!

Авторы

10 класс

1. Пространственные фигуры

1. Назовите многогранник, имеющий наименьшее количество вершин. Сколько у такого многогранника:

а) вершин; б) ребер; в) граней?

2. Каждая грань многогранника является параллелограммом. На рисунке 1 изображен такой невыпуклый многогранник, отличный от параллелепипеда. Сколько у этого многогранника:

а) вершин; б) ребер; в) граней?

3. На рисунке 2 изображен выпуклый многогранник, отличный от параллелепипеда, каждая грань которого является параллелограммом. Сколько у этого многогранника:

а) вершин; б) ребер; в) граней?

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ измерения AB, AD, AA_1 соответственно равны 4, 5 и 12. Найдите длину пространственной ломаной $AB_1C_1BA_1D_1CC_1DA$.

5. В прямой призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра имеют длину 6 см. Найдите длину пространственной ломаной $ABC_1D_1B_1A_1DCA$, учитывая, что $\angle ABC = 120°$.

6. В правильной пирамиде $PABCD$ точки M, N, K, L — середины ребер AB, BC, CP, PA соответственно. Найдите длину бокового ребра, учитывая, что ломаная $MBNKPLM$ имеет длину 26 и $CD = 6$.

7. В правильной шестиугольной призме боковое ребро равно ребру основания. Найдите площадь полной поверхности призмы,

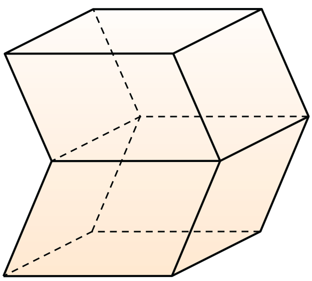


Рис. 1

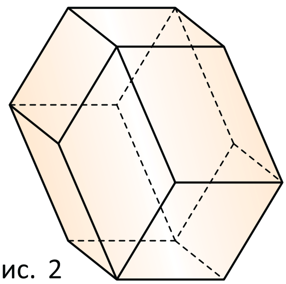


Рис. 2

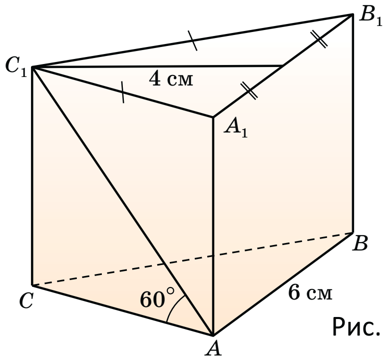


Рис. 3

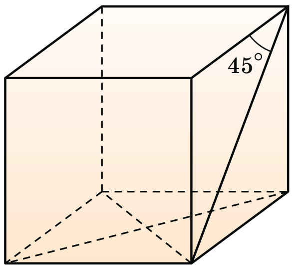


Рис. 4

учитывая, что ее боковая поверхность равна 216 см^2.

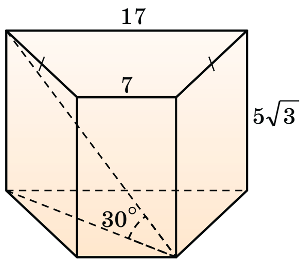


Рис. 5

8. Точки M, N, K, L, M_1, N_1, K_1, L_1 выбраны на ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, что $AM : MB = A_1M_1 : M_1B_1 = BN : NC =$ $= B_1N_1 : N_1C_1 = CK : KD = C_1K_1 : K_1D_1 =$ $= DL : LA = D_1L_1 : L_1A_1 = 3 : 4$.
Найдите длину пространственной ломаной $MM_1N_1NKK_1L_1LM$, учитывая, что ребро куба равно 14 см.

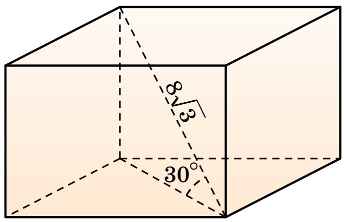


Рис. 6

9. Найдите полную поверхность прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ по данным, указанным на рисунке 3.

10. Найдите полную поверхность прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 10 и 24, учитывая данные, указанные на рисунке 4.

11. Найдите полную поверхность прямой призмы, учитывая данные, указанные на рисунке 5, и то, что основанием призмы является трапеция.

12. Найдите полную поверхность правильной четырехугольной призмы с диагональю 15 и диагональю основания 12.

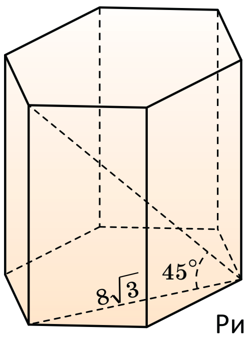


Рис. 7

13. Найдите полную поверхность правильной призмы по данным, указанным на рисунке:

а) 6; б) 7.

14. Найдите боковую поверхность правильной пирамиды $SABCDEF$ по данным, указанным на рисунке 8.

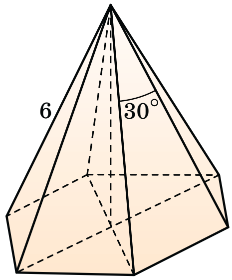


Рис. 8

15. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 13 см, а апофема — 12 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей этой пирамиды.

16. В правильной шестиугольной усеченной пирамиде боковое ребро равно 5 см, ребра оснований — 2 см и 8 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей этой пирамиды.

2. Прямые и плоскости

17. Сколько точек попарного пересечения могут иметь:

а) три прямые; б) четыре прямые?

Свои ответы подтвердите соответствующими рисунками.

18. Каждые две из трех прямых пересекаются. Определите, сколько имеется точек пересечения, учитывая, что прямые не принадлежат одной плоскости.

19. Через каждые две из четырех отмеченных точек проведена прямая. Определите, как расположены отмеченные точки, учитывая, что проведенные прямые пересекаются в:

а) четырех точках; б) пяти точках; в) шести точках.

20. Прямые содержат стороны правильного шестиугольника. Определите, сколько точек получится при попарных пересечениях этих прямых.

21. Каждые две из трех прямых пересекаются. Определите, сколько существует точек пересечения, учитывая, что прямые не принадлежат одной плоскости.

22. Каждые две из трех плоскостей пересекаются. Сколько прямых при этом может получиться?

23. Точки A, B, C, D, E выбраны на боковых ребрах призмы (рис. 9). Могут ли принадлежать одной плоскости:

а) все эти точки;

б) все эти точки, но без точки D;

в) все эти точки, но без точки E?

Ответ обоснуйте.

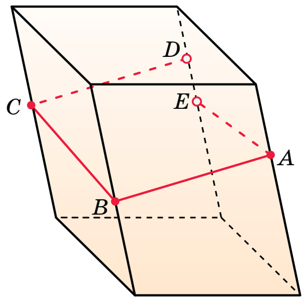


Рис. 9

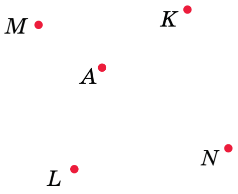


Рис. 10

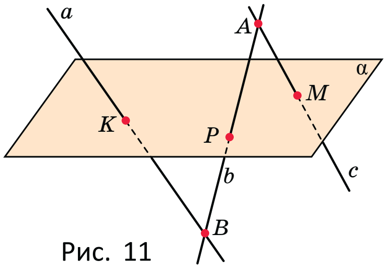


Рис. 11

24. Точки A, B, C, D, M, N, K, L не лежат в одной плоскости, точка F принадлежит прямой BC. Укажите:

а) плоскости, которым принадлежит точка F; точка C;

б) плоскости, которым принадлежит прямая CD;

в) прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и ACD;

г) линию пересечения плоскостей ABD и ACF.

25. Точки M, N, K, L не лежат в одной плоскости, точка A лежит между точками K и M, а точка B — между точками K и N. Определите:

а) принадлежит ли точка A плоскости MNL;

б) по какой прямой пересекаются плоскости MNL и KAB; MBK и NLK;

в) принадлежит ли прямая AL плоскости MBK.

26. Точки M, N, K, L не лежат в одной плоскости, точка A лежит между точками M и N (рис. 10). Определите, пересекаются ли прямые LA и MK.

27. Точки A, B, C выбраны в плоскости α так, что лучи KA, KB, KC лежат в одной плоскости. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

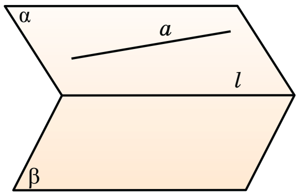


Рис. 12

28. Прямые a, b, c пересекают плоскость α в точках K, P и M соответственно (рис. 11). Определите, лежат ли в одной плоскости прямые a, b, c.

29. Плоскости α и β пересекаются по прямой l, прямая a лежит в плоскости α (рис. 12). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения прямой a с плоскостью β.

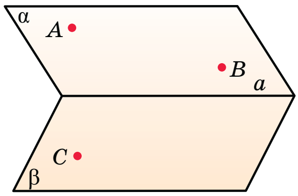


Рис. 13

30. Точки A и B принадлежат плоскости α, точка C — плоскости β, плоскости α и β пересекаются по прямой a (рис. 13). Сделайте

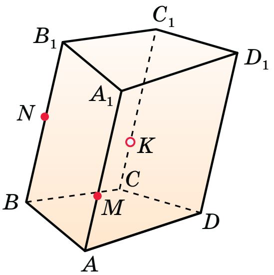


Рис. 14

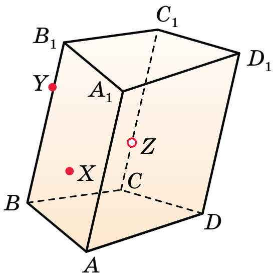


Рис. 15

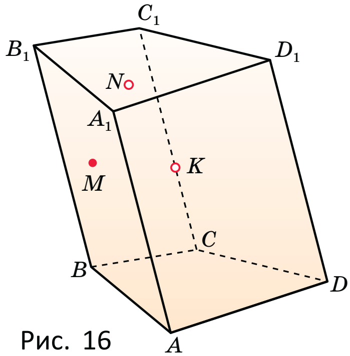


Рис. 16

такой рисунок в тетради и постройте прямые, по которым плоскость ABC пересекает плоскости α и β.

31. На ребрах AA_1, BB_1, CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки M, N, K (рис. 14). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения ребра DD_1 с плоскостью MNK.

32. В грани ABA_1 и на ребрах BB_1 и CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки X, Y, Z соответственно (рис. 15). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения ребра DD_1 с плоскостью XYZ.

33. В гранях ABA_1, BCB_1 и на ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки M, N, K соответственно (рис. 16). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения ребра DD_1 с плоскостью MNK.

34. В гранях ABA_1, BCB_1 и на ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки P, Q, R соответственно (рис. 17). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения ребра DD_1 с плоскостью PQR.

35. Точки P, Q, R отмечены на ребре B_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в грани CC_1D_1 и плоскости ABC соответственно (рис. 18). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения ребра DD_1 с плоскостью PQR.

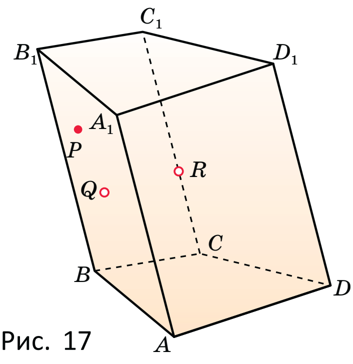


Рис. 17

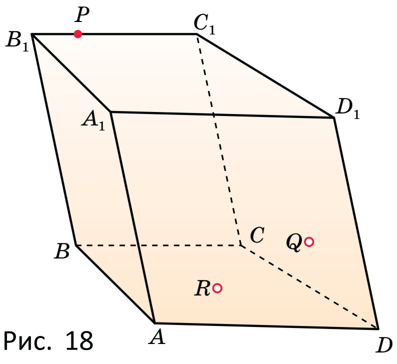


Рис. 18

3. Построение сечений многогранников

36. В кубе с ребром 12 см возле каждой вершины сделали плоский срез (рис. 19), который является правильным треугольником со стороной 4 см. Найдите общую длину ребер полученного многогранника и площадь его поверхности.

37. На ребрах KK_1, LL_1, NN_1 призмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ отмечены точки A, B, C соответственно (рис. 20). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью ABC.

38. Точки E, F, G отмечены соответственно на ребрах QR, QQ_1, P_1S_1 призмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рис. 21). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точку пересечения ребра SS_1 с плоскостью EFG.

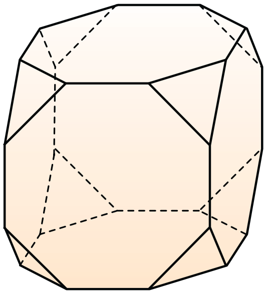


Рис. 19

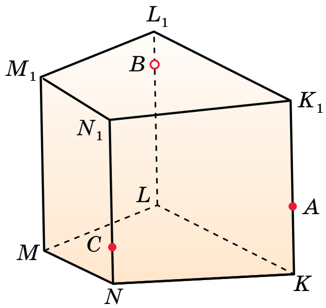


Рис. 20

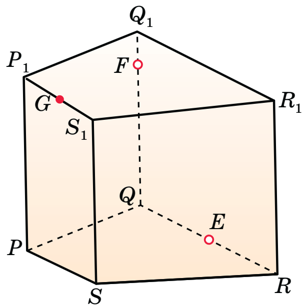


Рис. 21

39. Точки C, D, E отмечены соответственно на ребрах PS, SS_1, Q_1R_1 призмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рис. 22). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью CDE.

40. В грани ABA_1 и на ребрах BB_1 и CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки X, Y, Z (рис. 23). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью XYZ.

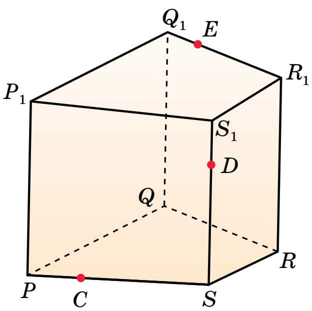


Рис. 22

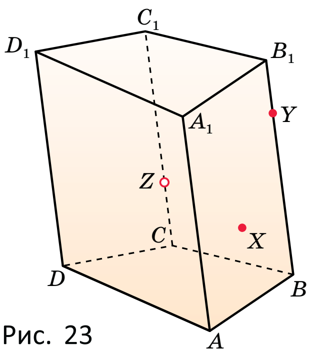


Рис. 23

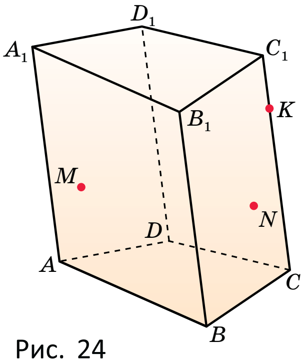


Рис. 24

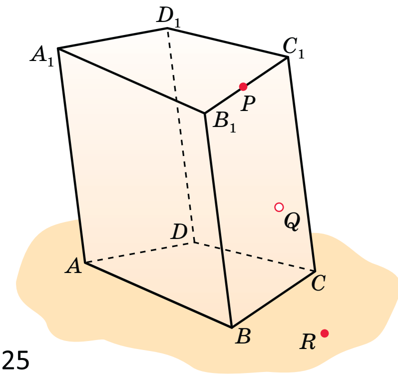


Рис. 25

41. В гранях ABA_1, BCB_1 и на ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки M, N, K (рис. 24). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью MNK.

42. На ребре B_1C_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в грани CC_1D_1 и плоскости ABC отмечены соответственно точки P, Q, R (рис. 25). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью PQR.

43. На ребрах AM, MN, AK пирамиды $AMNK$ отмечены соответственно точки U, V, W (рис. 26). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью UVW.

44. Точки K, M, P отмечены соответственно на ребрах AB, SC, SD пирамиды $SABCD$ (рис. 27). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью KMP.

45. На ребрах SA, SC, SD пирамиды $SABCD$ отмечены соответственно точки M, P, K (рис. 28). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью MPK.

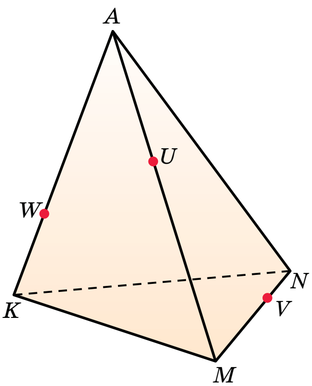


Рис. 26

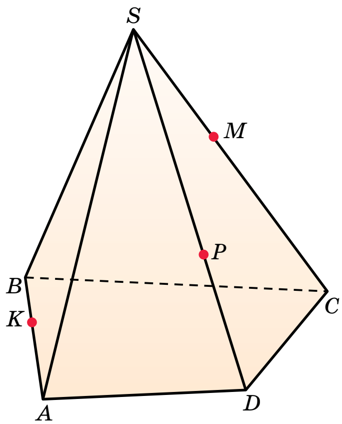


Рис. 27

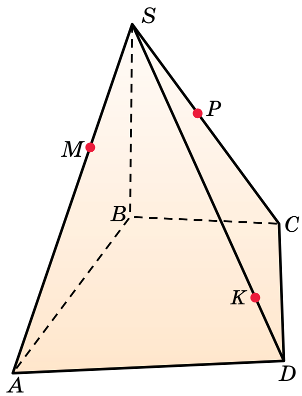


Рис. 28

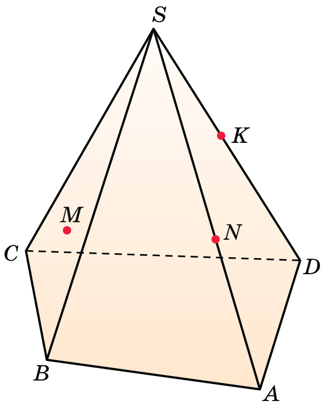


Рис. 29

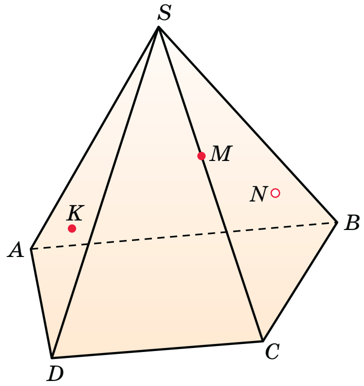


Рис. 30

46. В грани SBC и на ребрах SA и SD пирамиды $SABCD$ отмечены соответственно точки M, N, K (рис. 29). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью MNK.

47. На ребре SC и в гранях SAB, SAD пирамиды $SABCD$ отмечены соответственно точки M, N, K (рис. 30). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью MNK.

48. Постройте сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью PQR, учитывая, что точки R, Q, P отмечены соответственно в плоскости ABC, грани SCD и:

а) на ребре SA (рис. 31); б) грани SAB (рис. 32).

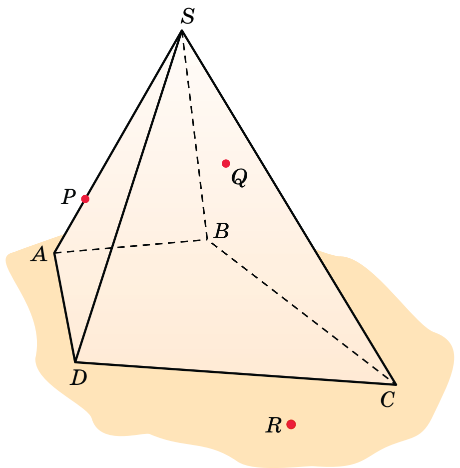


Рис. 31

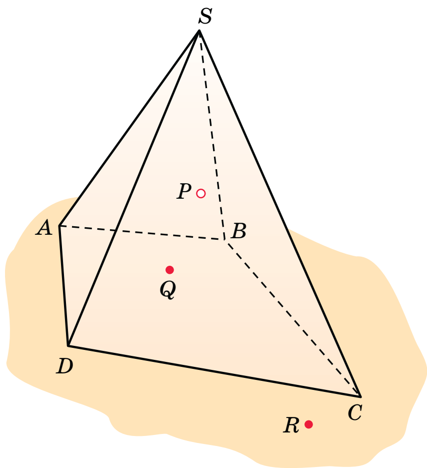


Рис. 32

49. Плоскость α проходит через середины ребер AB, BC и CC_1 соответственно куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сделайте такой рисунок в тетради, постройте сечение куба плоскостью α и найдите площадь сечения, учитывая, что ребро куба равно единице.

50. Постройте сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α и найдите его площадь, учитывая, что плоскость α проходит через вершину A и пересекает середины ребер:

а) BB_1 и DD_1; б) B_1C_1 и C_1D_1; в) BC и A_1B_1.

51. Плоскость α проходит через вершины A_1, B и середину ребра C_1D_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сделайте соответствующий рисунок в тетради, постройте сечение куба плоскостью α и найдите площадь сечения.

52. Постройте сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью PQR и найдите его площадь, учитывая, что точки P и Q — середины ребер AB и C_1D_1 куба, а точка R на ребре:

а) BB_1 такая, что $BR : RB_1 = 1 : 4$;
б) BB_1 такая, что $BR : RB_1 = 1 : 3$;
в) A_1B_1 такая, что $A_1R : RB_1 = 3 : 1$.

4. Взаимное расположение прямых в пространстве

53. Точки P, Q, R, S — середины соответственно ребер AC, BC, BD, AD треугольной пирамиды $ABCD$. Найдите длину ломаной $PQRSP$, учитывая, что $AB = 12$ см, $CD = 16$ см.

54. Точки M, N, K выбраны на боковых ребрах призмы $ABCA_1B_1C_1$ так, что $AM = 5$, $BN = 7$, $CK = 12$. Найдите расстояние между серединами Q и Q_1 медиан AL и ML_1 треугольников ABC и MNK.

55. Основания AD и BC трапеции $ABCD$ равны 5 и 7, сторона AF треугольника AFB — 8, расстояние между серединами M и N отрезков CD и BF — 10. Докажите, что точка F лежит в плоскости ABC.

56. Прямая a пересекает каждую из скрещивающихся прямых b и c, $d \parallel a$. Докажите, что прямые d и b или d и c скрещивающиеся.

57. Плоскости α и β проходят через точку C и скрещивающиеся прямые a и b соответственно. Верно ли, что линия пересечения плоскостей α и β и хотя бы одна из прямых a и b скрещивающиеся?

58. Параллельные прямые a и b принадлежат плоскостям α и β, пересекающимся по прямой c. Докажите, что $a \parallel c \parallel b$.

59. Прямая a параллельна плоскостям α и β, пересекающимся по прямой c. Докажите, что $a \parallel c$.

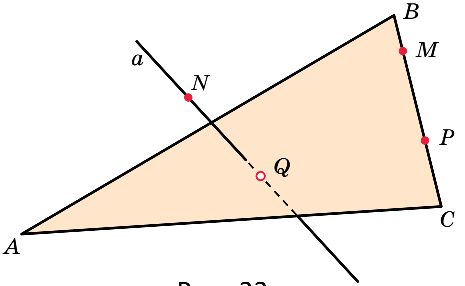


Рис. 33

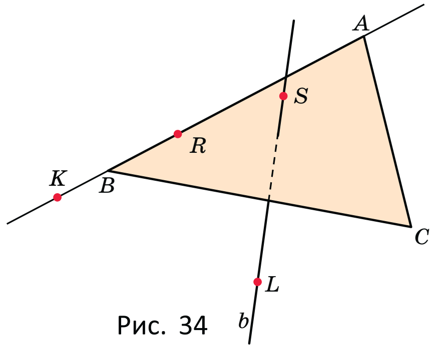


Рис. 34

60. Основание AB треугольника ABC параллельно плоскости α, а стороны AC и BC пересекают плоскость α в точках P и Q. При этом $AP : PC = 3 : 2$. Найдите AB, учитывая, что $PQ = 6$.

61. Прямая a пересекает плоскость треугольника ABC, точки M и P выбраны на прямой BC, а точки N и Q — на прямой a (рис. 33). Верно ли, что прямые MN и PQ параллельны?

62. Прямая b пересекает плоскость треугольника ABC, точки L и S выбраны на прямой b, а точки K и R — на прямой AB (рис. 34). Верно ли, что прямые KL и RS пересекаются?

63. Прямые a и b скрещивающиеся, прямые c и d их пересекают. Верно ли, что прямые c и d также скрещивающиеся?

64. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что скрещивающимися являются прямые:

а) AA_1 и C_1D_1; б) AA_1 и B_1D; в) AC и B_1D_1.

65. На рисунке 35 прямые AB и A_1B_1 скрещивающиеся, точки P и Q отмечены на прямых AA_1 и BB_1. Определите, могут ли пересекаться прямые PQ и A_1B_1.

66. Три плоскости попарно пересекаются по прямым a, b, c. Прямые a и b не пересекаются. Может ли прямая c пересекаться с прямыми a и b?

67. Углы ABC, ABB_1, CBB_1 в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно равны 110°, 100°, 130°. Найдите угол между прямыми:

а) AA_1 и C_1D_1;
б) AA_1 и B_1C_1;
в) A_1B_1 и AD.

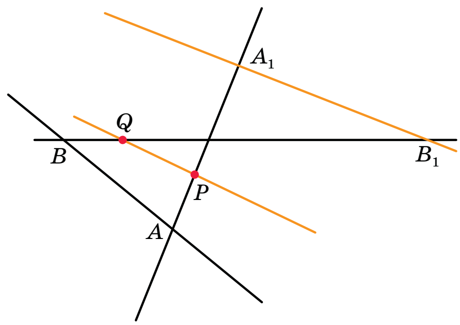


Рис. 35

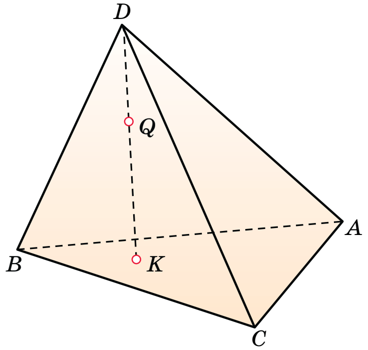


Рис. 36

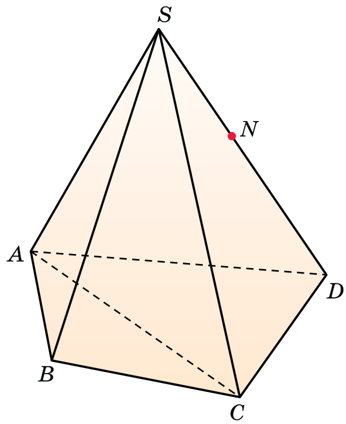


Рис. 37

68. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD скрещивающиеся.

69. Через данную точку нужно провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые. Всегда ли можно это сделать?

70. Даны попарно скрещивающиеся прямые a, b и c. Существует ли прямая, параллельная a, пересекающая прямые b и c?

71. Отрезок, соединяющий точку K плоскости основания ABC с вершиной D пирамиды $ABCD$, проходит через точку Q (рис. 36). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте точки, в которых прямая, проходящая через Q параллельно прямой AB, пересекает поверхность пирамиды.

72. На ребре SD пирамиды $SABCD$ отмечена точка N (рис. 37). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, N и параллельной прямой AC.

73. Точки P и Q отмечены в основании $ABCD$ пирамиды $SABCD$, точки M и N — на ребре SA и в грани SBC соответственно (рис. 38). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M и N и параллельной прямой PQ.

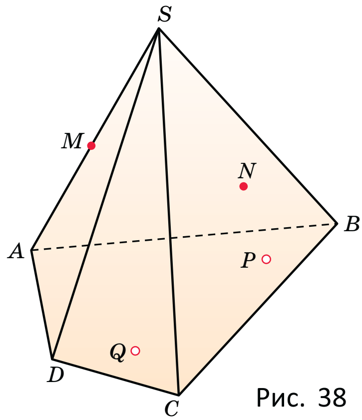


Рис. 38

74. Даны скрещивающиеся прямые a, b и точка C. Плоскость, проходящая через точку C и прямую b, пересекает прямую a

в точке A, а плоскость, проходящая через точку C и прямую a, пересекает прямую b в точке B. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

75. **Теорема Дезарга.** Прямые a, b и c попарно пересекаются в точках C, A и B, а прямые a_1, b_1 и c_1 — в точках C_1, A_1 и B_1 (рис. 39). Если при этом прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку, то прямые каждой пары (AB, A_1B_1), (BC, B_1C_1), (AC, A_1C_1) пересекаются в точках P, Q, R соответственно, и все эти точки пересечения лежат на одной прямой. Докажите эту теорему.

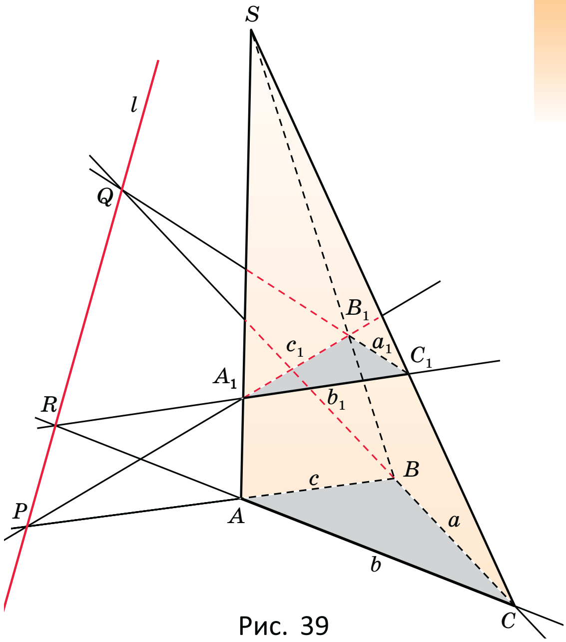


Рис. 39

76. Имеется куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми:

а) AA_1 и B_1C; г) AD_1 и B_1D; ж) AC_1 и B_1C;
б) AA_1 и BD; д) AD_1 и B_1C; з) AC_1 и A_1D;
в) AA_1 и BD_1; е) AD_1 и A_1B; и) AC_1 и D_1C.

77*. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны единице. Найдите угол между прямыми:

а) AA_1 и BC; б) AA_1 и BC_1; в) AC_1 и B_1C.

78. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны единице, а точки M и N — середины ребер AA_1 и BC соответственно. Найдите угол между прямыми:

а) BM и AC; в) BM и CC_1; д) A_1N и AC; ж) A_1N и AC_1;
б) BM и B_1C_1; г) BM и AC_1; е) A_1N и CC_1; з) A_1N и BM.

79. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны единице. Найдите угол между прямыми:

а) AA_1 и BC; г) AA_1 и BD_1; ж) AA_1 и ED_1;
б) AA_1 и CD; д) AA_1 и BE_1; з) AA_1 и E_1C;
в) AA_1 и BD; е) AA_1 и C_1D; и) AA_1 и C_1F.

80. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны единице. Найдите угол между прямыми:

а) AB_1 и FD_1; г) AB_1 и CF_1; ж) AB_1 и BC_1;
б) AB_1 и DF_1; д) AB_1 и DC_1; з) AB_1 и A_1F;
в) AB_1 и CD_1; е) AB_1 и BE_1; и) AB_1 и A_1E.

81. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны единице. Найдите угол между прямыми:

а) AC_1 и A_1D; в) AC_1 и B_1F; д) AD_1 и CF;
б) AC_1 и BE_1; г) AD_1 и CF_1; е) AD_1 и BE.

82. В пирамиде $ABCD$ все ребра равны единице, а точки Q и M — основание высоты DQ пирамиды и середина ребра CD соответственно. Найдите угол между прямыми:

а) AB и CD; б) AC и BM; в) AM и DQ.

83. В пирамиде $SABCDEF$ все ребра основания $ABCDEF$ равны единице, а все боковые ребра — двум. Найдите угол между прямыми:

а) SA и BC; б) SA и BE; в) SA и BD.

5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

84. Точка Q лежит вне плоскости параллелограмма $ABCD$. Сколько плоскостей определяют точки A, B, C, D и Q? Сколько прямых образуется при пересечении этих плоскостей? Из этих плоскостей и прямых укажите пары, в которых плоскость и прямая параллельны.

85. Плоскость α и прямая a параллельны, прямая b пересекает прямую a. Каким может быть расположение прямой b и плоскости α?

86. В основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ отмечена точка M, через нее и вершину S проведена плоскость α, параллельная прямой AB. Объясните, как построить сечение пирамиды плоскостью α.

87. В грани SAB треугольной пирамиды $SABC$ отмечена точка N, через нее проведена прямая a, пересекающая прямую SA и параллельная плоскости SBC. Объясните, как построить точку пересечения прямых a и SA.

88. В грани SBC треугольной пирамиды $SABC$ отмечена точка M, на ребре AC — точка K (рис. 40). Объясните, как построить точку пересечения прямой AM с плоскостью SBK.

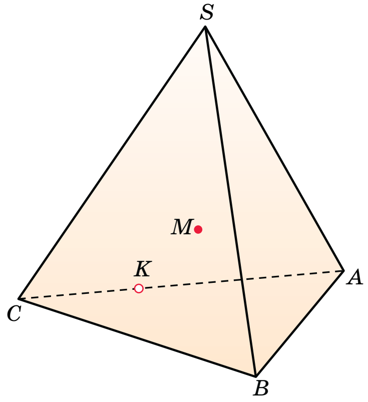


Рис. 40

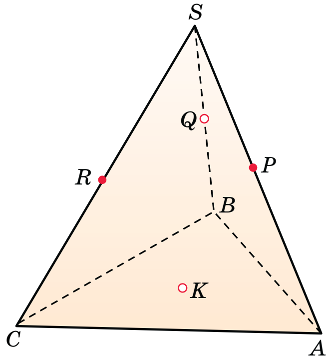


Рис. 41

89. Точки P, Q, R, K выбраны соответственно на ребрах SA, SB, SC и в грани ABC треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 41). Объясните, как найти точку пересечения прямой SK с плоскостью PQR.

90. Точки M и K на сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны так, что $BM : MA = CK : KD$. Плоскость α пересекает плоскость ABC по прямой MK. Докажите, что $BC \parallel \alpha$.

91. Точка K на стороне AB треугольника ABC выбрана так, что $AB : AK = 3 : 2$. Плоскость α, параллельная прямой BC, проходит через точку K. Определите, проходит ли плоскость α через точку пересечения медиан треугольника ABC.

92. Прямая a параллельна плоскости α и прямой b. Каким может быть взаимное расположение прямой b и плоскости α?

93. Прямая a параллельна плоскости α. Докажите, что в плоскости α есть прямая, параллельная прямой a, проходящая через данную точку этой плоскости.

94. Верно ли, что все прямые, пересекающие одну из скрещивающихся прямых и параллельные другой, лежат в одной плоскости?

95. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Параллельные прямые a и b лежат в плоскостях α и β соответственно. Верно ли, что $a \parallel c$ и $b \parallel c$?

96. Точки A, B и C отстоят от плоскости α на 2 см, 2 см и 5 см. Верно ли, что одна из прямых AB, BC, CA параллельна плоскости α?

97. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках B_1 и C_1 соответственно. Учитывая, что $AC_1 = 6$ см, $AB_1 : B_1B = 3 : 2$ и $BC \parallel \alpha$, найдите AB.

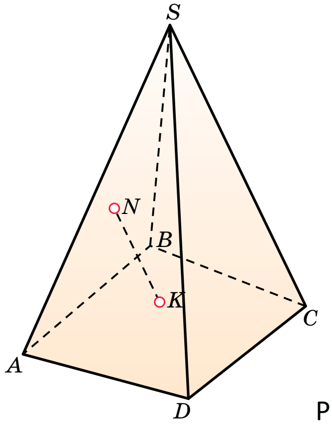


Рис. 42

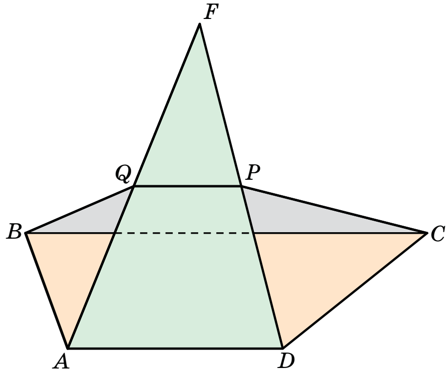


Рис. 43

98. В пирамиде $SABCD$ отмечены точки K и N пересечения медиан треугольников ABC и ASB (рис. 42). Можно ли утверждать, что прямая KN параллельна плоскости ASC?

99. Точки P, Q и M — середины соответственно ребер AB, AD и отрезка A_1B в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью PQM, учитывая, что прямые CC_1 и BD перпендикулярны, $AB = 10$, $AD = 16$, $\angle BAD = 60°$ и $CC_1 = 6$.

100. Трапеция $ABCD$ и треугольник AFD лежат в разных плоскостях. Плоскость, проходящая через середину Q отрезка AF и точки B и C, пересекает прямую DF в точке P (рис. 43). Найдите PQ, учитывая, что $AD = 12$.

101. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC относятся как 2 : 1. Точку P выбрали вне плоскости ABC. Через середину M отрезка AP и точки B и C провели плоскость, пересекающую прямую PD в точке N. Докажите, что отрезки BN и CM пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

102. Точки A_1 и A_2 выбраны в плоскости α, а B_1 и B_2 — в плоскости β так, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке K (рис. 44).

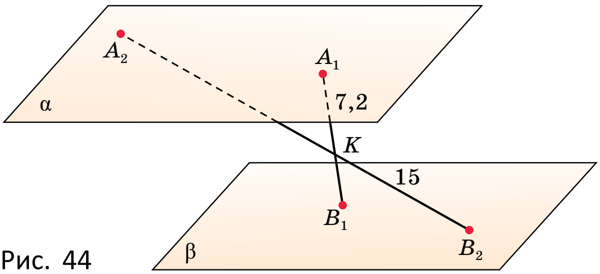


Рис. 44

Учитывая, что $\alpha \parallel \beta$, $KA_1 = 7{,}2$, $KB_2 = 15$ и $KA_1 : KA_2 = 1 : 3$, найдите KA_2 и KB_1.

103. В основании пирамиды $QABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки M, N, K, L — середины ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линию пересечения плоскостей MQN и KQL.

104. В пирамиде $SABCD$ ребра AB и CD основания $ABCD$ параллельны. Точки F и G — середины отрезков AC и BD. Сделайте соответствующий рисунок в тетради и постройте линию пересечения плоскостей SAB и SFG.

105. Докажите, что две прямые параллельны тогда и только тогда, когда каждая:

а) плоскость, пересекающая одну из них, пересекает и другую;
б) прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую.

6. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

106. Плоскость β пересекает прямую a, параллельную плоскости α. Докажите, что плоскости α и β пересекаются.

107. На ребрах SA, SB и SC пирамиды $SABC$ отмечены такие точки P, Q и R, что $\angle ACP = \angle CPR$, $\angle CBR = \angle BRQ$ (рис. 45). Можно ли утверждать, что плоскости ABC и PQR параллельны?

108. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что любые две из трех прямых, проходящих через середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, лежат в одной плоскости.

109. Точки A, B и C отмечены на ребрах SP, SQ и SR пирамиды $SPQR$ так, что $SP : SA = SQ : SB = SR : SC$ (рис. 46). Можно ли утверждать, что плоскости ABC и PQR параллельны?

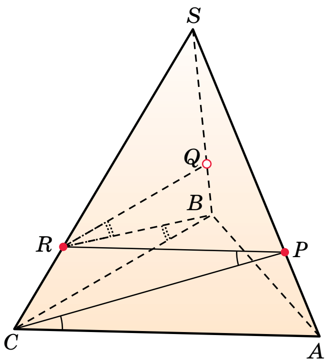


Рис. 45

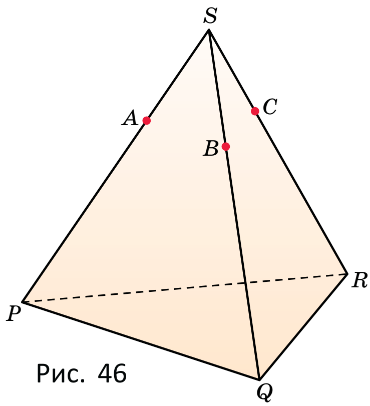


Рис. 46

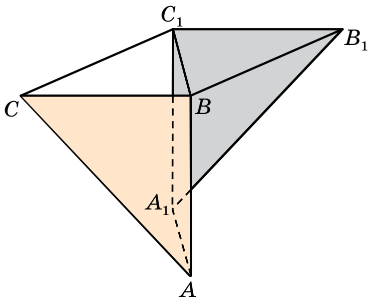


Рис. 47

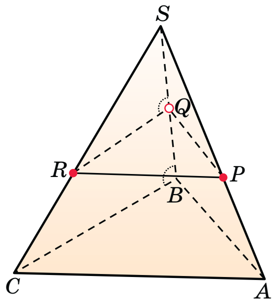


Рис. 48

110. Точки A, B, C и A_1, B_1, C_1 расположены в пространстве так, что четырехугольники CC_1B_1B и AA_1C_1B являются параллелограммами (рис. 47). Можно ли утверждать, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны?

111. Точки P, Q и R отмечены на ребрах SA, SB и SC пирамиды $SABC$ так, что $PQ \parallel AB$ и $PR \parallel AC$ (рис. 48). Можно ли утверждать, что $\angle SQR = \angle SBC$?

112. Точки A и B отмечены в плоскости α, а точки A_1 и B_1 — в плоскости β, параллельной плоскости α. Учитывая, что $AB = 5$ см, $BB_1 = 7$ см и $AA_1 \parallel BB_1$, найдите A_1B_1 и AA_1.

113. Точки A и A_1, B и B_1 отмечены в плоскости α, а точки K и K_1 — вне плоскости α. При этом $KA \parallel K_1A_1$, $KB \parallel K_1B_1$. Докажите, что прямые AB и A_1B_1 параллельны или совпадают.

114. Точки A и A_1 отмечены в плоскости α, а точки B и B_1 — в плоскости β, параллельной плоскости α. Учитывая, что прямые AB_1 и A_1B пересекаются в точке K, докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

115. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 одной плоскости отмечены на лучах SA, SB, SC и SD так, что $SA : AA_1 = SB : BB_1$ (рис. 49). Можно ли утвер-

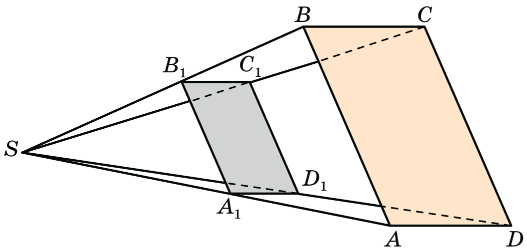


Рис. 49

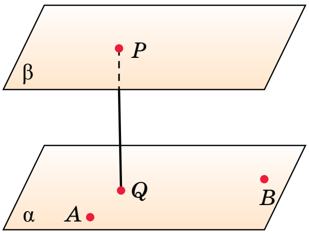


Рис. 50

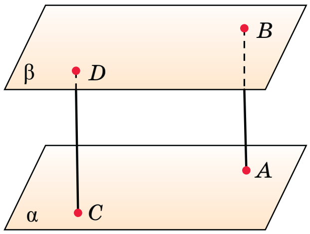


Рис. 51

ждать, что $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм, если $ABCD$ — параллелограмм?

116. Пересекающиеся прямые a и b лежат в плоскости α. Точки M и N плоскости β и точка P, не принадлежащая плоскости α, отмечены так, что $MN \parallel a$, $MP \parallel b$. Что можно утверждать о взаимном расположении плоскостей α и β?

117. Концы отрезка PQ лежат в параллельных плоскостях α и β, а точки A и B — в плоскости α (рис. 50). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линии пересечения с плоскостью β плоскостей ABP, APQ и PQB.

118. Концы отрезков AB и CD находятся в параллельных плоскостях α и β (рис. 51). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линии пересечения плоскостей:

а) α и ABD; б) β и ACD.

119. Плоскости α, β и γ параллельны. Скрещивающиеся прямые a и b пересекают их в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно. При этом $A_2A_3 = 12$, $B_1B_2 = 9$, $A_1A_2 : B_2B_3 = 4 : 3$. Найдите длину отрезка:

а) A_1A_3; б) B_1B_3.

120. Точка K лежит в грани ACC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, точка N — на ребре AC (рис. 52). Плоскость α проходит через точку K параллельно плоскости NBB_1. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линию пересечения плоскости α с плоскостью ABB_1.

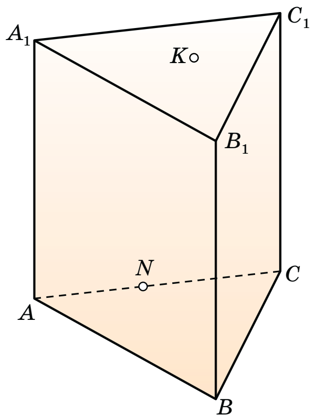


Рис. 52

121. Точка M лежит в грани AA_1B четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка N —

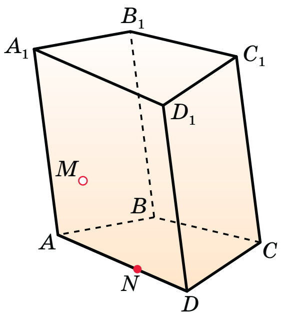


Рис. 53

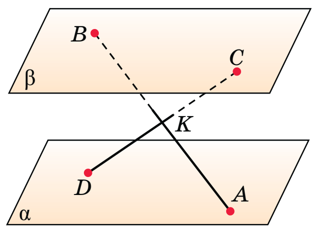


Рис. 54

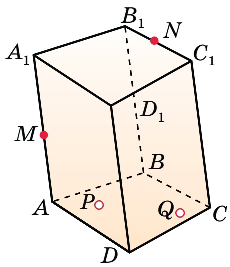


Рис. 55

на ребре AD (рис. 53). Плоскость α проходит через точку M параллельно плоскости NCC_1. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте след плоскости α на плоскости AA_1D_1.

122. Отрезки AB и CD пересекаются в точке K, их концы A и D лежат в одной из параллельных плоскостей, а B и C — в другой (рис. 54). Докажите, что $AK : AB = DK : CD$.

123. В правильной треугольной призме боковое ребро равно l, а ребро основания — a. Найдите площадь сечения, проходящего через диагональ одной боковой грани параллельно диагонали другой грани, скрещивающейся с выбранной.

124. Точки P и Q отмечены в основании $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N — на ребрах AA_1 и B_1C_1 соответственно (рис. 55). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и параллельной прямой PQ.

125. Точки P и Q отмечены на ребрах AA_1 и BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$, а точка R — на прямой CC_1 так, что точка C лежит между точками C_1 и R. Сделайте в тетради соответствующий рисунок и постройте линию пересечения плоскости PQR с плоскостью:

а) ABB_1; б) ABC; в) $A_1B_1C_1$.

126. На ребрах AA_1 и BC призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбраны соответственно точки P и Q, а на прямой CC_1 — точка R так, что точка C_1 лежит между точками R и C (рис. 56). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линию пересечения плоскости PQR с плоскостью:

а) ABC; б) $A_1B_1C_1$; в) BCP.

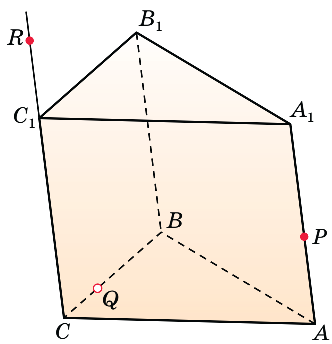


Рис. 56

127. На ребрах A_1B_1 и CD призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны соответственно точки P и Q, а в грани ADA_1 — точка R. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линию пересечения плоскости PQR с плоскостью:

а) ABC; б) $A_1B_1C_1$; в) ADD_1.

128. В призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на отрезках CC_1, AB_1 и BD_1 выбраны соответственно точки P, Q и R. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линию пересечения плоскости PQR с плоскостью:

а) ABC; б) $A_1B_1C_1$; в) ACC_1.

129. Точки P, Q и R выбраны соответственно на ребре SB пирамиды $SABC$, в грани SAC и в плоскости ABC (рис. 57). Учитывая, что луч CR пересекает отрезок AB, сделайте в тетради соответствующий рисунок и постройте линию пересечения плоскости PQR с плоскостью:

а) SBQ; б) ABC; в) SBC.

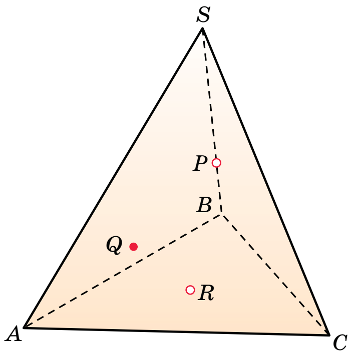


Рис. 57

130. Точки D, E, F, G выбраны на ребрах AB, SC, AC и SB пирамиды $SABC$, а точки P, Q и R — на отрезках DG, EG и FG соответственно. Сделайте такой рисунок в тетради и постройте линию пересечения плоскости PQR с плоскостью:

а) EFG; б) ABC; в) ASB.

131. Изобразите в тетради пирамиду $SABCD$ и постройте след плоскости:

а) SAC на плоскости SBD;
б) SAB на плоскости SCD;
в) SBC на плоскости SAD.

132. Точки P, Q и R выбраны соответственно на ребрах SA, AB и в грани SCD пирамиды $SABCD$ (рис. 58). Сделайте такой рисунок в тетради и постройте след плоскости SBC на плоскости:

а) SPQ; б) PQR; в) CPR.

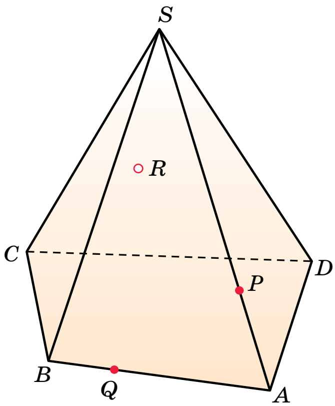


Рис. 58

7. Перпендикулярность прямой и плоскости

133. Верно ли, что если две прямые перпендикулярны третьей, то они:

а) параллельны;

б) параллельны одной плоскости?

134. Можно ли выбрать в пространстве четыре прямые, которые попарно перпендикулярны?

135. Верно ли, что если прямая не перпендикулярна плоскости, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?

136. Через точку M вне плоскости треугольника ABC проведена прямая MA, перпендикулярная прямым AB и AC. Учитывая, что N — произвольная точка прямой BC, установите вид треугольника MAN.

137. Прямая MA перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми BC и MB.

138. Точка P вне плоскости параллелограмма $ABCD$ выбрана так, что $AP = PC$ и $BP = PD$ (рис. 59). Диагонали параллелограмма пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна плоскости ABC.

139. Установите вид треугольника, учитывая, что через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

140. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, $AB = AC$. Вне плоскости треугольника ABC взята точка N, равноудаленная от точек B и C (рис. 60). Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости MAN.

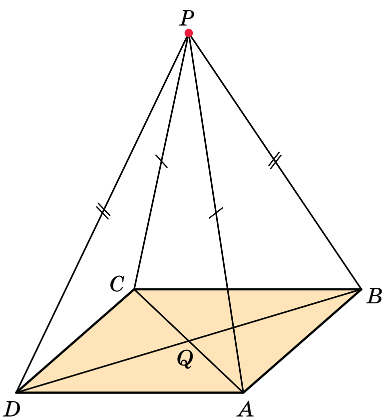


Рис. 59

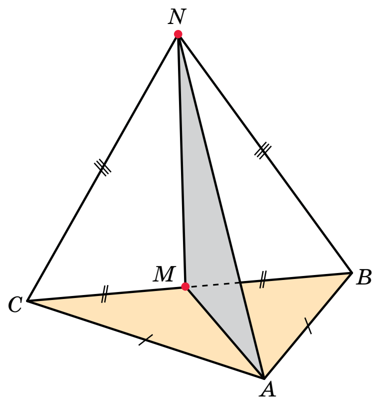


Рис. 60

141. Из центра Q правильного треугольника ABC со стороной 9 см восстановлен перпендикуляр QP длиной 3 см к его плоскости. Найдите угол APQ.

142. Точки A, B, C, D пространства таковы, что $AB = 2$, $BC = 3$, $BD = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2\sqrt{5}$. Верно ли, что прямая BD перпендикулярна плоскости ABC?

143. Из точки A восстановлен перпендикуляр AK к плоскости прямоугольника $ABCD$ (рис. 61). Найдите отрезок AK, учитывая, что расстояния от точки K до остальных вершин прямоугольника равны 9 см, 13 см и 15 см.

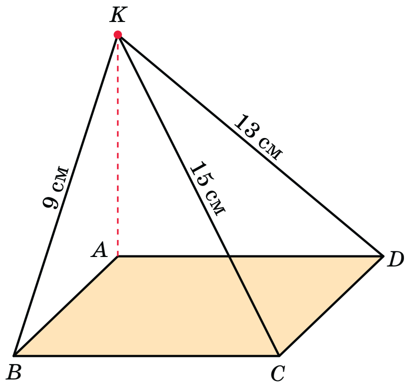


Рис. 61

144. Вне плоскости треугольника ABC с прямым углом C и катетами $4\sqrt{2}$ и $3\sqrt{5}$ лежит точка P. Учитывая, что длина перпендикуляра PA до плоскости ABC равна 2, найдите длины отрезков PB и PC.

145. Через точки M и N пространства проведены перпендикуляры MA и NB к плоскости α (рис. 62). Учитывая, что $MA = 5$ м, $NB = 11$ м, $AB = 12$ м и отрезок MN пересекает плоскость α, найдите расстояние от точки M до:

а) точки N;

б) точки P, в которой отрезок MN пересекает отрезок AB.

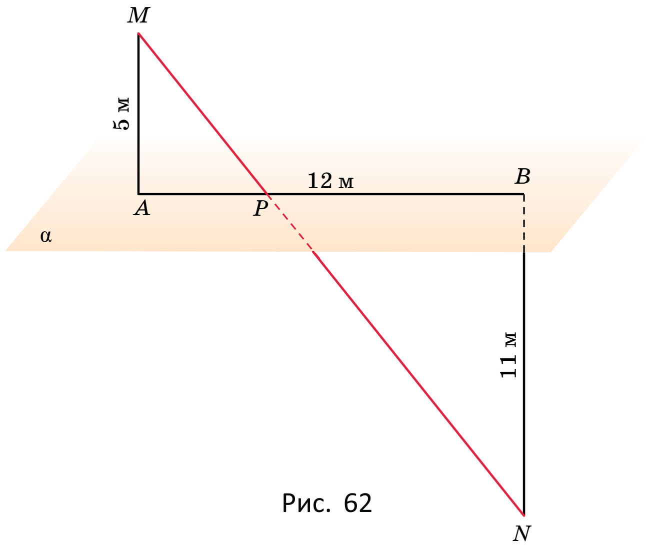


Рис. 62

146. Точки A, B, C, D пространства таковы, что $AB = BC$ и $CD = DA$. Можно ли утверждать, что прямые AC и BD перпендикулярны?

147. В пирамиде $ABCD$ медиана к стороне AD в треугольнике ABD равна половине AD, а медиана к стороне CD в треугольнике BCD — половине CD (рис. 63). Можно ли утверждать, что прямая BD и плоскость ABC перпендикулярны?

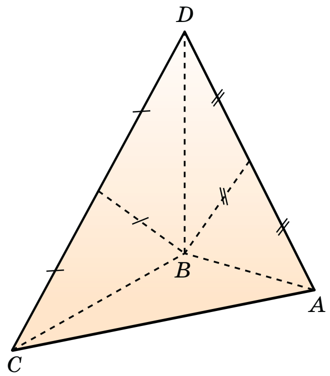


Рис. 63

148. В пирамиде $ABCD$ ребра AB, BC и CD равны соответственно 7, 8 и 4. Найдите ребро AD, учитывая, что прямые AC и BD перпендикулярны.

149. Пусть A, B, C, D — точки пространства. Докажите, что если $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$, то прямые AC и BD перпендикулярны.

8. Расстояния

150. Точка N принадлежит плоскости α, проекция отрезка MN на эту плоскость равна единице, длина MN равна 2. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

151. Точки A и B принадлежат плоскости α, K — такая точка пространства, что $KA = 2$, $KB = 5$ (рис. 64). Найдите расстояние от точки K до плоскости α, учитывая, что проекция на плоскость α отрезка KA втрое меньше проекции отрезка KB.

152. Прямая MQ перпендикулярна плоскости окружности с центром Q. Точка N принадлежит окружности. Найдите длину отрезка MN,

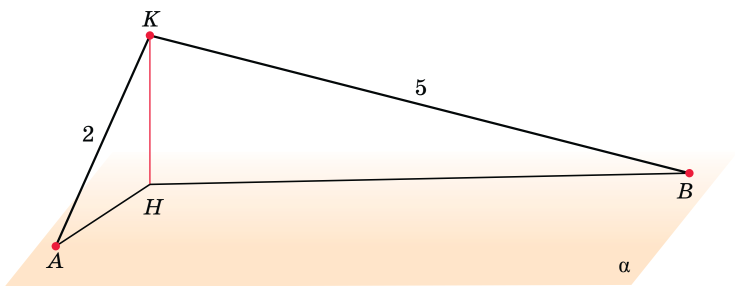


Рис. 64

учитывая, что радиус окружности равен 12 см и $\angle MNQ = 60°$.

153. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны 9 см и 12 см. Точка N отстоит от плоскости ABC на 18 см, причем $NC \perp AC$ и $NC \perp BC$ (рис. 65). Найдите расстояние между точками N и M, где M — середина гипотенузы AB.

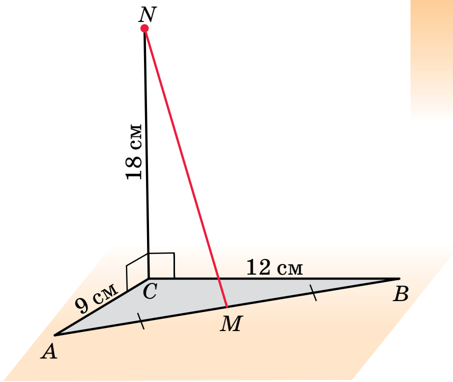


Рис. 65

154. Прямая PA перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$ со стороной a. Найдите расстояния от точки P до сторон и вершин квадрата, учитывая, что $PA = b$.

155. Точка S находится на расстоянии 5 см от каждой вершины треугольника ABC, в котором $AB = AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Найдите расстояние от точки S до плоскости ABC.

156. Точка S находится на расстоянии 5 см от каждой стороны правильного треугольника ABC, в котором $AB = 8\sqrt{3}$ см (рис. 66). Найдите расстояние от точки S до плоскости ABC.

157. Точка S равноудалена от вершин квадрата $ABCD$. Учитывая, что $SA = AB = a$, найдите:

а) расстояние от точки S до плоскости ABC;
б) угол ASC.

158. Расстояния от концов отрезка до плоскости α равны 3 и 7. Каким может быть расстояние от середины этого отрезка до плоскости α?

159. Вершины A, B, C треугольника ABC отстоят от плоскости α на 10 см, 12 см и 14 см соответственно. Найдите рсстояние до плоскости α от точки пересечения медиан, учитывая, что:

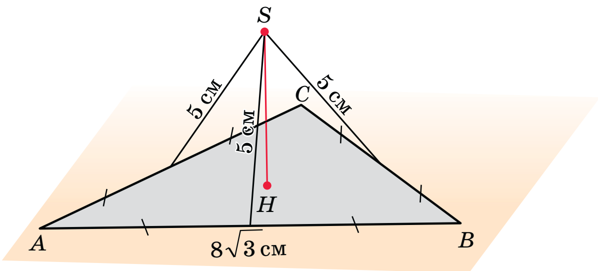


Рис. 66

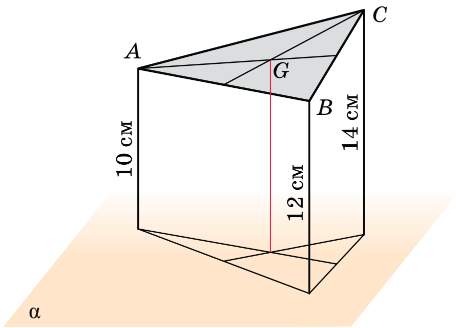


Рис. 67

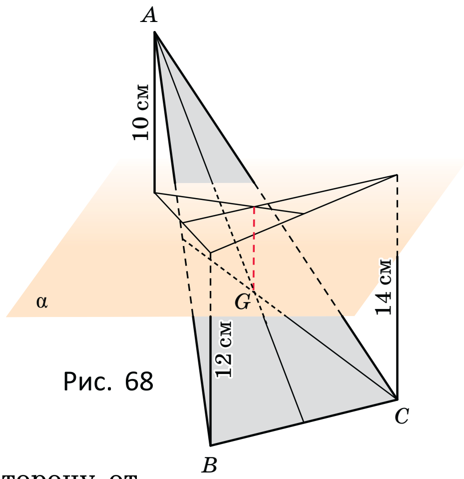


Рис. 68

а) вершины находятся по одну сторону от плоскости α (рис. 67);
б) отрезки AB и AC пересекают плоскость α (рис. 68);
в) отрезки AB и BC пересекают плоскость α;
г) отрезки BC и AC пересекают плоскость α.

160. Расстояния от трех последовательных вершин параллелограмма до плоскости α равны 3, 9 и 12. Каким может быть расстояние от четвертой вершины параллелограмма до плоскости α?

161. Имеются три попарно скрещивающиеся прямые, расстояние между каждыми двумя из которых равно a. Найдите площадь параллелограмма, у которого две вершины находятся на одной из данных прямых, а две другие — на двух остальных прямых.

162. Докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна плоскостям B_1CD_1 и A_1BD.

163. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD. Докажите, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

164. В треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра попарно равны (рис. 69). Докажите, что прямые, проходящие через середины скрещивающихся ребер, попарно перпендикулярны.

165. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания в $\sqrt{5}$ раз больше бокового ребра. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.

166. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 равен $\frac{1}{4}$, а ребро основания — a. Найдите боковое ребро.

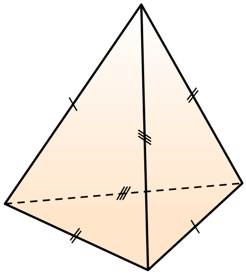


Рис. 69

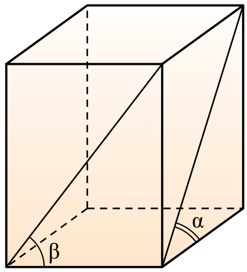


Рис. 70

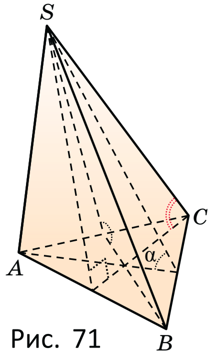


Рис. 71

167*. В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро основания равно a, а боковое ребро — b. Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости ACD_1.

168*. В прямоугольном параллелепипеде скрещивающиеся диагонали соседних граней наклонены к плоскости основания под углами α и β (рис. 70). Найдите угол между этими диагоналями.

169*. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость через вершину B и середины ребер AD и CC_1. Найдите угол, который она образует с плоскостью ABC.

170. В правильной треугольной призме все ребра равны. Найдите угол между медианой основания и диагональю боковой грани.

171*. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 образует с гранями BB_1C_1 и CDD_1 углы, равные α. Найдите угол между плоскостями BC_1D и $A_1B_1C_1$.

172*. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник, боковая грань SAB перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания углы, равные α (рис. 71). Найдите угол между ребром SC и плоскостью основания.

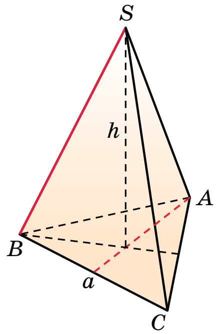


Рис. 72

173. В правильной пирамиде $SABCD$ длины апофемы и ребра основания равны a. Изобразите на рисунке общий перпендикуляр ребра основания и скрещивающегося с ним бокового ребра, найдите длину этого общего перпендикуляра.

174. В правильной пирамиде $SABC$ ребро основания равно a, а высота — h (рис. 72). Найдите расстояние между боковым ребром и скрещивающейся с ним высотой основания.

9. Угол между прямой и плоскостью

175. Прямая KB перпендикулярна плоскости ромба $ABCD$. Найдите угол между прямыми AC и KD.

176. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = BC$, $AD = BD = CD$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

177. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = CC_1$. Найдите угол между прямыми:

а) BB_1 и AD; б) AB_1 и CD; в) A_1B и AD.

178. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$, $CC_1 = 3$, $BC = 5\sqrt{3}$. Найдите угол между прямыми AB и A_1C.

179. Пусть B — проекция точки A на плоскость α, l — некоторая прямая этой плоскости (рис. 73). Докажите, что проекции точек A и B на прямую l совпадают.

180. Прямая l принадлежит плоскости α. Через точку A пространства проходит плоскость β, перпендикулярная плоскости α. Докажите, что проекция точки A на плоскость α принадлежит плоскости β.

181. Точка M находится на расстоянии a от плоскости α и на расстоянии b от прямой l этой плоскости. Пусть N — проекция точки M на плоскость α. Найдите расстояние от точки N до прямой l.

182. Точка M находится на расстоянии 29 от точек A, B и C и на расстоянии 21 от плоскости ABC (рис. 74). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

183. Точка M равноудалена от пересекающихся прямых a и b плоскости α. Докажите, что проекция точки M на плоскость α находится на одной из биссектрис между прямыми a и b.

184. Точка M отстоит на 13 см и 15 см от параллельных прямых a и b плоскости α (рис. 75). Найдите расстояние между прямыми a и b, учитывая, что расстояние от точки M до плоскости α равно 12 см.

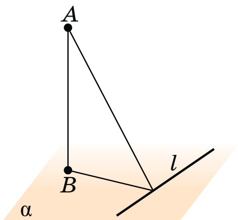


Рис. 73

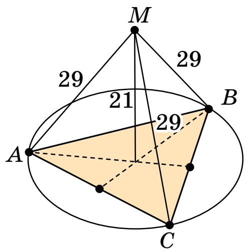


Рис. 74

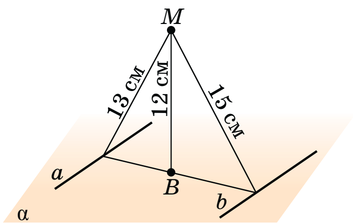


Рис. 75

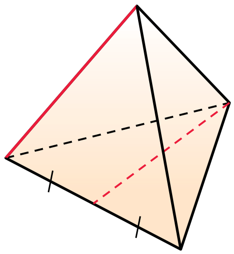


Рис. 76

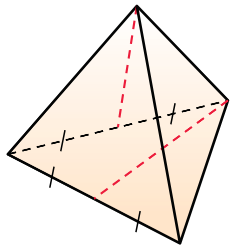


Рис. 77

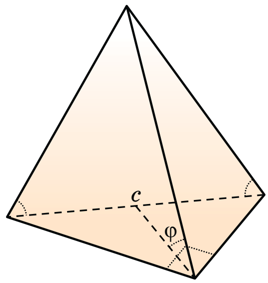


Рис. 78

185. Окружность ω с центром O имеет радиус r. Прямая l пересекает плоскость α в точке K окружности ω. Проекция прямой l на плоскость α касается ω. Найдите расстояние от точки O до прямой l.

186. В треугольной пирамиде проекция одной вершины на плоскость противоположной грани совпадает с точкой пересечения высот этой грани. Докажите, что это будет верно и для любой другой вершины этой пирамиды.

187. Прямая l образует равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми плоскости α. Докажите, что прямая l перпендикулярна плоскости α.

188. В треугольной пирамиде все ребра равны. Найдите угол между медианой одной грани:

а) и скрещивающимся с ней ребром (рис. 76);

б) и скрещивающейся с ней медианой другой грани (рис. 77).

189. В треугольной пирамиде все ребра основания равны a, а боковые ребра — b. Найдите угол между:

а) боковым ребром и плоскостью основания;

б) ребром основания и плоскостью боковой грани.

190. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c (рис. 78). Найдите высоту пирамиды, учитывая, что все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ.

191. Прямые a и b плоскости α перпендикулярны. Прямая l образует с ними углы 45° и 60°. Найдите угол между прямой l и плоскостью α.

192. Проекцией равнобедренного прямоугольного треугольника на плоскость α является равносторонний треугольник (рис. 79). Найдите угол между гипотенузой и плоскостью α.

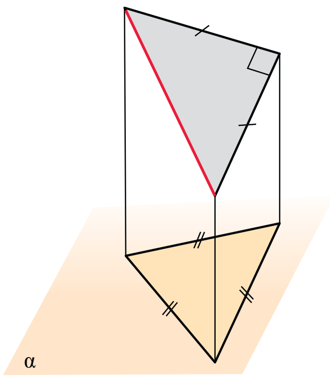


Рис. 79

193. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы с ребрами AB и AC равны по 135°, а плоский угол BAC — 90°. Найдите двугранный угол с ребром AD.

194. В тетраэдре $ABCD$ сумма плоских углов при вершине A равна 180°. Найдите сумму косинусов двугранных углов с ребрами AB, AC и AD.

195. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы с ребрами AB, AC и AD равны 60°, 60° и 90°. Найдите угол между каждым боковым ребром и противоположной боковой гранью.

10. Перпендикулярность плоскостей

196. Докажите, что через данную прямую, не перпендикулярную данной плоскости α, можно провести плоскость, перпендикулярную α, и притом только одну.

197. Докажите, что внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью, равны.

198. Докажите, что проекции на данную плоскость двух параллельных прямых параллельны или совпадают.

199. Прямые a_1 и b_1, a_2 и b_2 — проекции прямых a и b соответственно на плоскости α_1 и α_2, которые пересекаются по прямой c, причем ни одна из прямых a_1 и b_1, a_2 и b_2 прямой c не перпендикулярна (рис. 80). Докажите, что $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда $a_1 \parallel b_1$ и $a_2 \parallel b_2$.

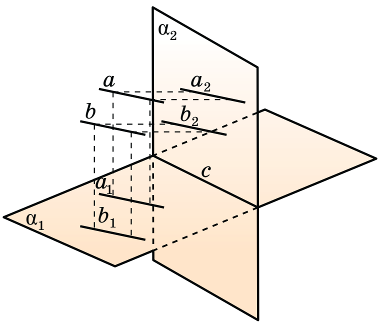


Рис. 80

200. Докажите, что если плоскость β и не принадлежащая ей прямая l перпендикулярны плоскости α, то плоскость β и прямая l параллельны.

201. Докажите, что из всех прямых, проходящих в одной грани двугранного угла

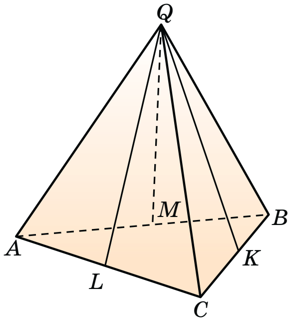


Рис. 81

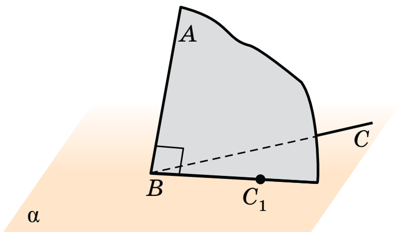


Рис. 82

через данную точку, наибольший угол с другой гранью этого двугранного угла образует прямая, перпендикулярная ребру двугранного угла.

202. Боковые грани треугольной пирамиды имеют площади S_1, S_2 и S_3 и попарно перпендикулярны. Найдите площадь основания этой пирамиды.

203. В треугольной пирамиде $QABC$ отрезки QK, QL и QM являются биссектрисами углов BQC, AQC и AQB соответственно (рис. 81). Докажите, что плоскости AQK, BQL и CQM имеют общую прямую.

204. Боковые грани треугольной пирамиды попарно перпендикулярны. Докажите, что плоскости, проходящие через боковые ребра перпендикулярно противоположным боковым граням, имеют общую прямую.

205. В треугольной пирамиде $QABC$ отрезки QK, QL и QM являются биссектрисами углов BQC, AQC и AQB соответственно. Докажите, что плоскости, проведенные через прямые QK, QL, QM перпендикулярно плоскостям BQC, AQC и AQB соответственно, имеют общую прямую.

206. Сторона BC угла ABC лежит в плоскости α, прямая BC_1 этой плоскости перпендикулярна стороне AB. Сравните величину угла ABC_1C с величиной угла ABC, учитывая, что угол ABC является:

а) прямым; б) острым; в) тупым (рис. 82).

207. Докажите, что в треугольной пирамиде $QABC$ плоские углы AQB и AQC равны тогда и только тогда, когда равны двугранные углы $AQCB$ и $AQBC$.

208. Докажите, что в треугольной пирамиде $SABC$ плоский угол ASB больше угла ASC тогда и только тогда, когда двугранный угол $ASCB$ больше двугранного угла $ASBC$.

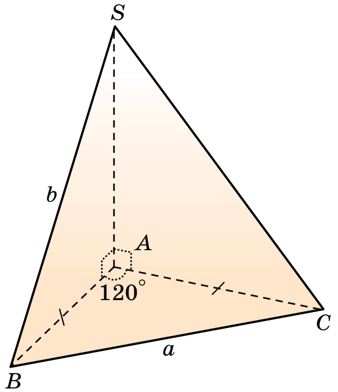


Рис. 83

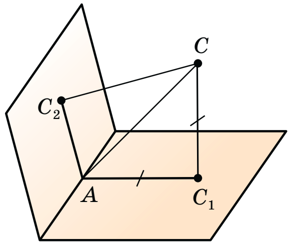


Рис. 84

209. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом BAC, равным 120°. Грани SAB и SAC образуют прямые двугранные углы с плоскостью основания (рис. 83). Найдите расстояние от точки S до плоскости ABC, учитывая, что $BC = a$ и $SB = b$.

210. Через сторону AD параллелограмма $ABCD$ проходит плоскость α под углом 45° к стороне AB. Проекция стороны AB на плоскость α равна a, а проекции диагоналей — b и c. Найдите длину отрезка BC.

211. Из точки C, взятой внутри двугранного угла, проведен перпендикуляр CA к его ребру. Расстояние от точки C до одной из граней угла равно проекции отрезка CA на эту грань, а проекция отрезка CA на другую грань угла вдвое меньше отрезка CA (рис. 84). Найдите величину двугранного угла.

212. В плоскости α двугранного угла $\alpha AB\beta$ величиной 45° проведены прямая CD, параллельная AB, и под углом 45° к ней прямая EF, $E \in CD$, $F \in AB$. Расстояние от прямой CD до плоскости β равно l. Найдите длину отрезка EF.

213. В одной грани двугранного угла проведена прямая под углом 30° к другой грани и под углом 45° к ребру двугранного угла. Найдите величину этого двугранного угла.

214. Взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой AB. В плоскости α на расстоянии 60 мм от прямой AB проведена параллельная ей прямая l. В плоскости β на расстоянии 91 мм от прямой AB отмечена точка F (рис. 85). Найдите расстояние от F до прямой l.

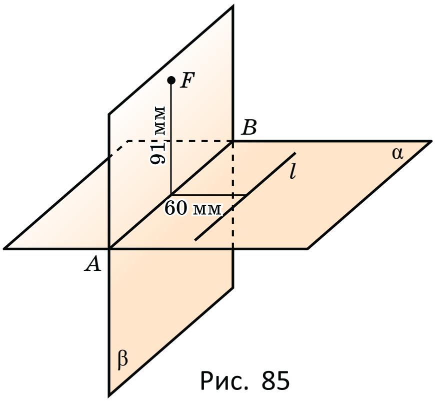


Рис. 85

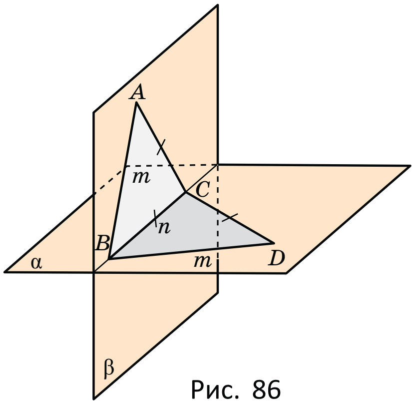


Рис. 86

215. Квадрат $ABCD$ со стороной a и трапеция $BEFC$ размещены так, что боковая сторона BE трапеции перпендикулярна плоскости ABC, а угол между плоскостями ABC и CDF равен 45°. Найдите площадь трапеции, учитывая, что площадь треугольника CDF равна Q.

216. Равнобедренные треугольники ABC и BCD имеют общую боковую сторону, равную n, и расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 86). Найдите расстояние между точками A и D, учитывая, что основания AB и BD треугольников равны m.

217. Найдите двугранный угол при боковом ребре SA треугольной пирамиды $SABC$, учитывая, что $\angle ASB = \angle ASC = 45°$ и $\angle BSC = 60°$.

218. В треугольной пирамиде $OPQR$ боковые ребра равны, $\angle POQ = \angle POR = 60°$, $\angle QOR = 90°$. Найдите величину двугранного угла $PQRO$.

219. При вершине треугольной пирамиды $HKLM$ все плоские углы равны 60°. Найдите расстояние от вершины M до плоскости HKL, учитывая, что $HM = m$.

220. В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы BSC, CSA, ASB соответственно равны α, β, γ, двугранные углы $BSAC$, $ASBC$, $ASCB$ равны соответственно $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. Докажите, что верно равенство:

а) $\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}\cos\widehat{C} + \sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos\alpha$;

б) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\widehat{C}}$.

221. Найдите плоские углы при вершине S треугольной пирамиды $SABC$, учитывая, что двугранные углы $BSAC$, $ASBC$ и $ASCB$ соответственно равны 60°, 90° и 120°.

11. Координаты в пространстве

222. Куб с ребром 2 расположен в пространстве так, что его центр совпадает с началом системы координат, а ребра параллельны координатным осям. Сделайте в тетради соответствующий рисунок, введите обозначения и запишите координаты вершин куба.

223. Правильная четырехугольная пирамида имеет высоту 12 и площадь основания 100. Две координатные плоскости являются плоскостями симметрии пирамиды, а третья — разделяет пополам ее высоту (рис. 87). Запишите координаты вершин пирамиды и тех точек на ребрах, которые находятся сразу в двух координатных плоскостях.

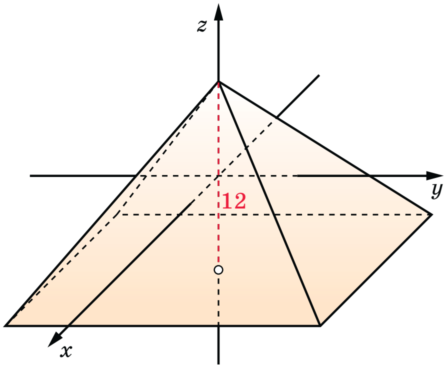


Рис. 87

224. Куб стоит на плоскости XOY. Учитывая, что три вершины куба имеют координаты (5; 4; 0), (1; 1; 0), (–2; 5; 0), найдите:

а) длину ребра куба;
б) координаты вершин куба;
в) координаты центров граней куба.

225. В правильной шестиугольной призме основания симметричны относительно плоскости YOZ, одно из боковых ребер совпадает с осью OX, центр одного основания имеет координаты (3; 0; 2). Запишите координаты вершин призмы.

226. Найдите координаты середин сторон треугольника ABC, учитывая, что $A(2; 1; 3)$, $B(-4; 5; -1)$, $C(6; 3; 7)$.

227. Найдите координаты вершин треугольника ABC, учитывая, что середины K, L, M его сторон AB, BC, CA имеют координаты $K(2; 1; 3)$, $L(-4; 5; -1)$, $M(6; 3; 7)$.

228. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны координаты его центра Q и трех вершин: $Q(1; 3; 5)$, $A(-2; 1; -3)$, $B(-1; 2; -1)$, $D(1; 1; -2)$. Найдите координаты остальных вершин параллелепипеда.

229. Найдите проекции треугольника ABC на координатные плоскости, учитывая, что $A(-2; 3; 5)$, $B(4; 5; -1)$, $C(6; -3; 7)$.

230*. Точки M и N разделяют отрезок AB на три доли (рис. 88). Найдите их координаты, учитывая, что $A(-4;\ 3;\ 5)$, $B(2;\ -3;\ -1)$.

231*. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, учитывая, что $A(2;\ 1;\ 5)$, $B(-4;\ 4;\ -1)$.

232. Найдите длины сторон и диагоналей параллелограмма $ABCD$, учитывая, что $A(2;\ 1;\ 5)$, $B(-2;\ 4;\ 5)$, $D(1;\ 3;\ 7)$.

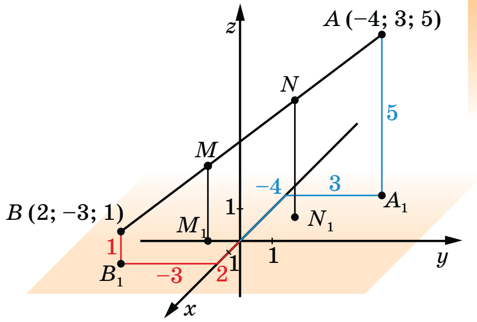


Рис. 88

233*. Найдите длины медиан треугольника ABC, учитывая, что $A(2;\ 1;\ 5)$, $B(-4;\ 2;\ 0)$, $C(5;\ -3;\ 7)$.

234*. Определите, является ли параллелограммом четырехугольник $ABCD$, учитывая, что $A(2;\ 1;\ -5)$, $B(-4;\ 2;\ 0)$, $C(-5;\ -3;\ -7)$, $D(1;\ 3;\ 2)$.

235*. Определите, является ли ромбом четырехугольник $MNPQ$, учитывая, что $M(-2;\ -1;\ 5)$, $N(4;\ -7;\ 0)$, $P(9;\ -1;\ -6)$, $Q(3;\ 5;\ -1)$.

236*. Определите, является ли прямоугольником четырехугольник $ABCD$, учитывая, что $A(2;\ 1;\ -5)$, $B(-4;\ -1;\ -6)$, $C(-5;\ 3;\ -7)$, $D(1;\ 5;\ 0)$.

237*. Определите, является ли квадратом четырехугольник $MNPQ$, учитывая, что $M(-1;\ 3;\ 2)$, $N(6;\ 2;\ 2)$, $P(5;\ -5;\ 2)$, $Q(-2;\ -4;\ 2)$.

238. Вершины треугольной пирамиды $ABCD$ имеют координаты $A(5;\ 0;\ 7)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(-7;\ 5;\ 4)$ и $D(-7;\ 0;\ 4)$. Найдите:

а) длины ребер пирамиды;

б) площадь полной поверхности пирамиды.

239. Найдите координаты центра и радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды $MNPQ$, вершины которой имеют координаты $M(7;\ -3;\ 6)$, $N(7;\ 2;\ 3)$, $P(-5;\ 2;\ 3)$, $Q(-5;\ -3;\ 3)$.

12. Вектор. Действия над векторами

240. Отметьте в тетради точки A, B, C, D, E, F так, чтобы выполнялись равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EF}$.

241. Отметьте в тетради точки M, N, P, Q, R, S так, чтобы выполнялось равенство:

а) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MN}$.

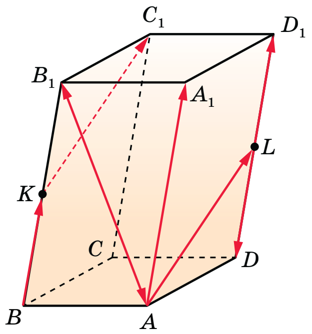


Рис. 89

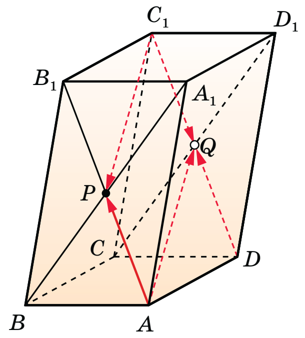


Рис. 90

242. Отметьте в тетради точки A, B, C, D, E, F так, чтобы выполнялись равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DF}$.

243. Отметьте в тетради точки M, N, P, Q, R, S, A, B, C, D, E, F так, чтобы выполнялось равенство:

а) $\overrightarrow{PQ} = 2{,}5 \cdot \overrightarrow{MN}$; б) $\overrightarrow{AB} = -1{,}5 \cdot \overrightarrow{RS}$; в) $\overrightarrow{EF} = -0{,}4 \cdot \overrightarrow{CD}$.

244. Отметьте в тетради точки P, Q, R так, чтобы выполнялось равенство:

а) $\overrightarrow{PQ} = 1{,}5 \cdot \overrightarrow{PR}$; б) $\overrightarrow{PQ} = -2{,}5 \cdot \overrightarrow{PR}$; в) $\overrightarrow{PQ} = -0{,}2 \cdot \overrightarrow{PR}$.

Выразите вектор $\overrightarrow{QR}$ через вектор $\overrightarrow{RP}$.

245. Используя рисунок 89, на котором изображены параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, середины K и L ребер BB_1 и DD_1, а также ряд векторов, укажите пары:

а) равных векторов;

б) неравных коллинеарных векторов.

246. Используя рисунок 90, на котором изображены параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, центры P и Q граней ABB_1 и CDD_1, а также ряд векторов, обоснуйте равенство:

а) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DQ}$; в) $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{C_1P}$.

б) $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{C_1Q}$;

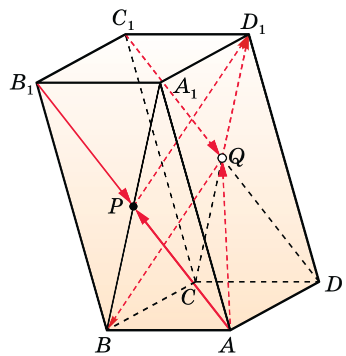


Рис. 91

247. Используя рисунок 91, на котором изображены параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, центры P и Q граней ABB_1 и CDD_1 и ряд векторов, найдите сумму векторов:

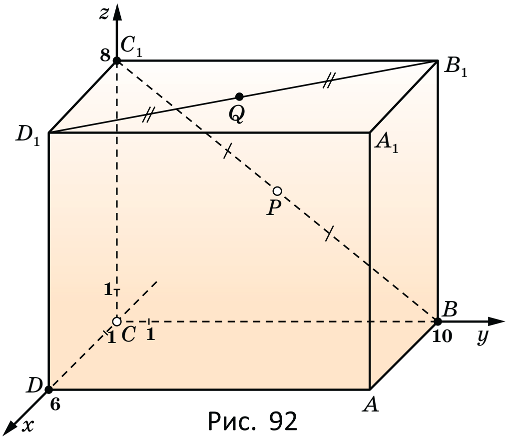


Рис. 92

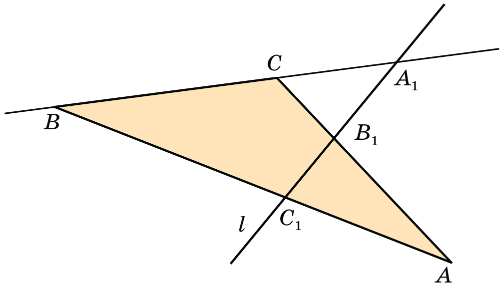


Рис. 93

а) $\overrightarrow{C_1Q}$ и $\overrightarrow{AP}$; в) $\overrightarrow{AQ}$ и $\overrightarrow{B_1P}$; д) $\overrightarrow{AQ}$ и $\overrightarrow{PD_1}$;
б) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{QD_1}$; г) $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$; е) $\overrightarrow{QB}$ и $\overrightarrow{QD_1}$.

248. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вершины C, D, B и C_1 имеют координаты (0; 0; 0), (6; 0; 0), (0; 10; 0) и (0; 0; 8) соответственно. Учитывая данные, приведенные на рисунке 92, найдите координаты:

а) векторов $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD_1}$;

б) векторов $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{B_1P}$, $\overrightarrow{C_1Q}$, $\overrightarrow{QD_1}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{PD_1}$, $\overrightarrow{QB}$;

в) суммы векторов $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QB}$; $\overrightarrow{B_1P} + \overrightarrow{AQ}$; $\overrightarrow{C_1Q} + \overrightarrow{PD_1}$; $\overrightarrow{QD_1} + \overrightarrow{B_1P}$.

249. Учитывая, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют координаты (2; 3; –1), (4; 5; –3) и (0; 1; 1) соответственно:

а) найдите координаты векторов $2\vec{a}$, $-\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{b}+\vec{c}$, $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

б) определите, есть ли среди векторов коллинеарные;

в) определите, какие из найденных векторов компланарны с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

250. Определите, при каких значениях переменных m и n векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами (1; –2; m) и (2; n; –3) соответственно будут коллинеарными.

251. Прямая l пересекает прямые BC, AC, AB треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно (рис. 93). Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{C_1A_1}$ коллинеарны.

252. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно неколлинеарны. Найдите их сумму, учитывая, что вектор $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ — вектору $\vec{a}$.

253. Учитывая, что точка M — середина медианы AD треугольника ABC, выразите вектор:

а) $\overrightarrow{MB}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

254. Учитывая, что точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC, выразите вектор:

а) $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{CN}$.

255. Учитывая, что $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, выразите вектор:

а) $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{FC}$.

256. Учитывая, что точка Q является центром правильного пятиугольника $ABCDE$, докажите, что векторы $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}$ и $\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{QE}$ коллинеарны.

257. Докажите, что векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$, $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ компланарны.

258. Определите, в каком отношении плоскость $x - 3y + 2z - 2 = 0$ разделяет отрезок AB, учитывая, что:

а) $A(-5; 3; -3)$, $B(-2; -4; 2)$; б) $A(-3; -4; -8)$, $B(1; 2; -2)$.

259. Докажите, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ компланарны при любых значениях коэффициентов α и β.

260. Определите, при каких значениях переменных p и q векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с координатами $(1; -2; 3)$, $(0; 1; -3)$ и $(2; -2p; q + 1)$ соответственно являются компланарными.

13. Скалярное произведение векторов

261. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ, а их длины — a и b соответственно. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, учитывая, что:

а) $a = 2$, $b = 3$, $\varphi = 60°$; в) $a = 6$, $b = 7$, $\varphi = 135°$.

б) $a = 4$, $b = 5$, $\varphi = 120°$;

262. Определите, какой знак имеет скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, учитывая, что угол φ между ними находится в промежутке:

а) $0° \leqslant \varphi < 90°$; б) $90° < \varphi \leqslant 180°$.

263. Определите промежуток, в котором находится угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, учитывая, что:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$.

264. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a}$ и $-\vec{a}$; б) $\vec{b}$ и $k\vec{b}$.

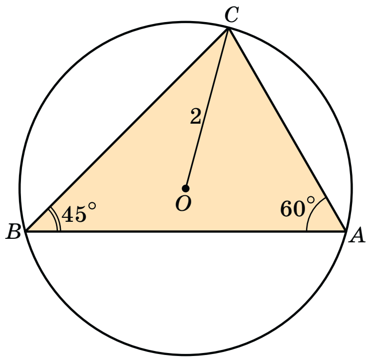


Рис. 94

265. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом 2 (рис. 94). Учитывая, что $\angle ABC = 45°$ и $\angle BAC = 60°$, найдите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$; б) $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$; в) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.

266. Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Установите геометрический смысл равенства:

а) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = 2\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2\right)$; в) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = 0$.

б) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$;

267. Упростите выражение:

а) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 - \vec{a}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$; в) $3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) - \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$;

б) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)^2 - 3\vec{a}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$; г) $\vec{a}\left(2\vec{a}-6\vec{b}\right) + \left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) + \left(\vec{a}+3\vec{b}\right)^2$.

268. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D выполняется равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

269. Учитывая, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, упростите выражение:

а) $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2 - 2\vec{b}^2$; б) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)^2 - 3\vec{b}\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right) - \vec{a}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

270. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB имеет длину c. Найдите сумму $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

271. Стороны BC, AC, AB треугольника ABC равны соответственно a, b, c. Найдите скалярное произведение векторов:

а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

272. О векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ известно, что $\vec{b} \perp \left(\vec{a}-\vec{c}\right)$ и $\vec{c} \perp \left(\vec{b}-\vec{a}\right)$. Докажите, что $\vec{a} \perp \left(\vec{b}-\vec{c}\right)$.

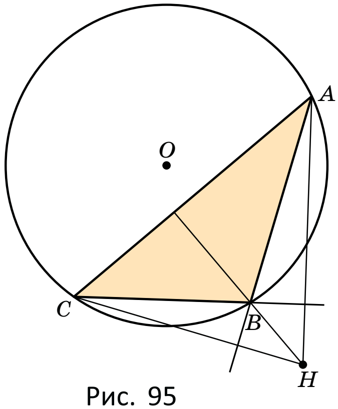


Рис. 95

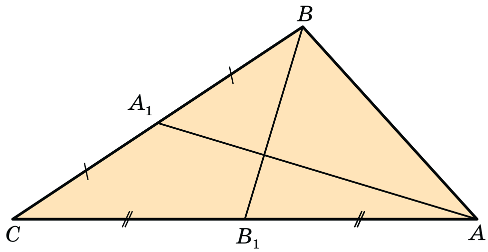


Рис. 96

273. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты (1; –2; 2) и (–2; 1; 2) соответственно. Найдите:

а) скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

б) длину каждого вектора;

в) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

274. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, H — точка пересечения его высот (рис. 95). Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

275. Точка D на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана так, что $AD : DB = 1 : 3$. Учитывая, что $BC = a$ и $AC = b$, найдите CD.

276. Стороны BC, AC, AB треугольника ABC, равные соответственно a, b, c, удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 = 5c^2$ (рис. 96). Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 взаимно перпендикулярны.

277. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, C_1 — середина отрезка AB. Докажите, что отрезки OC и OC_1 перпендикулярны тогда и только тогда, когда углы A и B отличаются на 90°.

278. Каждое ребро треугольной пирамиды $ABCD$ равно a, точки M, N, K — середины ребер AB, AD, CD соответственно. Найдите скалярные произведения векторов:

а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$;

б) $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}$;

в) $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KB}$.

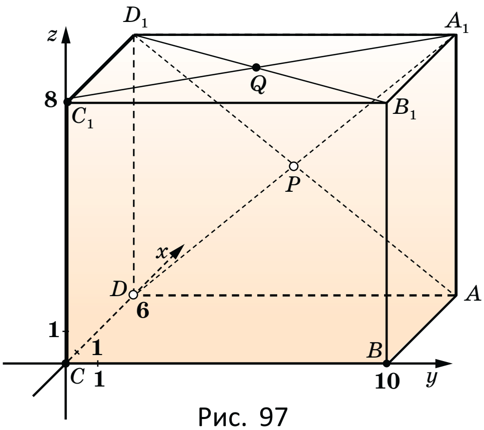


Рис. 97

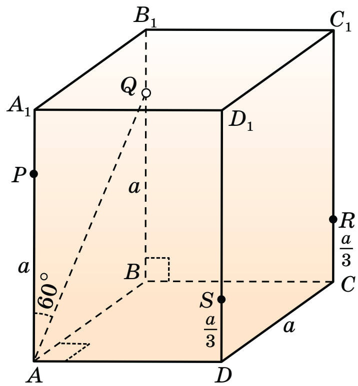


Рис. 98

279. Вершины C, D, B и C_1 прямоугольного параллелепипеда имеют координаты (0; 0; 0), (6; 0; 0), (0; 10; 0) и (0; 0; 8) соответственно, точки P и Q — центры граней ADD_1 и $A_1B_1C_1$ (рис. 97). Найдите:

а) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD_1}$; $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AQ}$; $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{B_1P} \cdot \overrightarrow{C_1Q}$; $\overrightarrow{QD_1} \cdot \overrightarrow{AQ}$;

б) длины векторов $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{B_1P}$, $\overrightarrow{C_1Q}$, $\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PD_1}$, $\overrightarrow{PB}$;

в) косинус угла между векторами $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD_1}$; $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AQ}$; $\overrightarrow{QB}$ и $\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{B_1P}$ и $\overrightarrow{C_1Q}$; $\overrightarrow{QD_1}$ и $\overrightarrow{AQ}$.

280. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, прямые AB и CD, BC и AD перпендикулярны. Докажите, что прямые AC и BD также перпендикулярны.

281. В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной a. На ребрах AA_1 и BB_1 выбраны точки P и Q так, что $AP = BQ = a$, на ребрах CC_1 и DD_1 — точки R и S так, что $CR = DS = \frac{a}{3}$ (рис. 98). Учитывая, что $\angle QAP = 60°$ и $\angle QBC = 90°$, найдите:

а) AR; б) DQ; в) PQ; г) QS.

14. Применение векторов и координат

282. а) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и B_1, C_1 и D_1 так, что $AA_1 = BB_1$, $CC_1 = DD_1$. Прямые A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в точке P, а прямые BC_1 и AD_1 — в точке Q (рис. 99, a). Докажите, что прямые PQ и AD параллельны.

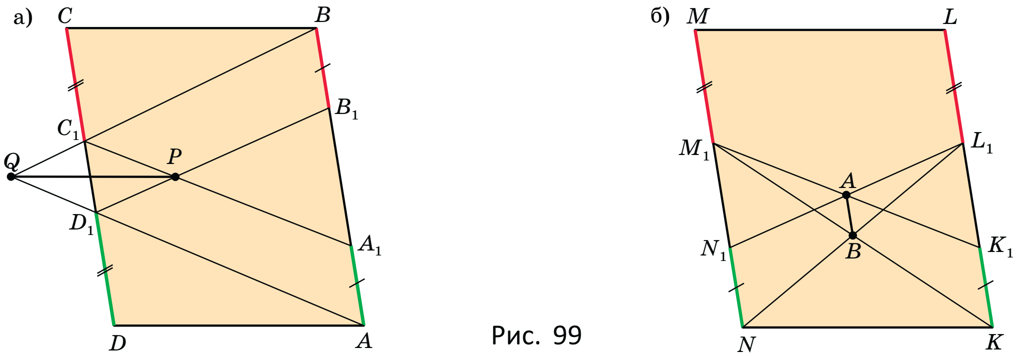


Рис. 99

б) На сторонах KL и MN параллелограмма $KLMN$ выбраны точки K_1 и L_1, M_1 и N_1 так, что $KK_1 = NN_1$ и $LL_1 = MM_1$. Прямые K_1M_1 и L_1N_1 пересекаются в точке A, а прямые NL_1 и KM_1 — в точке B (рис. 99, *б*). Докажите, что прямые AB и KL параллельны.

283. Параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ имеют общую вершину (рис. 101). Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны одной плоскости.

284. Точки P и Q на ребрах AB и CD треугольной пирамиды выбраны так, что $AP : PB = CQ : QD$ (рис. 101). Докажите, что прямые AC, BD и PQ параллельны одной плоскости.

285. Докажите, что:

а) отрезки, соединяющие середины противоположных ребер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам (рис. 102);

б) отрезки, соединяющие вершины треугольной пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины;

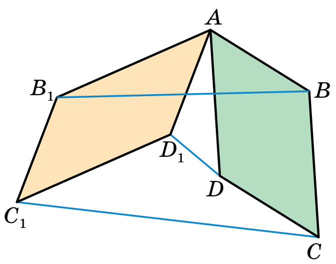


Рис. 100

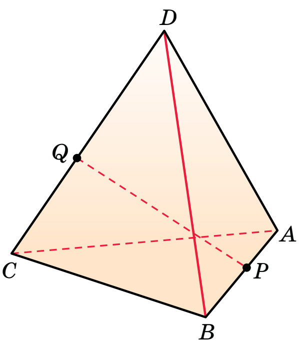


Рис. 101

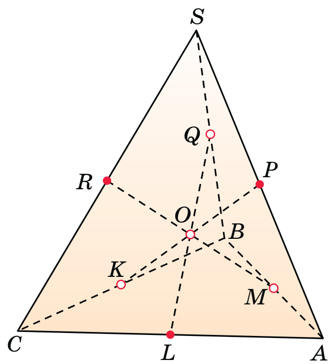


Рис. 102

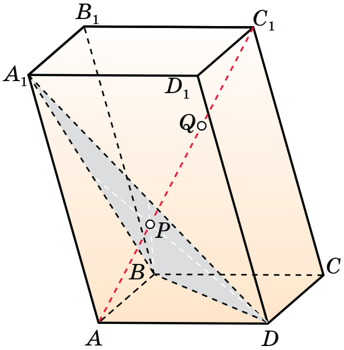


Рис. 103

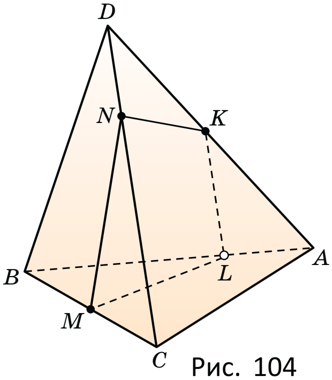


Рис. 104

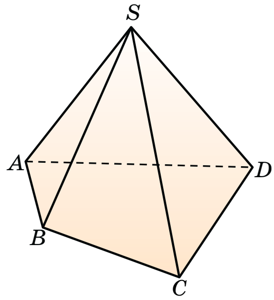


Рис. 105

в) середина отрезка, соединяющего середины противоположных ребер треугольной пирамиды, находится на отрезках, соединяющих вершины пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней.

286. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника A_1BD и делится этой точкой в отношении 1 : 2, считая от вершины A (рис. 103).

287. Докажите, что если плоскость пересекает ребра AB, BC, CD, DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках L, M, N, K соответственно (рис. 104), то $\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DK}{KA} = 1$.

288. Докажите, что геометрическое место середин отрезков с концами на двух скрещивающихся прямых есть плоскость, параллельная этим прямым и проходящая через середину их общего перпендикуляра.

289. Имеется четырехугольная пирамида $SABCD$ (рис. 105). Постройте линию пересечения плоскостей SAB и SCD.

290. Даны скрещивающиеся прямые k и l, а также точка A. Объясните, как через точку A провести прямую, которая пересекала бы прямые k и l.

291. Плоскость α проходит через середины ребер AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ и такую точку P ребра AD, что $AP : PD = 3 : 1$ (рис. 106). Определите, в каком отношении плоскость α разделяет ребро BC.

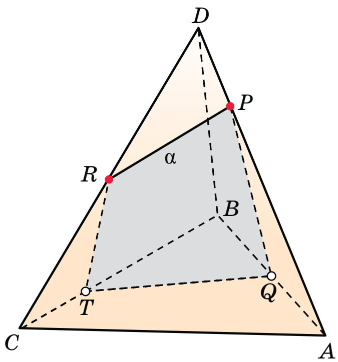


Рис. 106

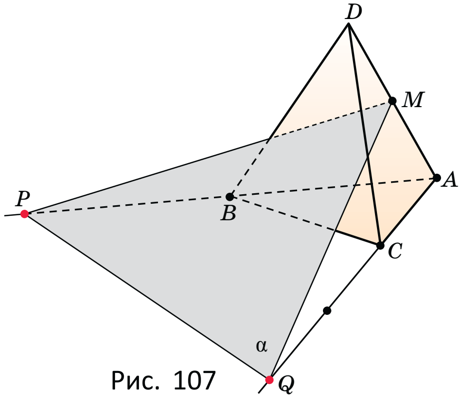


Рис. 107

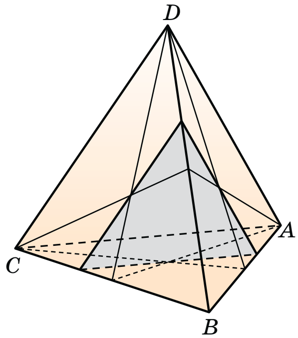


Рис. 108

292. Плоскость α проходит через середину M ребра AD треугольной пирамиды $ABCD$ и такие точки P и Q на лучах AB и AC, что $AP = 2AB$, $AQ = 3AC$ (рис. 107). Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью α и определите, в каком отношении плоскость α разделяет ребра BD и CD.

293. Плоскость α пересекает ребра BC, CD, DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках U, V, W так, что $BU : UC = 1 : 1$, $CV : VD = 1 : 2$, $DW : WA = 3 : 1$. Сделайте соответствующий рисунок в тетради, постройте на нем сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью α и найдите, в каком отношении плоскость α разделяет ребро AB.

294. Плоскость α проходит через середины ребер AB, CB, DD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте в тетради сечение параллелепипеда плоскостью α. В каком отношении плоскость α разделяет ребро CC_1 и диагональ B_1D?

295. Плоскость α проходит через точки пересечения медиан граней ABC, ABD, BCD треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 108). Определите, в каком отношении плоскость α разделяет ребро BD.

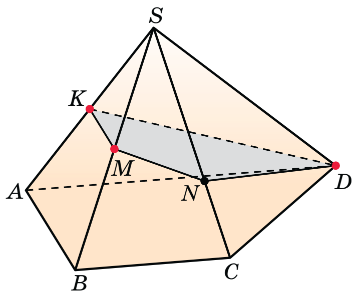


Рис. 109

296. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$ и $AD = 2BC$. Плоскость α проходит через середины ребер SA, SB и вершину D (рис. 109). Определите, в каком отношении плоскость α разделяет ребро SC.

297. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра SA, SB, SC в точках P,

Q, R таких, что $SP : PA = 1 : 1$, $SQ : QB = 3 : 1$, $SR : RC = 2 : 1$. Сделайте соответствующий рисунок в тетради, постройте на нем сечение пирамиды плоскостью α и найдите, в каком отношении плоскость α разделяет ребро SD.

298. Плоскость α, параллельная прямой BD_1, проходит через середины ребер AB и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сделайте соответствующий рисунок в тетради, постройте на нем сечение пирамиды плоскостью α и найдите, в каком отношении плоскость α разделяет ребро DD_1.

299. В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$ и $AD = 2BC$. Плоскость α проходит через середину ребра AB пирамиды $SABCD$ параллельно прямым AC и SD. Сделайте соответствующий рисунок в тетради, постройте на нем сечение пирамиды плоскостью α и найдите, в каком отношении плоскость α делит ребро SB.

300. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований пересекаются в точках M и M_1. Прямая l проходит через середину отрезка MM_1 параллельно прямой A_1C. Сделайте соответствующий рисунок в тетради, постройте на нем точки пересечения прямой l с поверхностью призмы и найдите длину отрезка с концами в этих точках, учитывая, что $A_1C = d$.

301. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на отрезке AC_1 и прямой B_1C выбраны соответственно точки P и Q так, что $PQ \parallel BD$ (рис. 110). Найдите отношение $PQ : BD$.

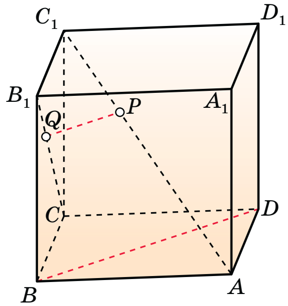
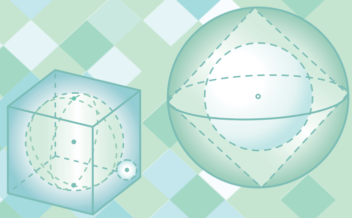


Рис. 110



11 класс

1. Призма

302. Постройте развертку прямой треугольной призмы с боковым ребром 5 см и ребрами основания 3 см, 4 см и 5 см. Найдите боковую и полную поверхности такой призмы. Определите ее объем.

303. Постройте развертку наклонной треугольной призмы с боковым ребром 5 см и ребрами основания 3 см, 4 см и 5 см. Найдите по развертке площадь каждой грани такой призмы. Сравните их с соответствующими площадями прямой треугольной призмы с такими же ребрами. Какой вывод можно сделать? Обоснуйте свой вывод.

304. Определите, сколько прямоугольных граней может иметь наклонная:

а) треугольная призма;
б) четырехугольная призма;
в) шестиугольная призма (рис. 111).

305. Определите, сколько неравных ребер может иметь:

а) треугольная призма;
б) четырехугольная призма;
в) шестиугольная призма;
г) правильная треугольная призма;
д) правильная четырехугольная призма;
е) правильная шестиугольная призма (рис. 112).

306. Определите, сколько неравных граней может иметь:

а) пятиугольная призма;
б) семиугольная призма;
в) десятиугольная призма;
г) прямая пятиугольная призма;
д) прямая семиугольная призма;
е) прямая десятиугольная призма;
ж) правильная пятиугольная призма;
з) правильная семиугольная призма (рис. 113);
и) правильная десятиугольная призма.

307. Определите, сколько неравных диагоналей может иметь:

а) пятиугольная призма;
б) семиугольная призма;

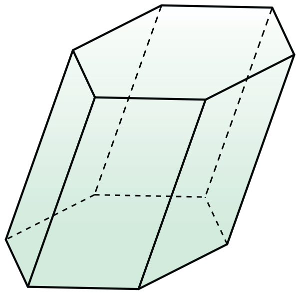


Рис. 111

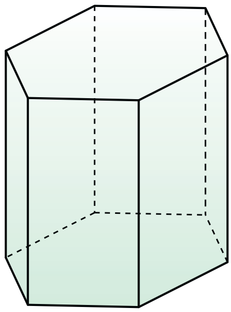


Рис. 112

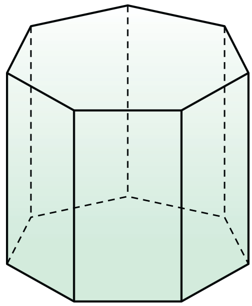


Рис. 113

в) десятиугольная призма;
г) прямая семиугольная призма;
д) прямая восьмиугольная призма (рис. 114);
е) прямая десятиугольная призма;
ж) правильная семиугольная призма;
з) правильная восьмиугольная призма (рис. 115);
и) правильная десятиугольная призма.

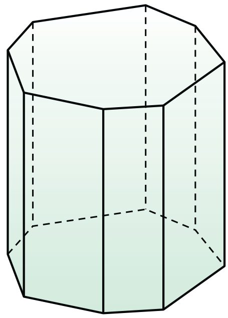


Рис. 114

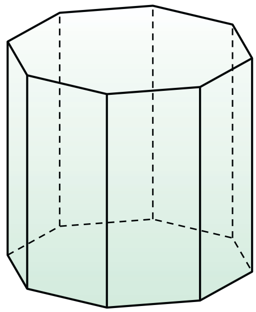


Рис. 115

308. Найдите боковую и полную поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами основания 4 м и 6 м и высотой 5 м.

309. Три грани параллелепипеда имеют площади 12 дм^2, 15 дм^2 и 18 дм^2. Определите площадь полной поверхности параллелепипеда.

310. В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна d, диагонали боковой грани и основания — d_1 и d_0 соответственно. Найдите площадь основания параллелепипеда.

311. Найдите боковую и полную поверхности призмы, учитывая, что ее боковое ребро равно 15 см, площадь основания — 48 см^2, а периметр перпендикулярного сечения — 64 см. Определите объем этой призмы.

312. Найдите боковую и полную поверхности, а также объем правильной призмы, учитывая, что ее боковое ребро равно 15 см, площадь основания — $16+12\sqrt{2}$ см^2, а периметр перпендикулярного сечения — $8\sqrt{2}$ см.

313. Полная поверхность одного куба равна Q, другого — S. Найдите отношение объемов этих кубов.

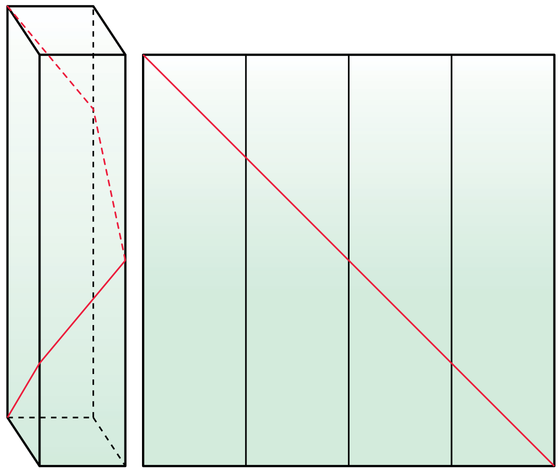


Рис. 116

314. Ребро одного куба в сумме с ребром другого куба составляет 12 см. Найдите эти ребра, учитывая, что сумма объемов кубов равна 468 $см^3$.

315. Разверткой боковой поверхности правильной четырехугольной призмы является квадрат. При этом ломаная на боковой поверхности изображается диагональю квадрата (рис. 116). Определите углы между соседними звеньями ломаной.

316. Ребра основания прямой треугольной призмы равны 10 см, 17 см и 21 см, а боковое ребро — 34 см. Найдите площади сечений, которые проходят через боковые ребра перпендикулярно противоположным ребрам основания.

317. В треугольной призме двугранный угол при одном боковом ребре равен 34°, при другом — 83°. Найдите двугранный угол при третьем боковом ребре.

318. Боковое ребро призмы длиной 18 см образует с плоскостью основания угол α. Найдите высоту призмы, учитывая, что:

а) $\alpha = 90°$; б) $\alpha = 30°$; в) $\alpha = 60°$; г) $\alpha = 45°$.

319. Боковая поверхность параллелепипеда с боковым ребром 20 см равна 600 $см^2$, площадь меньшей боковой грани — 120 $см^2$. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что один из двугранных углов при боковых ребрах равен 60°.

320. Высота прямой треугольной призмы равна 25 см, а ребра основания — 17 см, 25 см и 26 см (рис. 117). Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро перпендикулярно меньшей стороне основания.

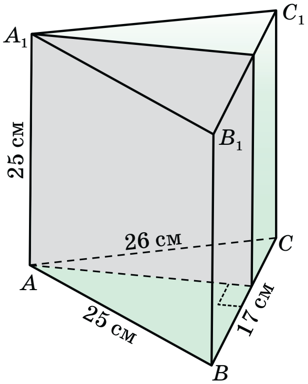


Рис. 117

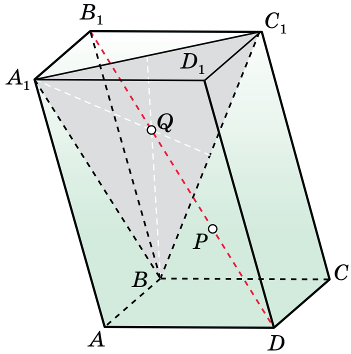


Рис. 118

321. Основанием призмы является выпуклый многоугольник. Докажите, что эта призма прямая, учитывая, что три ее боковые грани являются прямоугольниками.

322. Можно ли утверждать, что призма является прямой, если в ее основании лежит выпуклый многоугольник и четыре грани являются прямоугольниками?

323. Докажите, что сечение, проведенное через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины (рис. 118), отсекает третью долю диагонали параллелепипеда и эта диагональ проходит через точку пересечения медиан треугольного сечения.

324 Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы равны 25 см, 29 см и 36 см (рис. 119). Найдите расстояния между каждой боковой гранью и противоположным ребром.

325. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 20 см, а попарные расстояния между ними — 13 см, 14 см и 15 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы и ее объем.

326. Найдите боковую, полную поверхности и объем прямого параллелепипеда, диагонали которого равны 51 см и 53 см, а стороны основания — 14 см и 22 см.

327. Сечение правильной треугольной призмы проходит через ребро основания длиной 12 см и имеет площадь 72 см^2. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы.

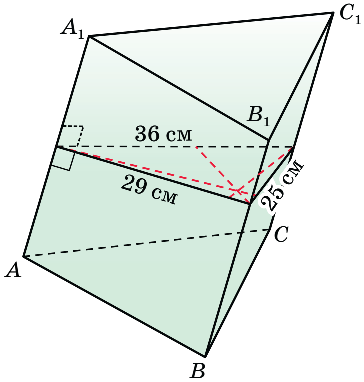


Рис. 119

328. Сечение правильной треугольной призмы проходит через ребро основания и является равнобедренным треугольником с углом α при вершине на боковом ребре (рис. 120). Определите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы.

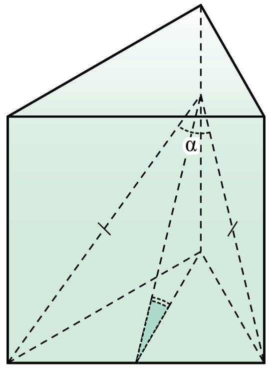


Рис. 120

329. Плоскость, проведенная через середины двух сторон основания прямоугольного параллелепипеда под углом α к плоскости основания, пересекает три его боковых ребра. Выразите площадь сечения через угол α и измерения a и b основания.

330. Высота правильной шестиугольной призмы втрое больше стороны основания. Найдите отношение площади основания к площади сечения, проходящего через сторону основания и диагональ призмы.

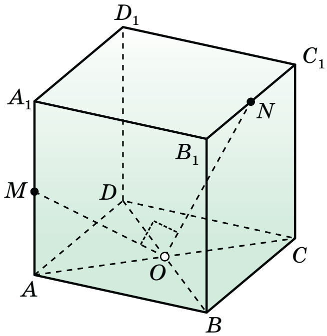


Рис. 121

331. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной призмы равна S. Найдите площадь боковой грани.

332. Сечением правильной треугольной призмы является треугольник. Найдите площадь основания призмы и угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, учитывая, что стороны треугольного сечения равны:

а) 24 см, 37 см и 37 см; б) 40 см, 40 см и 41 см.

333. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с площадью основания 50 см^2 прямые OM и ON, проходящие через центр O грани $ABCD$ и середины M и N ребер AA_1 и B_1C_1, взаимно перпендикулярны (рис. 121). Найдите полную поверхность призмы.

334. В правильной четырехугольной призме сторона основания и высота соответственно равны $12\sqrt{2}$ см и 7 см. Найдите расстояние между диагональю призмы и стороной основания, которая не имеет с этой диагональю общих точек.

335. В прямой треугольной призме боковые ребра втрое длиннее ребер основания (рис. 122). Найдите высоту призмы, учитывая, что площадь полной поверхности призмы равна $39 + 20\sqrt{3}$.

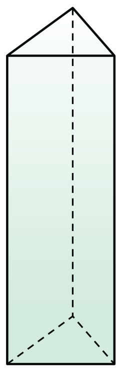


Рис. 122

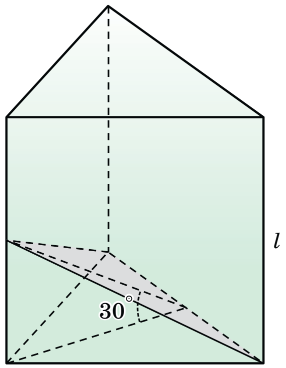


Рис. 123

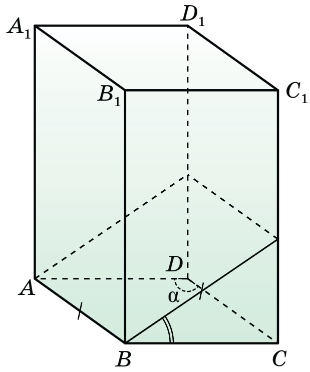


Рис. 124

336. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна 36 см^2 и относится к площади полной поверхности как 3 : 5. Найдите высоту призмы.

337. В правильной треугольной призме с боковым ребром l проведено сечение через ребро основания и середину бокового ребра. Найдите полную поверхность призмы, учитывая, что угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен:

а) 45°; б) 30° (рис. 123); в) 60°; г) α.

338. Ребра основания прямого параллелепипеда имеют длины a и b и образуют угол α. Высота параллелепипеда равна l. Найдите полную поверхность параллелепипеда, учитывая, что:

а) a = 12 см, b = 13 см, l = 15 см, α = 30°;
б) a = 15 дм, b = 18 дм, l = 250 см, α = 45°.

339. В прямом параллелепипеде три ребра равны 16 см, 15 см, 20 см, а три угла в гранях — 30°, 90°, 90°. Найдите возможные значения площади полной поверхности параллелепипеда.

340. В прямом параллелепипеде ребра основания равны 21 см и 29 см, а одна из диагоналей основания — 20 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда, учитывая, что его меньшая диагональ наклонена к плоскости основания под углом 60°.

341. Найдите диагонали параллелепипеда, учитывая, что каждая его грань есть ромб с углом 60° и стороной a.

342. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с тупым углом α. Сечением параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину тупого угла, является квадрат (рис. 124). Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

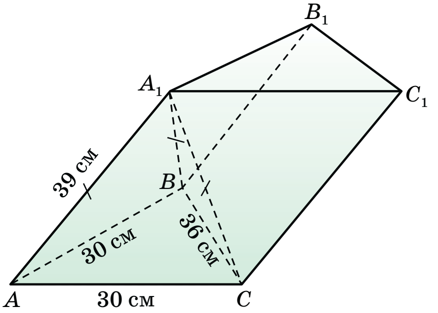


Рис. 125

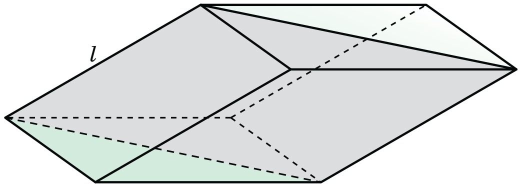


Рис. 126

343. Найдите площадь полной поверхности прямой треугольной призмы, ребра основания которой равны 58 см, 50 см, 12 см, а боковое ребро равно большей высоте основания.

344. В треугольной призме расстояния между боковыми ребрами пропорциональны числам 26, 25, 3, площади перпендикулярного сечения и меньшей боковой грани равны 144 см^2 каждая. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

345. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребра основания AB и AC равны по 30 см, BC — 36 см, вершина A_1 равноудалена от вершин A, B, C и $AA_1 = 39$ см (рис. 125). Найдите площадь полной поверхности призмы.

346. В прямом параллелепипеде высота равна 60 см, ребра основания — 17 см и 28 см. Найдите диагонали параллелепипеда, учитывая, что одна из диагоналей основания равна 39 см.

347. В основании призмы лежит ромб с диагоналями a и b, боковое ребро призмы равно l и наклонено к плоскости основания под углом 30°, одно из диагональных сечений перпендикулярно плоскости основания (рис. 126). Найдите возможные значения площади диагональных сечений.

348. В прямоугольном треугольнике с углом 45° гипотенуза имеет длину a и расположена в плоскости α, образующей с плоскостью треугольника угол 30°. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости α.

349. Плоскость проходит через вершину A правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пересекает ребра B_1C_1 и A_1C_1 в таких точках M и K, что $B_1M : MC_1 = C_1K : KA_1 = 1 : 2$ (рис. 127). Найдите площадь сечения, учитывая, что сторона основания призмы равна 9, а высота призмы — 16.

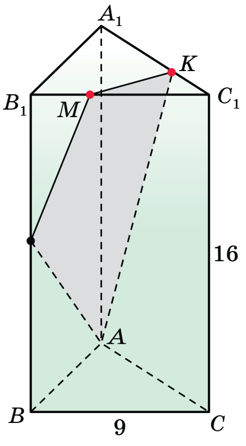


Рис. 127

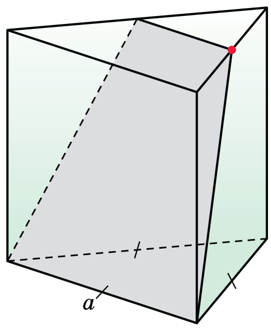


Рис. 128

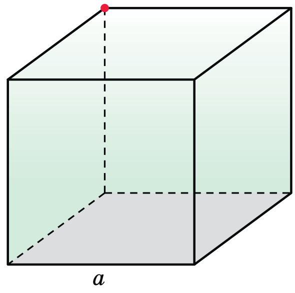


Рис. 129

350. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник со стороной a. Плоскость, проходящая через ребро нижнего основания и середину ребра верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом φ (рис. 128). Найдите площадь этого сечения и объем призмы.

351. Диагональные сечения четырехугольной призмы — прямоугольники, площадь одного из них равна Q, диагональ другого имеет длину d и образует с основанием угол α. Найдите объем призмы, учитывая, что угол между диагональными сечениями равен β.

352. Найдите площадь основания прямоугольного параллелепипеда, учитывая, что площадь его боковой поверхности равна S, площадь диагонального сечения — Q, а высота — h.

353. В прямом параллелепипеде ребра основания равны 25 см и 39 см, а диагонали основания относятся как 28 : 17. Найдите площади диагональных сечений, учитывая, что высота параллелепипеда равна 42 см.

354. Ребро куба равно a. Найдите расстояния от вершины куба до диагоналей граней, которым эта вершина не принадлежит (рис. 129).

355. В правильной треугольной призме боковое ребро равно 5 см, а ребро основания — 6 см. Найдите площадь сечения, проведенного через:

а) боковое ребро и середину противоположного ребра основания;
б) ребро основания и середину противоположного бокового ребра.

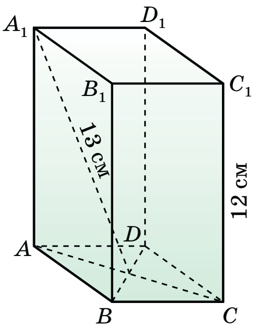


Рис. 130

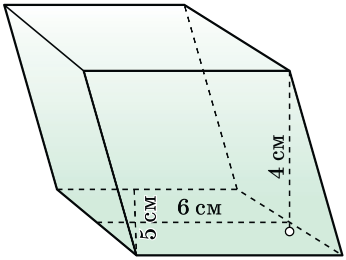


Рис. 131

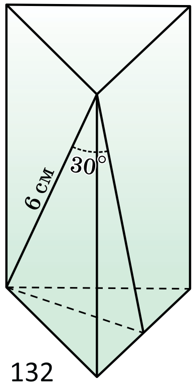


Рис. 132

356. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 5 см, а ребро основания — 6 см. Найдите площадь сечения, проведенного через:

а) ребро AA_1 и середину ребра CD;
б) ребро AB основания и середину ребра CC_1.

357. Высота правильной четырехугольной призмы равна 12 см (рис. 130). Найдите площадь боковой поверхности призмы, учитывая, что расстояние от вершины одного основания до середины диагонали другого равно 13 см.

358. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 4 см и острым углом 30°. Найдите объем призмы, учитывая, что ее боковое ребро равно 5 см.

359. В основании наклонной призмы лежит трапеция, средняя линия которой равна 6 см, а высота — 5 см (рис. 131). Найдите объем призмы, учитывая, что ее высота равна 4 см.

360. Стороны основания параллелепипеда равны 3 см и 6 см, а угол между ними — 45°. Боковое ребро длиной $4\sqrt{3}$ см составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.

361. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная 6, образует угол 30° с плоскостью другой боковой грани (рис. 132). Найдите объем призмы.

362. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, пересекает плоскость нижнего основания под углом φ. Площадь полученного сечения равна Q. Найдите объем призмы.

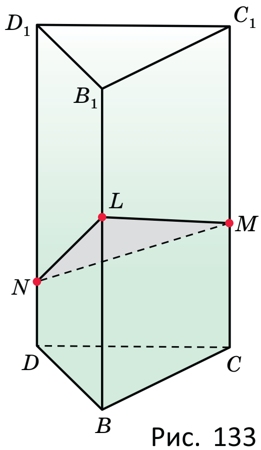


Рис. 133

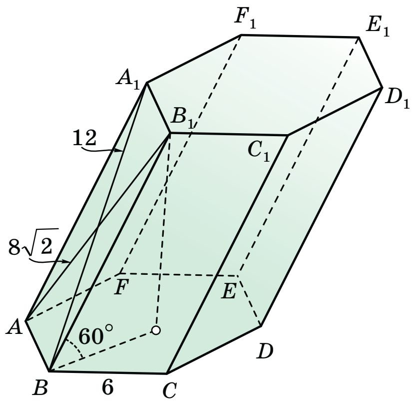


Рис. 134

363. Каждое ребро треугольной призмы равно 2. Одно из боковых ребер образует со смежными сторонами основания углы в 60°. Найдите объем и площадь полной поверхности призмы.

364. Высота правильной треугольной призмы равна 2 см, а расстояние от вершины одного основания до ортоцентра другого — 4 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.

365. В правильной треугольной призме $BCDB_1C_1D_1$ ребро основания составляет 0,6 бокового ребра. На боковых ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 взяты точки L, M и N соответственно, причем $BL : LB_1 = 3 : 2$, $CM : MC_1 = 2 : 3$, $DN : ND_1 = 1 : 4$ (рис. 133). Найдите величину двугранного угла между плоскостями LMN и BCD.

366. В правильной треугольной призме $LMNL_1M_1N_1$ боковое ребро составляет 4,5 ребра основания. На боковых ребрах LL_1, MM_1 и NN_1 взяты точки B, C и D соответственно, причем $LB : BL_1 = 2 : 7$, $MC : CM_1 = 6 : 3$, $ND : DN_1 = 4 : 5$. Найдите величину двугранного угла между плоскостями BCD и LMN.

367. В основании параллелепипеда лежит ромб с углом 60°, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°, диагональное сечение, содержащее большую диагональ, перпендикулярно плоскости основания. Найдите отношение площадей диагональных сечений параллелепипеда.

368. В основании призмы лежит правильный шестиугольник со стороной 6. Диагонали боковой грани равны 12 и $8\sqrt{2}$ (рис. 134). Найдите объем призмы, учитывая, что боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°.

369. Боковая поверхность треугольной призмы равна 100 см^2, а попарные расстояния между боковыми ребрами — 4 см, 5 см и 7 см. Найдите объем призмы.

370. Боковая поверхность треугольной призмы равна S, а попарные расстояния между боковыми ребрами — a, b, c. Найдите объем призмы.

371. Одна из вершин параллелепипеда является общей вершиной острых углов равных ромбов-граней. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что диагонали граней равны 6 см и 8 см.

372. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, равной 40 см, и острым углом 15° (рис. 135). Найдите объем призмы, учитывая, что углы CC_1A и CC_1B вместе составляют прямой угол.

373. Боковое ребро параллелепипеда длиной 10 см наклонено к плоскости основания под углом 45°. Стороны основания имеют длину 13 см и 21 см, а его диагональ равна 20 см. Найдите объем параллелепипеда.

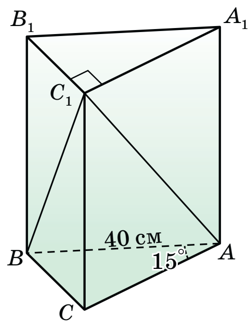


Рис. 135

374. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с острым углом α. Боковая сторона трапеции и ее меньшее основание равны. Найдите объем призмы, учитывая, что диагональ призмы равна a и образует с плоскостью основания угол β.

375. Найдите объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом α, учитывая, что боковое ребро призмы равно l и образует с диагональю большей боковой грани угол β.

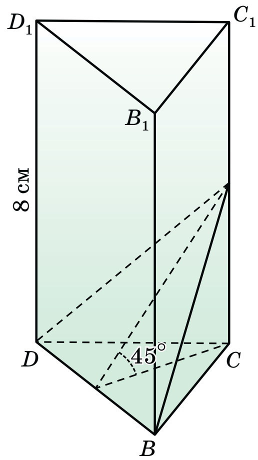


Рис. 136

376. Сечение, проведенное в правильной четырехугольной пирамиде через диагональ основания перпендикулярно боковому ребру, является треугольником со сторонами a и b. Найдите боковое ребро пирамиды.

377. В правильной треугольной призме через середину бокового ребра длиной 8 см и противоположное ребро основания проведена плоскость под углом 45° к плоскости основания (рис. 136). Найдите площадь сечения и площадь основания.

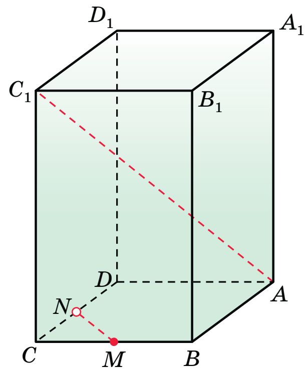


Рис. 137

378. Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b, c. Найдите полную поверхность и объем параллелепипеда.

379. В правильной треугольной призме боковое ребро равно $2\sqrt{3}$, а ребро основания — 8. Сечение призмы проведено через вершину под углом 45° к плоскости основания параллельно стороне. Найдите площади поверхностей образованных тел-частей.

380. В основании призмы лежит ромб с диагоналями a и b, боковое ребро призмы равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°, одно из диагональных сечений перпендикулярно плоскости основания. Найдите возможные значения площади боковой поверхности.

381. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины ребер BC и CD (рис. 137). Найдите угол между прямыми AC_1 и MN.

382. В правильной четырехугольной призме через середину бокового ребра длиной 8 см и противоположную диагональ основания проведена плоскость под углом 30° к плоскости основания. Найдите площадь сечения и площадь полной поверхности призмы.

383. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N отмечены на отрезках AA_1 и CC_1 так, что $AM : MA_1 = C_1N : NC$. Найдите угол между прямыми B_1D и MN.

384. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 4, а ребро основания — $\sqrt{3}$. Найдите:

а) величину двугранного угла между плоскостями ABB_1 и BB_1C_1;
б) величину двугранного угла между плоскостями A_1BC и ABC;
в) величину угла между прямыми AA_1 и B_1C;
г) величину угла между прямой AC_1 и плоскостью A_1BC;
д) площадь треугольника A_1BC;
е) площадь полной поверхности призмы;
ж) объем призмы.

385. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, равной 4 см, и углом A в 30°, ее боковое ребро AA_1 равно 1 см. Найдите:

а) величину двугранного угла между плоскостями ABB_1 и CBB_1;
б) величину двугранного угла между плоскостями ACC_1 и ABC;

в) величину двугранного угла между плоскостями A_1BC и ABC;
г) величину угла между прямыми AA_1 и B_1C;
д) величину угла между прямыми BB_1 и A_1C;
е) величину угла между прямыми CC_1 и AB_1;
ж) величину угла между прямой AC_1 и плоскостью A_1BB_1;
з) величину угла между прямой AB_1 и плоскостью A_1CC_1;
и) величину угла между прямой BC_1 и плоскостью A_1BB_1;
к) величину угла между прямой AC_1 и плоскостью A_1BC;
л) величину угла между прямой AC_1 и плоскостью BB_1C;
м) площадь треугольника A_1BC;
н) площадь полной поверхности призмы;
о) объем призмы.

386. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 4 см и 4 см. Найдите:
а) длину диагонали параллелепипеда;
б) углы между диагональю параллелепипеда и его гранями;
в) площади диагональных сечений;
г) величины двугранных углов между плоскостью грани и плоскостями, проходящими через диагональ и ребро этой грани;
д) величины углов между диагоналями граней параллелепипеда;
е) величины углов между диагональю параллелепипеда и диагоналями его граней;
ж) площадь полной поверхности параллелепипеда;
з) объем параллелепипеда.

387. В правильной шестиугольной призме большая диагональ равна $6\sqrt{3}$ и образует с боковым ребром угол $30°$. Найдите:
а) площадь боковой поверхности призмы;
б) площадь полной поверхности призмы;
в) площадь диагональных сечений призмы;
г) величины углов между диагоналями граней призмы;
д) величины углов между диагоналями призмы и диагоналями граней призмы;
е) величину двугранного угла между плоскостью основания и плоскостью сечения, проходящего через параллельные ребра оснований;
ж) объем призмы.

388. В основании параллелепипеда лежит ромб со стороной a и острым углом $60°$. Боковое ребро длиной b проходит через вершину этого угла и образует с его сторонами углы в $45°$. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.

389. В основании параллелепипеда лежит ромб со стороной a и острым углом $30°$. Плоскость основания образует с боковым ребром угол $60°$, а с диагональю боковой грани — $90°$. Найдите площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.

390. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с острым углом $60°$ и меньшей диагональю $6\sqrt{3}$. Учитывая, что диагональ параллелепипеда пересекает эту меньшую диагональ основания под углом $30°$, найдите:

а) длину диагоналей параллелепипеда;
б) углы между диагоналями параллелепипеда и его гранями;
в) площади диагональных сечений;
г) величины двугранных углов между плоскостью грани и плоскостями, проходящими через диагональ и ребра этой грани;
д) величины углов между диагоналями граней параллелепипеда;
е) величины углов между диагоналями параллелепипеда и диагоналями его граней;
ж) площадь полной поверхности параллелепипеда;
з) объем параллелепипеда.

391. Докажите, что для любого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выполняется равенство $AC_1^2 = AC^2 + AB_1^2 + AD_1^2 - AB^2 - AD^2 - AA_1^2$.

392. Докажите, что сумма квадратов площадей диагональных сечений любого параллелепипеда равна сумме квадратов площадей всех его боковых граней.

393. Докажите, что сумма квадратов всех диагоналей любого параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

394. Найдите сумму квадратов расстояний между вершинами параллелепипеда с измерениями a, b, c.

395. На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ как на ребрах построен параллелепипед, объем которого равен $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Докажите, что $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{N} \cdot \vec{c}|$, где вектор $\vec{N}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а его длина равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

396. На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ как на ребрах построен параллелепипед, объем которого равен $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Докажите, что:

а) $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2)$;
б) $V(\vec{a}, \vec{b}, k\vec{c}) = |k| \cdot V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;
в) $V(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}) = 2V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Цилиндр

397. Можно ли утверждать, что прямая является образующей цилиндра, если она имеет с его поверхностью:

а) одну общую точку;
б) две общие точки;
в) три общие точки?

398. Определите условия, при которых через данную точку пространства можно провести плоскость, касательную к цилиндру.

399. Определите условия, при которых через данную прямую можно провести плоскость, касательную к цилиндру.

400. На плоскости α выбрана прямая l. Определите, где расположены оси цилиндров, которых плоскость α касается по прямой l.

401. Определите геометрическое место точек пространства, которые расположены на расстоянии d от данной прямой l.

402. Цилиндрические поверхности касаются граней данного двугранного угла. Определите, где размещаются оси таких цилиндров.

403. Укажите, как должны быть расположены в пространстве две прямые, чтобы через них можно было провести цилиндрическую поверхность. Установите, где размещаются оси таких цилиндров.

404. Оси двух цилиндрических поверхностей параллельны. Определите, сколько общих касательных плоскостей можно провести к данным цилиндрам. Определите, можно ли провести касательную плоскость к цилиндрическим поверхностям, оси которых не параллельны.

405. Радиус основания цилиндра равен 13 см, образующая — 10 см. Найдите:

а) площадь полной поверхности цилиндра;
б) объем цилиндра;
в) площадь сечения, проходящего параллельно оси цилиндра на расстоянии 5 см от оси;
г) площадь боковой поверхности вписанной в цилиндр правильной шестиугольной призмы и ее объем;
д) площадь боковой поверхности вписанной в цилиндр правильной четырехугольной призмы и ее объем.

406. Радиус основания цилиндра равен 13 см, образующая — 24 см. В сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, получился квадрат. Найдите расстояние между плоскостью сечения и осью цилиндра.

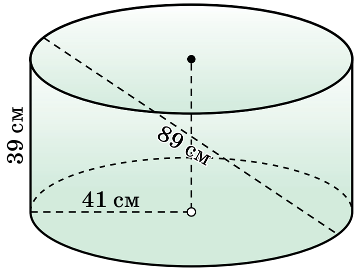


Рис. 138

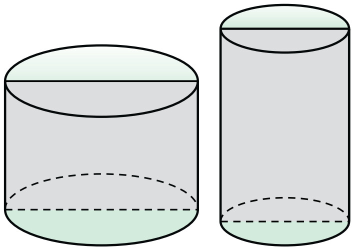


Рис. 139

407. Радиус основания цилиндра равен 41 см, образующая — 39 см. Концы отрезка длиной 89 см лежат на окружностях обоих оснований цилиндра (рис. 138). Найдите расстояние между этим отрезком и осью цилиндра.

408. Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади его осевого сечения.

409. Высоты двух цилиндров относятся как 2 : 3, а их осевые сечения — равные прямоугольники (рис. 139). Найдите отношение объемов этих цилиндров.

410. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник с диагональю d. Угол между диагональю и стороной этого прямоугольника равен α. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра. Сколько решений имеет задача?

411. Высота цилиндра относится к радиусу основания как $m : n$. Найдите отношение периметра осевого сечения цилиндра к диагонали развертки его боковой поверхности.

412. Тело образовано вращением прямоугольника со сторонами a и b вокруг одной из сторон. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра. Сколько решений имеет задача?

413. Разверткой боковой поверхности цилиндра является квадрат со стороной a. Найдите объем цилиндра.

414. Докажите, что отношение боковых поверхностей цилиндров с равными объемами равно отношению их радиусов.

415. Найдите отношение боковых поверхностей и отношение объемов цилиндров, полученных при вращении прямоугольника со сторонами a и b вокруг одной и вокруг другой стороны.

416. При вращении прямоугольника вокруг одной и вокруг другой стороны получены цилиндры объемами V_1 и V_2. Найдите диагональ этого прямоугольника.

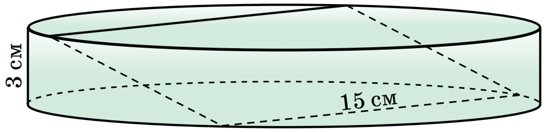


Рис. 140

417. В цилиндре площадь основания равна S, а площадь осевого сечения — Q. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра.

418. Площадь боковой поверхности цилиндра равна S, а диагональ его осевого сечения — l. Найдите объем этого цилиндра.

419. Найдите зависимость между образующей цилиндра и его радиусом, учитывая, что боковая поверхность цилиндра равновелика с кругом, описанным около осевого сечения.

420. У цилиндров с радиусами оснований R и r одинаковые площади боковых поверхностей. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

421. Высота цилиндра равна 7 дм, диаметр основания — 17 дм. Найдите сторону квадрата, вершины которого размещены на обеих окружностях оснований.

422. Вершины квадрата расположены на обеих окружностях оснований цилиндра с высотой 3 см (рис. 140). Найдите диаметр основания цилиндра, учитывая, что сторона квадрата равна 15 см.

423. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник площадью 20 см^2, в котором измерения отличаются на 1 см. Найдите возможные значения площади полной поверхности такого цилиндра.

424. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отделяет от окружности основания дугу в $120°$ (рис. 141). Найдите площадь сечения, учитывая, что образующая цилиндра равна 15 см, а радиус основания — 6 см.

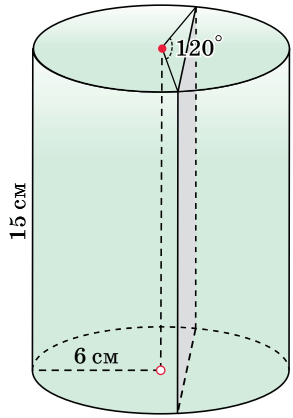


Рис. 141

425. Плоскость, параллельная оси цилиндра, разделяет боковую поверхность в отношении 3 : 1. Найдите площадь сечения и площадь полной поверхности каждой из полученных частей, учитывая, что образующая цилиндра равна 10 см, а радиус основания — 5 см.

426. В цилиндре с радиусом основания R и образующей l плоскость, параллельная основанию цилиндра, разделяет боковую поверхность на

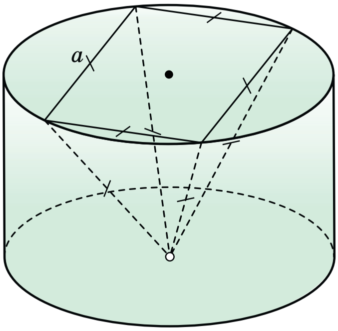


Рис. 142

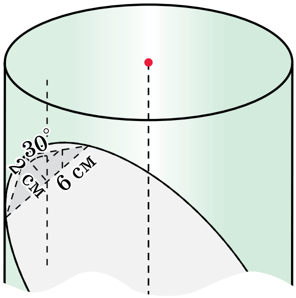


Рис. 143

части так, что среднее геометрическое их площадей равно площади сечения. Найдите, в каком отношении эта плоскость разделяет ось цилиндра.

427. В одно основание цилиндра вписан квадрат со стороной a, вершины которого отстоят от центра другого основания также на a (рис. 142). Найдите боковую поверхность цилиндра.

428. Материал, из которого изготовлена цилиндрическая труба длиной l и внешним диаметром D, занимает объем V. Найдите внутренний диаметр трубы.

429. При увеличении образующей цилиндра на l м его объем увеличивается на V м^3. Найдите площадь основания цилиндра.

430. Все вершины равнобедренного треугольника с основанием 6 см и высотой 2 см расположены на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна основанию треугольника и образует угол 30° с его плоскостью (рис. 143). Найдите радиус цилиндрической поверхности.

431. Все вершины квадрата со стороной a находятся на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна стороне квадрата и образует угол α с его плоскостью. Найдите радиус цилиндрической поверхности.

432. Шесть вершин куба с ребром a расположены на цилиндре, ось которого — диагональ куба (рис. 144). Найдите:

а) радиус цилиндра;
б) полную поверхность цилиндра;
в) объем цилиндра.

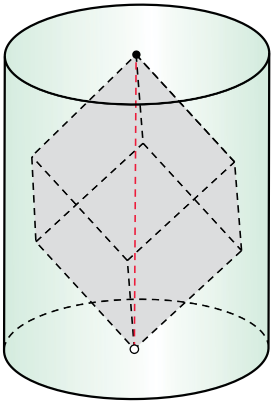


Рис. 144

433. Цилиндр пересечен плоскостью, которая разделяет его ось на отрезки длинами 12 см и 18 см (рис. 145). Найдите:

а) в каком отношении эта плоскость разделяет площадь боковой поверхности;
б) объем каждой части, учитывая, что радиус основания цилиндра равен 10 см.

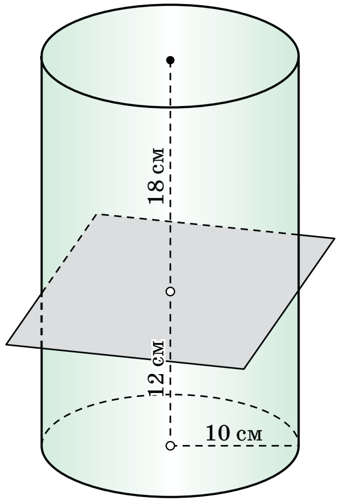


Рис. 145

434. Площадь полной поверхности цилиндра равна 440π см^2. Найдите его высоту, учитывая, что радиус основания равен 11 см.

435. Площадь полной поверхности цилиндра равна 280π см^2. Найдите радиус его основания, учитывая, что высота равна 13 см.

436. Площадь основания цилиндра равна 144π см^2. Найдите площадь его полной поверхности и объем, учитывая, что высота равна 15 см.

437. Диагональ осевого сечения цилиндра длиной 12 см наклонена к плоскости основания под углом 30° (рис. 146). Найдите:

а) площадь боковой поверхности цилиндра;
б) объем цилиндра;
в) площадь боковой поверхности вписанной в цилиндр правильной шестиугольной призмы и ее объем;
г) площадь боковой поверхности вписанной в цилиндр правильной четырехугольной призмы и ее объем.

438. В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма с ребром основания $4\sqrt{3}$. Диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60° (рис. 147). Найдите:

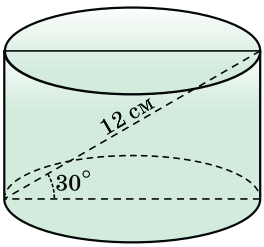


Рис. 146

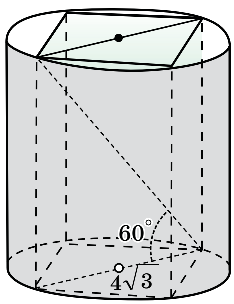


Рис. 147

а) площадь боковой поверхности цилиндра;
б) объем цилиндра.

439. Образующая цилиндра в три раза больше радиуса основания. В цилиндр вписана правильная треугольная призма. Найдите угол между диагональю ее грани и осью цилиндра.

440. В цилиндр с образующей l вписана правильная шестиугольная призма объемом V. Найдите боковую поверхность цилиндра.

441. В правильную шестиугольную призму с боковой поверхностью 32 дм^2 вписан цилиндр (рис. 148). Найдите его объем, учитывая, что диагональ осевого сечения цилиндра образует угол 60° с плоскостью основания.

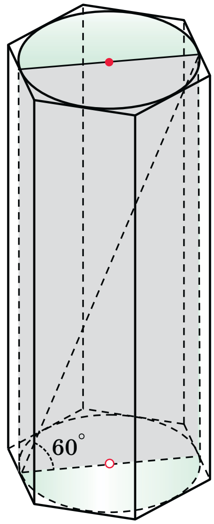


Рис. 148

442. Найдите отношение боковых поверхностей и отношение объемов цилиндров, из которых один описан, а другой вписан в правильную треугольную призму.

443. В правильную шестиугольную призму, все ребра которой равны a, вписан цилиндр. Найдите его объем.

444. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник с площадью 108 см^2, в котором основание составляет 0,75 высоты. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

445. В цилиндре объемом V окружность основания имеет длину C. Около цилиндра описана призма, площадь полной поверхности которой равна S. Найдите объем этой призмы.

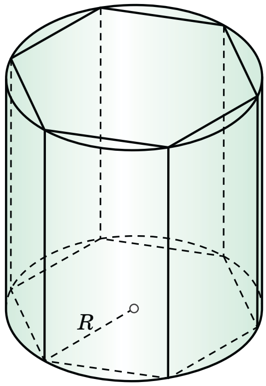


Рис. 149

446. В цилиндр с радиусом основания R вписана правильная шестиугольная призма (рис. 149). Найдите отношения боковых поверхностей и объемов этих тел.

447. Докажите, что две касательные плоскости цилиндра или параллельны, или пересекаются по прямой, параллельной оси цилиндра.

448. Сторона квадрата длиной a принадлежит касательной прямой цилиндра. Плоскость квадрата образует с осью цилиндра угол α,

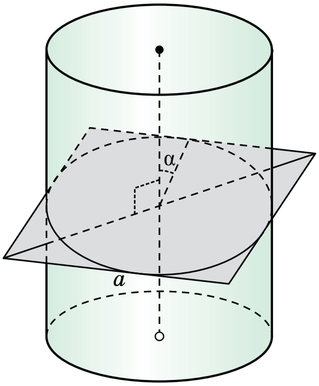


Рис. 150

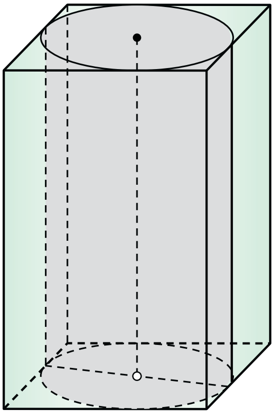


Рис. 151

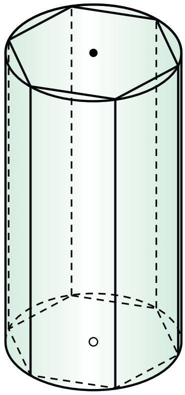


Рис. 152

а одна из диагоналей перпендикулярна этой оси (рис. 150). Найдите радиус цилиндрической поверхности.

449. Равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 16 см касается боковой поверхности цилиндра. Плоскость треугольника образует с осью цилиндра угол $30°$, а основание треугольника перпендикулярно образующей. Найдите радиус цилиндрической поверхности.

450. Ребро куба равно a. Найдите радиус цилиндрической поверхности, осью которой является диагональ куба и которая касается:

а) ребра куба; б) диагонали грани куба.

451. В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр (рис. 151). Найдите его объем, учитывая, что объем призмы равен 2880 см^3.

452. Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр (рис. 152). Найдите его объем, учитывая, что объем призмы равен $1440\sqrt{3}$ см^3.

453. Один цилиндр описан около правильной треугольной призмы, а другой вписан в нее (рис. 153). Найдите отношения объемов и полных поверхностей цилиндров, учитывая, что диагональ боковой грани образует с боковым ребром угол $30°$.

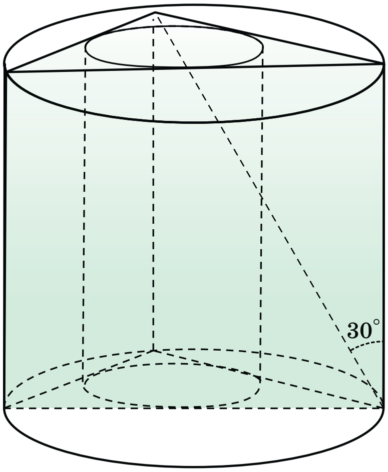


Рис. 153

3. Пирамида

454. Найдите сумму всех плоских углов:

а) четырехугольной пирамиды; б) n-угольной пирамиды.

455. Докажите, что плоскость, параллельная двум противоположным ребрам треугольной пирамиды, пересекает ее по параллелограмму.

456. Докажите, что в правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $60°$ тогда и только тогда, когда противоположные боковые ребра перпендикулярны.

457. Основанием пирамиды является квадрат. Двугранные углы при ребрах основания пропорциональны числам 1, 2, 4, 2. Найдите величины этих углов.

458. Докажите, что все плоскости, проведенные через боковые ребра пирамиды перпендикулярно плоскости основания, пересекаются по одной прямой — высоте пирамиды.

459. Докажите, что все плоскости, проведенные через вершину пирамиды перпендикулярно ребрам ее основания, пересекаются по одной прямой — высоте пирамиды.

460. Докажите, что три плоскости, проходящие в треугольной пирамиде через медианы граней и противоположные им ребра, пересекаются по одной прямой (рис. 154).

461. Докажите, что прямые, каждая из которых проходит через вершину треугольной пирамиды и точку пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке и разделяются ею в отношении 3 : 1, считая от вершины (рис. 155).

462. Докажите, что отрезки, которые соединяют середины противоположных ребер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке и разделяются ею пополам (рис. 156).

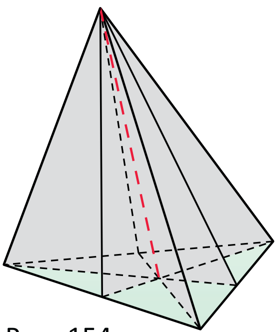


Рис. 154

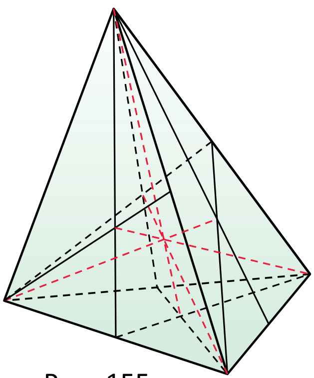


Рис. 155

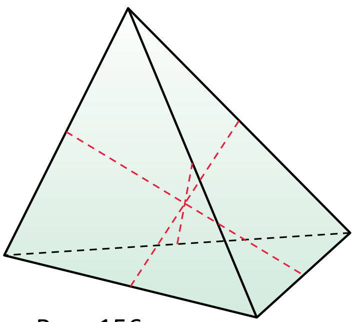


Рис. 156

463. Докажите, что боковая поверхность пирамиды больше площади ее основания.

464. Докажите, что если в треугольной пирамиде имеется две пары равных противоположных ребер, то в ней имеется и две пары равных граней.

465. Докажите, что если в треугольной пирамиде вершина проецируется в ортоцентр основания, то суммы квадратов противоположных ребер равны.

466. Докажите, что площадь среднего сечения усеченной пирамиды (плоскостью, параллельной основаниям и разделяющей пополам боковое ребро) равна среднему арифметическому между средним геометрическим и средним арифметическим площадей оснований.

467. Докажите, что если высоты боковых граней пирамиды равны, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

468. Докажите, что если боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, касающейся всех прямых, содержащих стороны основания пирамиды.

469. Три последовательных угла в основании четырехугольной пирамиды относятся как 2 : 3 : 4. Найдите плоские углы основания, учитывая, что боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы.

470. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, а боковые ребра пирамиды равны (рис. 157). Найдите двугранный угол при большей стороне основания.

471. В основании пирамиды лежит трапеция с тремя сторонами по 14 см и углом 60° (рис. 158). Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что каждое ее боковое ребро равно 25 см.

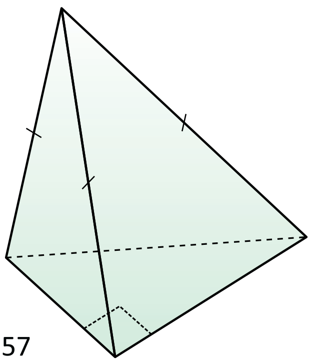


Рис. 157

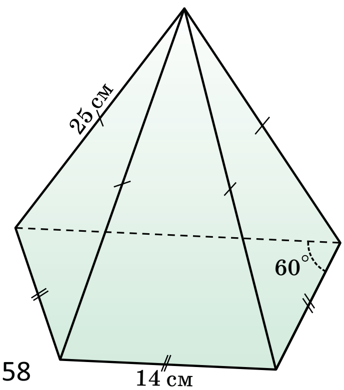


Рис. 158

472. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершине A прямые, ребра AB и BC равны 1 и $\sqrt{37}$ соответственно. Найдите длину ребра AD, учитывая, что углы, образуемые ребрами BD и CD с плоскостью ABC, отличаются на $45°$.

473. Наклонная AB образует с плоскостью α угол $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4}$, плоскость π проходит через AB, пересекает плоскость α по прямой AC. Найдите величину угла между прямыми AB и AC, учитывая, что угол между плоскостями α и π равен $30°$.

474. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, перпендикулярной медиане основания и разделяющей ее в отношении 1 : 3, учитывая, что параллельное ему сечение, проходящее через вершину пирамиды, имеет площадь S (рис. 159).

475. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол $60°$. Плоскость проходит через сторону основания под углом $30°$ к ней. Найдите площадь сечения, учитывая, что сторона основания равна 12 см.

476. В треугольной пирамиде две перпендикулярные грани — правильные треугольники со стороной a (рис. 160). Найдите полную поверхность пирамиды.

477. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, учитывая, что ее боковое ребро равно 30 см, а боковая поверхность — 810 см^2.

478. Диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см, ее высота — 15 см. Найдите объем этой пирамиды.

479. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 36 см, а ее боковое ребро — 83 см. Найдите объем этой пирамиды.

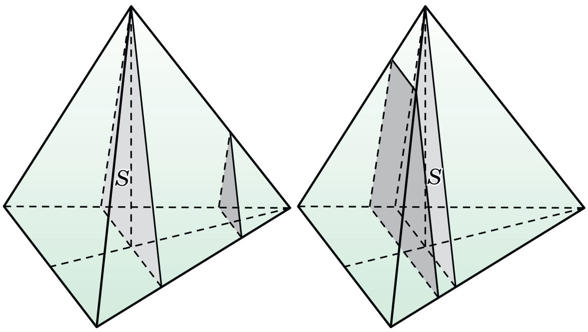


Рис. 159

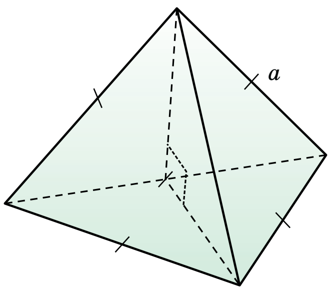


Рис. 160

480. Найдите объем треугольной пирамиды, боковые ребра которой попарно перпендикулярны и равны 10 см, 12 см и 15 см.

481. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой 26 см и катетом 10 см, боковое ребро против меньшей стороны основания перпендикулярно плоскости основания и равно 45 см (рис. 161). Найдите полную поверхность и объем пирамиды.

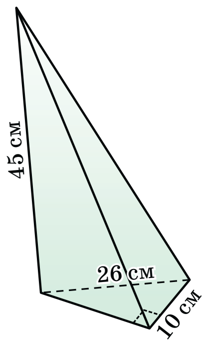


Рис. 161

482. В основании пирамиды лежит ромб со стороной 15 см и диагональю 24 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°.

483. В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 14 см и 48 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что все боковые ребра равны по 65 см.

484. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 17 см и основанием 26 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что:

а) все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° (рис. 162);

б) все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° (рис. 163).

485. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Боковое ребро против средней по величине стороны основания перпендикулярно плоскости основания и равно 16 см. Найдите полную поверхность и объем пирамиды.

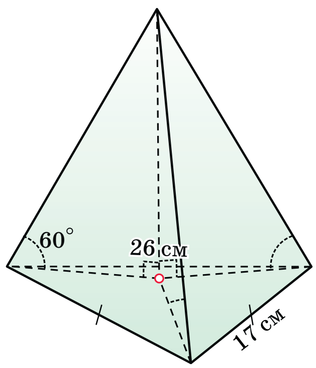


Рис. 162

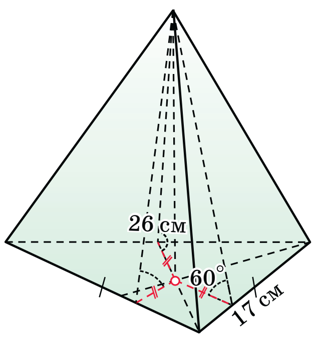


Рис. 163

486. В основании пирамиды лежит прямоугольник с диагональю d, две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 45°. Найдите полную поверхность этой пирамиды.

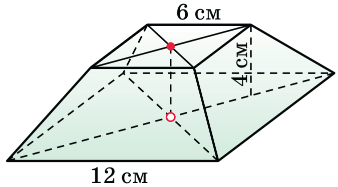


Рис. 164

487. Найдите объем и полную поверхность правильной четырехугольной усеченной пирамиды, высота которой равна 4 см, а ребра оснований — 6 см и 12 см (рис. 164).

488. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной $2a$. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с этой плоскостью углы α. Найдите полную поверхность пирамиды.

489. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 35 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что все двугранные углы при основании пирамиды равны по 45°.

490. В треугольной усеченной пирамиде через ребро меньшего основания проведено сечение, параллельное противоположному боковому ребру. Найдите отношение объемов полученных частей, учитывая, что ребра оснований относятся как:

а) 1 : 2 (рис. 165);
б) 2 : 3.

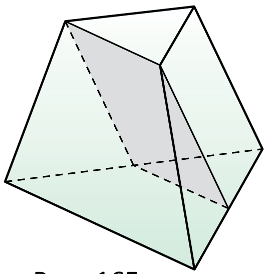


Рис. 165

491. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 1 см. Найдите боковую и полную поверхности пирамиды.

492. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой один из двугранных углов прямой, равна S. Плоскость, параллельная основанию, разделяет апофему пополам. Найдите боковую поверхность полученной усеченной пирамиды.

493. Апофема правильной четырехугольной усеченной пирамиды, полная поверхность которой равна 186 см^2, имеет длину 4 см (рис. 166). Найдите объем

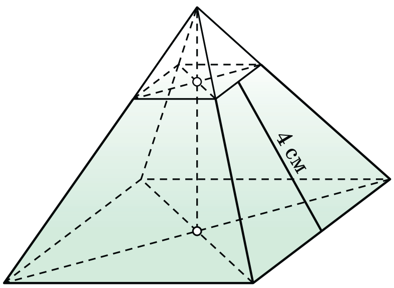


Рис. 166

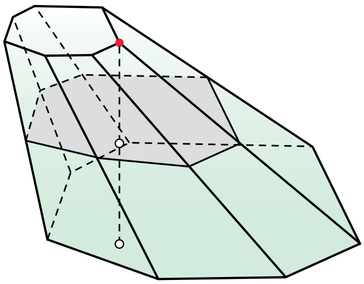


Рис. 167

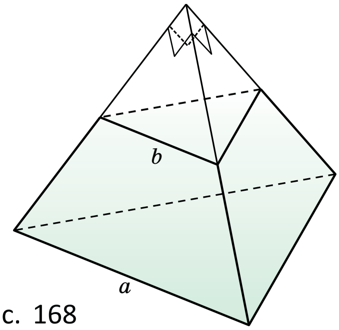


Рис. 168

этой пирамиды, учитывая, что ее высота составляет $\frac{2}{3}$ высоты соответствующей полной пирамиды.

494. В основаниях усеченной пирамиды лежат прямоугольники. Периметр одного из них равен 100 см, а стороны другого — 160 см и 90 см. Прямая, проходящая через точки пересечения диагоналей прямоугольников, перпендикулярна их плоскостям, расстояние между которыми — 36 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

495. Стороны оснований усеченной пирамиды относятся как 7 : 19 (рис. 167). Определите, в каком отношении боковую поверхность пирамиды разделяет плоскость, которая проходит через середину высоты и параллельна основаниям.

496. Высота основания правильной треугольной пирамиды составляет 90 % бокового ребра, а площадь сечения, проведенного через это боковое ребро и высоту основания, равна Q. Найдите объем пирамиды.

497. Числа S_1, S_2 и Q задают соответственно площади оснований и боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды. Найдите площадь диагонального сечения.

498. В правильной треугольной усеченной пирамиде боковые ребра попарно перпендикулярны, стороны оснований равны a и b (рис. 168). Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

499. В правильной четырехугольной пирамиде с боковым ребром a перпендикулярно ему проведено сечение через вершину основания. Найдите площадь сечения, учитывая, что боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

500. В правильной шестиугольной пирамиде с двугранным углом при основании, равным α, и боковым ребром a перпендикулярно ему проведено сечение через сторону основания. Найдите площадь сечения.

501. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через середины двух смежных ребер основания и середину высоты. Учитывая, что высота пирамиды равна h и вдвое меньше диагонали основания, найдите:

а) площадь сечения;

б) угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

502. Через точку пересечения диагоналей правильной четырехугольной усеченной пирамиды проведено сечение, параллельное основаниям пирамиды (рис. 169). Найдите объемы полученных частей, учитывая, что высота пирамиды равна 18 см, а ребра оснований — 6 см и 12 см.

503. Чугунный постамент в форме правильной усеченной четырехугольной пирамиды имеет высоту 15 дм, а стороны основания — 30 дм и 20 дм. Найдите массу постамента, учитывая, что плотность чугуна равна 7,2 г/см^3.

504. В правильной усеченной пирамиде периметр боковой грани равен 176 см, апофема — 24 см (рис. 170). Найдите стороны оснований, учитывая, что высота усеченной пирамиды составляет $\frac{1}{5}$ высоты соответствующей полной пирамиды.

505. В усеченной пирамиде через середину бокового ребра проведена плоскость, параллельная основаниям. Докажите, что площадь сечения равна $\left(\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}\right)^2$, где S_1 и S_2 — площади оснований.

506. Боковое ребро правильной треугольной усеченной пирамиды равно 4 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем

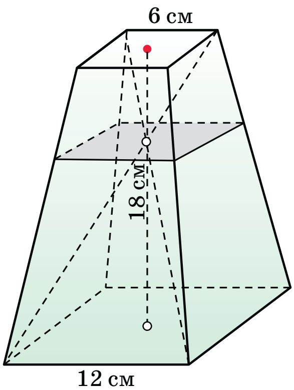


Рис. 169

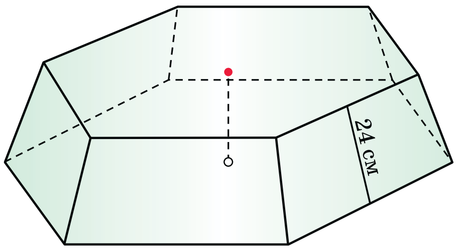


Рис. 170

пирамиды, учитывая, что радиус окружности, описанной около меньшего основания, равен 1 см.

507. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 14 см, а сторона основания — 2 см. Найдите объем этой пирамиды.

508. В треугольной пирамиде противоположные пары ребер имеют длины a и a_1, b и b_1, c и c_1. Найдите длины трех отрезков, соединяющих их середины.

509*. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной a и большей диагональю d. Вершина пирамиды проецируется в середину стороны ромба и находится на расстоянии $0{,}5a$ от большей диагонали (рис. 171). Найдите высоту пирамиды.

510. В основании четырехугольной пирамиды лежит параллелограмм площадью 360 см^2 со сторонами 20 см и 36 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 12 см. Найдите боковую поверхность пирамиды.

511. В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник со стороной a. Вершина пирамиды проецируется в середину стороны шестиугольника и находится на расстоянии $0{,}25a$ от плоскости основания. Найдите боковую и полную поверхности пирамиды.

512. Найдите объем усеченной пирамиды, у которой площади оснований равны 48 см^2 и 147 см^2, а высота соответствующей полной пирамиды равна 35 см (рис. 172).

513. В треугольной усеченной пирамиде ребра большего основания равны 18 см, 30 см и 42 см, все двугранные углы при них равны по 45°. Найдите объем этой пирамиды, учитывая, что ее высота составляет $\frac{3}{4}$ высоты соответствующей полной пирамиды.

514. Площади оснований усеченной пирамиды равны 12 см^2 и 48 см^2. Найдите площадь

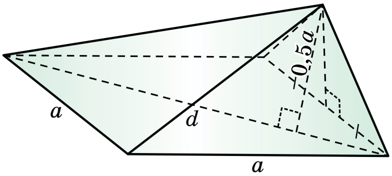


Рис. 171

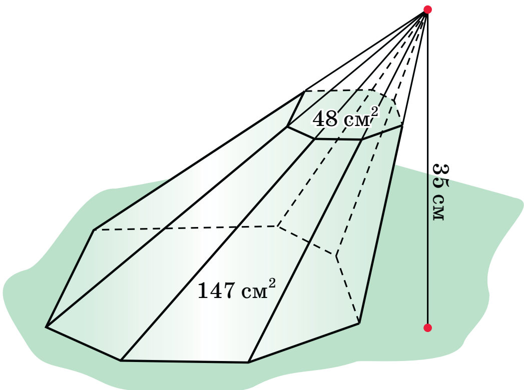


Рис. 172

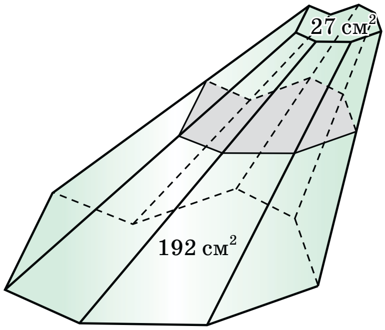


Рис. 173

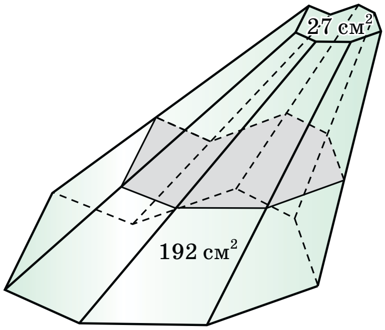


Рис. 174

сечения, проходящего через середину бокового ребра параллельно основаниям.

515. Площади оснований усеченной пирамиды равны 27 см^2 и 192 см^2. Найдите площадь сечения, проходящего параллельно основаниям и разделяющего боковое ребро в отношении 2 : 3, считая от:

а) меньшего основания (рис. 173);

б) большего основания (рис. 174).

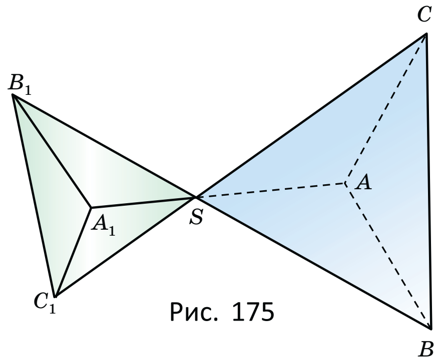


Рис. 175

516. Пирамиды $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ размещены так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через общую вершину S (рис. 175). Докажите, что их объемы относятся как произведения боковых ребер: $\frac{V}{V_1} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1}$.

517. Докажите, что если основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, то выполняется равенство $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$.

518. В треугольной пирамиде имеется две пары перпендикулярных противоположных ребер. Докажите, что каждая вершина пирамиды проецируется в точку пересечения высот противоположной грани.

519. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат со стороной a. Ребро SD перпендикулярно плоскости основания и имеет длину b. Цилиндр расположен так, что одно его основание вписано

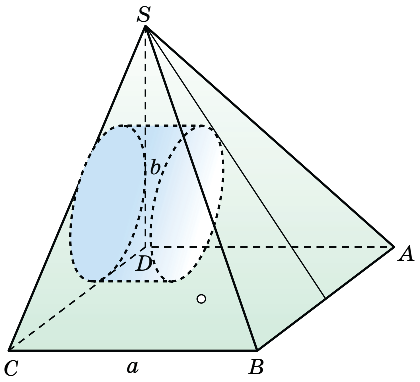


Рис. 176

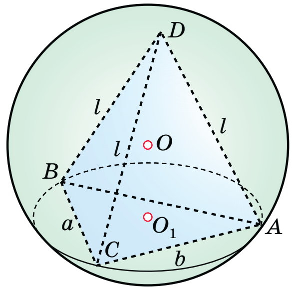


Рис. 177

в треугольник SCD, а другое касается грани SAB (рис. 176). Найдите высоту цилиндра.

520. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник со стороной a, две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья наклонена к ней под углом α. Цилиндр, высота которого равна радиусу основания, вписан в пирамиду так, что основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите объем цилиндра.

521. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ вершина основания A находится на расстоянии a от грани SBC. Апофема боковой грани образует угол α с плоскостью основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды и ее объем.

522. Основанием пирамиды $ABCD$ является прямоугольный треугольник с катетами a и b, все боковые ребра равны l (рис. 177). Найдите длину отрезка AO, учитывая, что $AO = BO = CO = DO$.

523*. Противоположные ребра треугольной пирамиды попарно равны: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $CA = BD = c$. Найдите объем пирамиды.

4. Конус

524. Выразите объем конуса как функцию его высоты H и длины C окружности основания.

525. Докажите, что угол при вершине осевого сечения конуса является острым, прямым или тупым, если высота конуса соответственно больше, равна или меньше радиуса его основания.

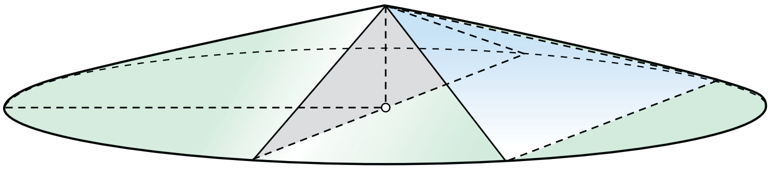


Рис. 178

526. Радиус основания конуса равен 12 см, высота — 10 см. Найдите наибольшую площадь сечения, проходящего через вершину конуса.

527. Наибольшая площадь сечения конуса, проходящего через его вершину, вдвое больше площади осевого сечения (рис. 178). Найдите угол между образующей и плоскостью основания.

528. Плоскость проходит через вершину конуса на расстоянии 12 см от центра его основания. Найдите площадь сечения, учитывая, что радиус основания конуса равен 17 см, а его высота — 20 см.

529. Прямая проходит через середину высоты конуса параллельно образующей. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного поверхностью конуса, учитывая, что образующая имеет длину l.

530. Прямая образует угол 30° с плоскостью основания конуса с образующей l, пересекает высоту конуса и плоскость его основания за $\frac{5}{8}l$ от его центра (рис. 179). Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного поверхностью конуса, учитывая, что диаметр основания равен образующей.

531. Радиус основания конуса равен 48 см, а его высота — 189 см. Найдите объем конуса, его боковую и полную поверхности.

532. Образующая конуса имеет длину 30 см и наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем конуса, его боковую и полную поверхности.

533. Найдите объем конуса, его боковую и полную поверхности, учитывая, что его высота равна 10 см и составляет с образующей угол 60°.

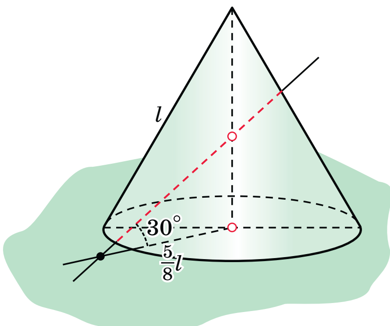


Рис. 179

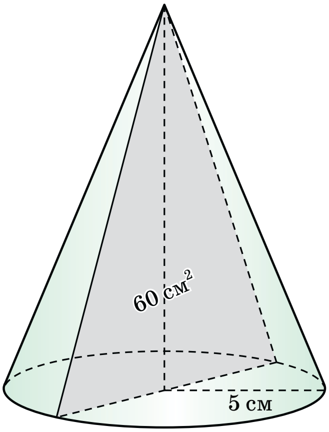


Рис. 180

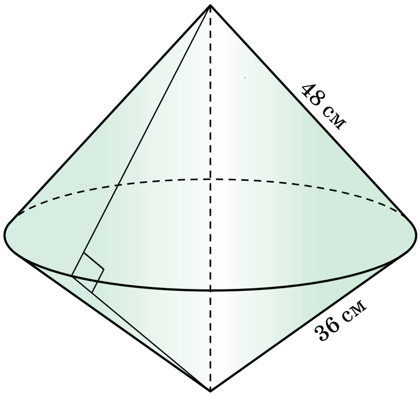


Рис. 181

534. Найдите объем конуса, его боковую и полную поверхности, учитывая, что радиус его основания равен 5 см и осевое сечение имеет площадь 60 см^2 (рис. 180).

535. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса, учитывая, что площадь его основания и боковая поверхность соответственно равны $100\sqrt{3}$ см^2 и 200 см^2.

536. Найдите объем конуса, учитывая, что площадь его основания и боковая поверхность соответственно равны 24π см^2 и 26π см^2.

537. Найдите объем конуса, его боковую и полную поверхности, учитывая, что его высота равна 40 см, а площадь осевого сечения — 360 см^2.

538. Найдите объем конуса, разверткой боковой поверхности которого является сектор с углом 240° и радиусом 15 см.

539. Найдите объем конуса, учитывая, что его осевое сечение имеет площадь S и боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

540*. Тело получено вращением вокруг гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 36 см и 48 см (рис. 181). Найдите объем тела и площадь его поверхности.

541*. Тело получено вращением вокруг основания равнобедренного треугольника с боковой стороной 10 см и углом 120°. Найдите объем этого тела и площадь его поверхности.

542. Высота усеченного конуса равна 12 см, радиусы оснований — 12 см и 7 см. Найдите боковую поверхность этого конуса.

543. Образующая усеченного конуса относится к его высоте как 37 : 35, радиусы оснований равны 5 см и 17 см. Найдите полную поверхность этого конуса.

544. Образующая конуса равна 25 см. Середина высоты конуса находится на расстоянии 6 см от нее (рис. 182). Найдите объем этого конуса и площадь его поверхности.

545. На поверхности конуса имеются три попарно перпендикулярные образующие. Найдите полную поверхность конуса, учитывая, что его высота равна h.

546. Через вершину конуса с образующей l проведено сечение с наибольшей возможной площадью, отсекающее от окружности основания дугу α. Найдите боковую поверхность конуса.

547. Найдите площадь поверхности и объем тела, получаемого при вращении треугольника со сторонами 12 см, 17 см и 25 см вокруг:

а) меньшей стороны; б) большей стороны.

548. Найдите площадь поверхности и объем тела, получаемого при вращении параллелограмма с суммой диагоналей 64 см и сторонами 17 см и 28 см вокруг большей стороны (рис. 183).

549. Можно ли описать около конуса четырехугольную пирамиду, стороны основания которой относятся как:

а) 2 : 3 : 4 : 5; б) 4 : 5 : 7 : 6?

550. Можно ли вписать в конус четырехугольную пирамиду, углы основания которой относятся как:

а) 1 : 3 : 5 : 7; б) 3 : 5 : 8 : 6?

551. Ребра основания треугольной пирамиды равны 75 см, 78 см и 9 см, высота — 3 см, все двугранные углы при основании равны. Найдите площадь поверхности и объем вписанного в пирамиду конуса.

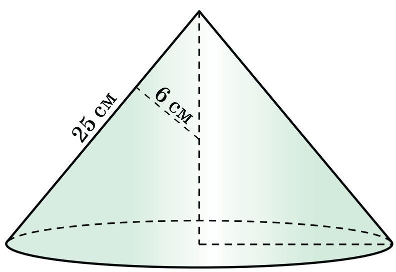


Рис. 182

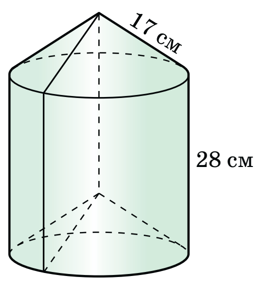


Рис. 183

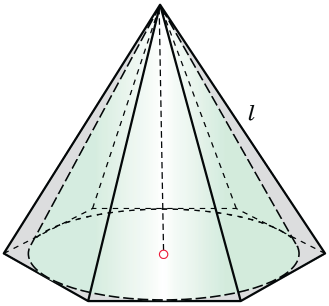


Рис. 184

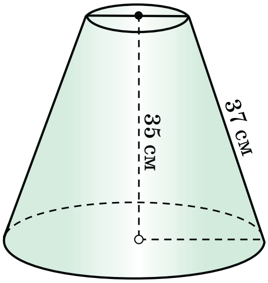


Рис. 185

552. В правильной шестиугольной пирамиде с боковым ребром l все диагональные сечения равновелики (рис. 184). Найдите площадь поверхности и объем вписанного в пирамиду конуса.

553. Ребра основания треугольной пирамиды равны 13 см, 20 см и 21 см, а все боковые ребра — 36 см. Найдите площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса.

554. Выразите объем усеченного конуса как функцию его высоты H и длин C и c окружностей оснований.

555. Радиусы оснований усеченного конуса равны 9 см и 29 см, а высота — одному из радиусов основания. Найдите боковую поверхность и объем конуса.

556. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 2 : 5, высота равна 35 см, а образующая — 37 см (рис. 185). Найдите боковую поверхность и объем конуса.

557. Радиусы оснований усеченного конуса равны 12 см и 32 см, высота относится к образующей как 12 : 13. Найдите боковую поверхность и объем этого конуса.

558. Диагональ осевого сечения усеченного конуса разделяется осью на отрезки длинами 55 см и 20 см. Найдите площадь осевого сечения этого конуса, учитывая, что образующая равна 53 см.

559. Образующая и радиус одного из оснований усеченного конуса равны a. Найдите полную поверхность конуса, учитывая, что образующая наклонена к плоскости основания под углом α (рис. 186).

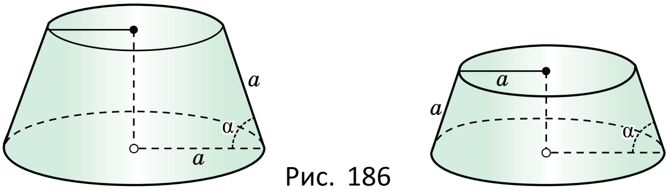


Рис. 186

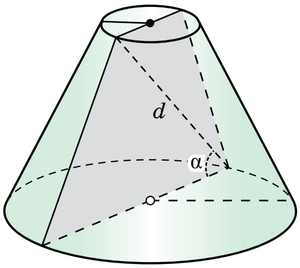


Рис. 187

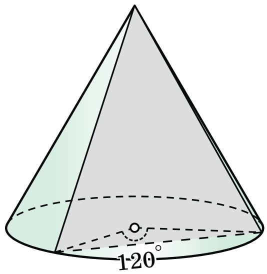


Рис. 188

560. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 4 : 5, образующая длиной l наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

561. Диагональ осевого сечения усеченного конуса длиной d наклонена к плоскости основания под углом α (рис. 187). Найдите боковую поверхность этого конуса, учитывая, что радиусы его оснований относятся как 1 : 3.

562. Площади оснований усеченного конуса равны a^2 и b^2. Плоскости, параллельные основаниям, разделяют боковое ребро на n долей. Найдите площади сечений.

563. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120° (рис. 188). Определите, в каком отношении эта плоскость разделяет объем конуса.

5. Сфера

564. Найдите геометрическое место точек:

а) отстоящих от данной точки на m;
б) отстоящих от данной точки не больше, чем на m;
в) расстояния которых от двух данных точек относятся как $m : n$;
г) являющихся центрами сфер с радиусом R, проходящих через данную точку;
д) из которых данный отрезок виден под прямым углом;
е) являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из точки A на плоскости, проходящие через точку B;
ж) являющихся центрами сфер данного радиуса R, касающихся данной плоскости;

з) являющихся центрами сфер, касающихся данной плоскости в данной точке A;
и) являющихся центрами сфер данного радиуса R, касающихся данной прямой;
к) являющихся центрами сфер, проходящих через вершины данного треугольника;
л) являющихся центрами сфер, проходящих через вершины данного прямоугольника;
м) являющихся центрами сфер, проходящих через вершины данной равнобедренной трапеции.

565. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся:

а) двух данных параллельных прямых;
б) двух данных пересекающихся прямых;
в) трех данных параллельных прямых;
г) сторон данного треугольника;
д) сторон данного ромба;
е) сторон данной трапеции.

566. Найдите геометрическое место точек:

а) расстояние которых от данной точки M равно m, а от данной плоскости равно n;
б) для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная;
в) являющихся центрами сфер с данным радиусом, проходящих через данную точку A и касающихся данной плоскости.

567. Из точки M к сфере можно провести три взаимно перпендикулярные касательные (рис. 189). Найдите расстояние от точки M до центра сферы, учитывая, что радиус сферы равен R.

568. Точка M на сфере является общим концом трех взаимно перпендикулярных хорд, длины которых равны 12 см, 15 см и 16 см. Найдите радиус сферы.

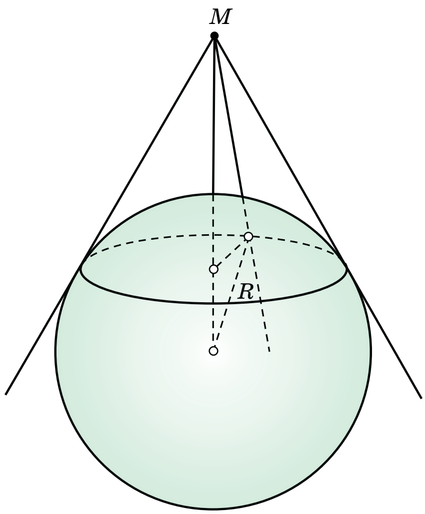


Рис. 189

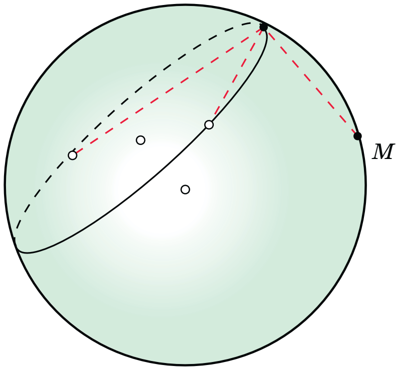


Рис. 190

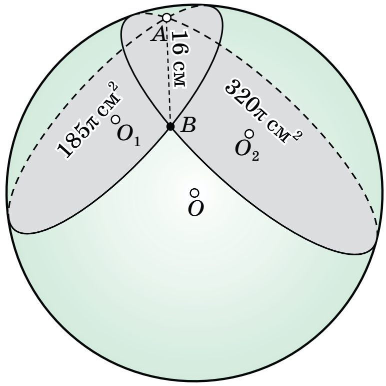


Рис. 191

569. Из одной точки сферы проведены три взаимно перпендикулярные хорды (рис. 190). Докажите, что сумма квадратов их длин есть величина постоянная и она равна учетверенному квадрату радиуса сферы.

570. Точка M на сфере с радиусом 46 см является общим концом трех взаимно перпендикулярных хорд, длины которых относятся как 12 : 15 : 16. Найдите длину каждой хорды.

571. Два круга, ограниченные сечениями сферы, взаимно перпендикулярны и имеют площади 185π см^2 и 320π см^2 (рис. 191). Найдите радиус сферы, учитывая, что общая хорда этих кругов имеет длину 16 см.

572. Два круга, ограниченные сечениями сферы, взаимно перпендикулярны. Их общая хорда равна 4 см. Найдите радиусы сечений, учитывая, что они относятся как 2 : 3, а радиус сферы равен 36 см.

573. Диаметр MN сферы равен 50 см. Найдите длину линии на поверхности сферы, учитывая, что расстояния от каждой точки этой линии до точек M и N относятся как 3 : 4 (рис. 192).

574. Расстояние между центрами двух сфер равно 21 см. Найдите длину линии пересечения этих сфер, учитывая, что их радиусы равны 41 см и 50 см.

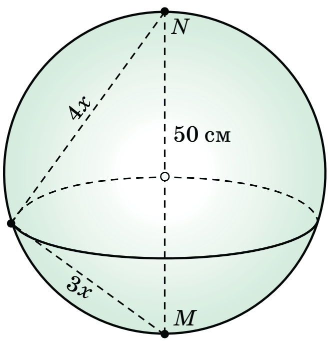


Рис. 192

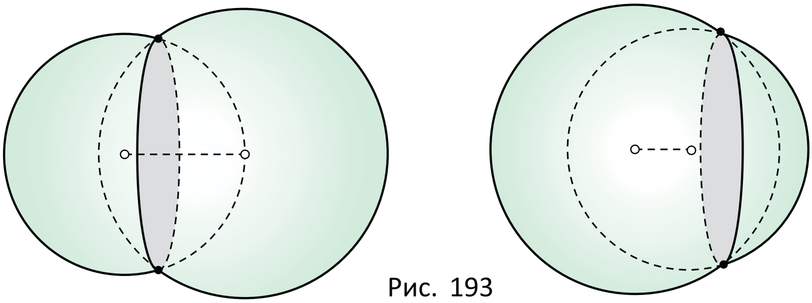


Рис. 193

575. Линия пересечения двух сфер с радиусами 25 см и 30 см имеет длину 48π см (рис. 193). Найдите расстояние между центрами сфер.

576. Сфера с радиусом 85 см проходит через вершину прямоугольного треугольника с катетами 10 см и 24 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

577. Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см (рис. 194). Найдите радиус сферы, проходящей через вершины треугольника, учитывая, что ее центр отстоит от плоскости треугольника на 9 см.

578. Сфера с радиусом 65 см проходит через вершины трапеции, у которой высота равна 8 см, а основания — 40 см и 48 см. Найдите расстояние от центра сферы да плоскости трапеции.

579. Сфера касается всех сторон ромба, стороны которого равны 15 см и 20 см. Найдите радиус сферы, учитывая, что ее центр отстоит от плоскости ромба на 8 см.

580. Сфера с радиусом 15 см касается всех сторон равнобедренной трапеции с основаниями 16 см и 36 см (рис. 195). Найдите расстояние от центра сферы до плоскости трапеции.

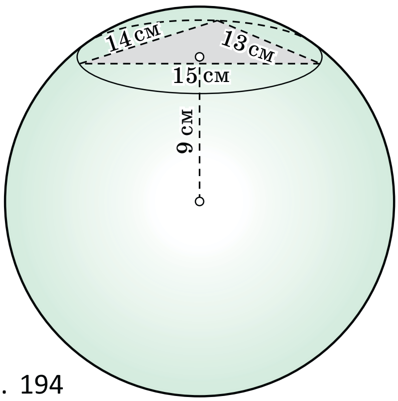


Рис. 194

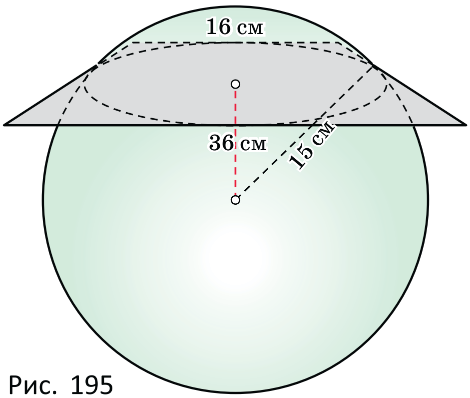


Рис. 195

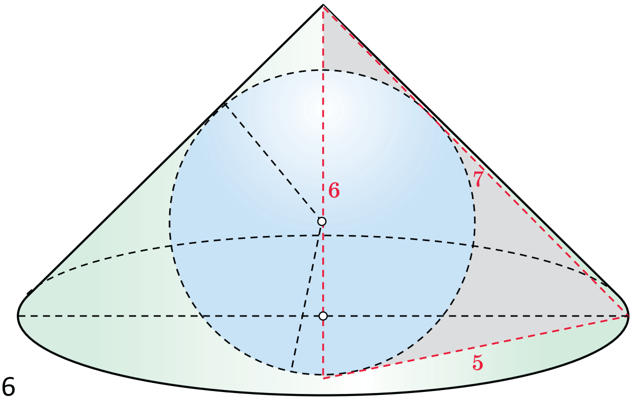


Рис. 196

581. Треугольник со сторонами 5, 6 и 7 вращается вокруг средней стороны (рис. 196). Найдите поверхность сферы, вписанной в полученное тело.

582. Плоскость пересекает сферу с радиусом 25 см. Найдите, в каком отношении эта плоскость разделяет площадь сферы, учитывая, что площадь круга, ограниченного сечением, равна 49π см^2.

583. Плоскость разделила сферу на части, площади которых равны 100 см^2 и 300 см^2. Найдите площадь сечения.

584*. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4 см, высота — 3 см. Найдите поверхность сферы, касающейся:

а) всех ребер пирамиды;
б) ребер основания и продолжений боковых ребер пирамиды;
в) плоскости основания и боковых ребер пирамиды;
г) плоскости основания и продолжений боковых ребер пирамиды.

585. В правильную треугольную призму вписана сфера с радиусом R. Найдите радиус сферы, касающейся основания призмы, двух ее боковых граней и вписанной сферы.

586*. Вокруг сферы описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b (рис. 197). Найдите полную поверхность этого параллелепипеда и радиус сферы.

587. Вокруг сферы с радиусом R описана правильная шестиугольная призма. Найдите ее полную поверхность.

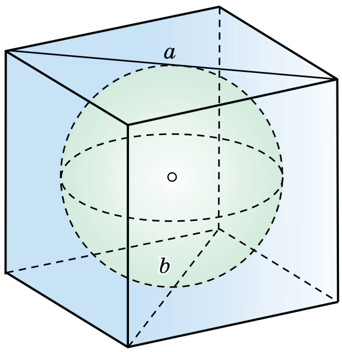


Рис. 197

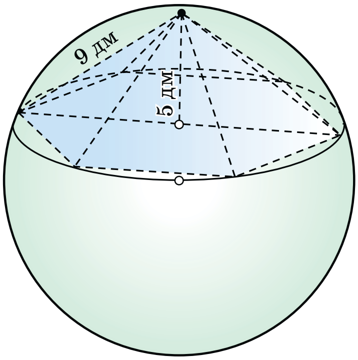


Рис. 198

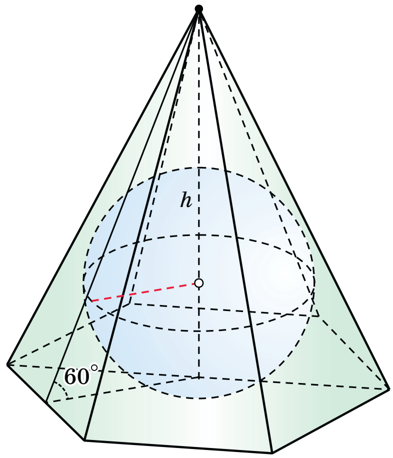


Рис. 199

588. В пирамиде все боковые ребра равны по 9 дм, а ее высота равна 5 дм (рис. 198). Найдите радиус описанной сферы.

589. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен $60°$ (рис. 199).

590. В сферу с радиусом R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр сферы, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объем пирамиды.

591. Найдите площадь сферы, описанной вокруг конуса, у которого радиус основания равен r, а высота равна h (рис. 200).

592. Вокруг сферы с радиусом r описан конус с прямым углом при вершине. Найдите полную поверхность этого конуса.

593*. Сфера касается основания $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Найдите ее радиус, учитывая, что сфера касается лучей AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 за точками B_1, C_1, D_1, A_1.

594. В конус с образующей a и радиусом основания R вписана сфера (рис. 201). Найдите радиус окружности, по которой сфера касается поверхности конуса.

595. Найдите объем конуса, учитывая, что радиус его основания равен 6 дм, а радиус вписанной сферы — 3 дм.

596. В сферу вписана правильная четырехугольная усеченная пирамида, основания которой находятся по одну сторону от центра. Радиус

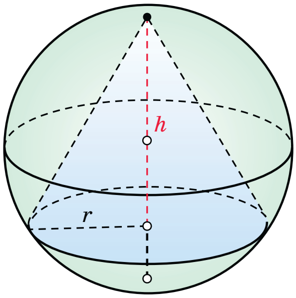


Рис. 200

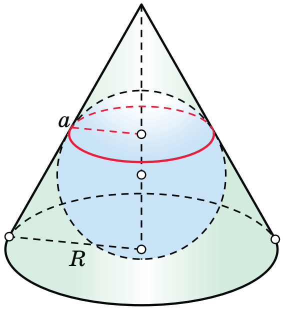


Рис. 201

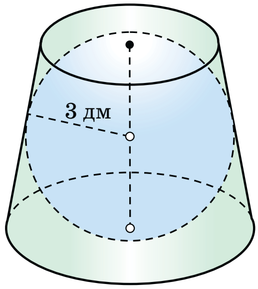


Рис. 202

сферы равен 25 см, высота усеченной пирамиды равна 9 см, а площадь ее меньшего основания — 98 см^2. Найдите объем усеченной пирамиды.

597. Усеченный конус, площади оснований которого относятся как 4 : 9, описан около сферы с радиусом 3 дм (рис. 202). Найдите объем усеченного конуса.

598. Поверхность усеченного конуса, в который вписана сфера, равна 18π см^2, радиус верхнего основания — 2 см. Найдите площадь сферы.

599. Вокруг сферы описана правильная усеченная четырехугольная пирамида. Сторона большего основания равна a см, а сторона меньшего основания — b см. Найдите поверхность и объем усеченной пирамиды.

600. Площадь сферы, вписанной в правильную шестиугольную усеченную пирамиду, равна 12π м^2, сторона меньшего основания усеченной пирамиды равна 1 м. Найдите объем соответствующей полной пирамиды.

601. Имеется сфера с радиусом $5\frac{1}{4}$ дм. Найдите объем наименьшего конуса, который может вместить эту сферу, учитывая, что радиус основания конуса равен 7 дм.

602. Сторона основания описанной около сферы правильной призмы равна a. Найдите ее объем, учитывая, что призма:

а) треугольная; б) шестиугольная.

603. Высота правильной пирамиды равна h, отношение апофемы пирамиды к апофеме ее основания равно n. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

604. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, основанием которой служит ромб с диагоналями 6 и 8; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна единице.

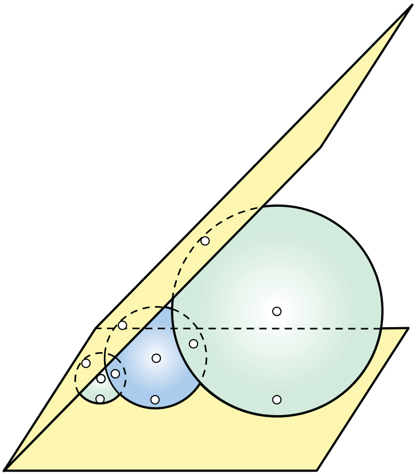


Рис. 203

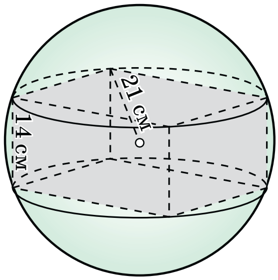


Рис. 204

605. В пирамиде два ребра основания равны пяти, третье ребро — шести, высота пирамиды проходит через середину большего ребра основания и равна единице. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

606. Сфера с радиусом r касается граней двугранного угла в $60°$ (рис. 203). Найдите радиусы наибольшей и наименьшей сфер, касающихся граней угла и данной сферы.

607. Две сферы с радиусом r касаются друг друга и граней двугранного угла в $60°$. Найдите радиус сферы, касающейся граней угла и обеих сфер.

608. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Найдите радиус описанной около параллелепипеда сферы.

609. Одно измерение прямоугольного параллелепипеда на 11 см и 15 см больше двух других. Найдите объем параллелепипеда, учитывая, что радиус описанной сферы равен 10,5 см.

610. В сферу с радиусом 21 см вписана правильная четырехугольная призма высотой 14 см (рис. 204). Найдите площадь поверхности призмы.

611. Ребро основания правильной треугольной призмы равно 12 см. Найдите радиус описанной около нее сферы, учитывая, что высота призмы равна 2 см.

612. В сферу с радиусом 14 см вписана правильная треугольная призма, высота которой на 17 см больше ребра основания. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

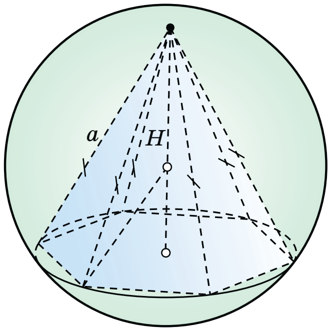


Рис. 205

613. Одна из граней прямой призмы — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 1 см. Найдите радиус описанной сферы, учитывая, что высота призмы равна 24 см.

614. Высота правильной шестиугольной призмы равна 30 см, а ребро основания — 8 см. Найдите радиус описанной сферы.

615. В сферу с радиусом R вписана правильная шестиугольная призма. Радиус, проведенный в вершину основания, образует с боковой гранью угол 45°. Найдите объем призмы.

616. Все ребра четырехугольной пирамиды равны a. Найдите поверхность описанной около пирамиды сферы.

617. Все боковые ребра пирамиды равны a, ее высота — H (рис. 205). Найдите радиус описанной около пирамиды сферы.

618. Все боковые ребра пирамиды равны a, ее высота — H. Определите, при каком условии центр описанной около пирамиды сферы находится:

а) внутри пирамиды;
б) на поверхности пирамиды;
в) вне пирамиды.

619. Все плоские углы при вершине пирамиды прямые, боковые ребра равны 4 см, 28 см и 46 см. Найдите радиус описанной около пирамиды сферы.

620. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 18 см, а ребро основания — 16 см. Найдите радиус описанной около пирамиды сферы.

621. Высота правильной треугольной пирамиды равна 15 см, боковое ребро относится к ребру основания как 2 : 3. Найдите радиус описанной сферы.

622. Высота правильной четырехугольной пирамиды центром описанной сферы разделяется в отношении 2 : 1, ребро основания равно a (рис. 206). Найдите:

а) радиус описанной около пирамиды сферы;
б) площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро основания и центр сферы.

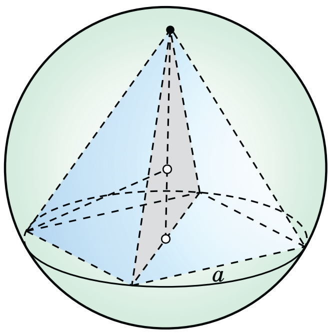


Рис. 206

623. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна ребру основания. Найдите, в каком отношении центр описанной сферы разделяет высоту пирамиды.

624. Боковое ребро правильной треугольной усеченной пирамиды равно 50, а ребра оснований — $33\sqrt{3}$ и $63\sqrt{3}$. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

625. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде ребра оснований равны a и b, а двугранный угол при основании — α (рис. 207). Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды, учитывая, что:

а) $a = 6,\ b = 14,\ \alpha = 60°$;
б) $a = 2,\ b = 14,\ \alpha = 45°$;
в) $a = 2,\ b = 14,\ \alpha = 30°$.

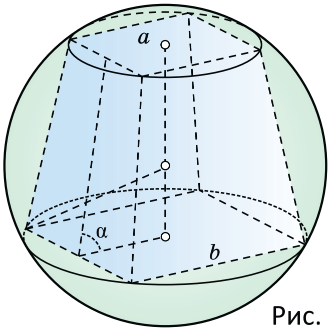


Рис. 207

626. В правильной шестиугольной усеченной пирамиде ребра оснований равны 16 и 25, боковое ребро — 15. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

627. В основании усеченной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4, гипотенуза второго основания равна 4. Найдите радиус сферы, описанной около этой пирамиды, учитывая, что высота пирамиды равна 3.

628. Площадь осевого сечения цилиндра равна 240 см^2, а его полная поверхность — 290π см^2. Найдите радиус описанной сферы.

629. Площадь основания цилиндра равна его боковой поверхности. Найдите полную поверхность цилиндра, учитывая, что описанная около него сфера имеет радиус R.

630. Сфера с радиусом 29 см описана около цилиндра с боковой поверхностью 1680π см^2. Найдите объем цилиндра.

631. Радиусы оснований усеченного конуса равны 7 см и 25 см, а образующая — 30 см (рис. 208). Найдите радиус описанной около него сферы.

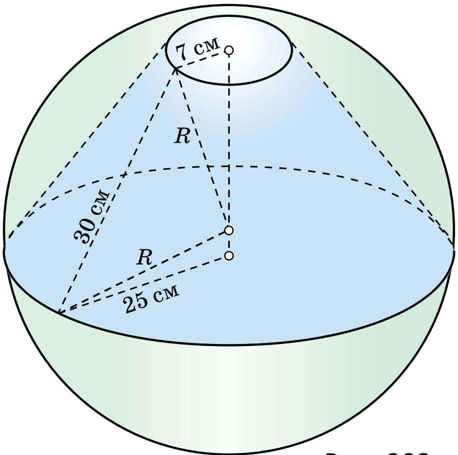


Рис. 208

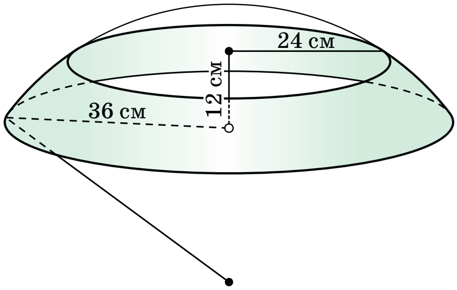


Рис. 209

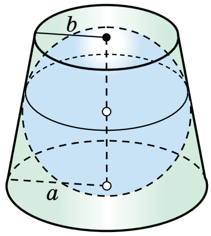


Рис. 210

632. Радиусы оснований сферического пояса равны 36 см и 24 см, а его высота — 12 см (рис. 209). Найдите поверхность пояса.

633. В правильный тетраэдр вписана сфера. Плоскость, проходящая через ребро, делит объем тетраэдра в отношении $m : n$. Найдите, в каком отношении эта плоскость разделяет площадь сферы, учитывая, что:

а) $(m;\ n) = (1;\ 3)$;
б) $(m;\ n) = (1;\ 5)$.

634. Емкость состоит из цилиндра и двух сферических сегментов. Общая длина емкости 4 м, длина цилиндрической части — 3,5 м, ее диаметр — 1,2 м. С точностью до квадратного дециметра найдите площадь поверхности емкости.

635. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписана сфера. Найдите, в каком отношении сфера разделяется линией касания.

636. Высота конуса, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, является диаметром сферы. Найдите отношение, в котором линия пересечения разделяет сферу.

637. В усеченный конус, радиусы оснований которого относятся как $a : b$, вписана сфера (рис. 210). Найдите, в каком отношении сфера разделяется линией касания.

638. В правильный тетраэдр вписана сфера. Плоскость, параллельная основанию, разделяет объем тетраэдра в отношении 64 : 61. Найдите, в каком отношении эта плоскость разделяет сферу.

639. В четырехугольную пирамиду, все ребра которой одинаковы, вписана сфера. Плоскость, параллельная основанию, разделяет объем пирамиды в отношении 64 : 61. Найдите, в каком отношении эта плоскость разделяет сферу.

640. Сферический пояс задан радиусами своих оснований и высотой, которые соответственно равны 63 см, 39 см и 36 см. Найдите его поверхность.

641. Поверхность сферического сегмента составляет $\frac{1}{20}$ поверхности сферы (рис. 211). Найдите высоту сегмента, учитывая, что радиус сферы равен 100.

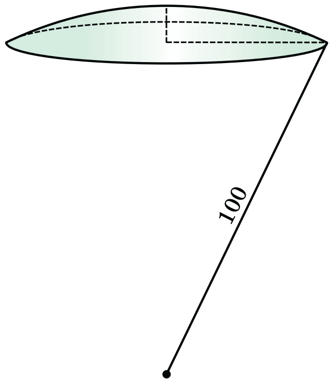


Рис. 211

642. Основание конуса, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, является большой окружностью сферы. Найдите отношение, в котором линия пересечения разделяет сферу.

643. Сфера высекает из плоскости круг, площадь которого относится к площади поверхности полученного сферического сегмента как $n : m$. Найдите величину дуги осевого сечения сегмента.

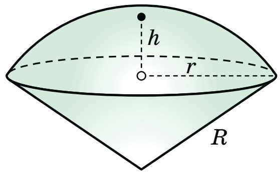


Рис. 212

644. Сферический сектор есть поверхность, образуемая при вращении дуги окружности вокруг прямой, проходящей через центр окружности, лежащей в ее плоскости и не имеющей с дугой общих внутренних точек. Различают два вида сферических секторов, в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит оси вращения один из крайних радиусов дуги. Один из этих секторов ограничен сегментом и конической поверхностью (рис. 212), другой — сферическим поясом и двумя коническими поверхностями (рис. 213). Высота сегмента для первого сектора или перпендикуляр, опущенный из плоскости основания одной конической поверхности на плоскость основания другой поверхности, для второго сектора называется высотой сферического сектора. Найдите центральный угол в осевом сечении сферического сектора, учитывая, что его сегмент равновелик его конической поверхности (см. рис. 212).

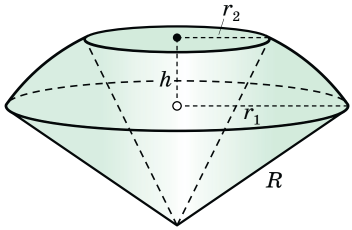


Рис. 213

645. Площадь поверхности сферического сегмента равновелика боковой поверхности конуса, основание которого совпадает с основанием

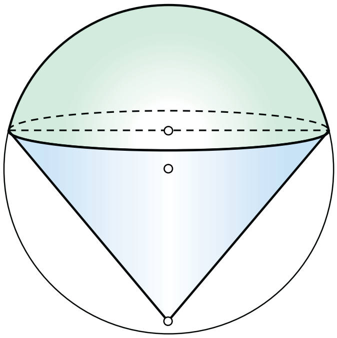


Рис. 214

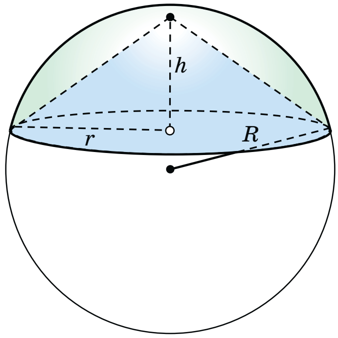


Рис. 215

сегмента, а вершина лежит на сфере (рис. 214). Найдите угол между образующей конуса и его осью.

646. Поверхность сферического сегмента относится к площади круга, ограниченного его основанием, как 4 : 3. Найдите, какую часть радиуса составляет высота сегмента.

647. Поверхность сферического сегмента вместе с площадью круга, ограниченного его основанием, равна S. Найдите высоту сегмента, учитывая, что радиус сферы равен R.

648. Круговой сегмент с дугой 120° и площадью Q вращается вокруг своей высоты. Найдите полную поверхность полученного тела.

649. Сфера с радиусом R пересекает сферу с радиусом r и проходит через ее центр. Найдите часть поверхности первой сферы, находящейся внутри второй.

650. Докажите, что боковая поверхность конуса, вписанного в сферический сегмент, есть среднее пропорциональное между площадью круга, ограниченного основанием, и поверхностью сегмента (рис. 215).

651. Через точку, взятую на сфере, проведены две плоскости: касательная и та, которая разделяет сферу на части, площадь одной из которых есть среднее пропорциональное между площадью всей сферы и площадью остальной части. Найдите угол между ними.

652. Высота цилиндра и диаметр его основания равны между собой и равны 16 см. Центр осевого сечения цилиндра является центром сферы с радиусом 10 см. Найдите площадь той части сферы, которая находится вне цилиндра.

653. Найдите площадь сферического пояса, учитывая, что радиусы сферы и оснований пояса равны 25 см, 20 см и 7 см.

654. Сфера с радиусом R касается всех боковых ребер правильной n-угольной призмы и плоскостей оснований. Найдите площадь той части сферы, которая находится внутри призмы.

655. Центр сферы является центром прямоугольного параллелепипеда с измерениями 30 см, 48 см и 50 см. Найдите площадь той части параллелепипеда, которая находится внутри сферы, учитывая, что сфера касается двух граней параллелепипеда и пересекает остальные грани.

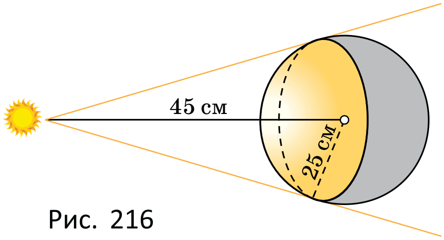


Рис. 216

656. В сферу с радиусом r вписан конус такой высоты, что его боковая поверхность равновелика прилежащей к ней поверхности сегмента. Найдите высоту конуса.

657. Радиус сферы равен 25 см. На расстоянии 45 см от ее центра размещен точечный источник света (рис. 216). Определите, какая часть сферы освещена.

658. Темная сфера с центром M_2 и радиусом r освещается сферой с радиусом R и отбрасывает конус тени, вершина которого находится в точке H. Расстояние M_1M_2 между центрами сфер равно d. Найдите:

а) расстояние M_1H;
б) радиус EF сечения, проведенного перпендикулярно оси конуса тени на расстоянии M_2F, равном b, от центра M_2 темной сферы;
в) радиус FQ окружности, которая служит границей полутени для взятого сечения.

6. Шар

659. Объем шара равен V. Найдите его поверхность.

660. Объем стенок полого шара равен 876π дм^3, толщина стенок — 8 дм. Найдите радиусы его поверхностей — внешней и внутренней.

661. Равнобедренный прямоугольный треугольник вращается вокруг оси, параллельной катету и отстоящей от него на равный ему отрезок. Докажите, что полученное тело равновелико шару, радиус которого равен катету.

662. Докажите, что можно описать шар около:

а) прямоугольного параллелепипеда;
б) правильной призмы;
в) прямой треугольной призмы.

663. Металлический шар переплавлен в n равных между собой меньших шаров. Как изменилась при этом общая площадь поверхности?

664. Около шара описан конус, высота которого вдвое больше диаметра шара. Найдите отношение поверхностей и отношение объемов этих тел.

665. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1152 см^2, а его измерения относятся как 2 : 3 : 6. Найдите объем описанного шара.

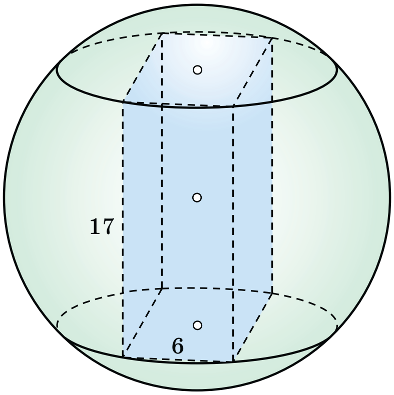


Рис. 217

666. Из шара, состоящего из железного и медного полушаров, масса которого равна M кг, вытачивается куб, диагональ которого равна диаметру шара. Найдите массу опилок.

667. В полый конус с радиусом основания R и высотой h, который зафиксирован вертикально вершиной вниз, до высоты a налита вода. Определите, на сколько поднимется уровень воды, если в конус опустить металлический шар с радиусом r, который полностью покрывается водой.

668. В правильной четырехугольной призме боковое ребро и ребро основания равны 17 см и 6 см соответственно (рис. 217). Найдите объем шара, описанного около этой призмы.

669. Полная поверхность правильной четырехугольной призмы равна 1120 см^2. Найдите объем шара, описанного около этой призмы, учитывая, что ее боковое ребро равно 23 см.

670. В правильной четырехугольной призме диагональ боковой грани и диагональ основания равны 7 см и 8 см соответственно. Найдите объем шара, описанного около этой призмы.

671. Около шара описана правильная n-угольная пирамида, высота которой равна ребру основания. Найдите отношение объемов пирамиды и шара.

672. Шар описан около правильной n-угольной пирамиды, высота которой равна ребру основания. Найдите отношение объемов пирамиды и этого шара.

673. Шар вписан в правильную треугольную пирамиду, которая вписана в цилиндр (рис. 218). Найдите плоский угол при вершине пирамиды, учитывая, что объем шара относится к объему цилиндра как 1 : 24.

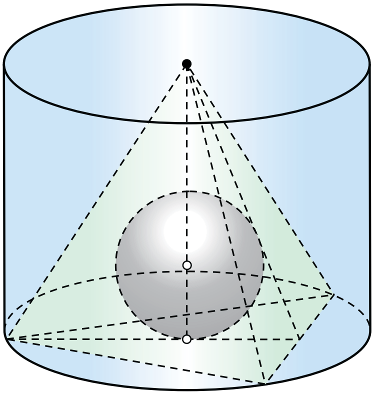


Рис. 218

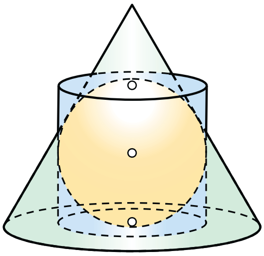


Рис. 219

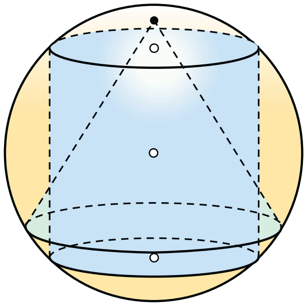


Рис. 220

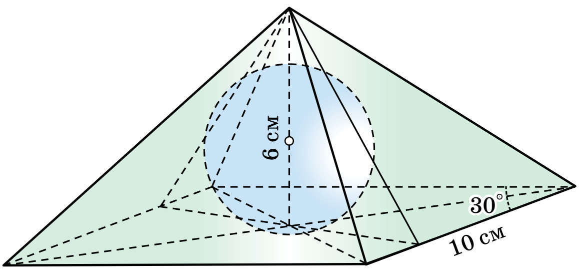
674. Докажите, что если вокруг шара описан или в него вписан равносторонний цилиндр и равносторонний конус, то в обоих случаях полная поверхность цилиндра есть среднее пропорциональное полной поверхности конуса и поверхности шара, а объем цилиндра есть среднее пропорциональное объема конуса и объема шара (рис. 219 и 220).

675. Вокруг шара с радиусом R описан конус, высота которого вдвое больше диаметра шара. Докажите, что полная поверхность этого конуса вдвое больше поверхности шара, а объем конуса вдвое больше объема шара.

676. В шар вписан конус с вершиной M. При этом высота MC конуса разделяется центром O шара так, что $MC : MO = MO : OC$. Найдите отношение объема шара к объему конуса.

677. Основанием пирамиды служит ромб с углом 30° и стороной 10 см. Вершина пирамиды проецируется в точку пересечения диагоналей основания. Высота пирамиды равна 6 см (рис. 221). Найдите объем шара, вписанного в эту пирамиду.

Рис. 221



678. Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с углом 216°. Высота конуса равна $10\frac{2}{3}$ м. Плоскость, параллельная основанию, проведена так, что в полученный усеченный конус можно вписать шар. Найдите высоту усеченного конуса.

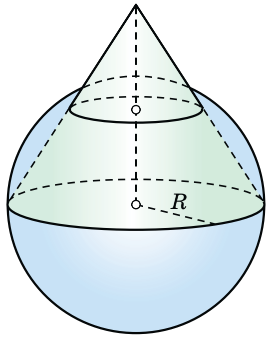


Рис. 222

679. Правильная n-угольная призма описана около шара. Найдите угол между диагональю боковой грани и плоскостью основания призмы.

680. Шар вписан в четырехугольную призму. Можно ли утверждать, что суммы площадей противоположных боковых граней призмы одинаковы?

681. Диагональ четырехугольника длиной 24 см является его осью симметрии. Две стороны четырехугольника имеют длины 13 см и 15 см. В прямую призму, основанием которой является этот четырехугольник, можно вписать шар. Найдите полную поверхность призмы.

682. Основание конуса является большим кругом шара (рис. 222). Учитывая, что радиус шара равен R и то, что вне шара находится четвертая доля боковой поверхности конуса, найдите полную поверхность конуса.

683. Радиус основания конуса равен 3 см, высота конуса — 4 см. Найдите радиус шара, поверхности которого принадлежит окружность основания конуса и середины образующих.

684. Основание конуса является большим кругом шара. Учитывая, что радиус шара равен R, а поверхность шара разделяет каждую образующую конуса в отношении 1 : 2, если считать от вершины, найдите полную поверхность конуса.

685. Двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Докажите, что в такую пирамиду можно вписать шар и центр этого шара находится на высоте пирамиды.

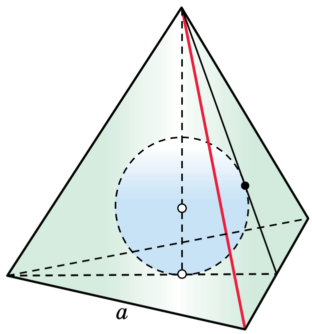


Рис. 223

686. Центр шара, вписанного в пирамиду, разделяет ее высоту в отношении 1 : 2. Найдите двугранные углы при основании пирамиды.

687. В правильной треугольной пирамиде ребро основания равно a, центр вписанного шара разделяет ее высоту в отношении 3 : 1 (рис. 223). Найдите боковое ребро пирамиды.

688. В треугольной пирамиде противоположные ребра попарно равны. Докажите, что вписанный и описанный шары имеют общий центр.

689. Докажите, что шар, вписанный в правильную четырехугольную пирамиду, касается боковой грани в точке пересечения высот этой грани.

690. В четырехугольной пирамиде все ребра равны a, вершина является центром шара, касающегося основания. Найдите длину линии, по которой пересекаются пирамида и шар.

691. Центр шара совпадает с центром основания правильной четырехугольной пирамиды с плоским углом при вершине в 30°. Найдите длину линии, по которой пересекаются пирамида и шар, учитывая, что его радиус равен R.

692. Около шара с радиусом R описан конус, у которого три образующие попарно перпендикулярны. Найдите полную поверхность конуса.

693. Осевым сечением конуса является равносторонний треугольник с высотой H. Найдите длину линии, по которой пересекаются этот конус и шар, для которого ось конуса является диаметром.

694. Высота конуса является диаметром шара, поверхность которого разделяет боковую поверхность конуса пополам. Найдите отношение объема конуса к объему шара.

695. Шар с радиусом R касается плоскости основания конуса и разделяет каждую его образующую на три доли (рис. 224). Найдите объем конуса.

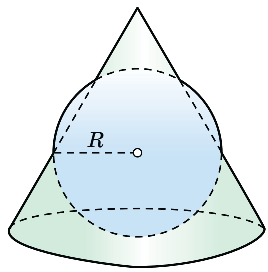


Рис. 224

696. В конус с радиусом основания 15 см вписан шар. Найдите его радиус, учитывая, что линия касания имеет длину 6π см.

697. Разверткой боковой поверхности конуса является сектор с радиусом 15 см и углом 216°. Найдите, на каком расстоянии от вершины проведена плоскость, учитывая, что в полученный усеченный конус можно вписать шар.

698. Образующая усеченного конуса, в который можно вписать шар, равна 13 см. Найдите полную поверхность и объем конуса, учитывая, что радиус одного из его оснований равен 9 см.

699. Шар с радиусом 12 см вписан в усеченный конус, радиусы оснований которого относятся как 4 : 9 (рис. 225). Найдите объем конуса.

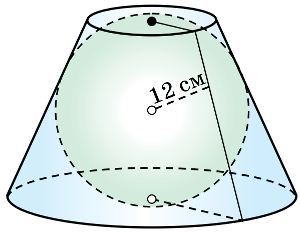


Рис. 225

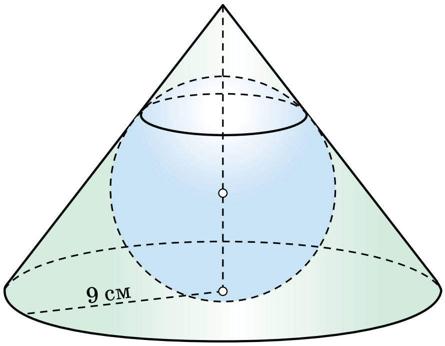


Рис. 226

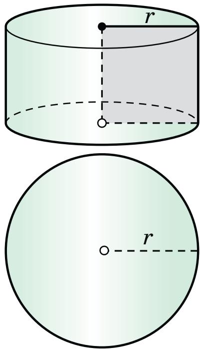


Рис. 227

700. Шар с радиусом 6 см вписан в усеченный конус с образующей 15 см. Найдите длину линии, по которой шар касается конуса.

701. Шар вписан в правильную усеченную n-угольную пирамиду, ребра оснований которой равны a и b. Найдите боковую поверхность этой пирамиды.

702. Шар вписан в конус с радиусом основания 9 см. Найдите радиус шара, учитывая, что плоскость, содержащая точки касания, разделяет конус на части, объемы которых относятся как 8 : 117, если считать от вершины конуса (рис. 226).

703*. В цилиндре с радиусом основания R размещено n равных шаров так, что каждый из них касается боковой поверхности цилиндра, его основания и двух соседних шаров. Еще один такой шар касается каждого из этих n шаров и плоскости другого основания. Найдите объем цилиндра.

704*. В основании пирамиды лежит параллелограмм со сторонами 12 и 30, боковые ребра пирамиды равны между собой, высота пирамиды равна 8. Четыре равных шара размещены так, что каждый из них касается плоскости основания, плоскости боковой грани и двух других шаров. Найдите радиус этих шаров, учитывая, что точки касания находятся на средних линиях параллелограмма.

705. Диаметр шара является осью цилиндра с радиусом основания 5 см и высотой 6 см. Найдите площадь части поверхности цилиндра, находящейся внутри шара.

706. Докажите, что поверхность тела, образуемого при вращении квадрата вокруг стороны, равновелика поверхности шара, который имеет радиусом сторону квадрата (рис. 227).

707. Плоскость разделяет объем шара на части, равные 252π и 720π. Найдите, как относятся высоты соответствующих шаровых сегментов.

708. Найдите объем шарового сегмента, учитывая, что площадь его основания равна M, а площадь боковой поверхности — S.

709. Плоскость разделяет шар на части с объемами 720π см^3 и 252π см^3. Найдите площадь каждой части соответствующей сферы.

710. В конус с образующей 17 см и радиусом основания 15 см вписан шар. Найдите отношение объемов частей шара, расположенных по разные стороны от плоскости, в которой находится линия касания.

711. Шар с радиусом 65 дм пересечен двумя параллельными плоскостями, находящимися по одну сторону от центра на расстояниях 19 дм и 25 дм от него. Найдите объем части шара между ними.

712. Радиус шара равен 25 дм. Радиус одного из оснований шарового слоя равен 15 дм. Боковая поверхность этого слоя равна 1350π дм^2. Найдите его объем.

713. Плоскость разделила шар на части, сферические поверхности которых относятся как $m : n$. Найдите отношение объемов этих частей.

714. Емкость в форме полусферы заполнена водой. Найдите, какая часть воды выльется, если емкость наклонить на:

а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$.

715. Диаметр шара является осью цилиндра с высотой 50 см и радиусом основания 7 см. Найдите объем части шара, которая находится внутри цилиндра.

716. Диаметр шара, равный 30 дм, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 дм (рис. 228). Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

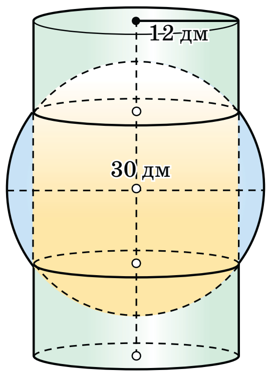


Рис. 228

717. Шар с радиусом R рассечен плоскостью на две части так, что боковая поверхность одной из них в n раз больше боковой поверхности другой. Найдите высоты полученных шаровых сегментов и отношение их объемов.

718. В шар с радиусом R вписан конус такой высоты, что его объем равен объему прилежащего к нему шарового сегмента. Найдите высоту конуса.

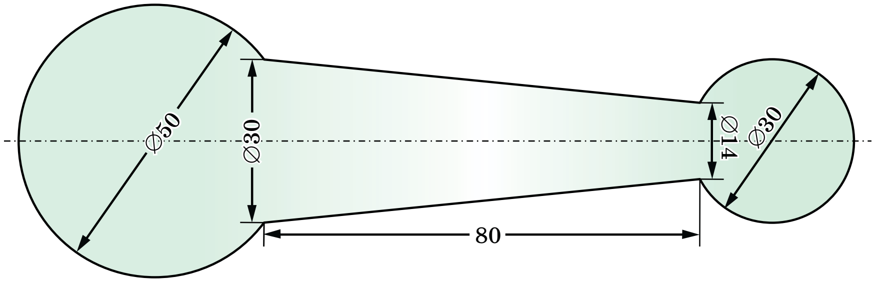


Рис. 229

719. По радиусу шара R найдите расстояние от его центра до основания вписанного цилиндра, объем которого равен половине объема шарового слоя, заключенного между основаниями цилиндра.

720. На рисунке 229 изображена круглая стальная деталь. Найдите ее массу, учитывая, что размеры указаны в миллиметрах, а плотность стали равна 7,8 г/см^3.

721. Шар с радиусом 5 см и куб с ребром 8 см имеют общий центр. Найдите объем и площадь поверхности части куба, которая находится внутри шара.

722. В секторе $OACB$ с центром O и дугой ACB в $90°$ проведена хорда AB (рис. 230). Докажите, что если фигуру вращать вокруг одного из боковых радиусов, то треугольник AOB и сегмент ACB опишут равные объемы.

723. Докажите, что если у шарового сектора осевое сечение образует $\frac{1}{3}$ круга, то объем этого сектора равен $\frac{1}{4}$ объема шара.

724. $ACMDB$ — четверть окружности с радиусом R. Дуги AC и BD равны между собой, а дуга CMD содержит $60°$. Найдите поверхность и объем тела, полученного при вращении сегмента CMD вокруг радиуса OB (или OA).

725. Круговой сегмент вращается вокруг параллельного хорде диаметра. Докажите, что объем полученного тела равен объему шара с диаметром, равным хорде сегмента.

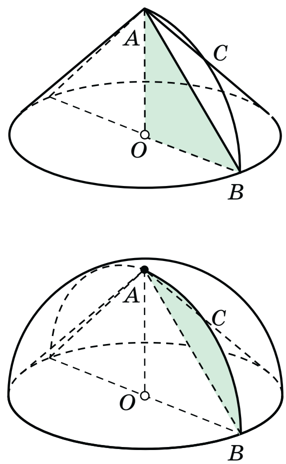


Рис. 230

7. Правильные многогранники

726. Ребро правильного тетраэдра равно a дм. Найдите поверхность шара, вписанного в этот тетраэдр.

727. Найдите поверхность шара, вписанного в:

а) куб, площадь поверхности которого равна S;

б) правильный тетраэдр, площадь поверхности которого равна S;

в) правильный октаэдр, у которого сечение с большей площадью имеет площадь S (рис. 231);

г) цилиндр, квадратное осевое сечение которого имеет площадь S;

д) конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник с площадью S.

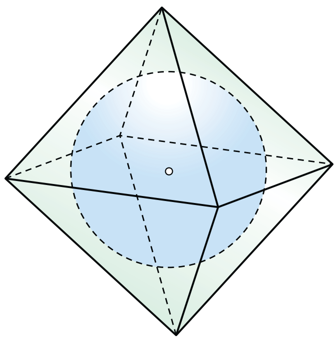


Рис. 231

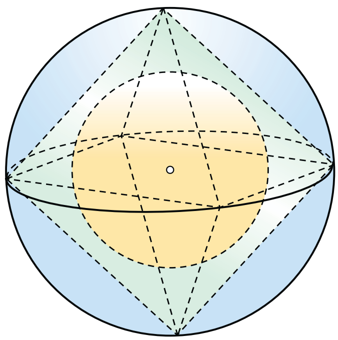


Рис. 232

728. Найдите отношение поверхностей двух шаров, один из которых описан, а другой вписан в:

а) куб;

б) правильный тетраэдр;

в) правильный октаэдр (рис. 232);

г) цилиндр с квадратным осевым сечением;

д) конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник;

е) правильную n-угольную пирамиду с ребром основания a и высотой H.

729. Найдите поверхность шара, разделяющего каждое ребро куба, равное a, на три доли.

730. Один шар вписан в куб, другой касается трех граней куба и первого шара (рис. 233). Найдите отношение поверхностей этих шаров.

731. Один шар вписан в правильный тетраэдр, другой касается трех граней тетраэдра и первого шара. Найдите отношение поверхностей этих шаров.

732. Центр сферы является центром правильного тетраэдра с ребром 12 см. Найдите площадь части сферы, которая находится внутри тетраэдра, учитывая, что ее радиус равен 3 см.

733. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него:

а) куба;
б) правильного октаэдра;
в) правильного тетраэдра.

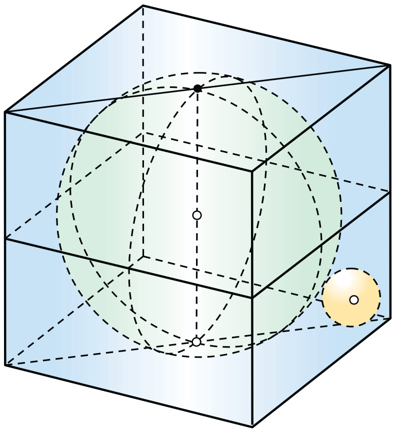


Рис. 233

734. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него:

а) куба;
б) правильного октаэдра;
в) правильного тетраэдра.

735. Найдите площадь поверхности правильного тетраэдра, учитывая, что радиусы описанной около него и вписанной в него сфер равны R и r соответственно.

736. В правильный октаэдр вписан шар с радиусом R. На одной из граней взята точка M. Найдите сумму расстояний от этой точки до всех граней октаэдра.

737. В правильный додекаэдр вписан шар с радиусом R. На одной из граней взята точка M. Найдите сумму расстояний от этой точки до плоскостей всех граней додекаэдра.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрические фигуры и их свойства

738. Найдите смежные углы, учитывая, что:
а) один из них на 46° больше другого;
б) один из них в три раза меньше другого;
в) один из них относится к другому как 5 : 13;
г) один из них составаляет $2\frac{1}{3}$ другого;
д) один из них на 20 % меньше другого;
е) один из них составляет 80 % другого (рис. 234);
ж) $\frac{5}{12}$ одного из них равны 30°;
з) $\frac{3}{8}$ одного из них равны 25 % другого.

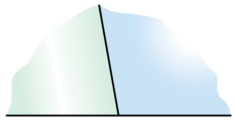


Рис. 234

739. Найдите углы треугольника, учитывая, что один из них равен 54°, а другой:
а) на 22° больше третьго;
б) в шесть раз больше третьего;
в) относится к третьему как 5 : 6;
г) составляет $\frac{3}{4}$ третьего;
д) составляет 75 % третьего;
е) составляет 350 % третьего.

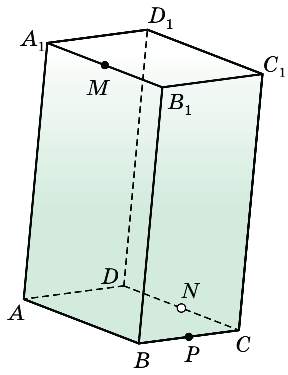


Рис. 235

740. Тело на рисунке 235 — параллелепипед. Точки M, N и P — середины ребер. Определите взаимное расположение прямых:
а) BN и C_1M; в) A_1N и CM;
б) B_1D_1 и NP; г) PM и A_1N.

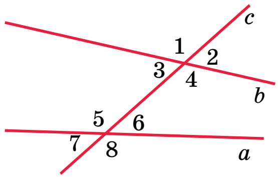


Рис. 236

741. Установите, будут ли прямые a и b параллельными, учитывая, что в обозначениях рисунка 236:
а) $\angle 4 = 52°$ и $\angle 5 = 128°$;
б) $\angle 2 = 132°$ и $\angle 6 = 132°$;
в) $\angle 3 = 57°$ и $\angle 5 = 53°$;
г) $\angle 3 = 57°$ и $\angle 8 = 113°$;
д) $\angle 2 = 142°$ и $\angle 5 = 38°$;
е) $\angle 1 = 75°$ и $\angle 7 = 75°$;
ж) $\angle 4 = 163°$ и $\angle 6 = 154°$;
з) $\angle 4 = 115°$ и $\angle 8 = 65°$.

742. Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении прямых AC и BD плоскости третьей, равен 54°, а другой — в $2\frac{1}{3}$ раза больше его. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

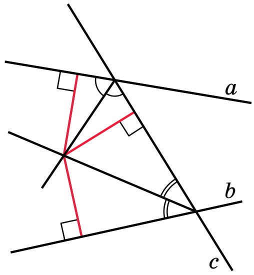


Рис. 237

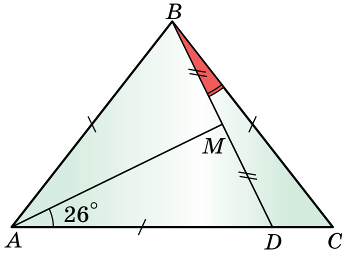


Рис. 238

743. Прямые a и b пересечены прямой c (рис. 237). Докажите, что биссектрисы полученных внутренних односторонних углов пересекаются в точке, равноудаленной от прямых a, b и c.

744. Угол A треугольника ABC равен 54°, внешний угол при вершине C — 144°. Найдите угол B и определите вид треугольника.

745. Внешний угол при вершине A треугольника ABC вдвое больше его угла B. Найдите сторону AB, учитывая, что сторона AC равна 5 см.

746. Биссектриса AD треугольника ABC разделила пополам сторону BC. Найдите угол BAD, учитывая, что угол C равен 36°.

747. Точка D на основании равнобедренного треугольника ABC выбрана так, что $AD = AB$. Точка M — середина отрезка BD (рис. 238). Найдите угол CBD, учитывая, что угол MAC равен 26°.

748. Найдите углы треугольника с меньшим внешним углом, равным 80°, учитывая, что:

а) один из его углов на 30° больше другого;
б) один из его углов в три раза больше другого;
в) два его угла относятся как 2 : 3.

749. Докажите, что угол является внешним углом треугольника, если вершина угла совпадает с вершиной треугольника, одна сторона угла содержит сторону треугольника, другая находится вне треугольника, а:

а) величина угла равна сумме величин углов треугольника при двух других его вершинах;
б) биссектриса угла образует с биссектрисой угла треугольника прямой угол.

750. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, стороны которого образуют арифметическую прогрессию.

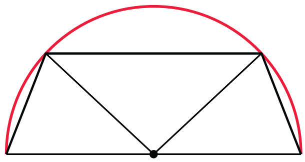


Рис. 239

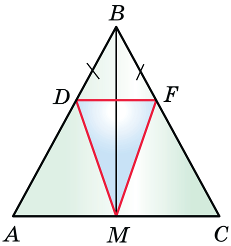


Рис. 240

751. Полуокружность разделена на три дуги так, что соответствующие им хорды относятся как 1 : 2 : 1 (рис. 239). Найдите величины этих дуг.

752. Медиана AD треугольника ABC образует прямой угол со стороной BC. Точка F на прямой AC выбрана так, что угол AFB вдвое больше угла ACB. Учитывая, что $FB = 6$ см, найдите длину отрезка AC.

753. Высота AD треугольника ABC разделила пополам сторону BC. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине A параллельна стороне BC.

754. Серединный перпендикуляр MB к стороне AC треугольника ABC пересечен прямой DF так, что отрезки BD и BF оказались равными (рис. 240). Докажите, что треугольник MDF равнобедренный.

755. Стороны AB и A_1B_1, а также стороны AC и A_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Вместе с этим у них равны и углы BAC и $B_1A_1C_1$. Биссектрисы BM и CF пересекаются в точке D, а биссектрисы B_1M_1 и C_1F_1 — в точке D_1 (рис. 241). Докажите, что треугольники DBC и $D_1B_1C_1$ равны.

756. Стороны AB и A_1B_1, а также стороны AC и A_1C_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Вместе с этим у них равны и углы BAC и $B_1A_1C_1$. Биссектриса CF и высота BK пересекаются в точке D, а биссектриса C_1F_1 и высота B_1K_1 — в точке D_1 (рис. 242). Докажите, что треугольники DBF и $D_1B_1F_1$ равны.

757. Прямая l касается окружности с диаметром AB в точке C. Расстояния от точек A и B до прямой l равны a и b соответственно (рис. 243). Найдите расстояния от точки C до точек A и B.

758. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найдите острые углы треугольника.

759. Докажите, что высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в исходный треугольник и две полученные треугольные части.

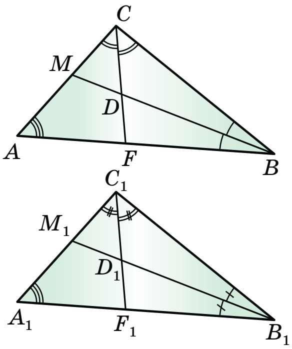


Рис. 241

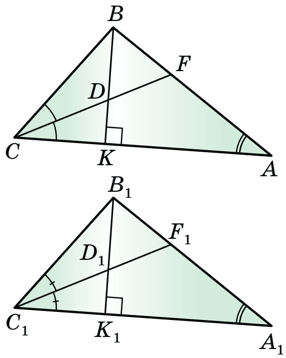


Рис. 242

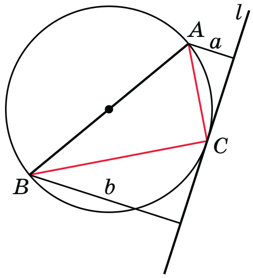


Рис. 243

760. Найдите стороны прямоугольного треугольника, в котором биссектриса острого угла разделяет противоположный катет на отрезки длинами m и n $(m > n)$.

761. Найдите стороны прямоугольного треугольника, учитывая, что перпендикуляр, проведенный к гипотенузе из середины катета, равен 6 см, а середина гипотенузы отстоит от этого катета на 7,5 см.

762. В четырехугольнике $ABCD$ углы A, B и C равны $90°$, $60°$ и $150°$ соответственно, а стороны BC и AD — $6\sqrt{3}$ и 6 соответственно. Найдите длины двух других сторон.

763. Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 8, а медиана к боковой стороне — $5\sqrt{2}$.

764. Точки A, B, C, D выбраны на сторонах угла Q так, что $QA = QB = a$, $QC = QD = c$, прямые AC и BD пересекаются в точке K (рис. 244). Докажите, что $AC = BD$ и $KC = KD$.

765. Прямые l_1 и l_2 отсекают на сторонах a и b прямого угла отрезки, равные соответственно a_1 и b_1, a_2 и b_2. Докажите, что если $\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} = m = \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2}$, то прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке на биссектрисе прямого угла. Найдите расстояние от вершины угла до точки пересечения прямых l_1 и l_2.

766. Найдите катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой c и острым углом $15°$.

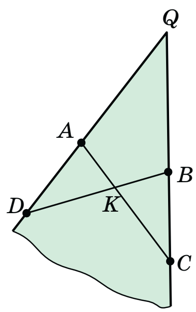


Рис. 244

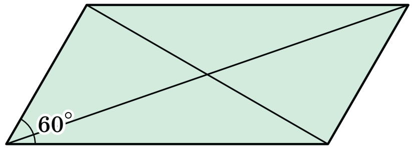


Рис. 245

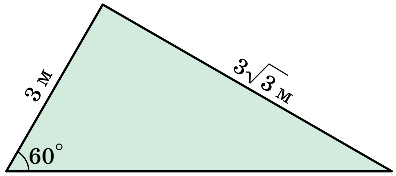


Рис. 246

767. Найдите стороны прямоугольного треугольника с периметром 30 и площадью 30.

768. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, учитывая, что она на 1 см больше одного катета и на 8 см — другого.

769. Найдите угол между диагоналями прямоугольника с периметром 16 и площадью 12.

770. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Найдите угол между прямыми MC и BD.

771. В параллелограмме с углом 60° квадраты диагоналей относятся как 3 : 7 (рис. 245). Найдите отношение сторон параллелограмма.

772. Найдите стороны прямоугольника, у которого диагональ равна 25, а вершина находится на расстоянии 6,72 от нее.

773. Две стороны треугольника равны 5 см и 16 см, а угол между ними — 120°. Найдите третью сторону и два других угла.

774. Две стороны треугольника равны $3\sqrt{3}$ см и 7 см, а угол против большей из них — 150°. Найдите третью сторону и два других угла.

775. Два угла треугольника равны 60° и 45°, а сторона против меньшего из них — 7 см. Найдите третий угол и две другие стороны.

776. Две стороны треугольника равны 3 м и $3\sqrt{3}$ м, а угол против большей их них — 60° (рис. 246). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, третью сторону и два других угла.

777. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен 30°. Точка K на боковой стороне AB выбрана так, что $AC : BK = \sqrt{2} : 1$. Найдите угол ACK.

778. Найдите угол A четырехугольника $ABCD$, учитывая, что $\angle C = \angle D = 60°$, $AB = 3$, $BC = \sqrt{3}$, $AD = 2\sqrt{3}$.

779. В вершину A треугольника ABC из центра описанной окружности проведен радиус QA, из вершины A проведена высота AK (рис. 247). Докажите, что углы QAB и KAC равны.

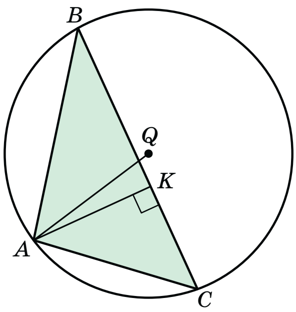


Рис. 247

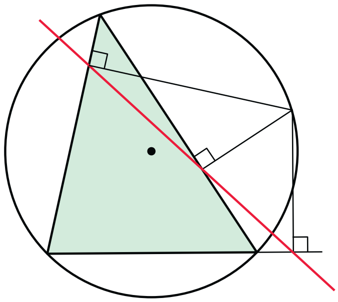


Рис. 248

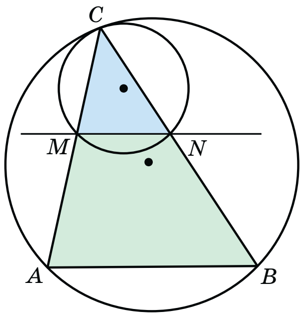


Рис. 249

780. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной около треугольника окружности на прямые, содержащие его стороны, лежат на одной прямой — прямой Симсона (рис. 248).

781. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, отсекает от него треугольник MNC (рис. 249). Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и MNC, касаются.

782. Окружности, вписанные в сегмент, касаются его дуги и основания в точках A и A_1, B и B_1, C и C_1 соответственно (рис. 250). Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку.

783. В треугольнике ABC проведена медиана AM, окружности, вписанные в треугольники AMB и AMC, касаются ее в точках K и L. Найдите длину отрезка KL, учитывая, что $AB = 10$ и $AC = 6$.

784. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, точки O, O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC, ABL и ACL соответственно (рис. 251). Докажите, что $OO_1 = OO_2 = \frac{a}{b+c} \cdot R$,

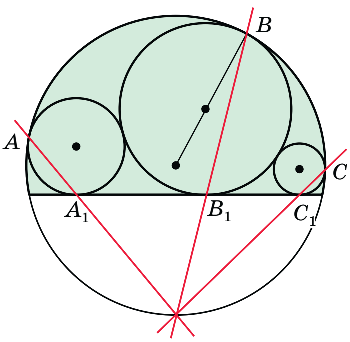


Рис. 250

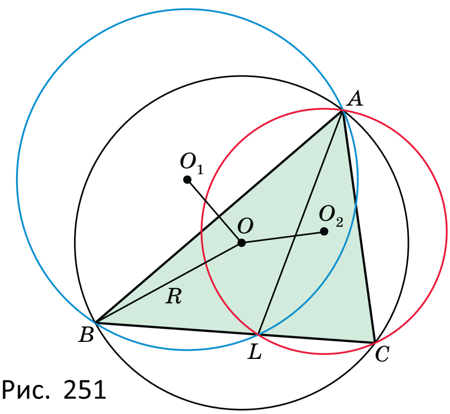


Рис. 251

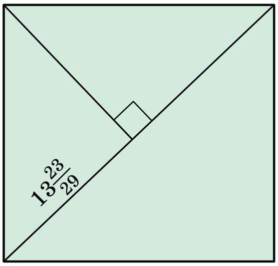


Рис. 252

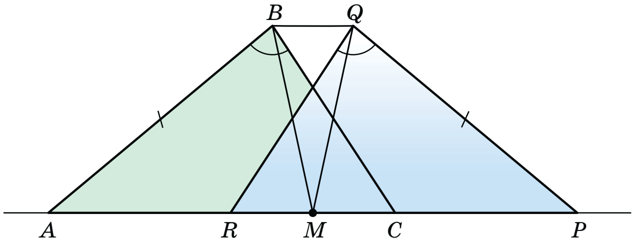


Рис. 253

где a, b, c — длины сторон треугольника ABC, R — радиус описанной около него окружности.

785. В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла, средняя линия равна m. Найдите:

а) меньшее основание трапеции, учитывая, что большее основание на n отличается от периметра;
б) большее основание трапеции, учитывая, что меньшее основание на n отличается от периметра.

786. Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что они отличаются на единицу, а основание перпендикуляра, опущенного из вершины на диагональ, находится на расстоянии $13\frac{23}{29}$ от ее ближайшего конца (рис. 252).

787. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны AB и A_1B_1, высоты CF и C_1F_1, а также медианы CM и C_1M_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

788. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы A и A_1, а также высоты BH и B_1H_1, CF и C_1F_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

789. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны периметры, а также углы A и A_1, B и B_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

790. Докажите, что прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если равны их гипотенузы и одинаковы разности их катетов.

791. Докажите, что прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если равны их гипотенузы и одинаковы суммы их катетов.

792. Основания AC и PR треугольников ABC и PQR находятся на одной прямой, $AB = PQ$, $BC = QR$, $\angle ABC = \angle PQR$, M — общая середина отрезков CR и AP (рис. 253). Учитывая, что треугольники ABC и PQR расположены по одну сторону от прямой AC, докажите, что:

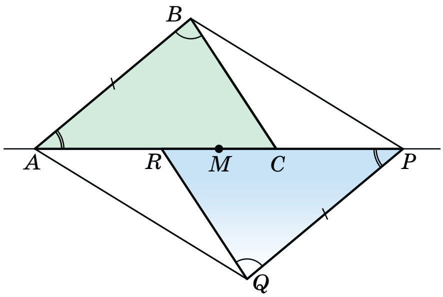


Рис. 254

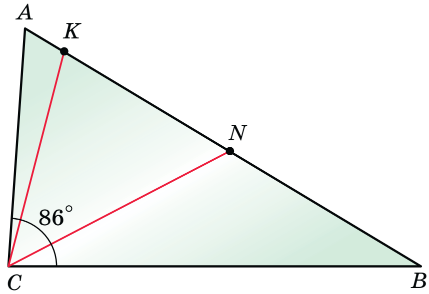


Рис. 255

а) треугольник BQM равнобедренный;
б) прямые BQ и AP параллельны.

793. Основания AC и PR треугольников ABC и PQR расположены на одной прямой, $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle PQR$, $\angle BAC = \angle QPR$, M — общая середина отрезков CR и AP (рис. 254). Учитывая, что треугольники ABC и PQR расположены по разные стороны от прямой AC, докажите, что:

а) треугольники BCP и QRA равны;
б) прямые BP и AQ параллельны.

794. Точки K, L, M на сторонах треугольника ABC отмечены так, что AK — биссектриса треугольника ABC, $KL \parallel AB$, LM — биссектриса треугольника KLC. Докажите, что $LM \parallel AK$.

795. Из точки K на стороне угла ABC проведены лучи KL, KM и KN так, что KL — биссектриса угла BKM и KN — биссектриса угла CKM. Найдите угол KMN, учитывая, что угол BLK равен 145°.

796. Точки K и N на стороне AB треугольника ABC отмечены так, что $AN = AC$ и $BK = BC$ (рис. 255). Найдите угол KCN, учитывая, что угол ACB равен 86°.

797. Точка K катета прямоугольного треугольника равноудалена от вершин острых углов и находится на расстояния 7 см от вершины прямого угла (рис. 256). Найдите больший катет треугольника, учитывая, что гипотенуза равна 40 см.

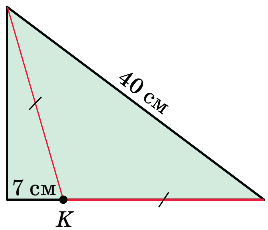


Рис. 256

798. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны медианы AM и A_1M_1, высоты AH и A_1H_1, а также высоты CF и C_1F_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

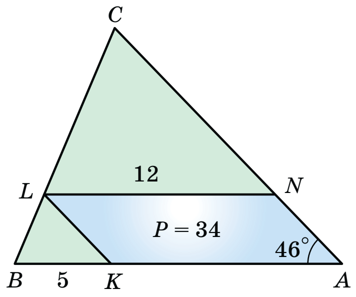


Рис. 257

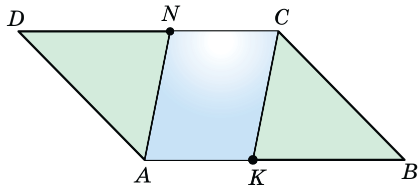


Рис. 258

799. Прямые, проведенные через точки K и N на сторонах AB и AC треугольника ABC параллельно AC и AB соответственно, пересекаются в точке L на стороне BC (рис. 257). Периметр четырехугольника $AKLN$ равен 34, $KB = 5$, $LN = 12$, $\angle BAC = 46°$. Найдите величину угла B.

800. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке Q, M — середина отрезка AB. Найдите длину отрезка QM, учитывая, что $CD = 20$.

801. Диагонали параллелограмма $ABCD$, равные 56 см и 34 см, пересекаются в точке Q. Периметры треугольников AQB и BQC равны 70 см и 84 см соответственно. Найдите периметр параллелограмма.

802. Точка K на стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана так, что $AK = BC$. Найдите величину угла B, учитывая, что $\angle CDK = 48°$.

803. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону CD в точке K. Найдите периметр параллелограмма, учитывая, что $\angle AKC = 120°$, $AK = 12$ см, $KC = 5$ см.

804. Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают его стороны в точках K и N. Докажите, что четырехугольник $AKCN$ — параллелограмм.

805. Точки K и N на сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны так, что $AK : KB = CN : ND$ (рис. 258). Докажите, что четырехугольник $AKCN$ — параллелограмм.

806. Биссектриса угла ABD ромба $ABCD$ проходит через середину стороны AD. Найдите периметр ромба, учитывая, что $BD = 12$ см.

807. Найдите угол между диагоналями прямоугольника, учитывая, что перпендикуляр, опущенный на диагональ из вершины прямоугольника, образует со стороной угол 64°.

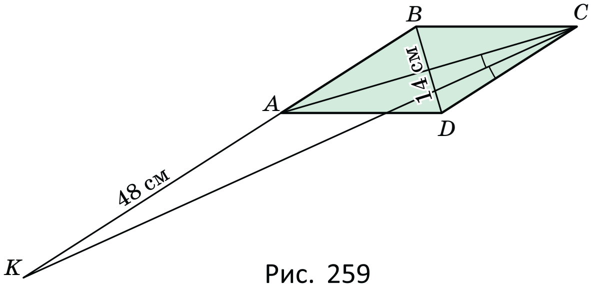


Рис. 259

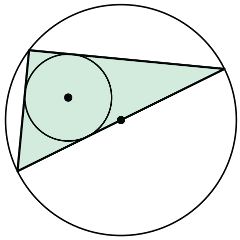


Рис. 260

808. Биссектриса угла ACD ромба $ABCD$ пересекает прямую AB в точке K (рис. 259). Учитывая, что $AK = 48$ см, $BD = 14$ см, найдите периметр ромба.

809. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону в такой точке K, что $KB \perp KA$. Найдите периметр параллелограмма, учитывая, что $KD = 13$ см.

810. В треугольнике ABC медиана AD образует угол $30°$ со стороной AC и равна 13 см. Найдите сторону BC, учитывая, что $\angle ACB = 45°$.

811. Угол A треугольника ABC равен $120°$, а его стороны AB и CB равны соответственно $5\sqrt{2}$ и $5\sqrt{3}$. Найдите величину угла C.

812. В треугольнике ABC угол A на $90°$ больше угла B. Найдите косинус угла C, учитывая, что $AC = 5$, $BC = 10$.

813. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Биссектриса угла MAB пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что $AM = BN + DM$.

814. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 50 см. Найдите катеты, учитывая, что если один из них уменьшить на 50 %, а другой — на 25 %, то сумма их длин станет равной 43 см.

815. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей (рис. 260).

816. У двух выпуклых четырехугольников совпадают середины сторон (рис. 261). Докажите, что эти четырехугольники равновелики.

817. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон CD, DA, AB, BC квадрата $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, и найдите площади четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, учитывая, что $AA_1 = a$.

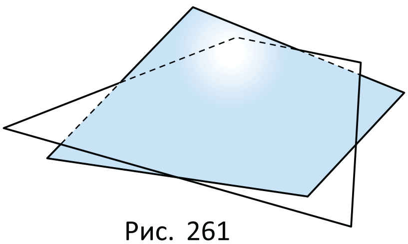


Рис. 261

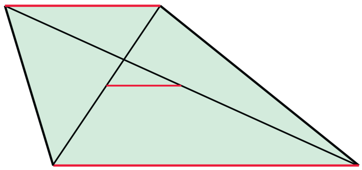


Рис. 262

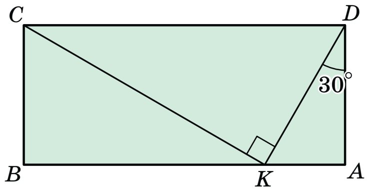


Рис. 263

818. Докажите, что если в трапеции сумма противоположных углов равна 180°, то эта трапеция равнобедренная.

819. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности ее оснований (рис. 262).

820. Докажите, что отрезок, соединяющий точку одного основания трапеции с точкой другого ее основания, разделяется средней линией пополам.

821. Стороны параллелограмма равны 15 см и 20 см. Биссектрисы соседних углов параллелограмма разделяют противоположную сторону на три отрезка. Найдите их длины.

822. Точка K на стороне AB прямоугольника $ABCD$ выбрана так, что $\angle ADK = 30°$, $\angle CKD = 90°$ (рис. 263). Найдите отношение сторон прямоугольника и отношение отрезков, на которые точка K разделяет сторону AB.

823. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, разделяет соответствующий угол в отношении 1 : 4. Найдите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю прямоугольника.

824. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, разделяет ее в отношении 1 : 3. Найдите диагонали прямоугольника, учитывая, что точка их пересечения отстоит от большей стороны на 6 см.

825. В равнобедренный треугольник с основанием 24 см и боковой стороной 15 см вписан прямоугольник, диагонали которого параллельны боковым сторонам треугольника. Найдите стороны прямоугольника.

826. Точка пересечения диагоналей прямоугольника находится на 8 см дальше от меньшей стороны, чем от большей. Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что его периметр равен 112 см.

827. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 24 см, а сумма оснований — 90 см. Найдите большее основание трапеции, учитывая, что ее острый угол равен 60°.

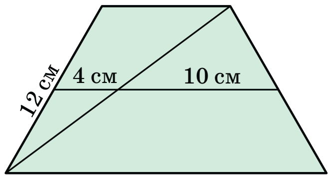


Рис. 264

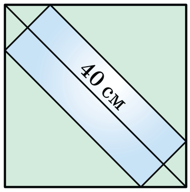


Рис. 265

828. Через вершину равнобедренной трапеции с острым углом $60°$ параллельно боковой стороне проведена прямая, отрезок которой, заключенный внутри трапеции, равен 36 см. Найдите меньшее основание трапеции, учитывая, что ее средняя линия равна 50 см.

829. Средняя линия равнобедренной трапеции разделяется диагональю на отрезки длинами 4 см и 10 см (рис. 264). Найдите меньший угол трапеции, учитывая, что ее боковая сторона равна 12 см.

830. Угол при основании равнобедренной трапеции разделяется диагональю пополам. Найдите периметр трапеции, учитывая, что ее основания отличаются на 18 см, а средняя линия равна 22 см.

831. Диагональ равнобедренной трапеции равна 23 см. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон трапеции. Определите вид этого четырехугольника.

832. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне и разделяет угол пополам. Докажите, что одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

833. Точка K на стороне AD трапеции $ABCD$ выбрана так, что $BK \parallel CD$. Найдите длину отрезка BC, учитывая, что периметр треугольника ABK равен 15 см, а периметр трапеции $ABCD$ — 25 см.

834. Диагональ равнобедренной трапеции меньше периметра на a см и разделяет тупой угол пополам. Найдите меньшее основание трапеции, учитывая, что ее средняя линия равна b см.

835. На каждой стороне квадрата отмечено по одной точке так, что они являются вершинами прямоугольника, стороны которого относятся как $1 : 3$ (рис. 265). Найдите эти стороны, учитывая, что диагональ квадрата равна 40 см.

836. Докажите, что наименьшее расстояние между точками двух окружностей, из которых одна лежит вне другой, равно длине отрезка, лежащего на линии центров между этими окружностями.

837. Докажите, что наименьшей из хорд, проходящих через точку A внутри круга, будет та, которая перпендикулярна диаметру, проведенному через точку A.

838. Хорда AB круга с центром O продлена за точку B на расстояние BK, равное радиусу. Точка C — ближайшая к A точка пересечения окружности с прямой KO (рис. 266). Докажите, что $\angle AOC = 3\angle OKB$.

839. Докажите, что из всех отрезков, соединяющих данную точку A внутри круга с точками окружности, наибольшим и наименьшим являются отрезки диаметра, проведенного через точку A.

840. Через точку A окружности проведена касательная l. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точке B. Перпендикуляр к OB, проведенный через O, пересекает прямые AB и l в точках K и N соответственно. Докажите, что $KN = NA$.

841. В окружности с радиусом r проведена хорда длиной $\frac{2}{3}r$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — параллельная ей прямая. Найдите расстояние между этими прямыми.

842. Найдите периметр прямоугольного треугольника, у которого радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно равны 13 см и 4 см.

843. Окружность проходит через концы основания равнобедренного треугольника и касается его боковых сторон длиной 13 см. Найдите радиус этой окружности, учитывая, что высота треугольника, проведенная к его основанию, равна 5 см.

844. Через точки A и B окружности проведены касательные к ней. В фигуру, ограниченную этими касательными и дугой, величина которой составляет 120°, вписана окружность (рис. 267). Докажите, что длина этой окружности равна длине дуги.

845. В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка Q. Докажите, что сумма площадей треугольников AQB и CQD не зависит от выбора точки Q и равна сумме площадей треугольников AQC и BQD.

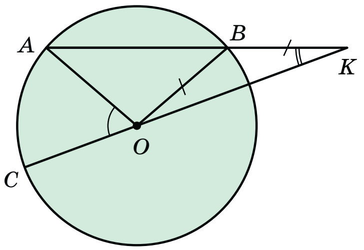


Рис. 266

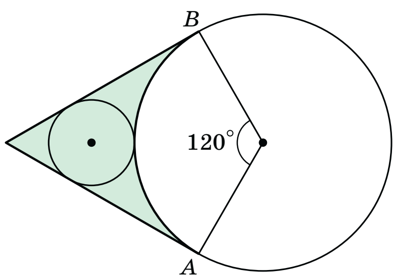


Рис. 267

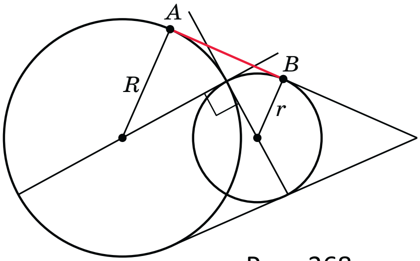


Рис. 268

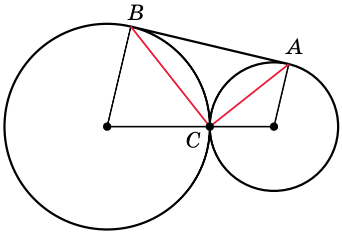


Рис. 269

846. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а боковая сторона — 41 см. Найдите радиусы вписанного и описанного кругов.

847. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него, учитывая, что катеты треугольника равны a и b.

848. Угол между касательными, проведенными через точку пересечения двух окружностей с радиусами R и r, равен 90° (рис. 268). Найдите расстояние между точками A и B этих окружностей, учитывая, что AB — их общая касательная.

849. Две окружности касаются в точке C, AB — их общая внешняя касательная, A и B — точки касания (рис. 269). Найдите угол ACB.

850. Окружности с радиусами 2 см и 6 см касаются внутренним образом. Третья окружность касается этих окружностей и прямой, соединяющей их центры. Найдите радиус третьей окружности.

851. Расстояние между центрами O_1 и O_2 двух окружностей равно a, угол, образуемый линией центров O_1O_2 с общей внешней касательной MN, равен α, а с общей внутренней касательной PQ, — β (рис. 270). Найдите радиусы окружностей.

852. В круговой сектор с центральным углом 120° вписана окружность с радиусом r. Найдите радиус сектора.

853. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, пересекающая окружности в точках C и D. Докажите, что величина угла CBD не зависит от выбора секущей.

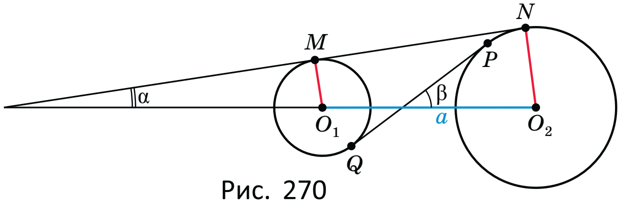


Рис. 270

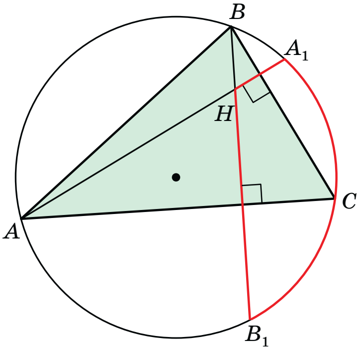


Рис. 271

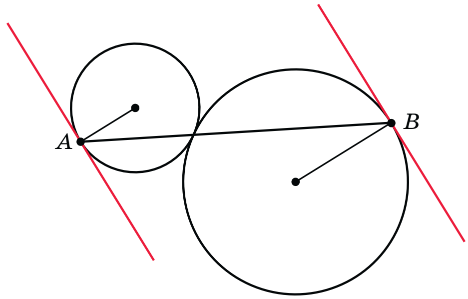


Рис. 272

854. Прямые, проходящие через вершины A и B треугольника ABC перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в точке H и пересекают описанную около треугольника окружность в точках A_1 и B_1 соответственно (рис. 271). Докажите, что:

а) отрезки HA_1 и HB_1 разделяются сторонами треугольника пополам;

б) дуга A_1B_1 разделяется точкой C пополам.

855. Докажите, что угол между высотой AA_1 треугольника ABC и диаметром AD описанной окружности равен разности углов BCA и ABC.

856. Прямые, проходящие через вершины A и B равных углов треугольника ABC, разделяют их пополам, пересекаются в точке N и пересекают описанную около треугольника окружность в точках K и M. Докажите, что четырехугольник $CKNM$ — ромб.

857. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точки K, L, M, N — середины дуг AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.

858. Прямые, проходящие через точку K, касаются окружности с центром O в точках A и B, BC — диаметр. Докажите, что прямые KO и AC параллельны.

859. Через точку касания двух окружностей проходит прямая, пересекающая их еще в точках A и B (рис. 272). Докажите, что касательные к окружностям в точках A и B параллельны.

860. Докажите, что точки пересечения пар соседних биссектрис выпуклого четырехугольника лежат на одной окружности.

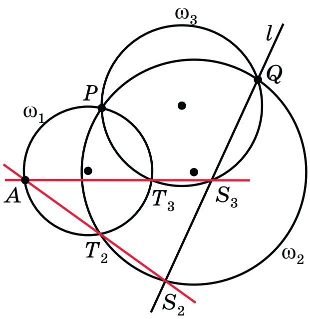


Рис. 273

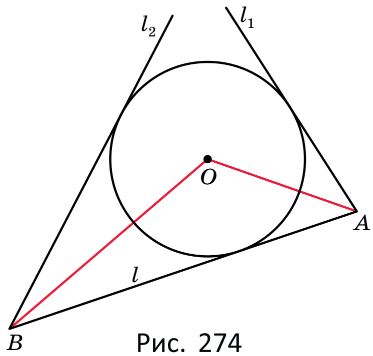


Рис. 274

861. Через середину M дуги PQ окружности проведены прямые MA и MB, пересекающие отрезок PQ в точках D и C соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.

862. Через данную точку P окружности ω_1 и данную точку Q прямой l проведены окружности ω_2 и ω_3, которые пересекли окружность ω_1 в точках T_2 и T_3, а прямую l — в точках S_2 и S_3 соответственно (рис. 273). Докажите, что:

а) прямые T_2S_2 и T_3S_3 пересекаются в точке A окружности ω_1;

б) расположение точки A не зависит от того, как проведены окружности ω_2 и ω_3.

863. Через точки A и B проведены касательные AM и BN к окружности ω. Докажите, что:

а) прямая AB касается окружности ω тогда и только тогда, когда $|AM - BN| = AB$ или $AM + BN = AB$;

б) прямая AB пересекает окружность ω тогда и только тогда, когда $|AM - BN| > AB$ или $AM + BN < AB$;

в) прямая AB не имеет общих точек с окружностью ω тогда и только тогда, когда $|AM - BN| < AB < AM + BN$.

864. Касательные l_1 и l_2 к окружности с центром O пересекает в точках A и B третья касательная l (рис. 274). Докажите, что величина угла AOB не зависит от того, как проведена касательная l.

865. Каждая из окружностей с центрами K, L и M касается одной из сторон и продолжений двух других сторон треугольника ABC, P и O — центры окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников KLM и ABC, Q — центр вписанной в треугольник ABC окружности (рис. 275). Докажите, что:

а) точка O — середина отрезка PQ;

б) радиус окружности ω_1 вдвое больше радиуса окружности ω_2.

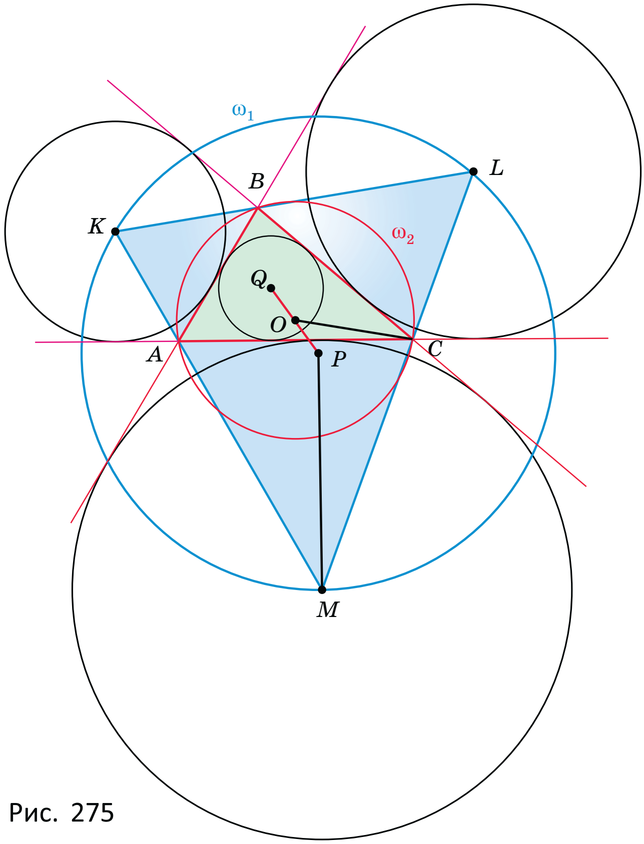


Рис. 275

866. Найдите угол между двумя хордами, равными радиусу и выходящими из одной точки.

867. Найдите радиус круга, в котором две взаимно перпендикулярные хорды разделяют друг друга на отрезки длинами 7 см и 17 см.

868. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и разделяет его на отрезки длинами 3 см и 23 см. Найдите длину хорды.

869. Две хорды, выходящие из одной точки и образующие угол 120°, проходят на расстояниях 11 см и 13 см от центра. Найдите радиус круга и длину каждой хорды.

870. Две взаимно перпендикулярные прямые касаются окружности с радиусом a. Третья прямая пересекает их и также касается окружности (рис. 276). Найдите периметр образованного треугольника.

871. Радиусы двух окружностей относятся как 3 : 5. Если бы эти окружности касались внутренним образом, то расстояние между их цент-

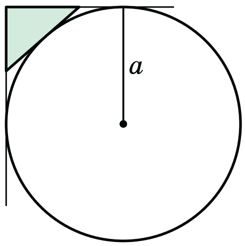


Рис. 276

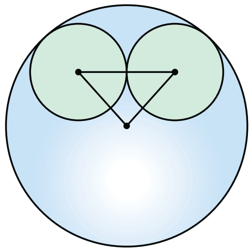


Рис. 277

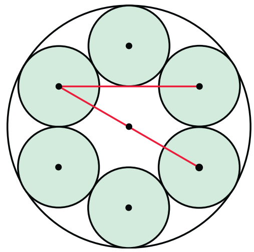


Рис. 278

рами было бы равно 12 см. Установите, как располагались бы такие окружности, если бы расстояние между их центрами было равно:

а) 48 см; б) 10 см; в) 40 см; г) 50 см.

872. Два равных круга, касающиеся друг друга, касаются внутренним образом третьего круга. Треугольник, вершинами которого являются их центры, имеет периметр 24 см (рис. 277). Найдите радиус большего круга.

873. В круг с радиусом 24 см вписано 6 равных кругов, каждый из которых касается двух соседних (рис. 278). Найдите:

а) радиус меньшего круга;

б) расстояния между центрами двух не соседних меньших кругов.

874. Две хорды AB и CD круга пересекаются под углом $40°30'$. Найдите дуги AC и BD, учитывая, что они относятся как 2 : 7.

875. Боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при вершине в 40° является диаметром окружности, которая точками треугольника разделяется на четыре дуги. Найдите их градусные меры.

876. Хорды, являющиеся сторонами вписанного в окружность угла, разделяют окружность на дуги в отношении 2 : 7 и 5 : 13. Найдите градусную меру этого угла.

877. Расстояние между ближайшими точками двух кругов равно 11 см, а их радиусы — 3 см и 8 см (рис. 279). Найдите градусную меру угла между внутренними касательными к этим кругам.

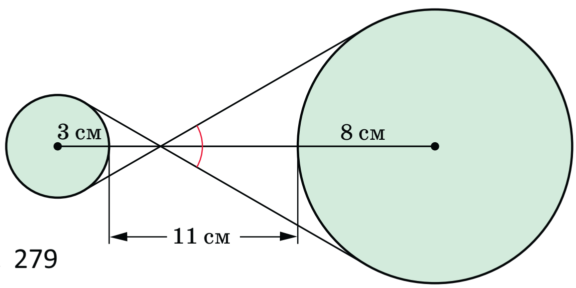


Рис. 279

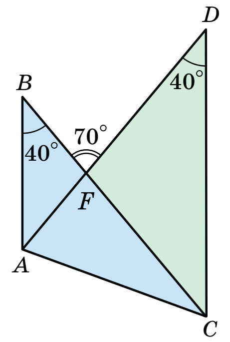


Рис. 280

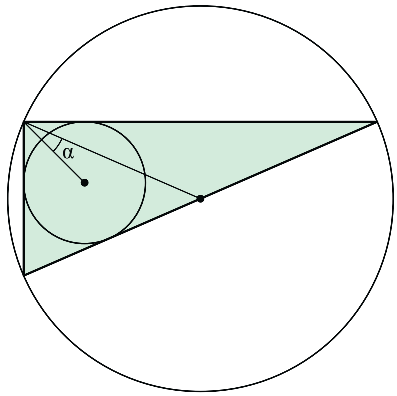


Рис. 281

878. Две окружности касаются внешним образом, их общие внешние касательные проходят через точки B и C одной окружности и точки A и D другой. Найдите отрезки AB и CD, учитывая, что хорды BC и AD равны 10 см и 15 см.

879. Две окружности касаются внешним образом, угол между их общей внешней касательной и общей внутренней касательной равен 60°. Найдите отношение радиусов окружностей.

880. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, сторона AB — диаметр, сторона CD вдвое короче AB. Найдите угол между прямыми BC и AD.

881. Углы B и D треугольников ABC и ACD равны по 40°, стороны BC и AD пересекаются в точке F под углом 70° (рис. 280). Найдите углы BAC и DAC, учитывая, что треугольник ACD равнобедренный, а треугольник ABC неравнобедренный.

882. Один из углов прямоугольного треугольника равен 25°. Найдите углы, под которыми из центра описанной окружности видны катеты.

883. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 26 см вписана окружность с радиусом 4 см. Найдите периметр треугольника.

884. Найдите меньший из углов прямоугольного треугольника, учитывая, что угол между прямыми, проведенными через вершину прямого угла и центры описанной и вписанной окружностей, равен α (рис. 281).

885. Три окружности касаются попарно. Расстояния между их центрами равны 8 см, 16 см и 20 см. Найдите радиусы окружностей, учитывая, что:

а) все они касаются внешним образом;
б) только две из них касаются внешним образом.

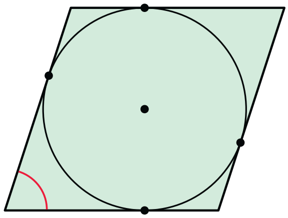


Рис. 282

886. В ромб вписана окружность. Точки касания разделяют окружность на четыре дуги, две из которых относятся как 2 : 3 (рис. 282). Найдите меньший угол ромба.

887. Угол при основании равнобедренной трапеции равен α, а угол, под которым из точки пересечения диагоналей видна боковая сторона, — β. Установите условие, при котором центр описанной около трапеции окружности находится:
а) внутри трапеции; в) на границе трапеции.
б) вне трапеции;

888. В равнобедренную трапецию с углом 30° вписана окружность (рис. 283). Найдите ее радиус, учитывая, что средняя линия трапеции равна 20 см.

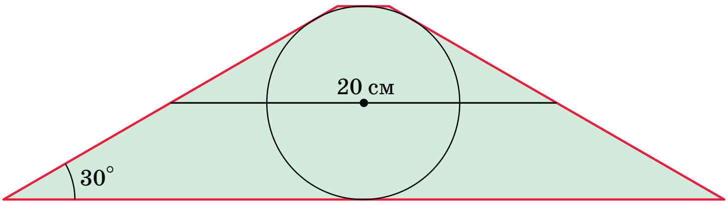


Рис. 283

889. В окружность вписан четырехугольник, три последовательных угла которого относятся как 9 : 7 : 3. Найдите эти углы.

890. Три последовательные стороны четырехугольника, описанного около окружности, относятся как 1 : 4 : 5. Найдите эти стороны, учитывая, что периметр четырехугольника равен 72 см.

891. Проекции боковых сторон треугольника на его основание равны 4 см и 12 см, большая из боковых сторон равна 21 см (рис. 284). Найдите, на какие части разделяет эту сторону серединный перпендикуляр к основанию.

892. Точки F и G на сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны так, что $AF : FB = 2 : 3$ и $FG \parallel AC$. Прямая, проведенная через точку F параллельно прямой AG, пересекает сторону BC в точке K. Найдите, на какие части точки G и K разделяют сторону BC длиной 50 см.

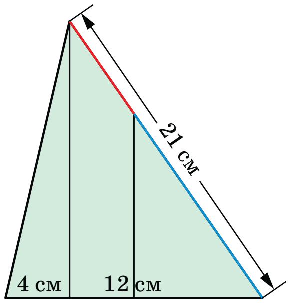


Рис. 284

893. Стороны AC и BC треугольника ABC равны b и a соответственно, точка K на стороне BC выбрана так, что $AK : KB = m : n$. Установите условие, при котором:

а) $\angle AKC > \angle KCB$;
б) $\angle AKC < \angle KCB$;
в) $\angle AKC = \angle KCB$.

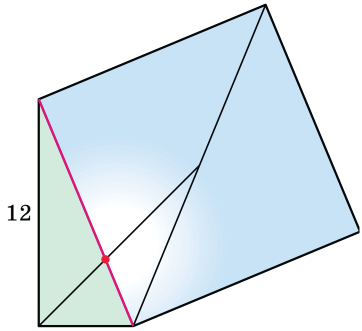


Рис. 285

894. Основание AC и боковая сторона BC равнобедренного треугольника ABC равны b и a соответственно, AM и BN — биссектрисы. Найдите длину отрезка MN.

895. На гипотенузе прямоугольного треугольника с внешней стороны построен квадрат, центр которого соединен отрезком с вершиной прямого угла. Найдите, в каком отношении этот отрезок разделяет гипотенузу, учитывая, что катеты треугольника равны:

а) 3 и 4;
б) 5 и 12 (рис. 285);
в) m и n.

896. Ромб со стороной a и острым углом α разделен на три равновеликие части прямыми, выходящими из его вершины (рис. 286). Найдите длины отрезков этих прямых, расположенных внутри ромба.

897. На стороне правильного треугольника выбрана точка на расстояниях a и b от других сторон. Найдите расстояния от нее до вершин треугольника.

898. Основание AC и боковая сторона BC равнобедренного треугольника ABC равны b и a соответственно. Прямая, параллельная AC, пересекает боковые стороны в точках M и N так, что основание MN полученной трапеции равно сумме ее боковых сторон. Найдите длину отрезка MN.

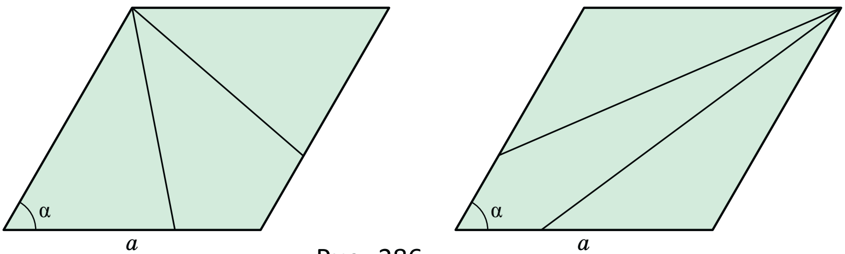


Рис. 286

899. Одно из оснований трапеции втрое больше другого. Через середину одной диагонали проведена прямая l, параллельная другой диагонали, равной 18 см. Найдите длину отрезка прямой l, заключенного внутри трапеции.

900. Точка K пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$ разделяет диагональ AC на части KA и KC, соответственно равные 3 см и 8 см, а диагональ BD — на отрезки KB и KD, соответственно равные 4 см и 6 см. Найдите периметр и площадь четырехугольника $ABCD$, учитывая, что угол ACD равен arcsin 0,6.

901. Средняя линия трапеции равна 14 см, а боковые стороны — 13 см и 15 см. Найдите периметр и площадь трапеции, учитывая, что ее большая диагональ образует с основанием угол, равный arctg 0,75.

902. Внутренняя точка треугольника со сторонами 7 м, 15 м и 20 м отстоит от прямых, содержащих две первые стороны, на 3 м и на 1 м соответственно (рис. 287). Найдите расстояние этой точки до прямой, проходящей через третью сторону.

903. Параллелограмм $AFKG$ имеет с треугольником ABC общий угол, вершина K находится на стороне BC. Учитывая, что $AB = 20$ см, $AC = 25$ см и $AF : AG = 6 : 5$, найдите стороны параллелограмма.

904. Две вершины прямоугольника находятся на основании треугольника, равном 48 см, а две другие — на его боковых сторонах. Высота треугольника равна 16 см. Найдите периметр прямоугольника, учитывая, что:

а) его измерения относятся как 5 : 9;
б) его диагонали параллельны боковым сторонам треугольника.

905. Две вершины квадрата находятся на прямой AC, а две другие — на прямых AB и BC. Высота треугольника ABC равна 1 см, а его основание — 2 см. Найдите площадь квадрата.

906. Основания AD и BC трапеции равны a и b соответственно. Прямая, им параллельная, пересекает боковые стороны в точках P и Q так, что $AP : PB = m : n$. Найдите длину отрезка PQ.

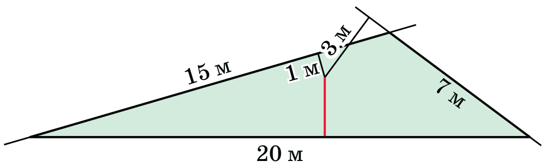


Рис. 287

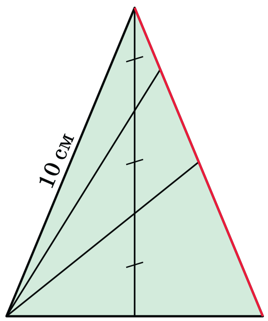


Рис. 288

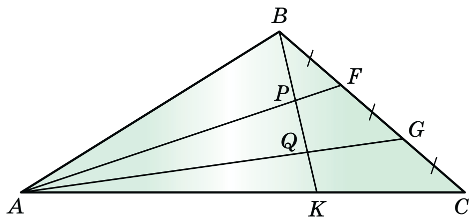


Рис. 289

907. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см (рис. 288). Определите, на какие отрезки ее разделяют прямые, проходящие через одну из вершин и разделяющие на три доли высоту, проведенную к основанию.

908. Медиана AM треугольника ABC равна 10 см. Сторона BC разделена на 5 долей, через точки деления параллельно AM проведены прямые. Найдите отрезки этих прямых, расположенные внутри треугольника.

909. Точки K, F и G выбраны на сторонах AC и BC треугольника ABC так, что $AK : KC = 2 : 1$, $BF = FG = GC$ (рис. 289). Найдите, в каком отношении прямые AF и AG разделяют отрезок BK.

910. Из основания H высоты AH треугольника ABC к его сторонам AB и AC проведены перпендикуляры HM и HN. Докажите, что треугольники ABC и AMN подобны.

911. В треугольнике ABC проведена высота CC_1, H — точка пересечения высот. Докажите, что $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot HC_1$.

912. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, разделяет его на части, площади которых относятся как $1 : 8$. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника, учитывая, что сторона, которой он параллелен, имеет длину 36 см.

913. Окружность, центр Q которой лежит на основании AB равнобедренного треугольника ABC, касается его боковых сторон. Точки M и N на лучах CA и CB выбраны так, что MN — касательная к окружности (рис. 290). Докажите, что треугольники AMQ, BNQ и MNQ подобны.

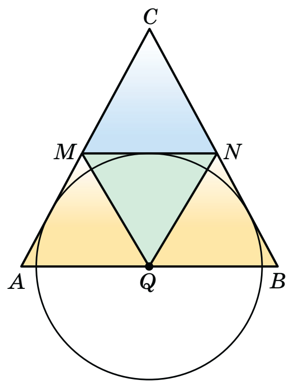


Рис. 290

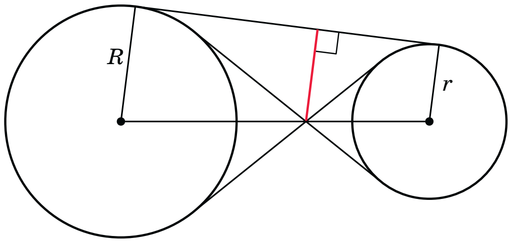


Рис. 291

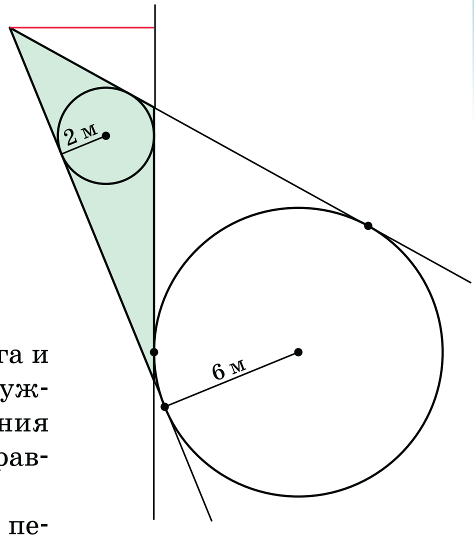


Рис. 292

914. Две окружности касаются друг друга и сторон угла. Найдите радиусы окружностей, учитывая, что расстояния от их центров до вершины угла равны a и b.

915. В треугольник со стороной 2 см и периметром 8 см вписана окружность. Прямая, параллельная этой стороне, касается этой окружности и пересекает боковые стороны. Найдите отрезок этой прямой, расположенный внутри треугольника.

916. В окружность с радиусом 6 см вписан треугольник, две стороны которого равны 4 см и 9 см. Найдите высоту, проведенную к третьей стороне.

917. Расстояние между центрами окружностей с радиусами 1 см и 2 см равно 6 см. Найдите расстояние между точкой пересечения их общих внешних касательных и точкой пересечения их общих внутренних касательных.

918. Найдите расстояние от точки пересечения общих внутренних касательных двух окружностей с радиусами R и r до их общей внешней касательной (рис. 291).

919. Треугольник ABC вписан в окружность с радиусом 12 см. Найдите радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC.

920. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 2 м, а радиус окружности, касающейся стороны и продолжений двух других сторон, — 6 м (рис. 292). Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне, которой касаются обе окружности.

921. Найдите радиусы окружностей: описанной около равнобедренного треугольника с основанием 30 и боковой стороной 17 и вписанной в него.

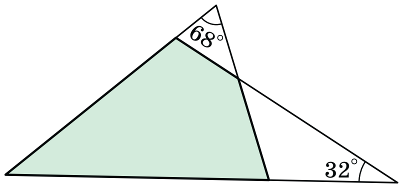


Рис. 293

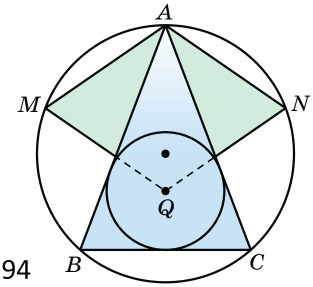


Рис. 294

922. Найдите радиус окружности, учитывая, что точка, отстоящая от центра на 5 см, разделяет проведенную через нее хорду на части длинами 4 см и 6 см.

923. Окружность, диаметром которой является меньший катет прямоугольного треугольника, разделяет биссектрису прилежащего к этому катету острого угла в отношении 1 : 3. Найдите углы треугольника.

924. Найдите углы четырехугольника, вписанного в окружность, учитывая, что углы между его противоположными сторонами равны 68° и 32° (рис. 293).

925. Две окружности касаются, их общие внешние касательные образуют угол 2φ, расстояние между центрами равно d. Найдите:

а) радиусы этих окружностей;

б) площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки, в которых окружности касаются внешних касательных.

926. Через точки M и N пересечения двух окружностей проведены секущие AMB и CND, причем точки A и D лежат на одной окружности, а точки B и C — на другой.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Какой вывод можно сделать, если точки A и D совпадают?

в) Какой вывод можно сделать, если окружности касаются, т. е. точки M и N совпадают?

927. В равнобедренный треугольник ABC вписана окружность с центром Q, точки M и N — середины равных дуг AB и AC описанной около треугольника ABC окружности (рис. 294). Докажите, что четырехугольник $AMQN$ — ромб.

928. Точки K, M и N симметричны точке пересечения высот треугольника ABC относительно его сторон. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в точках A, B, C, K, M и N, совпадают.

929. Окружность пересекает одну из концентрических окружностей в точках A и B, а другую — в точках M и N. Докажите, что прямые AB и MN параллельны.

930. В сектор с острым углом α и радиусом r вписан круг. Найдите его площадь.

931. Окружность с радиусом R касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, высота, проведенная к этой же стороне, равна h (рис. 295). Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

932. Периметр прямоугольного треугольника равен 56 см, а радиус описанной около него окружности — 12,5 см. Найдите площадь этого треугольника.

933. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 24 см, учитывая, что радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен 33,8 см.

934. В прямоугольном треугольнике один катет равен 35 см, а проекция другого на гипотенузу — 24 см. Найдите радиусы описанной и вписанной в этот треугольник окружностей.

935. Найдите катеты прямоугольного треугольника, учитывая, что радиусы вписанной и описанной около этого треугольника окружностей равны R и r соответственно.

936. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, отстоит от концов одной боковой стороны на 15 см и 20 см (рис. 296). Найдите радиус окружности.

937. Найдите радиусы окружностей: вписанной в треугольник со сторонами 25 см, 51 см и 52 см и описанной около него.

938. Точка M находится на расстояниях a и b от сторон угла A величиной 60°. Найдите длину отрезка, отсекаемого на биссектрисе

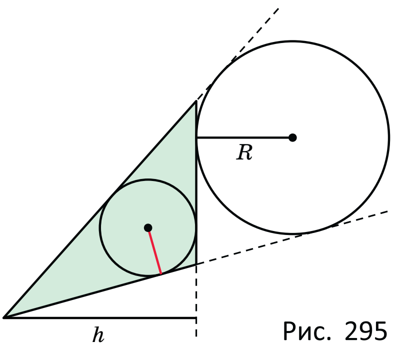


Рис. 295

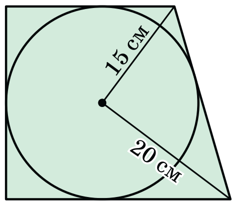


Рис. 296

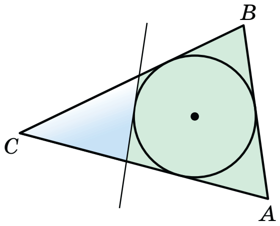


Рис. 297

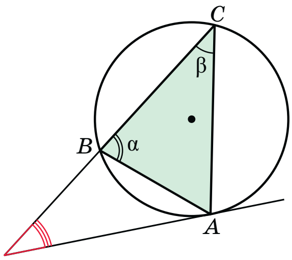


Рис. 298

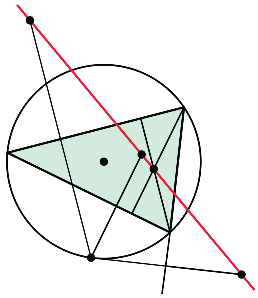


Рис. 299

угла A перпендикуляром к ней, проведенным из точки M, учитывая, что точка M находится:

а) внутри угла A;

б) вне угла A.

939. В треугольник со сторонами a, b и c вписана окружность, касательная к которой пересекает первые две стороны (рис. 297). Найдите периметр отсеченного ей треугольника.

940. Треугольник ABC вписан в окружность (рис. 298). Найдите угол между прямой BC и касательной к окружности, проходящей через точку A, учитывая, что $\angle B = \alpha$ и $\angle C = \beta$.

941. На описанной около треугольника окружности отмечена произвольная точка. Докажите, что три точки, симметричные ей относительно прямых, содержащих стороны треугольника, лежат на одной прямой, проходящей через точку пересечения высот (рис. 299).

942. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения биссектрис треугольника, разделяет его периметр и площадь в одном и том же отношении.

943. Прямая проходит через центр окружности, вписанной в пятиугольник. Докажите, что она разделяет его периметр и площадь в одном и том же отношении.

944. Две окружности, радиусы которых равны R и r, касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная имеет с окружностями общие точки B и C. Найдите периметр и площадь треугольника ABC.

945. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K такая, что $KC = 3$ и $KB = 2\sqrt{7}$. Найдите длину отрезка AB, учитывая, что $\angle A = 60°$ и $BC = \sqrt{31}$.

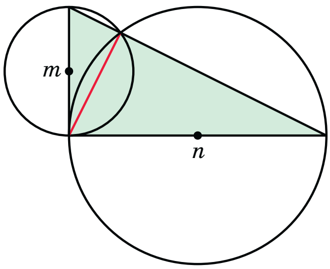


Рис. 300

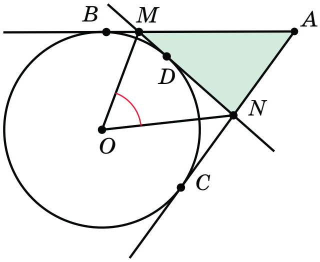


Рис. 301

946. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности (рис. 300). Найдите расстояние между точками их пересечения, учитывая, что катеты равны m и n.

947. Через точку пересечения двух окружностей проведена прямая, пересекающая эти окружности еще раз в точках M и N. Докажите, что длина отрезка MN наибольшая, если прямая MN параллельна линии центров.

948. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC. На дуге BC, ближайшей к A, отмечают точку D и проводят через нее еще одну касательную, которая пересекает проведенные раньше в точках M и N (рис. 301). Докажите, что:

а) периметр треугольника AMN не зависит от выбора точки D;
б) величина угла MON не зависит от выбора точки D.

949. Расстояния от трех вершин параллелограмма до плоскости равны 6 см, 8 см и 16 см. Укажите возможные значения расстояний от четвертой вершины параллелограмма до этой плоскости.

950. Докажите, что угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям.

951. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота AK основания $ABCD$ имеет длину 24 см и разделяет сторону BC в отношении 2 : 3, если считать от вершины A. Учитывая, что $AB = 26$ см, $BB_1 = 45$ см, найдите площадь четырехугольника AB_1C_1D.

952. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно 12 см, а ребра основания — 8 см и 10 см. Площадь четырехугольника AB_1C_1D равна 136 см^2. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.

953. В параллелепипеде боковое ребро, равное 20 см, наклонено к плоскости основания под углом 45°, диагональное сечение, содержащее большую диагональ, перпендикулярно плоскости основания

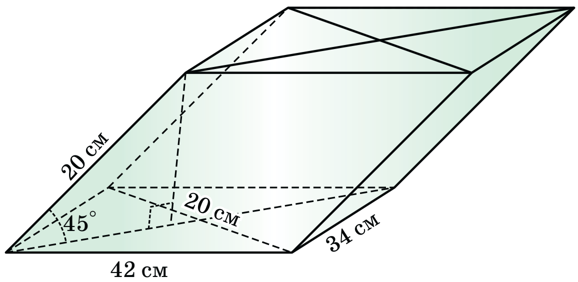


Рис. 302

(рис. 302). Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда, учитывая, что стороны основания равны 34 см и 42 см, а одна из его диагоналей — 20 см.

954. В параллелепипеде боковое ребро, равное 8 см, наклонено к плоскости основания под углом 60°, диагональное сечение, содержащее большую диагональ, перпендикулярно плоскости основания и имеет площадь 72 см^2. Найдите площадь другого диагонального сечения, учитывая, что основанием параллелепипеда является ромб со стороной 6 см.

955. Сечение куба проходит через его диагональ и середину ребра. Найдите площадь сечения, учитывая, что ребро куба равно a.

956. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, причем $a < b < c$. Какая диагональ с какой гранью образует наибольший угол; наименьший угол?

957. Сечение правильной четырехугольной призмы проходит через ее центр и середины двух смежных ребер основания (рис. 303). Найдите площадь сечения, учитывая, что ребро основания равно a, а боковое ребро — b.

958. В прямом параллелепипеде ребра основания равны 17 см и 28 см, одна из диагоналей основания — 25 см. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда, учитывая, что они в сумме составляют $\frac{16}{15}$ площади основания.

959. В прямом параллелепипеде ребра основания равны 29 см и 36 см, боковое ребро — 36 см, одна из диагоналей основания — 25 см. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через большее ребро основания и диагональ боковой грани.

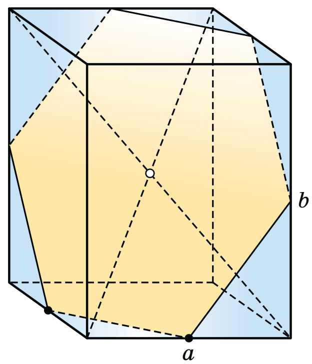


Рис. 303

960. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. На диагоналях D_1A и A_1B взяты соответственно точки M и N, причем $D_1M : D_1A = NB : A_1B = 1 : 3$. Найдите расстояние от вершины C до прямой MN.

961. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны, угол между ребром DD_1 и плоскостью основания призмы равен $\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}$, а $CD = 5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы (рис. 304). Найдите BC и угол между плоскостями D_1DC и ABC, радиус сферы, а также расстояние от ее центра до точки D.

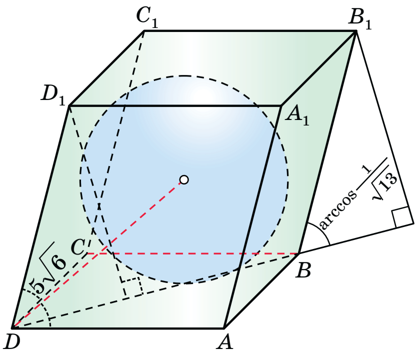


Рис. 304

962. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторой сферы. В основании призмы лежит ромб $ABCD$, угол B_1BC — острый, $\angle B_1BA = \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}$, $\angle ABC = 60°$, $AB = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. Найдите радиус сферы, угол B_1BC, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы, а также расстояние от точки B до точки касания сферы с плоскостью D_1DC.

963. В треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 13 см, 37 см и 40 см. Найдите расстояния между боковыми гранями.

964. Разверткой боковой поверхности цилиндра является квадрат со стороной 10 см. Найдите объем цилиндра.

965. Найдите высоту цилиндра, учитывая, что его полная поверхность равна 12π см^2, а радиус основания — 1 см.

966. Точка M находится вне плоскости треугольника на одинаковых расстояниях от его вершин. Установите взаимное расположение треугольника и проекции точки M на его плоскость (рис. 305), учитывая, что этот треугольник:

а) прямоугольный;

б) остроугольный;

в) тупоугольный.

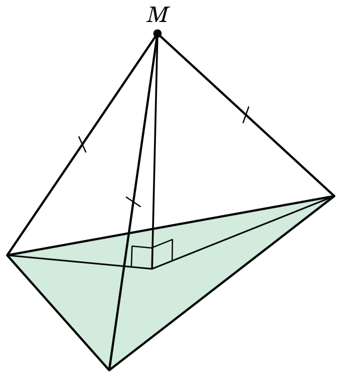


Рис. 305

967. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD равновелики. Докажите, что общий перпендикуляр прямых AB и CD проходит через середину отрезка CD.

968. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине D прямые. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

969. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине D прямые, $AD = a$, $BD = b$, $CD = a + b$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине C равна $90°$.

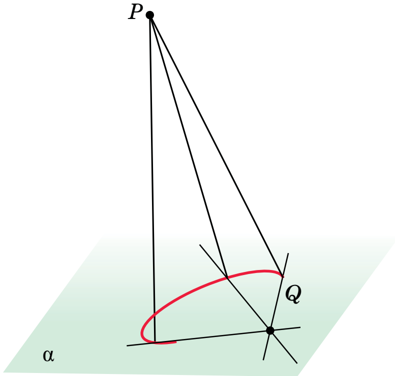


Рис. 306

970. В тетраэдре $ABCD$ суммы плоских углов при всех вершинах одинаковы. Докажите, что все грани тетраэдра равны.

971. Можно ли утверждать, что в тетраэдре $ABCD$ каждый из двугранных углов с ребрами AB, AC и AD меньше суммы двух других?

972. Докажите, что если в треугольной пирамиде $SABC$ двугранные углы $BSAC$ и $ASBC$ равны, то равны и плоские углы BSC и ASC.

973. Точка P не лежит в плоскости α. Определите, какую фигуру образуют точки, являющиеся основаниями перпендикуляров, проведенных из точки P ко всем прямым, проходящим в плоскости α через данную точку Q (рис. 306).

974. В конус с высотой h и образующей b вписан шар. Найдите радиус шара.

975. Вокруг шара с радиусом R описан усеченный конус, одно из оснований которого вдвое больше другого. Найдите объем этого конуса.

976. На линии центров двух шаров находится точечный источник света. При этом больший шар касается конуса тени, образуемой меньшим шаром (рис. 307). Учитывая, что радиус меньшего шара равен r, радиус большего шара — R и расстояние между центрами шаров — d, найдите:

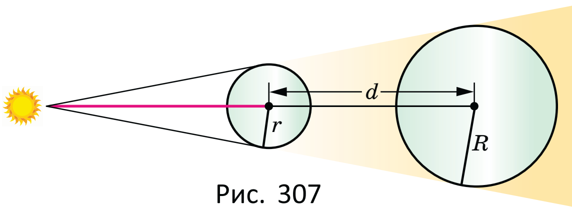


Рис. 307

а) расстояние от источника света до центра меньшего шара;

б) площадь освещенной части поверхности меньшего шара.

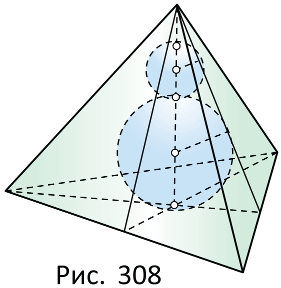


Рис. 308

977. Образующая усеченного конуса равна 4 дм, радиусы оснований равны 1 дм и 3 дм. Найдите радиус шара, описанного около усеченного конуса.

978. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой относятся как $m : n$ $(m > n)$. Найдите угол наклона к плоскости основания:

а) боковой грани; б) бокового ребра.

979. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, у которой основанием является треугольник со сторонами 13, 14 и 15, а вершина отстоит от каждой из них на 5.

980. Каждый плоский угол при вершине трехгранного угла равен 60°. В трехгранный угол вписаны два шара, касающиеся друг друга (рис. 308). Найдите отношение их радиусов.

981. Два шара с радиусом r касаются друг друга; n шаров с радиусом x, центры которых являются вершинами правильного n-угольника со стороной $2x$, касаются обоих шаров с радиусом r. Найдите x.

982. Около конуса с высотой 1 описана пирамида, основанием которой является ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите радиусы шаров, вписанных в трехгранные углы при основании и касающихся боковой поверхности конуса.

983. На плоскости P стоит равносторонний конус с высотой h. Каждый из трех равных шаров касается двух других, плоскости P и боковой поверхности конуса. Найдите радиусы шаров.

984. На плоскости P расположен конус, радиус основания которого равен 3, а высота 4. Шесть равных шаров расположены так, что каждый касается двух соседних, плоскости P и боковой поверхности конуса. Найдите радиусы шаров.

985. Найдите радиус шара, вписанного в четырехугольную пирамиду, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см, учитывая, что высота:

а) имеет длину 1 см и проходит через центр ромба;

б) имеет длину 1,8 см и проходит через вершину острого угла ромба;

в) имеет длину 4,5 см и проходит через вершину тупого угла ромба.

986. Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, у которой стороны основания равны 25 см, 29 см и 36 см, а вершина находится на расстоянии 10 см от каждого ребра основания.

987. Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, боковые ребра которой попарно перпендикулярны и равны 2 см, 10 см и 12 см.

988. Шар, вписанный в правильную четырехугольную пирамиду, и шар, описанный около нее, имеют общий центр. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

989. Шар, вписанный в n-угольную пирамиду, и шар, описанный около нее, имеют общий центр. Докажите, что эта пирамида правильная и сумма плоских углов при ее вершине равна 180°.

990. Докажите, что если плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен $\frac{180^\circ}{n}$, то шар, описанный около нее, и шар, вписанный в нее, имеют общий центр.

991. Докажите, что если шар касается всех ребер треугольной пирамиды, то суммы длин противоположных ребер одинаковы (рис. 309).

992. Точки A и B лежат в разных гранях двугранного угла на одинаковом расстоянии от ребра. Найдите на этом ребре такую точку M, чтобы угол AMB был наибольшим.

993. Пусть двугранные углы $BSAC$, $ASBC$, $ASCB$ равны соответственно $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ (рис. 310). Докажите, что справедливо неравенство:

а) $180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$; б) $\hat{A} > \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ$.

994. Двугранные углы $BSAC$ и $ASBC$ равны соответственно 90° и 50°. В каких пределах находится величина двугранного угла $ASCB$?

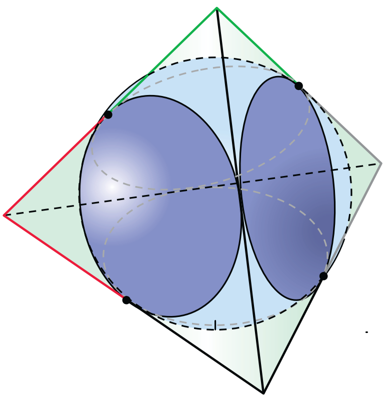


Рис. 309

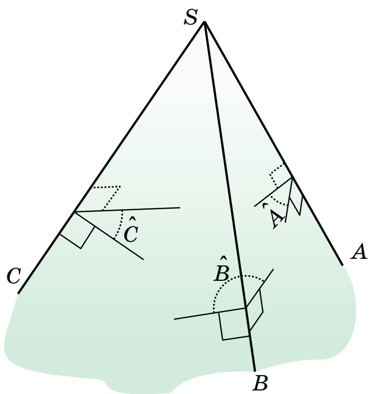


Рис. 310

995. Сумма двугранных углов $BSAC$, $ASBC$, $ASCB$ равна $360°$. Докажите, что сумма косинусов плоских углов ASB, ASC и BSC равна -1.

996. Пусть сумма двугранных углов $BSAC$, $ASBC$ равна $180°$. Докажите, что тогда сумма плоских углов ASC и BSC также равна $180°$. Определите, верно ли обратное утверждение.

997. Выбрано число d, ненулевой вектор $\vec{n}$ и точка O пространства. Докажите, что множество всех точек X пространства, для которых верно равенство $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} + d = 0$, есть плоскость. Найдите расстояние от точки O до этой плоскости.

998. Выбрано число M, точка O пространства и ненулевой вектор $\vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{a} > M$. Докажите, что множество всех точек X пространства, для которых выполняется равенство $\overrightarrow{OX}^2 - 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{OX} + M = 0$, есть сфера. Найдите центр и радиус этой сферы.

999. Определите, при каком условии плоскость $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OX} + d = 0$ касается сферы $\overrightarrow{OX}^2 - 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{OX} + M = 0$.

1000. Докажите, что если в треугольной пирамиде противоположные ребра попарно равны, то прямые, проходящие через середины противоположных ребер, попарно перпендикулярны.

2. Геометрические величины

1001. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $5 : 4$, а гипотенуза равна 82 см. Найдите отрезки, на которые разделяет гипотенузу проведенная к ней высота.

1002. Катеты прямоугольного треугольника относятся как $7 : 24$, а медиана, проведенная к гипотенузе, равна 50 см. Найдите периметр треугольника.

1003. Биссектриса прямоугольного треугольника разделяет катет на части длинами 60 м и 61 м (рис. 311). Найдите периметр треугольника.

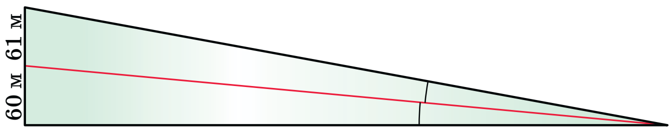


Рис. 311

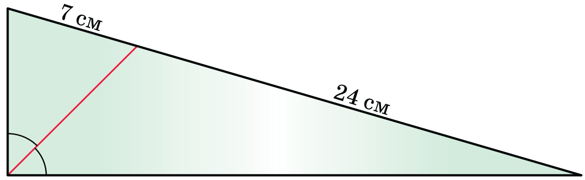


Рис. 312

1004. Биссектриса прямоугольного треугольника разделяет гипотенузу на части длинами 7 см и 24 см (рис. 312). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

1005. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, разделяет его на две части, у которых суммы биссектрисы и медианы, проведенных к меньшей стороне, равны 12 см и 35 см. Найдите сумму биссектрисы и медианы, проведенных к меньшему катету исходного треугольника.

1006. Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, разделяет ее на части длинами 7 см и 2 см. Найдите основание треугольника.

1007. Найдите стороны равнобедренного треугольника, учитывая, что его высоты равны a и b.

1008. В плоскости правильного треугольника ABC отмечена точка K. Докажите, что каждый из трех отрезков KA, KB, KC не больше суммы двух других.

1009. Медиана треугольника имеет длину $\sqrt{3}$ и образует углы $30°$ и $90°$ с прилежащими сторонами (рис. 313). Найдите площадь этого треугольника.

1010. Диагонали трапеции равны 14 см, 48 см, а средняя линия — 25 см. Найдите высоту трапеции.

1011. Основания прямоугольной трапеции равны 27 см и 53 см, а большая боковая сторона — 34 см. Найдите отрезок серединного перпендикуляра к этой стороне, ограниченный прямыми, содержащими боковые стороны трапеции.

1012. Основания равнобедренной трапеции равны 126 см и 66 см, а боковая сторона — 50 см (рис. 314). Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

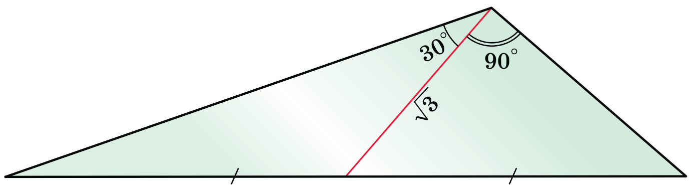


Рис. 313

1013. Вершины A, B и C трапеции $ABCD$ лежат на окружности, прямая CD — касательная. Найдите сторону AC, учитывая, что основания AB и CD трапеции равны a и b.

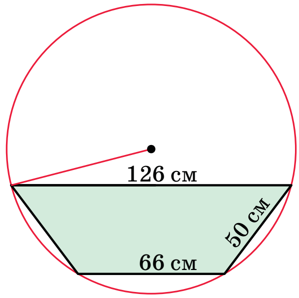


Рис. 314

1014. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны 3 и 1 соответственно, $\angle A = 2\angle B$. Найдите сторону BC и угол B, учитывая, что $CD = 1$.

1015. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 3 см, а периметр — 42 см. Найдите площадь трапеции, учитывая, что диагональ является биссектрисой тупого угла.

1016. Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а боковая сторона — 27 см. Найдите периметр треугольника, вершины которого совпадают с основаниями высот исходного.

1017. Две окружности имеют радиусы 3 см и 13 см, расстояние между их центрами равно 9 см (рис. 315). Среди хорд большей окружности, касающихся меньшей, найдите хорду:

а) наименьшей длины;
б) наибольшей длины.

1018. Основание равнобедренного треугольника равно 30 см, а радиус вписанного круга — 10 см. Найдите площадь и периметр треугольника.

1019. Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите площадь треугольника и радиус круга,

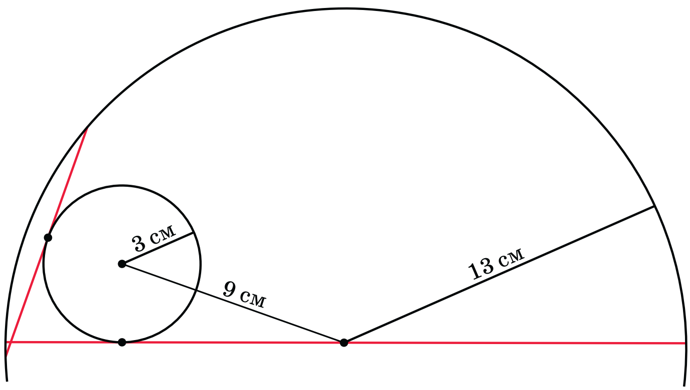


Рис. 315

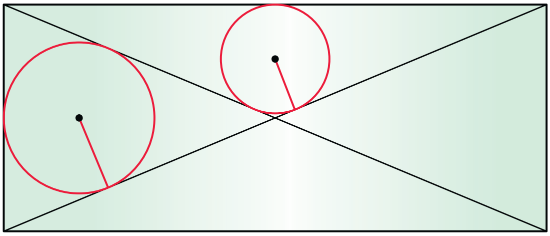


Рис. 316

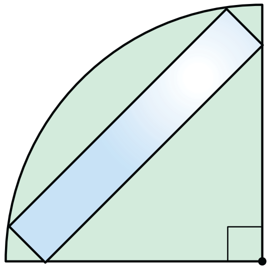


Рис. 317

касающегося его боковой стороны и продолжений двух других сторон.

1020. Найдите больший угол треугольника, одна сторона которого вдвое больше радиуса описанной окружности.

1021. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите основание треугольника, учитывая, что высота, проведенная к нему, на m больше радиуса описанного круга.

1022. Диагонали прямоугольника периметром 68 см разделяют его на четыре треугольные части (рис. 316). Найдите радиусы окружностей, вписанных в треугольные части, периметры которых отличаются на 14 см.

1023. Диагонали разделяют параллелограмм на четыре треугольника. Найдите стороны параллелограмма, учитывая, что его периметр равен 30 м, а разность между периметрами двух соседних треугольников — 9 м.

1024. В сектор с центральным углом $90°$ и радиусом R вписан прямоугольник, стороны которого относятся как $1 : 6$ (рис. 317). Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что один конец каждой из меньших сторон находится на дуге, а другой — на граничном радиусе.

1025. В полуокружность с радиусом R вписаны три окружности, две из которых равны и касаются третьей. Найдите их радиусы.

1026. В треугольнике ABC сторона BC равна a, а две другие — 12 см и 35 см. Установите, при каких значениях a угол A треугольника является:

а) острым; б) прямым; в) тупым.

1027. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC, учитывая, что:

а) $AB = 5$ см, $AC = 8$ см и $\angle A = 60°$;
б) $AB = 3$ см, $AC = 5$ см и $\angle A = 120°$;
в) $AB = 4\sqrt{2}$ см, $AC = 7$ см и $\angle A = 45°$;

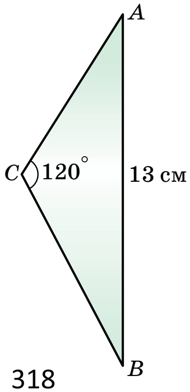


Рис. 318

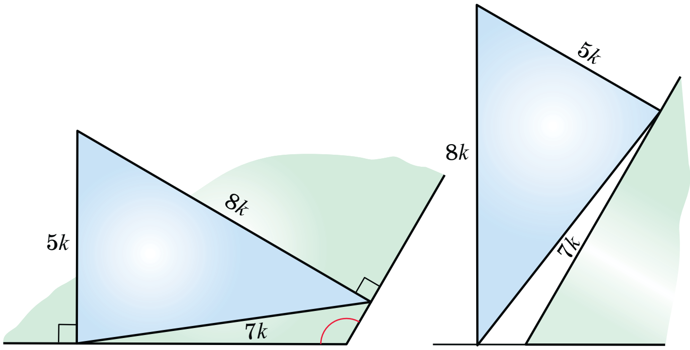


Рис. 319

г) $AB = 8$ см, $BC = 13$ см и $\angle A = 60°$;
д) $AB = 13$ см, $\angle C = 120°$ и $AC + BC = 15$ см (рис. 318);
е) $AB = 13$ см, $BC = 7$ см, $\angle A = 30°$;
ж) $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 45°$.

1028. Стороны треугольника относятся как 13 : 14 : 15. Учитывая, что средняя по длине высота равна 24 см, найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

1029. Длины перпендикуляров, опущенных из выбранной точки на прямые, содержащие стороны угла, и отрезка, соединяющего основания этих перпендикуляров, относятся как 5 : 8 : 7 (рис. 319). Найдите величину угла.

1030. Стороны AB и BC треугольника ABC равны 20 см и 34 см соответственно, а медиана BM — 21 см. Найдите высоту CK.

1031. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC равны 15 см, 13 см и 14 см соответственно. Через точки B и C проведены две прямые: первая содержит биссектрису угла B, вторая перпендикулярна AC. Они пересекаются в точке K. Найдите отрезок CK.

1032. Найдите биссектрису угла A треугольника ABC, в котором $AB = 3$ см, $AC = 6$ см и $\angle BAC = 120°$.

1033. Основания трапеции равны 6 см и 18 см, а боковые стороны — 7 см и 11 см. Найдите расстояние между серединами оснований трапеции.

1034. Докажите, что в любом четырехугольнике сумма квадратов диагоналей вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

1035. Из концов диаметра окружности, равного 25 см, проведены две хорды: одна длиной 24 см, а другая — 20 см. Найдите длину отрезка, соединяющего их свободные концы.

1036. Две стороны треугольника равны 16 см и 52 см, а диаметр описанного около треугольника круга — 65 см (рис. 320). Найдите третью сторону, учитывая, что она в треугольнике наибольшая.

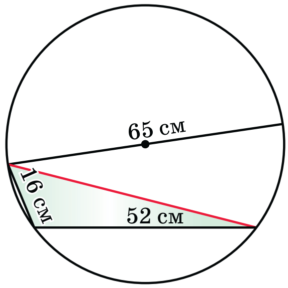


Рис. 320

1037. Стороны прямоугольника равны 2 см и 24 см. Найдите измерения равновеликого ему прямоугольника, учитывая, что они относятся как 3 : 4.

1038. Найдите площадь треугольника, в котором две стороны равны 6 см и 8 см, а угол между ними — 30°.

1039. В треугольнике площадью $6\sqrt{3}$ см^2 меньшая сторона равна 4 см, а угол при ней — 150°. Найдите большую сторону треугольника.

1040. В треугольнике известны две стороны a и b (рис. 321). Найдите третью сторону, учитывая, что высота, проведенная к ней, равна сумме высот, проведенных к известным сторонам.

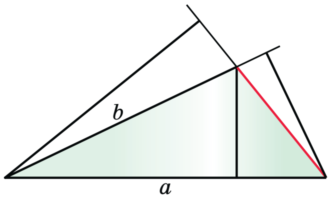


Рис. 321

1041. Определите, существует ли треугольник, высоты которого равны:

а) 2, 3 и 4; б) 4, 5 и 10.

1042. Высоты параллелограмма с периметром 80 см и углом 30° относятся как 2 : 3. Найдите площадь параллелограмма.

1043. Найдите площадь треугольника со сторонами:

а) 6 см, 25 см и 29 см;

б) 5 см, $8\frac{2}{3}$ см и $12\frac{1}{3}$ см;

в) $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{10}$ см и $\sqrt{13}$ см.

1044. Две стороны треугольника равны 10 см и 14 см, а его площадь — 300 см^2. Найдите третью сторону.

1045. Найдите площадь треугольника, учитывая, что:

а) две его стороны равны 27 см и 29 см, а медиана, заключенная между ними, — 26 см;

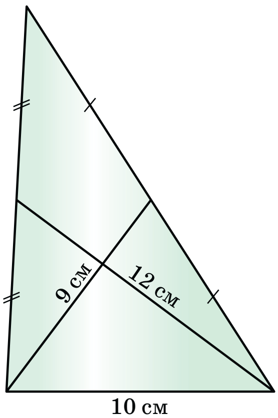


Рис. 322

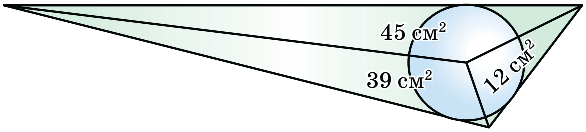


Рис. 323

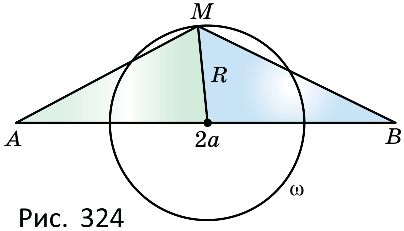


Рис. 324

б) медианы треугольника равны 6 см, 5 см и 5 см;
в) медианы треугольника равны 16 см, 30 см и 34 см;
г) одна сторона равна 10 см, а медианы к двум другим сторонам — 9 см и 12 см (рис. 322).

1046. Найдите стороны треугольника, учитывая, что:

а) одна из них вдвое меньше другой и на 8 см меньше третьей, а площадь треугольника равна $16\sqrt{5}$ см^2;
б) лучи, выходящие из центра вписанного круга и проходящие через вершины треугольника, разделяют его на части с площадями 12 см^2, 39 см^2 и 45 см^2 (рис. 323);
в) радиусы окружностей, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон, равны 2 см, 3 см и 6 см.

1047. Найдите третью сторону треугольника, учитывая, что:

а) две его стороны длинами 11 см и 23 см заключают медиану длиной 11 см;
б) две его стороны имеют длины 10 см и 17 см, а описанная окружность имеет радиус 10,625 см.

1048. Две стороны треугольника длинами 20 см и 45 см заключают биссектрису длиной 24 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса разделяет третью сторону треугольника.

1049. Центр окружности ω с радиусом R есть середина отрезка AB, точка M взята на окружности ω (рис. 324). Найдите сумму квадратов расстояний от точки M до концов отрезка AB, учитывая, что длина отрезка AB равна $2a$.

1050. Самая удаленная от прямой l точка A окружности ω находится на расстоянии a. Прямая, проведенная через точку A, пересекает окружность в точке B и прямую l в точке C (рис. 325). Найдите произведение длин отрезков AB и AC, учитывая, что радиус окружности ω равен R.

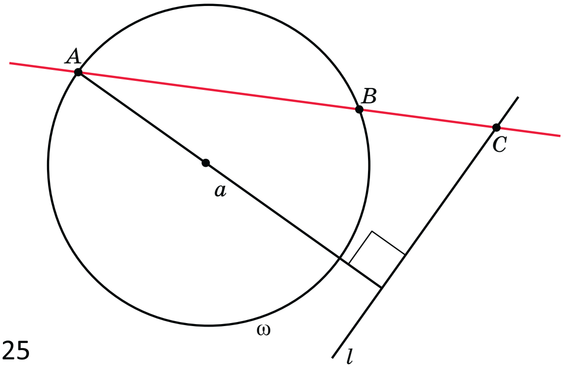


Рис. 325

1051. Прямая, проведенная через середину высоты BK равнобедренного треугольника ABC, пересекает его боковые стороны AB и BC в точках P и Q. Найдите высоту BK, учитывая, что $\angle ABK = \beta$, $\angle BPQ = \alpha$ и $PQ = m$.

1052. Медиана BK длиной m образует со сторонами AB и BC треугольника ABC углы α и β соответственно. Найдите стороны AB и BC.

1053. Докажите, что углы любого треугольника связаны равенством:

а) $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C$;

б) $1 - 2 \sin A \sin B \cos C = \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$.

1054. Докажите, что в любом треугольнике произведение двух его сторон равно произведению диаметра окружности, описанной около этого треугольника, и высоты, проведенной к третьей стороне.

1055. Докажите, что в любом треугольнике произведение двух его сторон равно квадрату биссектрисы, заключенной между этими сторонами, уменьшенному на произведение отрезков, на которые третья сторона разделена этой биссектрисой.

1056. Найдите биссектрисы треугольника, стороны которого равны 7, 8 и 9.

1057. Точки M, N, K на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC расположены так, что $AM : MB = 2 : 1$, $BN : NC = 3 : 2$, $CK : KA = 1 : 3$. Найдите отношение отрезков, на которые:

а) прямая MN разделяет отрезок BK;

б) прямая BK разделяет отрезок MN.

1058. Точки P, Q, R на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC расположены так, что $AP : PB = 2 : 3$, $BQ : QC = 1 : 2$, $CR : RA = 3 : 1$ (рис. 326). Учитывая, что O — точка пересечения прямых PQ и RB, найдите, какую часть площади треугольника ABC составляет:

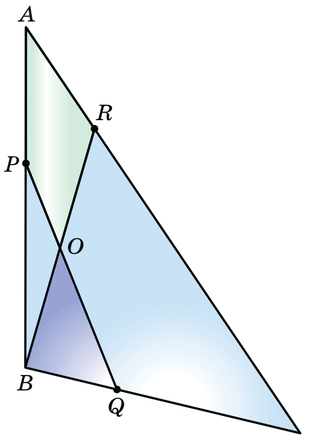


Рис. 326

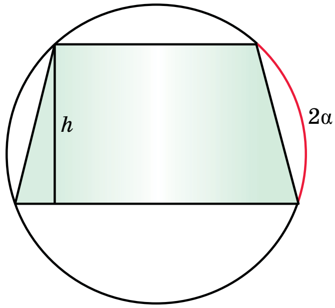


Рис. 327

а) площадь треугольника BOQ;

б) площадь четырехугольника $PORA$.

1059. Найдите площадь равнобедренной трапеции, в которой диагональ перпендикулярна боковой стороне и длины трех сторон равны $2a$ каждая.

1060. Найдите сторону ромба, учитывая, что сумма его диагоналей равна m, а площадь — S.

1061. Диагональ равнобедренной трапеции с площадью 12 см^2 равна 5 см. Найдите среднюю линию трапеции.

1062. Боковая сторона трапеции, вписанной в окружность, стягивает дугу величиной 2α (рис. 327). Найдите площадь трапеции, учитывая, что ее высота равна h.

1063. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 7 см и 8 см, а диагонали — 13 см и 14 см.

1064. Площадь трапеции равна 250 м^2, ее высота — 10 м, а одно из оснований не меньше 24 м. Каким может быть другое основание трапеции?

1065. Площадь трапеции равна 144 см^2, а ее основания — 17 см и 7 см. Какой может быть меньшая боковая сторона трапеции?

1066. На основании равнобедренного треугольника с боковой стороной a выбрана точка на расстоянии b от вершины (рис. 328). Учитывая, что прямая, проведенная через эту точку и

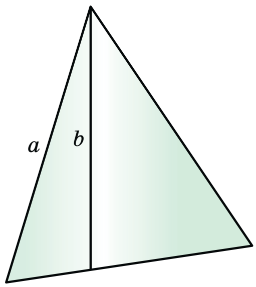


Рис. 328

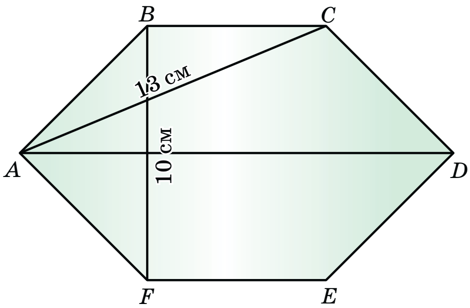


Рис. 329

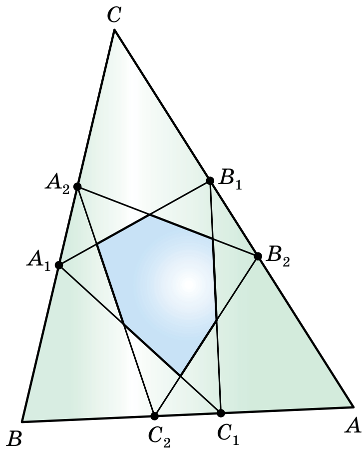


Рис. 330

вершину треугольника, разделяет угол при вершине в отношении 2 : 1, найдите площадь треугольника.

1067. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и его диагональ BD, учитывая, что $AB = 17$ см, $BC = 25$ см, $CD = 26$ см, $AD = 30$ см, $AC = 28$ см.

1068. Многоугольник, описанный около окружности, имеет площадь S и периметр P. Найдите радиус окружности.

1069. Шестиугольник $ABCDEF$ с равными сторонами состоит из двух трапеций с общим основанием AD (рис. 329). Найдите его площадь, учитывая, что $AC = 13$ см и $BF = 10$ см.

1070. На сторонах треугольника ABC отмечены точки: C_1 и C_2 на AB, A_1 и A_2 на BC, B_1 и B_2 на CA, разделяющие каждую сторону в отношении 2 : 1 : 2 (рис. 330). Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2, учитывая, что площадь треугольника ABC равна S.

1071. Стороны параллелограмма равны 4 см и 7 см. Найдите отношение, в котором биссектриса одного из углов разделяет его площадь.

1072. Расстояния от точки пересечения медиан треугольника до его сторон относятся как 2 : 3 : 4. Найдите эти стороны, учитывая, что периметр треугольника равен 78 см.

1073. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны 7 см и 11 см, а одна из диагоналей — 12 см. Найдите другую диагональ.

1074. Три окружности с радиусами 8 см, 5 см и 5 см попарно касаются. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех.

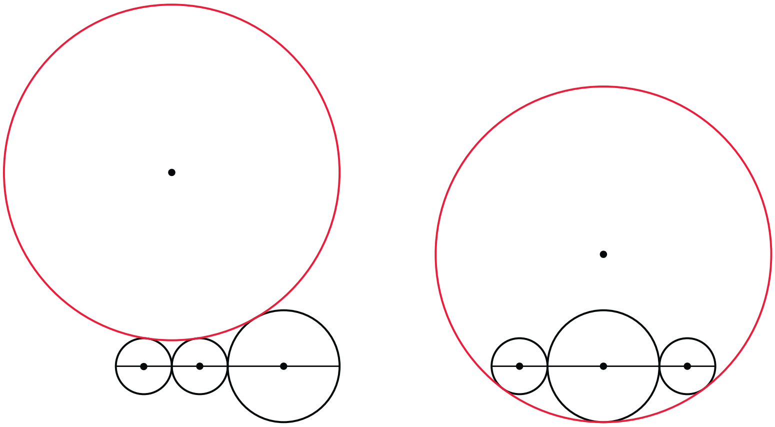


Рис. 331

1075. Центры трех окружностей с радиусами 3 см, 3 см и 6 см, одна из которых касается двух других, лежат на одной прямой (рис. 331). Найдите радиус четвертой окружности, касающейся всех трех.

1076. Середины сторон параллелограмма соединены с вершинами противоположной стороны. Определите, какую часть площади параллелограмма составляет площадь восьмиугольника, ограниченного проведенными отрезками.

1077. Найдите периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются основания высот треугольника со сторонами, равными 7 см, 8 см и 9 см.

1078. Угол A треугольника ABC на $90°$ больше угла B. Найдите сторону AB, учитывая, что $AC = 15$ см и $BC = 20$ см.

1079. Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого равны $\sqrt{2}$ и $4\sqrt{3}$, а периметр — 14.

1080. Найдите площадь трапеции, у которой диагонали равны d_1 и d_2, а высота — h.

1081. Две окружности с радиусами R и $3R$ касаются внешним образом (рис. 332). Найдите площадь фигуры, ограниченной ими и их общей касательной.

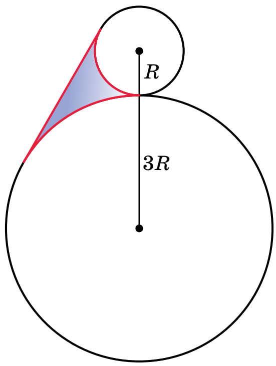


Рис. 332

1082. Окружность касается дуги и радиусов сектора в точках M и N. Учитывая, что центральный

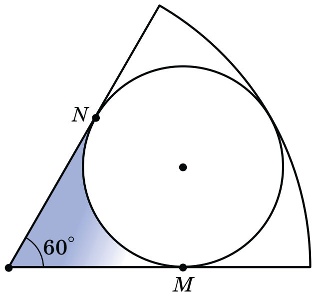


Рис. 333

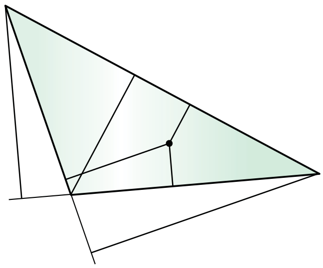


Рис. 334

угол сектора равен 60°, а его радиус — R (рис. 333), найдите площадь закрашенной фигуры.

1083. Диаметр окружности является основанием правильного треугольника. Найдите, какая часть площади треугольника находится вне круга.

1084. Через вершины квадрата проведены прямые, образующие со сторонами углы величиной 60°. Найдите, какая часть площади квадрата ограничена проведенными прямыми.

1085. Докажите, что если площади двух прямоугольных треугольников относятся как квадраты их гипотенуз, то такие треугольники подобны.

1086. Внутри треугольника выбрана точка. Из нее проведены перпендикуляры к сторонам и найдены отношения этих перпендикуляров к параллельным им высотам (рис. 334). Докажите, что сумма этих отношений равна единице.

1087. Прямыми, параллельными диагонали параллелограмма, он разделен на три равновеликие фигуры. Найдите, в каком отношении эти прямые разделяют стороны параллелограмма.

1088. Круг с радиусом R разделен двумя окружностями с тем же центром на три равновеликие фигуры. Найдите радиусы этих окружностей.

1089. На стороне треугольника площадью 162 м^2 выбраны две точки, разделяющие ее в отношении 2 : 3 : 4. Через эти точки проведены прямые, параллельные стороне треугольника. Найдите площади частей, на которые эти прямые разделили треугольник.

1090. Отрезки AB и CD лежат на скрещивающихся прямых, точки M и N — середины этих отрезков (рис. 335). Докажите, что $MN < \dfrac{AC + BD}{2}$.

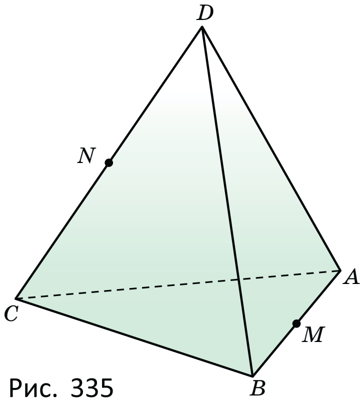


Рис. 335

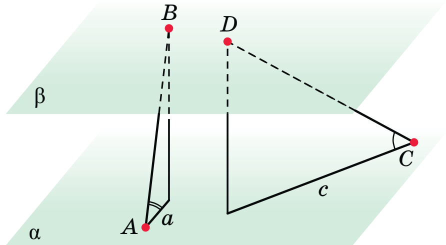


Рис. 336

1091. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $BC = AC = a$. Учитывая, что $SA = SB = SC = b$, найдите расстояние между прямыми AB и CS.

1092. Точка M пространства находится на расстоянии a от вершин правильного шестиугольника и на расстоянии b от его сторон. Найдите расстояния от точки M до плоскости шестиугольника и до его меньшей диагонали.

1093. Ребро куба равно a. Через центр куба проводят плоскость, параллельную диагоналям двух смежных граней. Найдите возможные значения площади сечения.

1094. Через центр куба с ребром 1 см проводят плоскость, перпендикулярную его диагонали. Найдите площадь сечения.

1095. Точка M пространства находится на расстоянии a от вершин прямоугольника и на расстоянии d от его плоскости. Найдите стороны прямоугольника, учитывая, что их отношение равно k.

1096. Концы отрезков AB и CD лежат в параллельных плоскостях α и β. Угол между плоскостью α и отрезком AB вдвое меньше угла между отрезком CD и этой плоскостью (рис. 336). Учитывая, что проекции отрезков AB и CD на плоскость α равны a и c соответственно, найдите расстояние между плоскостями.

1097. Длины сторон треугольника равны a, a и b, его проекцией на плоскость является равносторонний треугольник. Найдите длину его стороны.

1098. Имеется ромб с диагоналями d_1 и d_2. Плоскость α проходит через одну из сторон ромба и образует угол φ с другой его стороной. Найдите площадь проекции ромба на плоскость α.

1099. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребра основания вдвое меньше боковых ребер. Изобразите в тетради этот параллелепипед и общий перпендикуляр прямых BA_1 и CB_1. Найдите длину этого перпендикуляра, учитывая, что ребро основания равно a.

1100. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы, равная 6, образует угол 30° с плоскостью другой боковой грани. Найдите объем призмы.

1101. Плоскость проходит через вершину куба и середины двух ребер (рис. 337). Найдите отношение объемов полученных частей, учитывая, что одна из них — треугольная пирамида.

1102. Найдите объем прямого параллелепипеда, учитывая, что его диагональ имеет длину 13 см, наклонена к плоскости основания под углом arctg 2,4 и образует с большим ребром основания угол $\operatorname{arctg} 0{,}75\sqrt{17}$.

1103. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной a. Диагонали параллелепипеда образуют с плоскостью основания углы в 30° и 45°. Найдите:

а) высоту параллелепипеда;

б) углы ромба;

в) площадь основания параллелепипеда;

г) площади диагональных сечений параллелепипеда;

д) объем параллелепипеда.

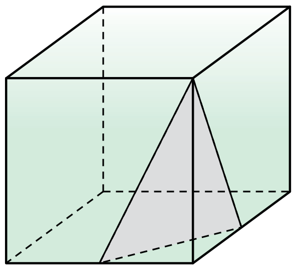


Рис. 337

1104. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, их общее ребро длиной 45 см отстоит от других боковых ребер на 11 см и 60 см. Найдите боковую поверхность и объем призмы.

1105. Ребро основания прямого параллелепипеда равно a, сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через это ребро и диагональ боковой грани, имеет площадь Q и образует с боковой гранью двугранный угол, величина которого равна величине острого угла основания (рис. 338). Найдите другое ребро основания.

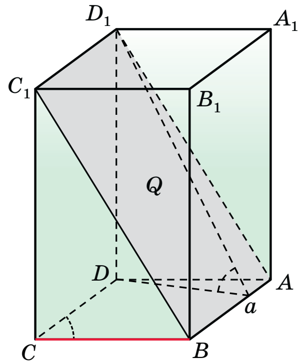


Рис. 338

1106. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. На диагоналях D_1A и A_1B взяты соответственно точки M и N, причем $D_1M : D_1A = NB : A_1B = 1 : 3$. Найдите расстояние от вершины C до прямой MN.

1107. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равносторонний треугольник ABC. Сфера, радиус которой равен ребру основания призмы, касается плоскости $A_1B_1C_1$ и продолжений отрезков AB_1, BC_1 и CA_1 за точки B_1, C_1 и A_1 соответственно. Найдите ребро основания призмы, учитывая, что боковые ребра равны 2.

1108. В параллелепипеде с боковым ребром 13 см перпендикулярным сечением является ромб с диагональю 8 см и площадью 24 см^2. Учитывая, что котангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания равен 2,4, найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

1109. В параллелепипеде боковое ребро, равное 8 см, наклонено к плоскости основания под углом 60°, диагональное сечение, содержащее большую диагональ, перпендикулярно плоскости основания и имеет площадь 72 см^2. Найдите площадь другого диагонального сечения, учитывая, что основанием параллелепипеда является ромб со стороной 6 см.

1110. Сечение правильной четырехугольной призмы проходит через ее центр и середины двух смежных ребер основания (рис. 339). Найдите площадь сечения, учитывая, что ребро основания равно a, а боковое ребро — b.

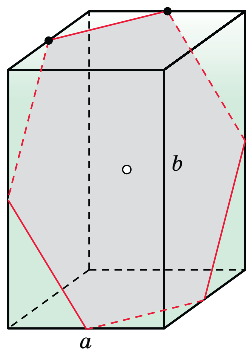


Рис. 339

1111. В прямой треугольной призме с высотой h двугранный угол при одном боковом ребре равен 60°, а при другом — 30°. Сечение призмы плоскостью, разделяющей пополам двугранный угол при третьем боковом ребре, имеет площадь Q. Найдите:

а) площадь боковой поверхности призмы;
б) площадь полной поверхности призмы;
в) объем призмы.

1112. Правильная шестиугольная призма диагональной плоскостью разделяется на две равные четырехугольные призмы, боковая поверхность каждой из которых равна 30 см^2. Учитывая, что боковое ребро призмы равно 3 см, найдите:

а) площадь боковой поверхности шестиугольной призмы;
б) площадь полной поверхности шестиугольной призмы;

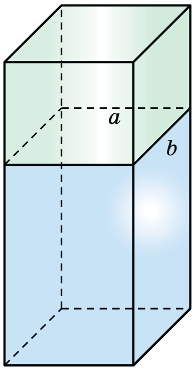


Рис. 340

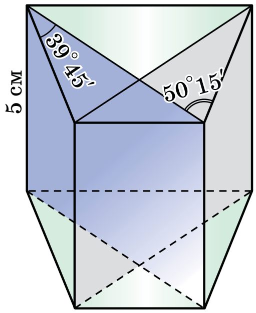


Рис. 341

в) площади диагональных сечений шестиугольной призмы;
г) объем шестиугольной призмы.

1113. Два подобных и неравных прямоугольных параллелепипеда имеют общую грань, стороны которой a и b (рис. 340). Найдите объемы параллелепипедов.

1114. Сумма объемов двух подобных призм равна V, а отношение соответствующих ребер — $m : n$. Найдите объем каждой призмы.

1115. Боковое ребро прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 12 см, а ребра основания — 8 см и 10 см. Площадь четырехугольника AB_1C_1D равна 136 см^2. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.

1116. Боковое ребро параллелепипеда, равное 20 см, наклонено к плоскости основания под углом 45°. Диагональное сечение, содержащее большую диагональ, перпендикулярно плоскости основания. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда, учитывая, что стороны основания равны 34 см и 42 см, а одна из его диагоналей — 20 см.

1117. Основанием призмы с боковым ребром 5 см является равнобедренная трапеция. Диагональные сечения перпендикулярны плоскости основания и образуют с непараллельными гранями призмы углы в 50°15′ и 39°45′ (рис. 341). Найдите объем призмы, учитывая, что площадь диагонального сечения равна 30 см^2.

1118. Грани ABB_1 и BCC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольники. Учитывая, что длины отрезков AB, BC, BB_1, B_1D пропорциональны числам 5, 1, 2, 5, найдите двугранные углы BB_1 и CC_1.

1119. Площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы равна 800 см^2. Найдите объем этой призмы, учитывая, что ее боковое ребро на 5 см больше ребра основания.

1120. Площадь диагонального сечения куба равна Q. Найдите полную поверхность куба и его объем.

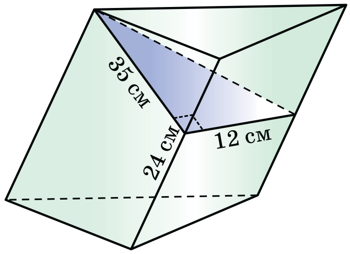


Рис. 342

1121. Найдите расстояние от диагонали куба до его ребра, которое с этой диагональю не лежит в одной плоскости, учитывая, что ребро куба равно a.

1122. Две боковые грани наклонной треугольной призмы взаимно перпендикулярны, их общее ребро длиной 24 см отстоит от других ребер на 12 см и 35 см (рис. 342). Найдите боковую поверхность призмы.

1123. Ребра основания треугольной призмы равны a, боковое ребро длиной b образует с прилежащими ребрами основания углы в 45°. Найдите боковую поверхность призмы.

1124. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с боковым ребром 13 см вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C. Найдите полную поверхность призмы, учитывая, что $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см.

1125. От правильной треугольной призмы с ребром основания a и высотой h отрезали две части и получили наклонную треугольную призму с боковым ребром b (рис. 343). Найдите боковую поверхность наклонной призмы.

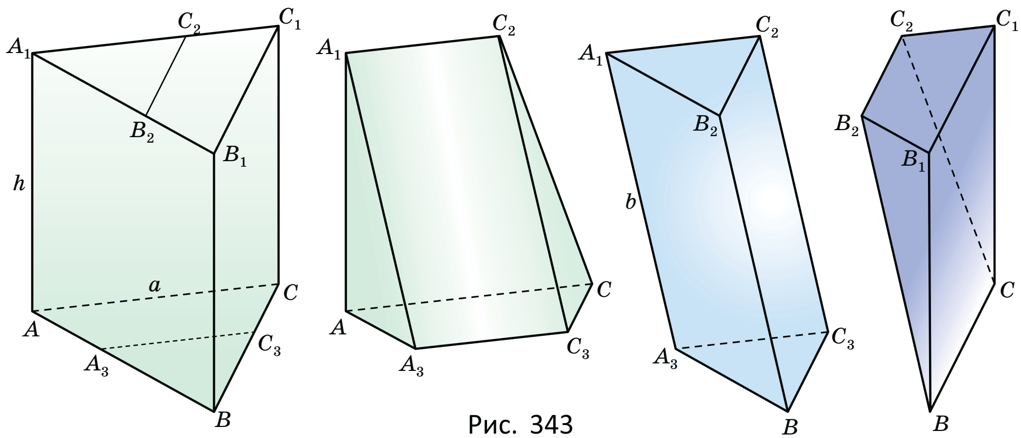


Рис. 343

1126. Сечение правильной треугольной призмы с ребром основания a проходит через боковое ребро перпендикулярно противоположной боковой грани и имеет площадь Q. Найдите полную поверхность призмы.

1127. Боковая поверхность правильной шестиугольной призмы равна 180 см^2. Найдите полную поверхность призмы, учитывая, что ее наибольшая диагональ равна 13 см.

1128. Сечение ABD прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковым ребром 60 см образует с плоскостью основания угол 60° и имеет площадь 600 см^2. Найдите полную поверхность призмы, учитывая, что в треугольнике ABD сторона AB на 10 см короче проведенной к ней высоты.

1129. Расстояния между боковыми ребрами AA_1 и BB_1, AA_1 и CC_1 треугольной призмы равны 20 см и 26 см соответственно. Учитывая, что высота призмы равна 48 см, проекция бокового ребра на плоскость основания — 14 см, BC = 40 см, найдите площадь боковой поверхности призмы.

1130. В основании четырехугольной пирамиды лежит параллелограмм с диагональю 3 см и сторонами 4 см и 5 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 2 см (рис. 344). Найдите полную поверхность пирамиды.

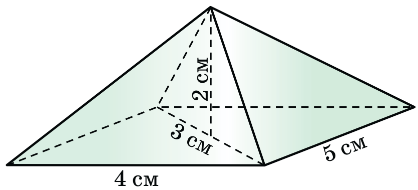


Рис. 344

1131. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб. Две боковые грани, образующие двугранный угол в 120°, перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом 30°. Найдите боковую и полную поверхности пирамиды, учитывая, что ее высота равна H.

1132. Основаниями правильной усеченной пирамиды являются квадраты со сторонами a и b. Найдите боковую поверхность пирамиды, учитывая, что ее высота равна H.

1133. В четырехугольной пирамиде с высотой 105 см двугранные углы при основании равны. Плоскость, параллельная основанию, пересекает пирамиду по ромбу с диагоналями 15 см и 20 см. Найдите боковую поверхность и объем усеченной пирамиды, учитывая, что площадь сечения составляет $\frac{1}{9}$ площади основания.

1134. Двугранные углы при основании четырехугольной пирамиды с высотой 17,92 см равны. Плоскость, параллельная основанию, пере-

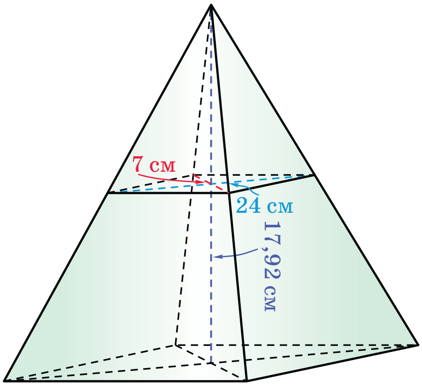


Рис. 345

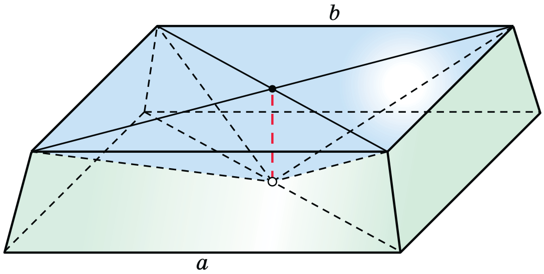


Рис. 346

секает пирамиду по ромбу с диагоналями 7 см и 24 см (рис. 345). Найдите полную поверхность и объем усеченной пирамиды, учитывая, что площадь сечения составляет $\frac{1}{4}$ площади основания.

1135. В основании усеченной пирамиды лежат правильные треугольники со сторонами a и b, одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно c. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

1136. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b. Ее меньшее основание служит основанием другой пирамиды, вершина которой совпадает с центром большего основания усеченной пирамиды (рис. 346). Учитывая, что боковые поверхности пирамид равны, найдите их общую высоту.

1137. Высота пирамиды равна H. Плоскости, параллельные основанию пирамиды, разделяют ее боковую поверхность на n частей с равными площадями. Найдите расстояния от вершины пирамиды до этих плоскостей.

1138. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна H, расстояние от ее середины до боковой грани равно d. Найдите объем пирамиды.

1139. В правильной шестиугольной пирамиде с ребром основания a меньшее диагональное сечение имеет площадь S. Найдите объем пирамиды.

1140. В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от вершины основания до противоположного бокового ребра в k раз больше, чем до соседнего. Найдите объем пирамиды, учитывая, что высота равна H.

1141. В правильной восьмиугольной пирамиде с объемом V боковое ребро втрое больше радиуса описанной около ее основания окружности (рис. 347). Найдите этот радиус.

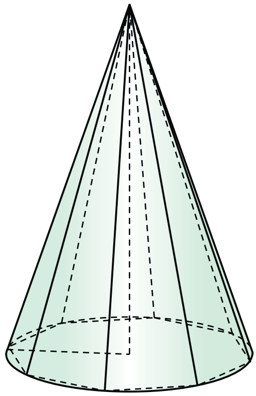


Рис. 347

1142. В основании пирамиды лежит ромб с периметром 100 см и диагональю 14 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°.

1143. В основании пирамиды лежит квадрат, одно из ее боковых ребер равно 12 см и перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, учитывая, что площадь ее большей боковой грани равна 160 см^2.

1144. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, диагональ которой является биссектрисой угла при большем основании, равном 12 см. Найдите объем пирамиды, учитывая, что высота трапеции равна высоте пирамиды.

1145. В основании пирамиды лежит прямоугольник с измерениями 12 см и 30 см, ее боковая поверхность равна 504 см^2. Найдите объем пирамиды, учитывая, что ее вершина проецируется в точку пересечения диагоналей основания.

1146. Металлический сплошной конус, высота которого равна 12,61 см, переплавлен в шар с толщиной стенок 1 см и внутренним радиусом, равным радиусу основания конуса. Найдите внутренний объем шара.

1147. В коническую емкость, ось которой вертикальна, налита вода, уровень которой находится на расстоянии 8 см от вершины конуса. Образующая водного конуса равна 10 см. Когда в емкость опустили шар, то уровень воды поднялся на 1 см. Найдите радиус шара.

1148. В шар вписана прямая треугольная призма, стороны основания которой 2 м, 2 м и 3,2 м. Поверхность призмы равна 18,24 м^2. Найдите поверхность шара.

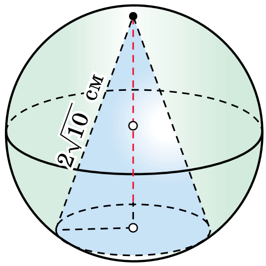


Рис. 348

1149. Поверхность шара равна 400π см^2, а образующая конуса, вписанного в этот шар, равна $2\sqrt{10}$ см (рис. 348). Найдите объем конуса.

1150. Боковые ребра пирамиды, основанием которой служит прямоугольник, равны между собой. Высота пирамиды равна 14,4 м. Большая сторона основания равна 21,6 м, радиус сферы, описанной около этой пирамиды, равен 12,5 м. Найдите поверхность пирамиды.

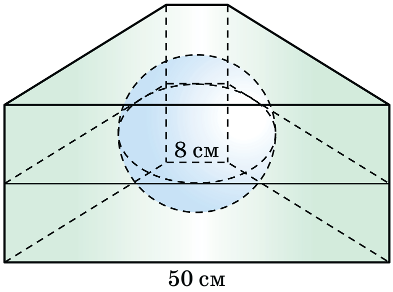


Рис. 349

1151. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно радиусу описанного около нее шара. Найдите объем пирамиды, учитывая, что ребро основания равно a.

1152. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Найдите отношение объема шара к объему призмы.

1153. Около шара описана прямая призма, в основании которой лежит равнобедренная трапеция (рис. 349). Параллельные стороны трапеции равны 8 см и 50 см. Найдите полную поверхность и объем призмы.

1154. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB равно m, высоты AA_1 и BB_1 граней ACD и BCD соответственно равны a и b, отрезок A_1B_1 равен n. Найдите величину двугранного угла CD.

1155. В треугольной пирамиде $ABCD$ равны все плоские углы при вершине D. Учитывая, что двугранный угол с ребром AD равен φ, найдите косинус плоского угла при вершине D.

1156. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы ADB, ADC и BDC равны φ, φ и $90°$ соответственно. Учитывая, что точка D находится на расстоянии h от плоскости ABC, найдите AD.

1157. Призма описана около сферы. Найдите площадь ее боковой поверхности, учитывая, что площадь основания призмы равна S.

1158. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с острым углом α, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, учитывая, что площадь вписанной в нее сферы равна S.

1159. Большим основанием усеченной пирамиды является равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ABC = \alpha$, $AB = BC = a$, боковые грани, содержащие равные стороны основания, ему перпендикулярны, а третья боковая грань образует с основанием двугранный угол β. Учитывая, что в усеченную пирамиду вписана сфера, найдите ее радиус.

1160. В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что если прямая l проходит через середины ребер AC и BD, то она проходит через центр O описанной сферы, центр I вписанной сферы и точку M, в которой пересекаются отрезки, соединяющие каждую вершину пирамиды с точкой пересечения медиан противоположной грани.

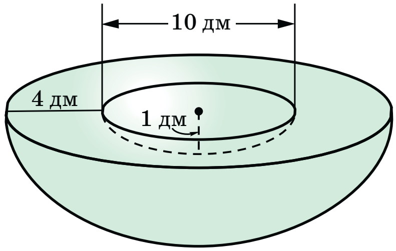


Рис. 350

1161. Плоскость разделяет поверхность шара в отношении 1 : 2. В каком отношении она разделяет объем шара?

1162. Тело имеет форму шарового сегмента, в котором сделана концентрическая выемка. Ширина кругового кольца в основании сегмента равна 4 дм; глубина выемки равна 1 дм, а ее диаметр равен 10 дм (рис. 350). Найдите объем и полную поверхность этого тела.

1163. Два равных шара с радиусом R при пересечении образуют тело, которое в оптике называют линзой. Найдите площадь ее поверхности и объем, учитывая, что расстояние между центрами шаров равно R.

1164. Из вершины конуса как из центра описана сферическая поверхность, касающаяся основания конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, учитывая, что указанная поверхность разделяет его объем пополам.

1165. Шаровой слой и цилиндр имеют общие основания; объем слоя вдвое больше объема цилиндра. Найдите величину дуги в осевом сечении слоя.

3. Координаты и векторы

1166. Докажите, что точки $A(-1;\ 2;\ 1)$, $B(-2;\ 1;\ -1)$, $C(0;\ -1;\ 2)$ лежат на одной прямой.

1167. Точки $A(-1;\ 3;\ 1)$, $S(0;\ 1;\ -2)$, $P(1;\ 0;\ -1)$ являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты еще одной вершины этого параллелограмма.

1168. На оси Oz найдите точку P, равноудаленную от точек $A(3;\ 2;\ 1)$ и $B(0;\ -2;\ -1)$ (рис. 351).

1169. На оси Oy найдите точку P, равноудаленную от точек $C(1;\ -1;\ 2)$ и $D(8;\ 1;\ 0)$.

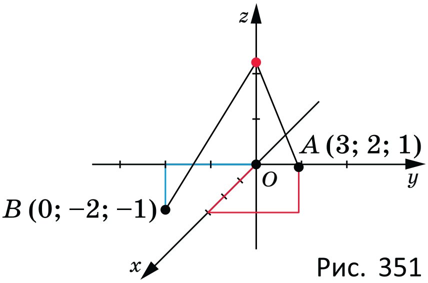


Рис. 351

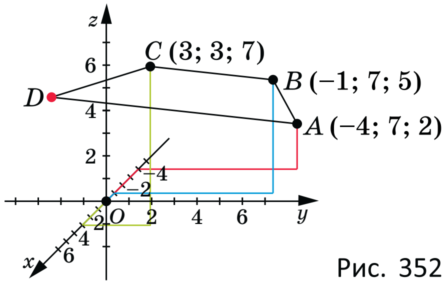


Рис. 352

1170. Найдите расстояния до координатных осей от точки:

а) $F(-4;\ 3;\ -1)$; б) $G(5;\ 12;\ -35)$.

1171. Точка M луча AB находится на расстоянии 7 от его начала. Найдите координаты точки M, учитывая, что:

а) $A(-12;\ 6;\ -4)$, $B(0;\ 0;\ 0)$; б) $A(-1;\ 5;\ -4)$, $B(8;\ -13;\ -10)$.

1172. Точки $A(-4;\ 7;\ 2)$, $B(-1;\ 7;\ 5)$, $C(3;\ 3;\ 7)$ — вершины равнобедренной трапеции $ABCD$ с основанием AD (рис. 352). Найдите координаты вершины D.

1173. Даны точки $A(2;\ -3;\ 2)$, $B(-4;\ 4;\ 4)$, $C(0;\ 3;\ 2)$, $D(5;\ 7;\ 1)$. Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.

1174. Точка D — проекция точки $C(-1;\ 8;\ -3)$ на прямую AB. Найдите координаты точки D, учитывая, что $A(4;\ 5;\ -2)$, $B(-2;\ 3;\ 0)$.

1175. Найдите расстояния между прямой AB и координатными осями, учитывая, что:

а) $A(-11;\ 6;\ 2)$, $B(9;\ 14;\ -13)$; б) $A(-3;\ 9;\ 10)$, $B(9;\ -7;\ 1)$.

1176. Найдите длины сторон и косинусы углов треугольника ABC, учитывая, что:

а) $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(-1;\ 1;\ 6)$;

б) $A(3;\ 5;\ 4)$, $B(1;\ 2;\ -2)$, $C(-1;\ 0;\ 2)$.

1177. Даны точки A и B. Найдите условие, которому удовлетворяют координаты всех точек M пространства, для которых $\angle AMB = 90°$, учитывая, что:

а) $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(-1;\ 1;\ -4)$; б) $A(3;\ 4;\ 5)$, $B(1;\ 2;\ -3)$.

1178. Точки $A(3;\ -1;\ m)$, $B(-2;\ n;\ 1)$, $C(l;\ 5;\ 6)$ принадлежат плоскости $3x - 2y + 4z + 1 = 0$. Найдите значения m, n, l.

1179. Даны точки A и B. Найдите условие, которому удовлетворяют координаты всех точек M пространства, равноудаленных от A и B, учитывая, что:

а) $A(3;\ -3;\ 2)$, $B(-1;\ 1;\ -4)$; б) $A(3;\ -2;\ 5)$, $B(1;\ 2;\ -3)$.

1180. Прямая l пересекает две координатные плоскости в точках $A(1;\ 0;\ –1)$ и $B(0;\ –1;\ 1)$ (рис. 353). Найдите, в какой точке прямая l пересекает третью координатную плоскость.

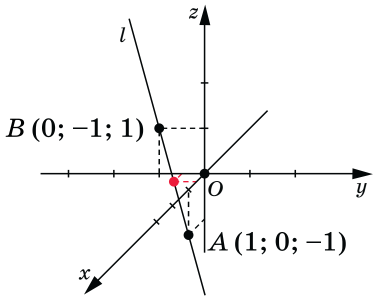


Рис. 353

1181. Найдите значения m и n, учитывая, что линии пересечения плоскостей $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ и $2x - y + 3z + 5 = 0$ принадлежит точка:

а) $A(1;\ m;\ n)$; б) $B(m;\ 2;\ n)$.

1182. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, параллельного линии пересечения плоскостей $3x - 2y + 4z + 1 = 0$ и $2x - y + 3z + 5 = 0$.

1183. Найдите уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $3x - 2y + 2z + 1 = 0$ и $2x - y + z + 5 = 0$ и точку:

а) $A(1;\ 0;\ –1)$; б) $B(–1;\ –1;\ 1)$.

1184. Найдите координаты точек пересечения координатных плоскостей с прямой AB, учитывая, что:

а) $A(–4;\ 1;\ –1)$, $B(1;\ 3;\ –2)$; б) $A(1;\ 1;\ 2)$, $B(2;\ –1;\ 3)$.

1185. Докажите, что в одной плоскости лежат точки:

а) $A(3;\ –2;\ 3)$, $B(–2;\ 1;\ 2)$, $C(2;\ 1;\ –2)$, $D(–6;\ 3;\ 2)$;
б) $A(–1;\ –1;\ 1)$, $B(1;\ 2;\ –2)$, $C(1;\ –1;\ –5)$, $D(2;\ 3;\ –4)$.

1186. Найдите уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно линии пересечения плоскостей $x + 2y + z - 2 = 0$ и $3x - y + z + 1 = 0$ через точку:

а) $A(3;\ –2;\ 3)$; б) $B(–1;\ 2;\ 0)$.

1187. Определите, на каком расстоянии от линии пересечения плоскостей $x + 2y + z - 2 = 0$ и $3x - y + z + 1 = 0$ находится точка:

а) $A(–2;\ –7;\ 2)$; б) $B(–3;\ –1;\ 7)$.

1188. В плоскости $2x - 3y + z - 3 = 0$ находится квадрат $ABCD$. Найдите координаты точек B и D, учитывая, что:

а) $A(1;\ 1;\ 4)$, $C(3;\ 1;\ 0)$; б) $A(2;\ 0;\ –1)$, $C(–2;\ –2;\ 1)$.

1189. Найдите координаты центра и радиус сферы, проходящей через точку $C(9;\ 1;\ 10)$ и касающейся координатных плоскостей.

1190. Изобразите в тетради оси Ox, Oy, Oz системы координат. Покажите на рисунке линии пересечения координатных плоскостей с плоскостью:

а) $3x - 2y + 4z - 12 = 0$; б) $2x - 3y - z - 12 = 0$.

1191. Изобразите в тетради оси Ox, Oy, Oz системы координат. Покажите на рисунке линию пересечения плоскостей $x - y + 3z - 6 = 0$ и $x - y - 2z - 4 = 0$.

1192. Изобразите в тетради оси Ox, Oy, Oz системы координат. Покажите на рисунке точку пересечения прямой AB с плоскостью $x + y - 2z + 6 = 0$, учитывая, что:

а) $A(2; 0; -1)$, $B(-2; -2; 1)$; б) $A(2; 0; 1)$, $B(1; -3; 0)$.

1193. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 0; 1)$ и прямую $2x + 3y - 6 = 0$ плоскости Oxy.

1194. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $B(2; -2; 1)$ и прямую, по которой плоскость $2x + y - 3z + 1 = 0$ пересекает плоскость Oxy.

1195. Составьте уравнение плоскости, которая в координатных плоскостях Oxy и Oxz проходит соответственно через прямые:

а) $3x + 2y - 6 = 0$ и $x + 2z - 2 = 0$;
б) $2x - y - 2 = 0$ и $3x - z - 3 = 0$.

1196. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A (2; 0; 1) и B (1; –3; 0) и параллельной:

а) оси Oz; б) оси Oy; в) оси Ox.

1197. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; 1)$, $B(-1; 0; 2)$ и параллельной:

а) вектору $\vec{a}(-1; 1; 3)$; б) вектору $\vec{b}(1; 2; 3)$.

1198. Даны точки $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(1; 1; -2)$, $D(1; 0; -1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую:

а) AB и параллельной прямой CD;
б) CD и параллельной прямой AB.

1199. Найдите координаты проекции точки $A(1; -1; 3)$ на плоскость:

а) $x - z = 0$; б) $2x - y - z - 3 = 0$.

1200. Вектор $\vec{a}(-1; 1; 3)$ параллелен прямой l, проходящей через точку $A(1; -1; 3)$. Найдите координаты точки пересечения прямой l с плоскостью:

а) $x - 3y + z + 1 = 0$; б) $2x - 2y + z + 1 = 0$.

1201. Вектор $\vec{a}(2; -2; 1)$ параллелен прямой l, проходящей через точку $A(3; -1; 0)$. Найдите угол между прямой l и плоскостью:

а) $2x + y - 2z + 1 = 0$; б) $2x + 6y + z - 7 = 0$.

1202. Через вершину C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит плоскость, пересекающая прямые AB, AD и AA_1 соответственно в точках M, N и P (рис. 354). Докажите, что выполняется равенство $\frac{C_1D_1}{MA} + \frac{C_1B_1}{NA} + \frac{C_1C}{PA} = 1$, в отношениях которого учитываются направления отрезков.

1203. Через точку $K(x_0; y_0; z_0)$ к сфере $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$ проведена касательная KT, T — точка касания. Найдите длину отрезка KT.

1204. Запишите условие касания сфер $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2$ и $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = R_2^2$.

1205. Составьте уравнение сферы ω, проходящей через точки $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Докажите, что прямая, проведенная через точку O перпендикулярно плоскости ABC, пересекает ее и сферу ω соответственно в таких точках M и N, что $OM : ON = 1 : 3$.

1206. Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке Q. Сделайте соответствующий рисунок в тетради и запишите векторы, которые начинаются и заканчиваются в указанных точках и:

а) одинаково направлены с вектором $\overrightarrow{AC_1}$;

б) противоположно направлены с вектором $\overrightarrow{BC_1}$;

в) равны вектору $\overrightarrow{AC}$;

г) коллинеарны с вектором $\overrightarrow{BD_1}$.

1207. На рисунке 355 изображен правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найдите углы, которые образуют векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$ с вектором:

а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BD}$.

1208. Укажите вектор, являющийся суммой, используя:

а) рисунок 356, *а*; б) рисунок 356, *б*.

1209. Может ли вектор $\vec{a} - \vec{b}$ иметь длину, которая больше длины каждого из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Подтвердите свой ответ примерами.

1210. Определите, при каких условиях выполняется равенство:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; г) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; ж) $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{b}$;

б) $|\vec{a} + \vec{b}| = \left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right|$; д) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; з) $\vec{a} + |\vec{a}| \cdot \vec{b} = \vec{0}$;

в) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; е) $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$; и) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

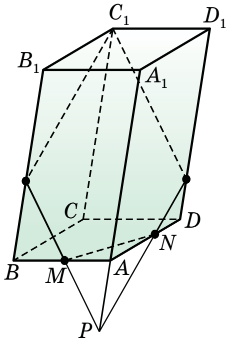


Рис. 354

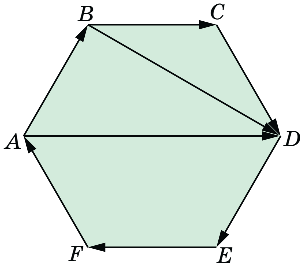


Рис. 355

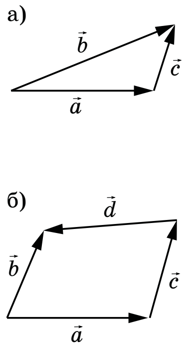


Рис. 356

1211. Определите, при каких условиях:

а) вектор $\vec{a}+\vec{b}$ разделяет пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ образуют прямой угол.

1212. Докажите, что векторы $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $8\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ компланарны. Выразите каждый из этих векторов через два других.

1213. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, $\vec{p}=\vec{a}+u\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}+v\vec{c}$, $\vec{r}=\vec{c}+w\vec{a}$. Докажите, что каждые два из векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ неколлинеарны. Какому условию должны удовлетворять числа u, v, w, чтобы векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ были компланарны?

1214. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите вектор $\overrightarrow{AB_1}$ через векторы $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{DA_1}$.

1215. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Найдите такую точку M, чтобы было истинным равенство

$\overrightarrow{MA}+2\cdot\overrightarrow{MB}+3\cdot\overrightarrow{MC}=5\cdot\overrightarrow{MD}$.

1216. Плоскость α пересекает ребра SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, причем $SA_1 : SA = a$, $SB_1 : SB = b$, $SC_1 : SC = c$. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, плоскость $A_1B_1C_1$ пересекает отрезок SM в точке M_1 (рис. 357). Найдите отношение $SM_1 : SM$.

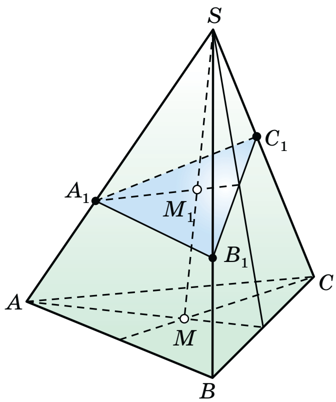


Рис. 357

1217. Дан треугольник ABC. Докажите, что точка D принадлежит плоскости ABC тогда и только тогда, когда для произвольной точки O пространства $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ и $x + y + z = 1$.

1218. Пусть точки A_0, B_0, C_0 разделяют отрезки BC, CA, AB в одном и том же отношении k. Докажите, что для данной призмы $ABCA_1B_1C_1$ сумма векторов $\overrightarrow{A_1A_0} + \overrightarrow{B_1B_0} + \overrightarrow{C_1C_0}$ не зависит от k.

1219. В правильной пятиугольной призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ на прямой, проходящей через центры O и O_1 оснований, выбрана точка Q так, что $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{O_1Q}$. Определите, в каком отношении точка Q разделяет отрезок OO_1.

1220. Точки M и N — середины сторон AD и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, Q — точка пересечения отрезков AN и BM. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм, учитывая, что $AQ : QN = 2 : 3$ и $BQ : QM = 4 : 1$.

1221. В пространстве задано n точек A_1, A_2, ..., A_n. Докажите, что существует единственная точка M такая, что $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$.

1222. Вершины A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ симметричны вершинам A_2, B_2, C_2 треугольника $A_2B_2C_2$ относительно середин A_0, B_0, C_0 сторон BC, AC, AB треугольника ABC (рис. 358). Докажите, что точки M_1 и M_2 пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки M пересечения медиан треугольника ABC.

1223. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограммы, точки A_0, B_0, C_0, D_0 разделяют отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в одном и том же отношении. Докажите, что середины отрезков A_0C_0 и B_0D_0 совпадают.

1224. Пусть точки B_1, D_1 выбраны на прямых AB и AD, а точки C и C_1 — так, что $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — параллелограммы. Докажите, что точка пересечения прямых BD_1 и B_1D принадлежит прямой CC_1.

1225. На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами A_1, B_1, C_1. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

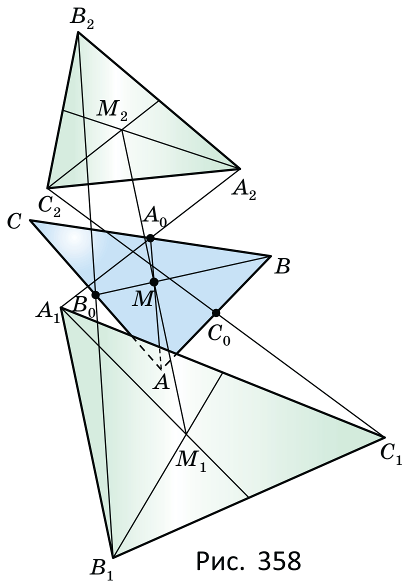


Рис. 358

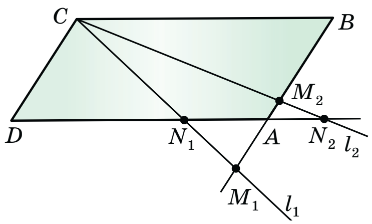


Рис. 359

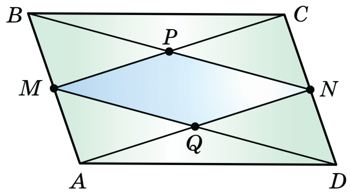


Рис. 360

1226. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведены прямые l_1 и l_2, пересекающие соответственно прямую AB в точках M_1 и M_2, а прямую AD — в точках N_1 и N_2 (рис. 359). Докажите, что если $\overrightarrow{M_1B} = k \cdot \overrightarrow{BM_2}$, то $\overrightarrow{N_2D} = k \cdot \overrightarrow{DN_1}$.

1227. Точки M и N на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$ выбраны так, что $AM : MD = BN : NC = p : q$. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \dfrac{q \cdot \overrightarrow{AB} + p \cdot \overrightarrow{DC}}{q + p}$.

1228. Точка K плоскости треугольника ABC выбрана так, что $x \cdot \overrightarrow{KA} + y \cdot \overrightarrow{KB} + z \cdot \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Определите, где находится такая точка L, что $yz \cdot \overrightarrow{LA} + xz \cdot \overrightarrow{LB} + xy \cdot \overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

1229. Точка K плоскости треугольника ABC выбрана так, что $x \cdot \overrightarrow{KA} + y \cdot \overrightarrow{KB} + z \cdot \overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Определите, где в плоскости треугольника ABC находится такая точка L, что $\dfrac{\overrightarrow{LA}}{BC^2} + \dfrac{\overrightarrow{LB}}{AC^2} + \dfrac{\overrightarrow{LC}}{AB^2} = \vec{0}$.

1230. Точки M и N — середины сторон AB и DC четырехугольника $ABCD$, отрезки BN и CM, AN и DM пересекаются в точках P и Q соответственно (рис. 360). Докажите, что если $MPNQ$ — параллелограмм, то $ABCD$ — также параллелограмм.

1231. Точки P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$, отрезки AR и DQ, DQ и CP, CP и BS, BS и AR пересекаются в точках A_1, D_1, C_1, B_1 соответственно (рис. 361). Докажите, что если $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм, то $ABCD$ — также параллелограмм.

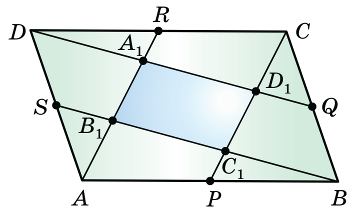


Рис. 361

1232. Прямая l проходит через точку пересечения медиан M треугольника ABC и пересекает прямые BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно (рис. 362). Докажите, что $\dfrac{1}{MA_1} = \dfrac{1}{MB_1} + \dfrac{1}{MC_1}$.

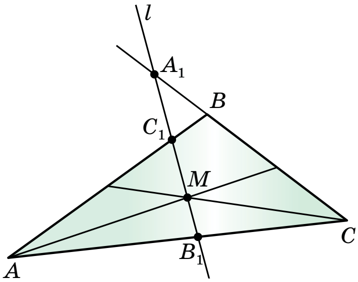


Рис. 362

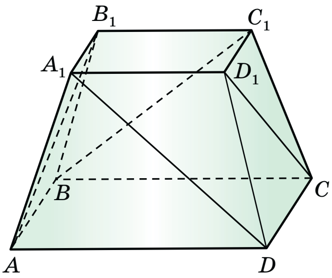


Рис. 363

1233. Прямые, проходящие через точку K и вершины A, B, C треугольника ABC, пересекают прямые BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что если $\overrightarrow{AC_1} = \frac{y}{x} \cdot \overrightarrow{C_1B}$ и $\overrightarrow{BA_1} = \frac{z}{y} \cdot \overrightarrow{A_1C}$, то:

а) $\overrightarrow{CB_1} = \frac{x}{z} \cdot \overrightarrow{B_1A}$; б) $x \cdot \overrightarrow{KA} + y \cdot \overrightarrow{KB} + z \cdot \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

1234. На прямых l_1 и l_2 отмечены точки A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно так, что $\overrightarrow{A_1A_2} = k \cdot \overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = k \cdot \overrightarrow{B_2B_3}$. Докажите, что:

а) прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 параллельны одной плоскости;

б) $\overrightarrow{A_2B_2} = \dfrac{\overrightarrow{A_1B_1} + k \cdot \overrightarrow{A_3B_3}}{1+k}$.

1235. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в разных плоскостях. Прямые l_1, l_2, l_3 проходят соответственно через середины пар отрезков AB_1 и A_1B, BC_1 и B_1C, CA_1 и C_1A. Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 параллельны одной плоскости.

1236. На прямых AB, BC, CD, DA, не лежащих в одной плоскости, отмечено по две точки K_1 и K_2, L_1 и L_2, M_1 и M_2, N_1 и N_2 так, что $\overrightarrow{AK_1} = \overrightarrow{K_2B}$, $\overrightarrow{BL_1} = \overrightarrow{L_2C}$, $\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{M_2D}$, $\overrightarrow{DN_1} = \overrightarrow{N_2A}$. Докажите, что если точки K_1, L_1, M_1, N_1 лежат в одной плоскости, то и точки K_2, L_2, M_2, N_2 также лежат в одной плоскости.

1237. Основаниями усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются параллелограммы (рис. 363). Докажите, что любая прямая, пересекающая три из четырех прямых AB_1, BC_1, CD_1, DA_1, пересекает и четвертую прямую или параллельна ей.

1238. Дана треугольная пирамида $ABCD$ и точка M, плоскости ABM, BCM, CDM, DAM пересекают соответственно прямые CD, DA, AB, BC в точках P, Q, R, S, отличных от A, B, C, D. Докажите, что если с учетом направления отрезков $\frac{CP}{PD} = \frac{y}{x}$, $\frac{DQ}{QA} = \frac{z}{y}$, $\frac{AR}{RB} = \frac{t}{z}$, то:

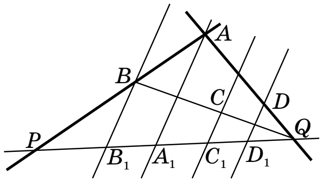


Рис. 364

а) $\frac{BS}{SC} = \frac{x}{t}$; б) $x\overrightarrow{MC} + y\overrightarrow{MD} + z\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1239. Дана треугольная пирамида $ABCD$, точки M и N отмечены на прямых AB и CD. Докажите, что середины отрезков MC, MD, NA и NB лежат в одной плоскости.

1240. Точки B и D выбраны на прямых AP и AQ, C — точка пересечения прямых QB и PD. Параллельные прямые, проведенные через точки A, B, C, D, пересекают прямую PQ в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно (рис. 364). Докажите, что выполняется равенство $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{CC_1} = \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{DD_1}$.

1241. Докажите, что для любых точек A, B, C, D существует единственная точка M такая, что:

а) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$;

б) через нее проходят отрезки, соединяющие каждую точку A, B, C, D с точкой пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются три другие точки.

1242. Имеется треугольная пирамида $ABCD$ и точка M. Медианы треугольников BCD, ACD, ABD, ABC пересекаются в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что прямые, проведенные через точки A_1, B_1, C_1, D_1 параллельно соответственно прямым MA, MB, MC, MD, пересекаются в одной точке.

1243. Имеется треугольная пирамида $ABCD$ и точка M. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения прямых MA, MB, MC, MD соответственно с плоскостями BCD, ACD, ABD, ABC (рис. 365). Докажите, что выполняется равен-

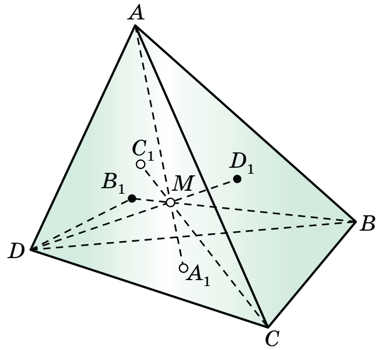


Рис. 365

ство $\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} + \frac{MD_1}{DD_1} = 1$, в отношениях которого учитываются направления отрезков.

1244. Точка G на отрезке DM, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC, выбрана так, что $DG = 3GM$. Плоскость, проходящая через точку G, пересекает прямые DA, DB, DC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что выполняется равенство $\frac{AA_1}{DA_1} + \frac{BB_1}{DB_1} + \frac{CC_1}{DC_1} = 1$, в отношениях которого учитываются направления отрезков.

1245. Точка G на отрезке DM, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC, выбрана так, что $DG = 3GM$. Прямая l, проведенная через точку G, пересекает плоскости BCD, CDA, DAB, ABC в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что выполняется равенство $\frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} + \frac{1}{GD_1} = 0$, в отношениях которого учитываются направления отрезков.

1246. Прямая пересекает плоскости BCD, CDA, DAB, ABC в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 лежат в одной плоскости.

1247. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают точки пересечения медиан. Докажите, что сумма девяти квадратов расстояний между вершинами разных треугольников зависит только от длин сторон треугольников и не зависит от их взаимного расположения.

1248. В окружность с радиусом R вписан правильный n-угольник. Найдите сумму квадратов расстояний от одной из его вершин до остальных.

1249. Пусть даны отрезки AB и CD. Точки M и M_1 разделяют соответственно отрезок AB внутренним и внешним образом в отношении $\frac{AC}{BD}$, а точки N и N_1 разделяют в таком же отношении отрезок CD. Докажите, что отрезки MN и M_1N_1 перпендикулярны.

1250. Все плоские углы при вершине S тетраэдра $SABC$ прямые. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

1251. Докажите, что если в тетраэдре центр описанной окружности является центром тяжести, то противоположные ребра этого тетраэдра попарно равны.

1252. Докажите, что если противоположные звенья замкнутой шестизвенной ломаной попарно параллельны, то они и попарно равны,

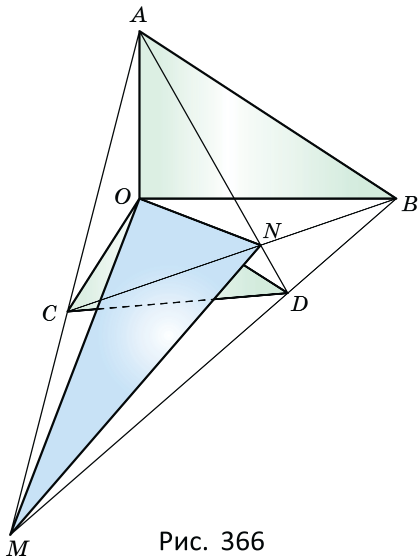


Рис. 366

а сама ломаная имеет центр симметрии.

1253. В треугольнике ABC угол C прямой, $AC = b$, $BC = a$. Выразите вектор $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, учитывая, что:

а) M — основание высоты, проведенной из вершины C;

б) M — центр вписанной окружности.

1254. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Учитывая, что $AB = c$ и $AC = b$, докажите равенство $\overrightarrow{AL} = \dfrac{b \cdot \overrightarrow{AB} + c \cdot \overrightarrow{AC}}{b + c}$.

1255. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O, CC_1 — его высота. Выразите вектор $\overrightarrow{OC_1}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

1256. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O, CC_1 — его биссектриса. Установите зависимость между углами треугольника, учитывая, что $\angle COC_1 = 90°$.

1257. Прямоугольные треугольники AOB и COD имеют общую вершину прямых углов, M и N — точки пересечения прямых AC и BD, AD и BC (рис. 366). Докажите, что треугольник MON также прямоугольный.

1258. Стороны AB, AC, BC треугольника ABC соответственно равны c, b, a. Докажите, что точка Q является центром окружности, вписанной в треугольник ABC, тогда и только тогда, когда $a \cdot \overrightarrow{QA} + b \cdot \overrightarrow{QB} + c \cdot \overrightarrow{QC} = \vec{0}$.

1259. Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Учитывая, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, докажите, что выполняется равенство:

а) $\sin 2\alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2\beta \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2\gamma \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$;

б) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) \cdot \overrightarrow{OA} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma) \cdot \overrightarrow{OB} + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$,

если треугольник ABC не прямоугольный.

1260. В точке H пересекаются прямые, содержащие высоты треугольника ABC. Учитывая, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, докажите, что выполняется равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \overrightarrow{HA} + \operatorname{tg}\beta \cdot \overrightarrow{HB} + \operatorname{tg}\gamma \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

1261. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке J и при этом $(p-a)\cdot\overrightarrow{JA} + (p-b)\cdot\overrightarrow{JB} + (p-c)\cdot\overrightarrow{JC} = \vec{0}$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $2p = a + b = c$.

1262. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что выполняется равенство:

а) $\operatorname{ctg} \angle BC_1C + \operatorname{ctg} \angle CA_1A + \operatorname{ctg} \angle AB_1B = 0$;

б) $\operatorname{ctg} \angle BCC_1 + \operatorname{ctg} \angle CAA_1 + \operatorname{ctg} \angle ABB_1 =$
$= \operatorname{ctg} \angle ACC_1 + \operatorname{ctg} \angle BAA_1 + \operatorname{ctg} \angle CBB_1$.

1263. Докажите, что для треугольника ABC с площадью S выполняется равенство $\operatorname{ctg}\angle BAC + \operatorname{ctg}\angle CBA + \operatorname{ctg}\angle ACB = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

1264. В плоскости правильного треугольника ABC отмечена точка K. Отрезки KA, KB, KC проецируются соответственно на прямые BC, CA, AB (рис. 367). Докажите, что сумма двух из этих проекций равна третьей.

1265. Плоские углы BSC, CSA, ASB треугольной пирамиды $SABC$ равны соответственно α, β, γ. Найдите косинус угла между:

а) ребром SA и биссектрисой угла BSC;

б) биссектрисами углов ASB и ASC.

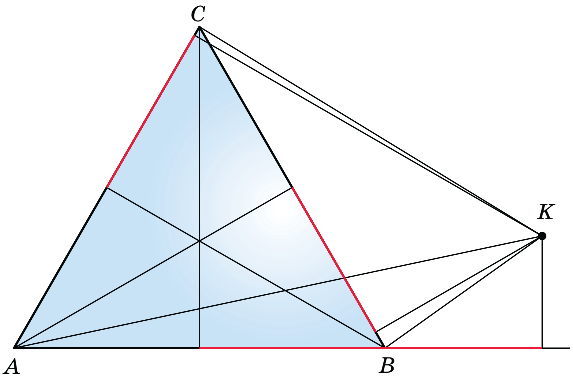


Рис. 367

1266. Три попарно скрещивающиеся прямые a, b, c пересечены тремя другими прямыми в точках A_1, A_2 и A_3, B_1, B_2 и B_3, C_1, C_2 и C_3 (рис. 368). Докажите, что прямые A_2B_1, A_3C_1 и B_3C_2 проходят через одну точку или параллельны.

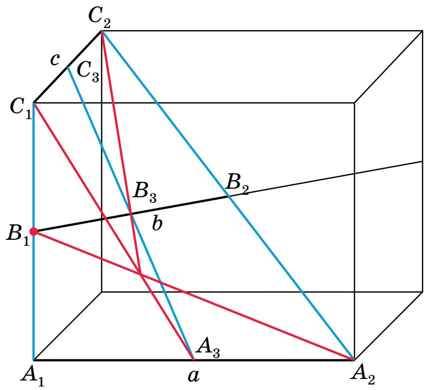


Рис. 368

1267. Докажите, что если звенья AB, BC, CD, DA замкнутой ломаной касаются:

а) некоторой сферы, то точки касания лежат в одной плоскости;

б) некоторого цилиндра, то точки касания лежат в одной плоскости;

в) некоторого конуса, то точки касания лежат в одной плоскости.

1268. В основание цилиндра вписан треугольник ABC, точка K выбрана на боковой поверхности цилиндра. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые AB, BC, CA, лежат на одной прямой.

1269. Докажите, что если три прямые, содержащие высоты треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке, то через эту точку проходит и прямая, содержащая четвертую высоту.

1270. В треугольную пирамиду $ABCD$ вписана сфера с центром I. Докажите, что выполняется равенство

$$s_1 \cdot \overrightarrow{OA} + s_2 \cdot \overrightarrow{OB} + s_3 \cdot \overrightarrow{OC} + s_4 \cdot \overrightarrow{OD} = \vec{0},$$

где s_1, s_2, s_3, s_4 — площади граней BCD, CDA, DAB, ABC соответственно.

1271. Через длины ребер треугольной пирамиды $ABCD$ выразите:

а) косинус угла между ребрами AB и CD;

б) расстояние от вершины D до точки пересечения медиан треугольника ABC.

1272. Точки M и N выбраны соответственно на скрещивающихся прямых AD и BC так, что MN — их общий перпендикуляр. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

1273. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра основания ABC и ребро DA равны 1, ребра DB и DC — $\sqrt{2}$. Определите, в каком отношении ребра AB и CD разделяет их общий перпендикуляр.

1274. Выразите расстояние от вершины D треугольной пирамиды $ABCD$ до ее основания ABC через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

4. Геометрические построения

1275. Постройте отрезок длиной $a + b - c$, учитывая, что a, b, c — длины данных отрезков.

1276. Постройте угол величиной $\alpha + \beta - \varphi$, учитывая, что α, β, φ — величины данных углов.

1277. Данный отрезок AB разделите на 4 доли, на 8 долей.

1278. Данный угол ABC разделите на 4 доли, на 8 долей.

1279. Постройте отрезок с концами на двух данных прямых, который равен и параллелен данному отрезку AB.

1280. Постройте точку, находящуюся:

а) на расстоянии $2a$ от данных точек A и B, учитывая, что a — длина отрезка AB;

б) на расстояниях a и b от данных точек A и B.

1281. Через данную точку C проведите прямую так, чтобы она была серединой отрезка с концами на двух данных прямых.

1282. Через данную точку C проведите прямую так, чтобы две данные окружности высекали из нее равные отрезки.

1283. Параллельно стороне данного треугольника постройте прямую, отрезок которой с концами на сторонах этого треугольника равен сумме отрезков, заключенных между этой прямой и основанием.

1284. Постройте равнобедренный треугольник:

а) по его основанию и углу при основании;

б) по его основанию и углу против основания;

в) по его основанию и отрезку, равному периметру;

г) по его боковой стороне и отрезку, равному периметру;

д) по его боковой стороне и высоте к основанию;

е) по его высоте и углу при вершине;

ж) по его основанию и высоте к боковой стороне;

з) по его боковой стороне и сумме высоты и основания;

и) по его боковой стороне и разности высоты и основания.

1285. Постройте прямоугольный треугольник:

а) по его катету и медиане, проведенной к другому катету;
б) по его катету и медиане, проведенной к этому катету;
в) по его катету и высоте, проведенной к гипотенузе;
г) по его острому углу и биссектрисе этого угла;
д) по его острому углу и медиане, проведенной к гипотенузе;
е) по его гипотенузе и медианам, проведенным к катетам.

1286. Постройте треугольник:

а) по его углу и двум высотам, проведенным к сторонам этого угла;
б) по двум его сторонам и углу против одной из них;
в) по двум его высотам и медиане, проведенной к третьей стороне;
г) по двум его высотам и медиане, выходящей из вершины, из которой проведена одна из высот;
д) по его стороне, противолежащему углу и отрезку, равному периметру;
е) по его высоте, периметру и углу при основании;
ж) по двум его углам и биссектрисе, проведенной из третьего угла;
з) по его стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности;
и) по сумме квадратов его сторон, углу между ними и радиусу описанной окружности;
к) по его основанию, медиане, проведенной к нему, и углу между этой медианой и высотой, проведенной к основанию;
л) вписанный в данную окружность, продолжения высоты, биссектрисы и медианы которого, проведенные из одной вершины, проходят через три данные на окружности точки.

1287. Постройте квадрат:

а) по сумме его стороны с диагональю;
б) три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

1288. Постройте параллелограмм, середины трех сторон которого находятся в трех данных точках.

1289. Даны две концентрические окружности. Проведите прямую так, чтобы хорды, высекаемые на ней, относились как 3 : 1.

1290. Через данную вне окружности точку проведите секущую так, чтобы полученная хорда была равна внешней части секущей.

1291. Постройте окружность, которая:

а) касается сторон данного угла и проходит через данную точку на его стороне;
б) касается одной стороны данного угла и высекает из другой его стороны отрезок данной длины;
в) имеет данный радиус и высекает на сторонах данного угла отрезки данной длины.

1292. Через данную точку проведите прямую так, чтобы две данные параллельные прямые высекали из нее отрезок данной длины.

1293. Проведите прямую так, чтобы:

а) две данные пересекающиеся прямые высекали из нее отрезок данной длины и угол с одной из них был равен данному углу;
б) она касалась данной окружности и образовывала с данной прямой данный угол.

1294. Постройте точку, находящуюся:

а) на данном расстоянии от данной точки и на данном расстоянии от данной прямой;
б) на равных расстояниях от сторон данного угла и на данном расстоянии от данной прямой;
в) на равных расстояниях от двух данных точек и на данном расстоянии от данной прямой;

1295. Постройте четырехугольник:

а) по трем его сторонам и двум диагоналям;
б) по трем его сторонам, углу и диагонали;
в) по четырем его сторонам и углу;
г) по двум его диагоналям, углу между ними и двум сторонам;
д) по трем его сторонам и двум соседним углам;
е) по двум соседним углам, углу между диагоналями и двум смежным сторонам;
ж) по трем его углам и двум противоположным сторонам.

ОТВЕТЫ

10 класс

4. $35+12\sqrt{10}+\sqrt{185}$. **5.** $24+18\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ см. **6.** 10. **7.** $216+108\sqrt{3}$ см^2. **8.** 96 см. **9.** $24+80\sqrt{3}$ см^2. **10.** 916. **11.** $216+120\sqrt{3}+10\sqrt{318}$. **12.** $144+216\sqrt{2}$. **13.** а) $144+96\sqrt{6}$; б) $576\sqrt{3}$. **14.** 54. **15.** 360 см^2; $360+150\sqrt{3}$ см^2. **16.** 120 см^2; $120+102\sqrt{3}$ см^2. **20.** 12. **21.** 1. **36.** $240-48\sqrt{2}$ см; $768+32\sqrt{3}$ см^2. **52.** а) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{21}{16}$; в) $\frac{17\sqrt{166}}{162}$. **53.** 28 см. **54.** 14,5. **60.** 15. **67.** а) 80°; б) 50°; в) 70°. **76.** а) 45°; б) 90°; в) 45°; г) 90°; д) 90°; е) 60°; ж) 90°; з) 90°; и) 90°. **77.** а) 90°; б) 45°; в) arccos 0,25. **78.** а) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; г) 90°; д) $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$; е) $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{14}$; ж) $\arccos\frac{\sqrt{14}}{28}$; з) $\arccos\frac{\sqrt{35}}{7}$. **79.** а) 90°; б) 90°; в) 90°; г) 60°; д) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; е) 45°; ж) 45°; з) 60°; и) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **80.** а) $\arccos\frac{5\sqrt{2}}{8}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; в) $\arccos\frac{1}{4}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$; д) $\arccos\frac{3}{4}$; е) 90°; ж) $\arccos\frac{3}{4}$; з) $\arccos\frac{3}{4}$; и) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **81.** а) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\arccos\frac{5}{8}$; г) $\arccos\frac{1}{5}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; е) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **82.** а) 90°; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$. **83.** а) 60°; б) $\arccos\frac{1}{4}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. **97.** 10 см. **99.** 42. **100.** 6. **102.** 5; 21,6. **112.** 5 см; 7 см. **119.** 24; 18. **141.** 60°. **143.** 5 см. **144.** 9; 6. **145.** а) 20 м; б) 6,25 м. **148.** 1. **150.** $\sqrt{3}$. **151.** $\frac{\sqrt{22}}{4}$. **152.** 24 см. **153.** 19,5 см. **154.** b, b, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$; b, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{2a^2+b^2}$. **155.** $2\sqrt{2{,}2}$ см. **156.** 3 см. **157.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) 90°. **158.** 5 или 2. **159.** а) 12 см; б) $5\frac{1}{3}$ см; в) 4 см; г) $2\frac{2}{3}$ см. **160.** 6. **161.** $a^2\sqrt{2}$. **165.** $\arccos\frac{7}{12}$. **166.** a. **167.** $\frac{3ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$. **168.** arccos (sin α sin β). **169.** $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{5}}{4}$. **170.** 90° или $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$. **171.** $\arccos\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3\cos^2\alpha-1}}$. **172.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **173.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **174.** $\frac{ah}{\sqrt{a^2+4h^2}}$. **175.** 90°. **176.** 90°. **177.** а) 90°; б) 45°; в) 90°. **178.** $\arccos\frac{\sqrt{93}}{31}$. **181.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **182.** 20. **184.** $9+\sqrt{145}$ см. **185.** r. **188.** а) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$;

б) $\arccos\frac{1}{6}$. **189.** а) $\arccos\frac{a\sqrt{3}}{3b}$; б) $\arcsin\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{4b^2-a^2}}$. **190.** $\frac{c}{2}\operatorname{tg}\varphi$. **191.** 30°. **192.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **193.** 120°. **194.** 1. **195.** 45°, $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **209.** $\frac{1}{3}\sqrt{9a^2-3b^2}$. **210.** $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-4a^2}$. **211.** 105°. **212.** $2l$. **213.** 45°. **214.** 109 мм. **215.** $Q\sqrt{2}-\frac{Q^2}{a^2}$. **216.** $\frac{m}{2n}\sqrt{8n^2-2m^2}$. **217.** 90°. **218.** 90°. **219.** $\frac{m\sqrt{6}}{3}$. **221.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **224.** а) 5; б) (2; 8; 0), (1; 1; 5), (–2; 5; 5), (5; 4; 5), (2; 8; 5); в) (1,5; 4,5; 0), (1,5; 4,5; 5), (3; 2,5; 2,5), (0; 6,5; 2,5), (–0,5; 3; 2,5), (3,5; 6; 2,5). **226.** (–1; 3; 1), (1; 4; 3), (4; 2; 5). **227.** (12; –1; 11), (–8; 3; –5), (0; 7; 3). **228.** $D_1(3; 4; 11)$, $B_1(1; 5; 12)$, $C_1(4; 5; 13)$, $A_1(0; 4; 10)$, $C(2; 2; 0)$. **230.** а) $M(-2; 1; 3)$, $N(0; -1; 1)$. **231.** (1; 1; 3). **232.** 5; 3; $3\sqrt{6}$; $\sqrt{14}$. **233.** $1{,}5\sqrt{3}$; $4{,}5\sqrt{5}$; $1{,}5\sqrt{34}$. **238.** а) $1{,}5\sqrt{3}$; $4{,}5\sqrt{5}$; б) 8,5. **252.** $\vec{0}$. **253.** а) $\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{MB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. **254.** а) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{CN}$. **255.** а) $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{FC}$. **261.** а) 3; б) –10; в) $-21\sqrt{2}$. **262.** а) Знак «+»; б) знак «–». **263.** а) (0°; 90°); б) (90°; 180°). **264.** а) $-|\vec{a}|^2$; б) $k|\vec{b}|^2$. **265.** а) –2; б) 0; в) $-2\sqrt{3}$. **266.** а) В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон; б) диагонали параллелограмма равны, т. е. параллелограмм является прямоугольником, значит, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 90°; в) диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, т. е. параллелограмм является ромбом, значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют равные длины. **267.** а) $\vec{b}^2$; б) $-2\vec{a}^2+9\vec{b}^2$; в) $2\vec{a}^2+\vec{b}^2$; г) $7\vec{a}^2+8\vec{b}^2$. **269.** а) $\vec{a}^2$; б) 0. **270.** c^2. **271.** а) $\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$; б) $\frac{1}{2}(b^2-a^2-c^2)$. **273.** а) 0; б) 3; 3; в) 90°. **275.** $\frac{1}{4}\sqrt{a^2+9b^2}$. **278.** а) $0{,}5a^2$ и $-0{,}5a^2$; б) $-0{,}5a^2$ и $0{,}25a^2$; в) 0 и $0{,}5a^2$. **279.** а) 36; –50; –57; –7; 16; б) $\sqrt{41}$; $\sqrt{77}$; $\sqrt{34}$; $7\sqrt{2}$; 5; $\sqrt{41}$; $\sqrt{77}$; в) 0,6; $-\frac{5\sqrt{2}}{14}$; $-\frac{57\sqrt{82}}{574}$; $-\frac{\sqrt{2618}}{374}$; $\frac{8\sqrt{17}}{119}$. **281.** а) $\frac{a\sqrt{13}}{3}$; б) $a\sqrt{2}-50$; в) a; г) $\frac{4}{3}a$. **291.** 3 : 1. **292.** 1 : 2; 1 : 5. **293.** 2 : 3. **294.** 1 : 5; 7 : 3. **295.** 5 : 6. **296.** 2 : 1. **297.** 1 : 5. **298.** 5 : 1. **299.** 5 : 1. **300.** $\frac{2}{3}d$. **301.** 1 : 3.

11 класс

308. 100 м^2, 148 м^2. **309.** 90 дм^2. **310.** $\sqrt{(d^2-d_1^2)(d_0^2+d_1^2-d^2)}$ или $\sqrt{(d^2-d_0^2)(d_0^2+d_1^2-d^2)}$. **311.** 960 см^2, 1056 см^2, 720 см^3. **312.** $120\sqrt{2}$ см^2, $16(2+9\sqrt{2})$ см^2, $60(4+3\sqrt{2})$ см^3. **313.** $\sqrt{\left(\frac{Q}{S}\right)^3}$. **314.** 5 см, 7 см. **315.** 120°. **316.** 571,2 см^2, 336 см^2, 272 см^2. **317.** 63°. **318.** а) 18 см; б) 9 см; в) $9\sqrt{3}$ см; г) $9\sqrt{2}$ см. **319.** 540 см^3. **320.** 600 см^2. **324.** 28,8 см, $24\frac{24}{29}$ см, 20 см. **325.** 840 см^2, 1680 см^3 . **326.** 3240 см^2, $24(135+4\sqrt{10})$ см^2, $2160\sqrt{10}$ см^3. **327.** 30°. **328.** $\arccos\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}$. **329.** $\frac{3ab}{4\cos\alpha}$. **330.** 1 : 2. **331.** $\frac{S\sqrt{2}}{2}$. **332.** а) $144\sqrt{3}$ см^2, $\arccos\frac{12\sqrt{3}}{35}$; б) $393{,}25\sqrt{3}$ см^2, $\arccos\frac{22\sqrt{13}}{1519}$. **333.** 2352 см^2, 1428 см^2. **334.** a или $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **335.** $3+3\sqrt{3}$. **336.** $1{,}5\sqrt{3}$ см. **337.** а) $\frac{7l^2\sqrt{3}}{6}$; б) $0{,}5l^2(\sqrt{3}+6)$; в) $l^2\left(1+\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)$; г) $l^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{6}+1\right)$. **338.** а) 906 см^2; б) $30(55+9\sqrt{2})$ дм^2. **339.** 1400 см^2, или 1420 см^2, или 1480 см^2. **340.** 58 см. **341.** $a\sqrt{6}$; $a\sqrt{2}$. **342.** $\arccos\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **343.** 5280 см^2. **344.** 2592 см^2. **345.** 4428 см^2. **346.** 65 см, $3\sqrt{569}$ см. **347.** al и $0{,}5bl$ или bl и $0{,}5al$. **348.** $\frac{a}{4}$. **349.** $5{,}25\sqrt{219}$. **350.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16\cos\varphi}$, $\frac{3a^3\operatorname{tg}\varphi}{16}$. **351.** $0{,}5Qd\cos\alpha\sin\beta$. **352.** $\frac{1}{8h}(S^2-4Q^2)$. **353.** 2352 см^2, 1428 см^2. **354.** a или $a\frac{\sqrt{6}}{2}$. **355.** а) $15\sqrt{3}$ см^2; б) $2\sqrt{133}$ см^2. **356.** а) $15\sqrt{5}$ см^2; б) 39 см^2. **357.** $240\sqrt{2}$ см^2. **358.** 40 см^3. **359.** 120 см^3. **360.** $54\sqrt{2}$ см^3. **361.** $18\sqrt{2}$ см^3. **362.** $Q\sqrt{Q\sqrt{3}\cos\varphi}\sin\varphi$. **363.** $2\sqrt{2}$, $4+4\sqrt{3}$. **364.** $8(3+\sqrt{3})$ см^2. **365.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$. **366.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. **367.** 3 : 2. **368.** 405. **369.** $25\sqrt{6}$ см^3. **370.** $\frac{S}{4}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}}$. **371.** $22{,}5\sqrt{23}$ см^3. **372.** 4000 см^3. **373.** 630 см^3. **374.** $0{,}5a^3\sin\alpha\sin\beta\cos^2\beta$. **375.** $0{,}25l^3\sin2\alpha\operatorname{tg}^2\beta$. **376.** $\frac{a^2}{2\sqrt{2a^2-4b^2}}$. **377.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см^2, $\frac{16\sqrt{6}}{3}$ см^2. **378.** $\sqrt{a^4-(b^2-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}$.

379. $4\sqrt{3}(14+\sqrt{2})$, $4\sqrt{3}(3+2\sqrt{2})$. **380.** $2l\sqrt{3a^2+4b^2}$ или $2l\sqrt{4a^2+3b^2}$. **381.** 90°. **382.** $32\sqrt{3}$ см^2, $32(6+\sqrt{6})$ см^2. **383.** 90°. **384.** а) 60°; б) $\mathrm{arctg}\,\frac{8}{3}$; в) $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{4}$; г) $32\sqrt{3}$; д) $32\sqrt{3}$; е) $32\sqrt{3}$; ж) $32\sqrt{3}$. **385.** а) 60°; б) 90°; в) $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{6}$; г) arctg 2; д) $\mathrm{arctg}\,2\sqrt{3}$; е) arctg 4; ж) $\arcsin\frac{\sqrt{39}}{13}$; з) $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{13}}$; и) $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{15}}{5}$; к) $\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{65}}$; л) $\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$; м) $\sqrt{13}$ см^2; н) $6(1+\sqrt{3})$ см^2; о) $2\sqrt{3}$ см^3. **386.** а) 6 см; б) $\arcsin\frac{1}{3}$, $\arcsin\frac{2}{3}$, $\arcsin\frac{2}{3}$; в) $8\sqrt{5}$ см^2, $8\sqrt{5}$ см^2, $8\sqrt{2}$ см^2; г) 45°, arcctg2, 45°, arctg2; д) $\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\arcsin\frac{2\sqrt{6}}{5}$; е) 45°, $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$; ж) 64 см^2; з) 32 см^3. **387.** а) $162\sqrt{3}$; б) $243\sqrt{3}$; в) 81; $54\sqrt{3}$; г) 60°, $\arccos\frac{7}{8}$, $\arccos\frac{5}{8}$; д) $\arccos\frac{3\sqrt{6}}{8}$, $\arccos\frac{\sqrt{6}}{8}$, $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$; е) 45°; ж) $364{,}5\sqrt{3}$. **388.** ab и ab. **389.** $a^2(5+2\sqrt{3})$, $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **390.** а) 12; $6\sqrt{10}$; б) $\arccos\frac{3}{4}$; $\arccos\frac{29\sqrt{30}}{180}$; в) 72; $36\sqrt{10}$; г) 60°; 30°; $\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3}$; д) 60°; $\arccos\frac{3}{4}$; $\arccos\left(-\frac{1}{8}\right)$; е) $\arccos\frac{3}{4}$; $\arccos\frac{4\sqrt{3}}{9}$; ж) $252\sqrt{3}$; з) 324. **394.** $16(a^2+b^2+c^2)$. **405.** а) 598π см^2; б) 1690π см^3; в) 240 см^2; г) 780 см^2, $2535\sqrt{3}$ см^3; д) $520\sqrt{2}$ см^2; 3380 см^3. **406.** 5 см. **407.** 9 см. **408.** $\pi : 1$. **409.** 2 : 3. **410.** $d^2\cos\alpha\left(\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{2\pi}\right)$, $\frac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$ или $d^2\sin\alpha\left(\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{2\pi}\right)$, $\frac{d^3\cos\alpha\sin^2\alpha}{4\pi}$. **411.** $1+\frac{m}{n} : \sqrt{\pi^2+\left(\frac{m}{2n}\right)^2}$. **412.** $2\pi a(a+b)$, $\pi a^2 b$ или $2\pi b(a+b)$, πab^2. **415.** 1 : 1, $a : b$. **416.** $\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{V_1^2}{\pi V_2}\right)^2+\left(\frac{V_2^2}{\pi V_1}\right)^2}}$. **417.** $2S+\pi Q$; $0{,}5Q\sqrt{\pi S}$. **418.** $4R^2+l^2=8Rl$. **420.** $R : r$. **421.** 13 дм. **422.** 21 см. **423.** $4\left(\frac{2}{\pi}+5\right)$ см^2 или $5\left(\frac{5}{2\pi}+4\right)$ см^2. **424.** $90\sqrt{3}$ см^2. **425.** $50\sqrt{3}$ см^2, $12{,}5\cdot(16\pi+\sqrt{3})$ см^2, $12{,}5\cdot(4\pi-\sqrt{3})$ см^2. **426.** $2\left(\frac{l}{R}\right)^2-\frac{2l}{R}\sqrt{\left(\frac{l}{R}\right)^2-1}-1$. **427.** πa^2. **428.** $\sqrt{D^2-\frac{4V}{\pi l}}$. **430.** $1\frac{5}{8}$ см. **431.** $a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. **432.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}+1)$; в) $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **433.** а) 2 : 3; б) 1200π см^3 и 1800π см^3. **434.** 9 см. **435.** 7 см. **436.** 648π см^2. **439.** 30°. **440.** $2\pi\sqrt{\frac{2Vl}{3\sqrt{3}}}$. **441.** $\frac{16\pi}{3}$ дм^3. **442.** 2 : 1, 4 : 1. **443.** $\frac{3\pi a^3}{4}$.

444. $\frac{729\sqrt{3}}{2}$ см^3. **445.** $\frac{CS}{4\pi}$. **446.** $\pi : 3$, $8\pi : 9\sqrt{3}$. **448.** $\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{3-\cos 2\alpha}}$. **449.** $\frac{4}{17}\left(\sqrt{21}-2\right)$. **450.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **451.** 720π см^3. **452.** 960π см^3. **453.** 4 : 1; 16 : 7. **454.** а) 1080°; б) $360°(n-1)$. **457.** 30°, 60°, 120°, 60°. **469.** 90°, 67,5°, 90°, 112,5°. **447.** 90°. **471.** 1750 см^2. **472.** $\frac{5}{7}$. **473.** 60°. **474.** $\frac{9S}{64}$ или $\frac{9S}{8}$. **475.** 36 см^2. **476.** $\frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$. **477.** $6\sqrt{10}$ см и $9\sqrt{10}$ см или $18\sqrt{10}$ см и $3\sqrt{10}$ см. **478.** 90 см^3. **479.** 34 128 см^3. **480.** 300 см^3. **481.** 1500 см^2, 1800 см^3. **482.** 518,4 см^3. **483.** 13 440 см^3. **484.** а) $770\frac{2}{3}$ см^3; б) 384 см^3. **485.** 448 см^2, 448 см^3. **486.** $\frac{d^2}{8}\left(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$. **487.** 336 см^3, 360 см^2. **488.** $a^2\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\alpha}\right)$. **489.** 1050 см^3. **490.** а) 4 : 3; б) 7 : 12. **491.** 20 см^2, 68 см^2. **492.** $0{,}75S$. **493.** $39\sqrt{7}$ см^3. **494.** 17 640 см^2. **495.** 5 : 8. **496.** $\frac{Q\sqrt{3Q}}{3}$. **497.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{Q^2-(S_1-S_2)^2}$. **498.** $0{,}25\left(3\left|a^2-b^2\right|+\sqrt{3}\left(a^2+b^2\right)\right)$. **499.** $-\frac{a^2\sqrt{2}\cos^2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$ при $\alpha > 45°$ и 0 при $\alpha \leqslant 45°$.

500. $\frac{a^2\sqrt{3}\cos^2\alpha\left(4\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha-2\right)}{\sin^3\alpha\left(3+\cos^2\alpha\right)}$. **501.** а) $\frac{3h^2\sqrt{2}}{4}$; б) 45°. **502.** 888 см^3, 3648 см^3. **503.** 205,2 т. **504.** 56 см, 70 см. **506.** $19{,}5\sqrt{3}$ см^3. **507.** 48 см^3. **508.** $0{,}5\sqrt{a^2+a_1^2+b^2+b_1^2-c^2-c_1^2}$, $0{,}5\sqrt{a^2+a_1^2-b^2-b_1^2+c^2+c_1^2}$, $0{,}5\sqrt{-a^2-a_1^2+b^2+b_1^2+c^2+c_1^2}$. **509.** $0{,}25d$. **510.** 768 см^2. **511.** $\frac{a^2}{2}\left(3+\sqrt{7}\right)$, $\frac{a^2}{2}\left(3+\sqrt{7}+3\sqrt{3}\right)$. **512.** 1395 см^3. **513.** 910 см^3. **514.** 21 см^2. **515.** а) 75 см^2; б) 108 см^2. **519.** $\frac{a\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}{b}$. **520.** $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{8(3+\operatorname{ctg}\alpha)^3}$. **521.** $\frac{2\pi a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{9\sin 2\alpha}$, $\frac{2\pi a^3}{81\sin\alpha\sin 2\alpha}$. **522.** $\frac{4\pi l^4}{4l^2-a^2-b^2}$. **523.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}$. **526.** 32 см^2. **527.** 15°. **528.** 200 см^2. **529.** $0{,}75l$. **530.** $\frac{7l\sqrt{3}}{16}$. **531.** $145\,152\pi$ см^3, 9360π см^2, $11\,664\pi$ см^2. **532.** $1125\pi\sqrt{3}$ см^3, 450π см^2, 675π см^2. **533.** 1000π см^3, $200\pi\sqrt{3}$ см^2, 100π см^2. **534.** 100π см^3, 65π см^2, 90π см^2. **535.** 30°. **536.** 80π см^3. **537.** 1080π см^3, 369π см^2, 450π см^2. **538.** $\frac{500\pi\sqrt{5}}{3}$ см^3. **539.** $\frac{\pi S}{3}\sqrt{S\operatorname{ctg}\alpha}$. **540.** $28\,224\pi$ см^3, 5208π см^2. **541.** $\frac{250\pi\sqrt{3}}{3}$ см^3, 100π см^2. **542.** 247π см^2.

543. 721π см^2. **544.** 1500 см^3, 600π см^2. **545.** $\pi h^2\left(1+\sqrt{2}\right)$. **546.** $\pi l^2 \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$.
547. а) 680π см^2, 900π см^3; б) $194{,}4\pi$ см^2, 1296π см^3. **548.** 1350π см^2, 6300π см^3. **549.** а) Нет; б) да. **550.** а) Нет; б) да. **551.** 36π см^2, 16π см^3. **552.** $\dfrac{3\pi l^2}{7}\left(1+\sqrt{2}\right)$, $\dfrac{\pi l^3\sqrt{21}}{49}$. **553.** 390π см^2. **555.** $38\pi\sqrt{481}$ см^2, 3549π см^3 или $38\pi\sqrt{1241}\pi$ см^2, $\dfrac{304\,307\pi}{3}$ см^3. **556.** 1036π см^2, 7280π см^3.
557. 2288π см^2, $24\,832\pi$ см^3. **558.** 2700 см^2. **559.** $2\pi a^2\left(3\pm 3\cos\alpha+\cos^2\alpha\right)$.
560. $4{,}5l^2\cos\alpha\sin\alpha$. **561.** $0{,}5\pi d^2\cos\alpha\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$. **562.** $\left((b-a)\frac{k}{n}+a\right)^2$, $k = 1, 2, ..., n-1$. **563.** $8\pi+3\sqrt{3}\ :\ 4\pi-3\sqrt{3}$. **567.** $R\sqrt{6}$. **568.** 12,5 см. **570.** 48 см, 60 см, 64 см. **571.** 21 см. **572.** 20 см, 30 см. **573.** 48π см.
574. 80π см. **575.** 11 см или 25 см. **576.** 84 см. **577.** $12\frac{1}{8}$ см. **578.** 60 см.
579. 10 см. **580.** 9 см. **581.** 24π. **582.** 1 : 49. **583.** 75 см^2. **584.** а) 64π см^2; б) $348\frac{4}{9}\pi$ см^2; в) $\dfrac{64\pi}{9}$ см^2; г) 576 см^2. **585.** $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}R$. **586.** $3ab$, $\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.
587. $12R^2\sqrt{3}$. **588.** 8,1 дм. **589.** $\dfrac{h}{3}$. **590.** $\dfrac{21}{16}R^3$. **591.** $\dfrac{\pi\left(h^2+r^2\right)^2}{h^2}$.
592. $\pi r^2\left(7+5\sqrt{2}\right)$. **593.** 3. **594.** $r\left(1-\frac{r}{a}\right)$. **595.** 96π дм^3. **596.** 1254 см^3.
597. 40π дм^3. **598.** $3\pi\left(2\sqrt{6}-1\right)$ см^2. **599.** $2(a^2+ab+b^2)$ см^2, $\dfrac{\sqrt{ab}}{3}(a^2+ab+b^2)$ см^2. **600.** 64 м^3. **601.** $\dfrac{392\pi}{3}$ дм^3. **602.** а) $\dfrac{a^3}{4}$; б) $4{,}5a^3$.
603. $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-1}{n^2}\cdot h$. **604.** 0,48. **605.** $\dfrac{3}{7}$. **606.** $3r$, $\dfrac{r}{3}$. **607.** $\dfrac{r}{5}\left(5\pm\sqrt{13}\right)$.
608. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8}}$. **609.** 608 см^3. **610.** 3136 см^2. **611.** 7 см. **612.** 702 см^2. **613.** 13 см.
614. 17 см. **615.** $2R^3$. **616.** $2\pi a^2$. **617.** $\dfrac{a^2}{2H}$. **618.** а) При $a < H\sqrt{2}$; б) при $a = H\sqrt{2}$; в) при $a > H\sqrt{2}$. **619.** 27 см. **620.** $11\frac{4}{7}$ см. **621.** 30 см.
622. а) $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$; б) $\dfrac{3a^2\sqrt{15}}{16}$. **623.** 3 : 1. **624.** 65. **625.** а) $\dfrac{\sqrt{930}}{3}$; б) $9\sqrt{2}$; в) $\dfrac{7\sqrt{66}}{3}$. **626.** $\dfrac{25\sqrt{73}}{8}$. **627.** $\dfrac{\sqrt{481}}{8}$. **628.** 13 см. **629.** $\dfrac{48\pi R^2}{17}$. **630.** $16\,800\pi$ см^3 или $17\,640\pi$ см^3. **631.** 25 см. **632.** $288\pi\sqrt{13}$ см^2. **633.** а) $\left(17-4\sqrt{13}\right):9$;

б) $\left(47-8\sqrt{31}\right):15$. **634.** 1583 дм^2. **635.** 1 : 3. **636.** 1 : 3. **637.** $a : b$. **638.** 3 : 2. **651.** $\arccos\left(\sqrt{5}-2\right)$. **652.** 320π см^2. **653.** 4550π см^2 или 1950π см^2. **654.** $2\pi R^2\left(1+\cos\frac{180^\circ}{n}\right)$. **655.** 2298π см^2. **656.** $r\left(\sqrt{5}-1\right)$. **657.** $\frac{2}{9}$. **658.** а) $\frac{dR}{R-r}$; б) $\frac{r(b+d)-bR}{\sqrt{d^2-(R-r)^2}}$; в) $\frac{r(b+d)-bR}{\sqrt{d^2-(R+r)^2}}$. **659.** $\sqrt[3]{36\pi V^2}$. **660.** 10 дм, 7 дм. **663.** Увеличилась в $\sqrt[3]{n}$ раз. **664.** $\left(3\sqrt{2}+1\right):2$, 2 : 1. **665.** $3658\frac{1}{3}\pi$ см^3. **666.** $M\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\right)$. **667.** $a\left(\sqrt[3]{1+4\left(\frac{h}{R}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^3}-1\right)$. **668.** $1143\frac{1}{6}\pi$ см^3. **669.** 3280,5 см^3. **670.** 486π см^3. **671.** $\dfrac{n\left(1+\sqrt{5+4\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}\right)}{16\pi\operatorname{tg}^4\frac{180^\circ}{n}}$. **672.** $\dfrac{16n\sin\frac{360^\circ}{n}\sin^4\frac{180^\circ}{n}}{\pi\left(1+4\sin^2\frac{180^\circ}{n}\right)^3}$. **673.** 60°.

676. 4 : 1. **677.** $\frac{500\pi}{81}$ см^3. **678.** 8 м. **679.** $90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$. **680.** Да. **681.** 1008 см^2. **682.** $3\pi R^2$. **683.** $\frac{5\sqrt{97}}{16}$ см. **684.** $\pi R^2\left(1+\sqrt{3}\right)$. **686.** 60°. **687.** a. **690.** $\frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}$. **691.** $\pi R\left(\sqrt{3}-1\right)$. **692.** $\frac{\pi R^2}{2}\left(22+9\sqrt{6}\right)$. **693.** $\frac{\pi H\sqrt{3}}{2}$. **694.** $\left(\sqrt{2}-1\right):1$. **695.** $\frac{784\pi R^3}{375}$. **696.** 90π см^2, $36\pi\sqrt{5}$ см^3. **697.** 3 см. **698.** 266π см^2, $532\pi\sqrt{5}$ см^3. **699.** 4256π см^3. **700.** $9{,}6\pi$ см. **701.** $\frac{n(a+b)^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. **702.** 4,5 см. **703.** $2\pi R^3\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ при $n=3$; $\pi R^3\sqrt{2}$ при $n=4$; $\frac{\pi R^3}{\sqrt{5}}\left(2+\sqrt{2\sqrt{5}-2}\right)$ при $n=5$; $\frac{1}{3}\pi R^3$ при $n=6$. **704.** $\frac{3}{4}\left(6-\sqrt{7}\right)$. **705.** 240π см^2. **707.** 1 : 2. **708.** $\frac{M}{6}\sqrt{\frac{M^2+S^2}{\pi M}}$. **709.** 108π см^2, 216π см^2. **710.** 49 : 4864. **711.** $34\,182\pi$ дм^3. **712.** $14\,094\pi$ дм^3. **713.** $(m^3+3m^2n):(3mn^2+n^3)$. **714.** а) $\frac{11}{16}$; б) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$; в) $\frac{9\sqrt{3}}{16}$. **715.** $2401\frac{1}{3}\pi$ см^3. **716.** 3528π дм^3. **717.** $\frac{2R}{n+1}$, $\frac{2Rn}{n+1}$, $\frac{3n+1}{n^2(n+3)}$. **718.** $\frac{R\left(\sqrt{17}+1\right)}{4}$. **719.** $R\sqrt{0{,}6}$. **720.** ≈853 г. **721.** $138\frac{2}{3}\pi$ см^3; 98π см^2. **724.** $\frac{\pi R^2}{2}\left(\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)$, $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{12}$. **726.** $\frac{\pi a^2}{6}$. **727.** а) $\frac{\pi S}{6}$; б) $\frac{2\pi S\sqrt{3}}{9}$; в) $\frac{2\pi S}{3}$; г) πS; д) $\frac{4\pi S\sqrt{3}}{9}$.

728. а) 3 : 1; б) 9 : 1; в) 3 : 1; г) 2 : 1; д) 4 : 1. **729.** $\frac{19\pi a^2}{9}$. **730.** $\left(7-4\sqrt{3}\right):1$. **731.** 1 : 4. **732.** $24\pi\left(\sqrt{6}-1\right)$ см². **733.** а) $\pi\sqrt{3}:2$; б) $\pi:1$; в) $3\pi\sqrt{3}:2$. **734.** а) $\pi:6$; б) $\pi:3\sqrt{3}$; в) $\pi:6\sqrt{3}$. **735.** $\frac{3s\sqrt{3}}{2\pi}\sqrt{1+\frac{S}{s}}$. **736.** $8R$. **737.** $12R$.

Повторение курса геометрии

744. 90°. **745.** 5 см. **746.** 54°. **747.** 12°. **748.** а) 100°, 55°, 25°; б) 100°, 60°, 20°; в) 100°, 32°, 48°. **750.** $\arcsin 0{,}6$; $\arcsin 0{,}8$. **751.** $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\pi-4\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **752.** 6 см. **757.** $\sqrt{a(a+b)}$; $\sqrt{b(a+b)}$. **758.** 30°, 60°. **760.** $m+n$; $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$; $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. **761.** 15 см, 20 см, 25 см. **762.** $6\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$. **763.** $8+12\sqrt{2}$. **765.** $m\sqrt{2}$. **766.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}c$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}c$. **767.** 5; 12; 13. **768.** 13 см. **769.** $\arcsin 0{,}6$. **770.** $\operatorname{arctg} 3$. **771.** 1 : 2. **772.** 7; 24. **773.** 19; $\arcsin\frac{5\sqrt{3}}{38}$; $\arcsin\frac{8\sqrt{3}}{19}$. **774.** 2 см; $\arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14}$; $\arcsin\frac{1}{7}$. **775.** 75°; $3{,}5\sqrt{6}$; $3{,}5\left(1+\sqrt{3}\right)$. **776.** 3 м, 6 м, 30°, 90°. **777.** 60°. **778.** 90°. **783.** 1. **785.** а) $4n-m$; б) $\frac{1}{3}n$. **786.** 20, 21. **795.** 55°. **796.** 47°. **797.** 32 см. **799.** 67°. **800.** 10. **801.** 128 см. **802.** 96°. **803.** 58 см. **806.** 48 см. **807.** 52°. **808.** 100 см. **809.** 78 см. **810.** $13\sqrt{2}$ см. **811.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. **812.** 0,8. **814.** 14 см и 48 см. **821.** 5 см, 10 см, 5 см. **822.** $\sqrt{3}:4$; 1 : 3. **823.** 54°. **824.** 24 см. **825.** 8 см, 6 см. **826.** 28 см, 20 см. **827.** 57 см. **828.** 32 см. **829.** 60°. **830.** 70 см. **831.** 46 см. **833.** 5 см. **834.** $\frac{3b-a}{2}$ см. **835.** 10 см, 30 см. **841.** $\frac{2r}{9}$. **842.** 60 см. **843.** 31,2 см. **846.** 7,2 см, $21\frac{1}{80}$ см. **847.** $0{,}5\sqrt{a^2+b^2+ab+(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}$. **848.** $2Rr$. **849.** 90°. **850.** 3 см. **851.** $0{,}5a(\sin\alpha+\sin\beta)$, $0{,}5a(\sin\beta-\sin\alpha)$. **852.** $\frac{r}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)$. **866.** 120°. **867.** 13 см. **868.** 24 см. **869.** 14 см, $10\sqrt{3}$ см, $6\sqrt{3}$ см. **870.** $2a$ или $2a\left(3+2\sqrt{2}\right)$. **871.** а) Касались бы внешним образом; б) одна внутри другой; в) пересекались бы; г) одна вне другой. **872.** 12 см. **873.** а) 8 см; б) $16\sqrt{3}$ см и 32 см. **874.** 18°, 63°. **875.** 180°, 100°, 40°, 40°. **876.** 90° или 10°. **877.** 60°. **878.** 12,5 см, 12,5 см. **879.** 1 : 3. **880.** 60°. **881.** 110°, 80°. **882.** 130°, 50°. **883.** 60 см. **884.** 45° – α. **885.** а) 14 см, 6 см, 2 см; б) 22 см, 6 см, 2 см. **886.** 72°. **887.** а) 2α + β > 180°; б) 2α + β < 180°; в) 2α + β = 180°. **888.** 5 см. **889.** 135°, 105°, 45°, 75°. **890.** 6 см, 24 см, 30 см, 12 см. **891.** 14 см, 7 см. **892.** 18 см, 12 см, 20 см. **893.** а) $ma > nb$; б) $ma < nb$; в) $ma = nb$. **894.** $\frac{ab}{a+b}$. **895.** а) 3 : 4; б) 5 : 12; в) $m : n$. **896.** $\frac{a}{3}\sqrt{13+12\cos\alpha}$; $\frac{a}{3}\sqrt{13-12\cos\alpha}$. **897.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}(a^2+ab+b^2)$. **898.** $\frac{b^2}{2a+b}$. **899.** 12 см. **900.** 55 см, 15,3 см^2. **901.** 56 см, 168 см^2. **902.** 2,4 м. **903.** 15 см, 10 см. **904.** а) 56 см или 42 см; б) $62\frac{2}{17}$ см. **905.** $\frac{4}{9}$ см^2 или 4 см^2. **906.** $\frac{mb+na}{m+n}$. **907.** 5 см, 3 см, 2 см. **908.** 4 см, 8 см, 8 см, 4 см. **909.** 12 : 9 : 7. **912.** 12 см или 24 см. **914.** $\frac{|a-b|}{a+b}a$, $\frac{|a-b|}{a+b}b$. **915.** 1 см. **916.** 3 см. **917.** 8 см. **918.** $\frac{2Rr}{R+r}$. **919.** 6 см. **920.** 6 м. **921.** $9\frac{1}{32}$, $3\frac{3}{4}$. **922.** 7 см. **923.** 30°, 60°, 90°. **924.** 40°, 108°, 140°, 72°. **925.** а) $\frac{d}{2}(1+\sin\varphi)$, $\frac{d}{2}(1-\sin\varphi)$; б) $d^2\cos^3\varphi$. **930.** $\frac{\pi r^2(1-\cos\alpha)}{3+4\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha}$. **931.** $\frac{Rh}{2R+h}$. **932.** 84 см^2. **933.** $\frac{41-4\sqrt{91}}{57}$. **934.** 24,5 см, $7(\sqrt{6}-1)$ см. **935.** $R+r\pm\sqrt{r^2-2Rr-r^2}$. **936.** 12 см. **937.** 4 см, $26\frac{9}{16}$ см. **938.** а) $a + b$; б) $|a - b|$. **939.** $a + b - c$. **940.** $|\alpha - \beta|$. **944.** $2\sqrt{\frac{Rr}{R+r}}\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}+\sqrt{R+r}\right)$; $\frac{2Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$. **945.** 6. **946.** $\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$. **949.** 14 см, 18 см или 2 см. **951.** $30\sqrt{1921}$ см^2. **952.** $48\sqrt{20-\sqrt{111}}$ см^2, $48\sqrt{20+\sqrt{111}}$ см^2. **953.** $80\sqrt{170}$ см^2, $\frac{672\sqrt{85}}{17}$ см^2. **954.** 48 см^2. **955.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. **957.** $\frac{3a\sqrt{a^2+2b^2}}{4}$. **958.** 175 см^2, 273 см^2. **959.** 1404 см^2. **960.** $\frac{a\sqrt{10}}{3}$. **961.** $5\sqrt{6}$; arccos 0,2; 6; 12. **962.** 1; arctg $\frac{5}{\sqrt{3}}$; arccos 0,2; $\sqrt{10}$. **963.** 12 см, $12\frac{36}{37}$ см; $36\frac{12}{13}$ см. **964.** $\frac{250}{\pi}$ см^3. **965.** 5 см. **966.** а) M — середина гипотенузы; б) M внутри треугольника; в) M вне треугольника. **971.** Нет. **973.** Окружность с диаметром QR, где R — проекция P на плоскость α. **974.** $\frac{h\sqrt{b^2-h^2}}{b+\sqrt{b^2-h^2}}$.

975. $\frac{\pi R^3}{3}\left(2+3\sqrt{2}\right)$. **976.** а) $\frac{dr}{R-r}$; б) $\frac{2\pi R^2}{d}(d-R+r)$. **977.** $\frac{\sqrt{84}}{3}$ дм. **978.** а) $\arccos\frac{m-n}{m+n}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{mn}}{m-n}$. **979.** $\frac{4}{3}$. **980.** 1 : 2. **981.** $2r\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}$. **982.** $\frac{3}{16}$; $\frac{4}{43}$. **983.** h или $\frac{h}{5}$. **984.** 2 или 0,75. **985.** а) 0,48 см; б) $\frac{72}{85}$ см; в) 1,5 см. **986.** $2\frac{2}{3}$ см. **987.** $\frac{5}{6}$ см. **988.** 45°. **994.** $40^\circ < ASCB < 180^\circ$. **997.** $\frac{|d|}{|\vec{n}|}$. **998.** Центр сферы — такая точка P, что $\overrightarrow{OP}=\vec{a}$, радиус сферы равен $\sqrt{(\vec{a})^2-M}$. **999.** $\frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}+d|}{|\vec{n}|}=\sqrt{(\vec{a})^2-M}$. **1001.** 50 см, 32 см. **1002.** 224 см. **1003.** 1452 м. **1004.** 3,72 см. **1005.** 37 см. **1006.** 6 см или $3\sqrt{14}$ см. **1007.** $\frac{2a^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $\frac{2a^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$, $\frac{2ab}{\sqrt{4a^2-b^2}}$ или $\frac{2b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$, $\frac{2b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$, $\frac{2ab}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **1009.** $1{,}5\sqrt{3}$. **1010.** 13,44 см. **1011.** $\frac{34\sqrt{30}}{3}$ см. **1012.** 65 см. **1013.** $\sqrt{ab}$. **1014.** $\sqrt{3}$, 30°. **1015.** 96 см^2. **1016.** 32 см. **1017.** а) 10 см; б) $\sqrt{133}$ см. **1018.** 540 см^2; 108 см. **1019.** 60 см^2; $9\frac{3}{13}$ см. **1020.** 90°. **1021.** $-2m\operatorname{tg}2\alpha$. **1022.** 2,4 см, $3\frac{1}{3}$ см. **1023.** 12 м, 3 м. **1024.** $\frac{2R}{\sqrt{170}}$, $\frac{12R}{\sqrt{170}}$. **1025.** $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$. **1026.** а) При $a \in$ (23 см; 37 см); б) при a = 37 см; в) при $a \in$ (37 см; 47 см). **1027.** а) 7 см; б) 7 см; в) 5 см; г) 15 см; д) 7 см и 8 см; е) $5\sqrt{3}$ см или $8\sqrt{3}$ см; ж) $6\sqrt{2}$ см или $\sqrt{2}$ см. **1028.** 65 см. **1029.** 120°. **1030.** 33,6 см. **1031.** 52 см. **1032.** 2 см. **1033.** 7 см. **1035.** 15 см или 23,4 см. **1036.** 60 см. **1037.** 6 см и 8 см. **1038.** 12 см^2. **1039.** 14 см. **1040.** $\frac{ab}{a+b}$. **1041.** а) Нет; б) да. **1042.** 192 см^2. **1043.** а) 60 см^2; б) $17\frac{1}{3}$ см^2; в) 3,5 см^2. **1044.** 25 см. **1045.** а) 270 см^2; б) 36 см^2; в) 960 см^2; г) 72 см^2. **1046.** а) 6 см, 12 см, 14 см; б) 8 см, 26 см, 30 см; в) 3 см, 4 см, 5 см. **1047.** а) 30 см; б) 21 см или 9 см. **1048.** 12 см, 27 см. **1049.** $2(R^2+a^2)$. **1050.** $2Ra$. **1051.** $\frac{2m\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\sin2\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **1052.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **1056.** $\frac{24\sqrt{30}}{17}$; $1{,}5\sqrt{21}$; $1{,}6\sqrt{14}$. **1057.** а) 1 : 1; б) 5 : 3.

1058. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{7}{30}$. **1059.** $3a^2\sqrt{3}$. **1060.** $0{,}5\sqrt{m^2-4S}$. **1061.** 4 см или 3 см. **1062.** $h^2\operatorname{ctg}\alpha$. **1063.** 84 см^2. **1064.** Если одно основание трапеции — b м, то другое — $(50 - b)$ м. **1065.** Не менее 12 см. **1066.** $\frac{2ab+b^2}{4a}\sqrt{3a^2-2ab-b^2}$. **1067.** 546 см^2, $\sqrt{1621}$ см. **1068.** $\frac{2S}{P}$. **1069.** 120 см^2. **1070.** $0{,}2S$. **1071.** 2 : 7. **1072.** 36 см, 24 см, 18 см. **1073.** 14 см. **1074.** $11\frac{11}{13}$ см или $\frac{8}{9}$ см. **1075.** 12 см или 18 см. **1076.** $\frac{1}{6}$. **1077.** $11\frac{3}{7}$ см, $\frac{352\sqrt{5}}{147}$ см^2. **1078.** 7 см. **1079.** $0{,}5\sqrt{47}$. **1080.** $0{,}5\left(\sqrt{d_1^2-h^2}+\sqrt{d_2^2-h^2}\right)$. **1081.** $R^2\left(4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi\right)$. **1082.** $\frac{R^2}{27}(3\sqrt{3}-\pi)$. **1083.** $0{,}5-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. **1084.** $\frac{2}{\sqrt{3}}-1$. **1087.** $\sqrt{2}:(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **1088.** $\frac{\sqrt{3}}{3}R$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}R$. **1089.** 8 м^2, 42 м^2, 112 м^2 или 32 м^2, 66 м^2, 64 м^2. **1091.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b}}$. **1092.** $\sqrt{4b^2-3a^2}$, $\sqrt{3b^2-2a^2}$. **1093.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **1094.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ см^2. **1095.** $\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\sqrt{a^2-b^2}$; $\frac{k^2}{\sqrt{k^2+1}}\sqrt{a^2-b^2}$. **1096.** $\sqrt{a(a-2b)}$. **1097.** b при $a \leqslant b$; $\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{3}}$ при $a > b$. **1098.** $\frac{1}{4}\sqrt{4d_1^2d_2^2-(d_1^2+d_2^2)\sin^2\varphi}$. **1099.** $\frac{2}{3}a$. **1100.** $18\sqrt{2}$. **1101.** 1 : 23. **1102.** 144 см^3. **1103.** а) a; б) 60°, 120°; в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; г) a^2, $a^2\sqrt{3}$; д) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **1104.** 5940 см^2, 14 850 см^3. **1105.** $\frac{Q}{a}\operatorname{ctg}\alpha$. **1106.** $\frac{a\sqrt{10}}{3}$. **1107.** $4\sqrt{11}-12$. **1108.** 182 см^2. **1109.** 48 см^2. **1110.** $0{,}75a\sqrt{a^2+2b^2}$. **1111.** а) $Q(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{2})$; б) $Q(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{2})+\frac{2Q^2(2+\sqrt{3})}{3h^2}$; в) $\frac{Q^2(2+\sqrt{3})}{3h}$. **1112.** а) 36 см^2; б) $12(3+\sqrt{3})$ см^2; в) 12 см^2, $6\sqrt{3}$ см^2; г) $12\sqrt{3}$ см^3. **1113.** a^3, b^3. **1114.** $\frac{m^3V}{m^3+n^3}$, $\frac{n^3V}{m^3+n^3}$. **1115.** $24\sqrt{17}$ см^2; $24\sqrt{65}$ см^2. **1116.** $100\sqrt{\frac{89}{85}}$ см^2; $80\sqrt{89}$ см^2. **1117.** 90 см^3. **1118.** 120° и 60°. **1119.** 1500 см^3. **1120.** $3Q\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{Q^3}{2\sqrt{2}}}$. **1121.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **1122.** 2016 см^2. **1123.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **1124.** 198 см^2. **1125.** $3h\left(a-\sqrt{b^2-h^2}\right)$. **1126.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+2Q\sqrt{3}$. **1127.** $18(10+\sqrt{3})$ см^2 или $180+\frac{25\sqrt{3}}{8}$ см^2. **1128.** $300(5+2\sqrt{13})$ см^2. **1129.** 4300 см^2.

1130. $22+\frac{35\sqrt{10}}{8}$ см^2. **1131.** $6H^2$; $2H^2(3+\sqrt{3})$. **1132.** $(a+b)\sqrt{4H^2+(a-b)^2}$. **1133.** 14 800 см^2, 504 000 см^3. **1134.** 3360 см^2, 7024,64 см^3. **1135.** $\frac{a+b}{4}\left(4c+\sqrt{4c^2+3(a-b)^2}\right)$. **1136.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a(2b^2-a^2)}{2b+a}}$. **1137.** $H\sqrt{\frac{n-1}{n}}$, $H\sqrt{\frac{n-2}{n}}$, ..., $H\sqrt{\frac{1}{n}}$. **1138.** $\frac{16d^2H^3}{3(H^2-d^2)}$. **1139.** $\frac{a\sqrt{16S^2-3a^4}}{4}$. **1140.** $\frac{4H^3(2-k^2)}{3k^2}$. **1141.** $0{,}5\sqrt[3]{3V}$. **1142.** 752,64 см^3. **1143.** 1024 см^3. **1144.** 324 см^3. **1145.** 960 см^3. **1146.** $\frac{32\,000\pi}{3}$ см^3. **1147.** $\approx 3{,}13$ см. **1148.** $12{,}96\pi$ м^2. **1149.** 18π см^3. **1150.** 812,16 м^2. **1151.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **1152.** $64\pi : 27$. **1153.** 3480 см^2, 11 600 см^3. **1154.** $\arccos\frac{a^2+b^2+n^2-m^2}{2ab}$. **1155.** $\frac{\cos\varphi}{1-\cos\varphi}$. **1156.** $\frac{h}{\sqrt{-\cos 2\varphi}}$. **1157.** $4S$. **1158.** $\frac{S\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta}{\pi\sin\alpha}$. **1159.** $\frac{a\sin\alpha}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)}$. **1161.** 7 : 20. **1162.** $\frac{340\pi}{3}$ дм^3, 172π дм^2. **1163.** $2\pi R^2$, $\frac{5\pi}{12}R^3$. **1164.** $4\arccos\frac{\sqrt{34}+\sqrt{2}}{8}$. **1165.** $4\operatorname{arctg}\sqrt{1{,}5}$. **1171.** а) $M(-6; 3; -2)$; б) $M(2; -1; -6)$. **1172.** $D(4; -1; 6)$. **1174.** $D(1; 4; -1)$. **1175.** а) $\frac{50}{17}$; 5; $4\sqrt{29}$; б) $\frac{79}{\sqrt{337}}$; 6,2; 2,6. **1176.** а) $3\sqrt{2}$; $\sqrt{26}$; 6; $\frac{7\sqrt{2}}{18}$; $\frac{2\sqrt{13}}{39}$; $\frac{11\sqrt{26}}{78}$; б) 7; $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\frac{\sqrt{30}}{18}$. **1177.** а) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=14$; б) $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=18$. **1178.** $m=-3$, $n=-0{,}5$, $l=-5$. **1179.** а) $2x-2y+4z+1=0$; б) $x-2y+4z-5=0$. **1180.** $(-0{,}5; -0{,}5; 0)$. **1181.** а) $m=-8$, $n=-5$; б) $m=-21$, $n=-15$. **1182.** $\vec{a}=(2; 1; -1)k$. **1183.** а) $7x-5y+5z-2=0$; б) $11x-8y+8z-5=0$. **1184.** а) $(-9; -2; 0)$, $(-4; 0; -1)$, $(0; 1{,}6; -1{,}8)$; б) $(-1; 5; 0)$, $(1{,}5; 0; 2{,}5)$, $(0; 3; 1)$. **1186.** а) $3x+2y+7z+4=0$; б) $3x+2y+7z-1=0$. **1187.** а) $\sqrt{206}$; б) $2\sqrt{42}$. **1188.** а) $\left(2+\frac{6}{\sqrt{14}}; 1+\frac{5}{\sqrt{14}}; 2+\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$; $\left(2-\frac{6}{\sqrt{14}}; 1-\frac{5}{\sqrt{14}}; 2-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$; б) $\left(\frac{\sqrt{14}}{7}; -1+\frac{2\sqrt{14}}{7}; \frac{4\sqrt{14}}{7}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{14}}{7}; -1-\frac{2\sqrt{14}}{7}; -\frac{4\sqrt{14}}{7}\right)$.

1189. (7; 7; 7), 7 или (13; 13; 13), 13. **1193.** $2x+3y+2z-6=0$. **1194.** $2x+y-3z+1=0$. **1195.** а) $3x+2y+6z-6=0$;

б) $6x - 3y - 2z - 6 = 0$. **1196.** а) $3x - y - 6 = 0$; б) $x - z - 1 = 0$; в) $y - 3z + 3 = 0$. **1197.** а) $2x + 5y - z + 4 = 0$; б) $x + 7y - 5z + 11 = 0$. **1198.** а) $x - y - z + 1 = 0$; б) $x - y - z - 2 = 0$. **1199.** а) $(-2; -1; -2)$; б) $(1; 0; -4)$. **1200.** а) $(2; -2; -6)$; б) $(-1; 1; 3)$. **1201.** а) $90°$; б) $\arcsin \frac{1}{3}$.

1203. $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - R^2}$.

1204. $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = (R_1 \pm R_2)^2$. **1219.** $1 : 4$. **1248.** $2nR^2$.

1253. а) $\overrightarrow{CM} = \dfrac{a^2 \cdot \overrightarrow{CA} + b^2 \cdot \overrightarrow{CB}}{a^2 + b^2}$; б) $\overrightarrow{CM} = \dfrac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2b} \cdot \overrightarrow{CA} + \dfrac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2a} \cdot \overrightarrow{CB}$.

1255. $\overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OA} + (1 - k)\overrightarrow{OB}$, где $k = \dfrac{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})}{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2}$.

1256. $\cos(\angle A - \angle B) + \cos \angle C = 1$. **1265.** а) $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$;

б) $\cos\psi = \dfrac{1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$. **1271.** а) Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен $\dfrac{1}{2AB \cdot CD}(BC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2)$;

б) $\frac{1}{3}(DA^2 + DB^2 + DC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

1273. $AM : MB = 2 : 5$, $CN : ND = 3 : 4$. **1274.** Если D — высота пирамиды $ABCD$, то $\overrightarrow{DK} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DB} + z\overrightarrow{DC}$, $x + y + z = 1$, $\overrightarrow{DK} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DK} \perp \overrightarrow{AC}$. Из трех последних условий находятся x, y, z, затем $\overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{DK}| = \sqrt{(\overrightarrow{DK})^2}$.

СОДЕРЖАНИЕ

10 КЛАСС

11 КЛАСС

Повторение курса геометрии

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич

Сборник задач по геометрии

Учебное пособие для 10—11 классов
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения
(базовый и повышенный уровни)

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*.
Художественный редактор *О. Н. Карпович*.
Техническое редактирование и компьютерная верстка *Г. А. Дудко*.
Корректоры *О. С. Козицкая, Е. П. Тхир, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 08.11.2021. Формат $70 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,04. Уч.-изд. л. 10,0.
Тираж 65 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 10.09.2018.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			